Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Vol. 10 (1991) 4, 541–550

Über den p-Modul eines mehrfach zusammenhängenden Vierecks und quasikonforme Abbildungen

S. Kirsch

Two principles of variation to characterize univalent p^{-1}-analytical functions, which map a manifold connected quatrilateral on a certain rectangle with horizontal slits, are derived. Several connections between these quasiconformal mappings for various p are concluded.

Key words: *Quasiconformal mappings, p-modul of a quatrilateral with holes, variational inequalities*
AMS subject classification: 30 C

§1. Einleitung

In der z-Ebene, $z = x + \mathrm{i}y$, sei ein beschränktes, von stückweise glatten Jordan-Kurven berandetes Gebiet G gegeben, welches außen von der doppelpunktfreien Kurve Γ und innen von endlich vielen weiteren Kurven $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$, deren Gesamtheit γ sei, berandet wird. Auf Γ seien vier verschiedene Punkte $P_1, \ldots, P_4$ in mathematisch positiver Orientierung ausgezeichnet, die Γ in aufeinanderfolgende Bögen $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_4$ zerlegen. Das Gebiet G läßt sich als "gelöchertes" topologisches Viereck mit den Ecken $P_1, \ldots, P_4$ auffassen.

Sei $p \geq 1$ eine in G definierte, meßbare und beschränkte Funktion. Weiter bezeichne A_p die Gesamtheit aller quasikonformen Abbildungen $W = U + \mathrm{i}V$ von G, d.h. aller orientierungserhaltenden Homöomorphismen, die

1. in G quadratisch integrierbare verallgemeinerte Ableitungen

$$W_z = \tfrac{1}{2}(W_x - \mathrm{i}W_y) \quad \text{und} \quad W_{\bar{z}} = \tfrac{1}{2}(W_x + \mathrm{i}W_y)$$

besitzen und fast überall, d.h. bis auf eine Menge vom zweidimensionalem Lebesgueschen Maß Null, in G der Ungleichung

$$|W_{\bar{z}}| \leq {}^{(p-1)}\!/_{(p+1)} |W_z| \tag{1}$$

genügen, und bei denen

2. als Bild ein Gebiet erscheint, dessen äußerer Rand mit dem Rand eines gewissen Rechteckes $\{(U,V): 0 < U < 1,\ 0 < V < h'\}$ zusammenfällt, wobei dessen Ecken $P_1, \ldots, P_4$ den Ecken $W_1 = \mathrm{i}h'$, $W_2 = 0$, $W_3 = 1$, $W_4 = 1 + \mathrm{i}h'$ paarweise entsprechen.

Mit $w = u + \mathrm{i}v$ bezeichnen wir diejenige Abbildungsfunktion aus A_p, die die Beziehung

$$w_{\bar{z}} = {}^{(p-1)}\!/_{(p+1)} \overline{w_z} \tag{2}$$

bzw., in reeller Schreibweise, die beiden Beziehungen

$$u_x = p\, v_y \quad \text{und} \quad u_y = -p\, v_x \tag{3}$$

fast überall im Gebiet G erfüllt und eine quasikonforme Abbildung von G auf ein horizontal geschlitztes Rechteck $\{(u,v): 0 < u < 1,\ 0 < v < h_p\}$ vermittelt. Die Unität von w ergibt sich übrigens auch aus Satz 1. Die sich einstellende Größe h_p bezeichnen wir als p-Modul von G.

Zunächst werden zwei mit dem Dirichletschen Prinzip zusammenhängende Extremalprinzipien hergeleitet, die die Abbildungsfunktion w und den zugehörigen p-Modul von G charakterisieren. Beweistechnisch folgen wir [13], wo u.a. diese beiden Extremalprinzipien für den Fall $\gamma = \Phi$ fomuliert wurden. Unter einschneidenden Voraussetzungen über p und für speziellere Klassen von Testfunktionen findet man letztere aber auch schon in [7].

Mit Hilfe des Extremalprinzips (4) wird das Extremalproblem

$$h' \to \min_{W \in \Lambda_p}$$

gelöst, das für den Fall $\gamma = \Phi$ auf O. Teichmüller [12] zurückgeht und in zahlreichen Arbeiten behandelt wurde (vgl. dazu die in [7] angegebene Literatur sowie [2]). Das Extremalproblem und auch einige andere Folgerungen lassen sich natürlich auch mittels verallgemeinerter Grötzschscher Flächenstreifenmethode bzw. der hiermit eng zusammenhängenden Methode der extremalen Länge einer Kurvenschar behandeln.

Insbesondere erhalten wir als Folgerung Variationsungleichungen, die Beziehungen zwischen den Extremalabbildungen w zu verschiedenen meßbaren und beschränkten Funktionen p herstellen. Diese Variationsungleichungen (Satz 3) und die anschließenden Folgerungen sind den in [6: Satz 2, Folgerung 2] hergeleiteten Beziehungen bei einem anderem Funktional sehr ähnlich, wobei mit Satz 4 eine gewisse Präzisierung von Folgerung (30) gegeben wird. Die erhaltenen Variationsungleichungen gestatten es, Extremalprobleme in gewissen Klassen im Mittel quasikonformer Abbildungen zu studieren (vgl. [3, 8]).

§2. Extremalprinzipien

Wie üblich bezeichne $W_2^1(G)$ den Sobolevschen Raum aller in G meßbaren reellwertigen Funktionen f, die nebst ihren verallgemeinerten Ableitungen f_x und f_y über G quadratisch integrierbar sind. Wir betrachten noch folgende Teilräume von $W_2^1(G)$:

$$K_1(G) = \left\{f \in W_2^1(G)\colon\ f = 0 \text{ auf } \Gamma_1 \text{ und } f = 1 \text{ auf } \Gamma_3\right\}$$

$$K_2(G) = \left\{f \in W_2^1(G)\colon\ f = 0 \text{ auf } \Gamma_2 \text{ und } f = 1 \text{ auf } \Gamma_4 \text{ sowie } f \text{ konstant auf } \gamma_1, \dots, \gamma_k\right\}.$$

Da die Funktionen aus $W_2^1(G)$ i.a. nicht stetig auf $G \cup \Gamma \cup \gamma$ fortgesetzt werden können, sind die Randwerte im verallgemeinerten Sinne zu verstehen. Offensichtlich gelten die Inklusionen $u \in K_1(G)$ und $v/h_p \in K_2(G)$.

Satz 1: *Es gelten stets die Beziehungen*

$$h_p \le \iint_G p^{-1} |\nabla f|^2 dx\,dy \quad \text{für alle } f \in K_1(G) \tag{4}$$

und

$$h_p^{-1} \le \iint_G p\, |\nabla f|^2 dx\,dy \quad \text{für alle } f \in K_2(G). \tag{5}$$

Das Gleichheitszeichen in (4) *und* (5) *steht genau für* $f = u$ *bzw. für* $f = v/h_p$.

Es sei hier angemerkt, daß die Dualität der Optimierungsaufgaben (4) und (5), die formal in der Vertauschung der Rolle der Paare "gegenüberliegender" Seiten des "gelöcherten" topologischen Vierecks G und der Ersetzung von p durch p^{-1} zum Ausdruck kommt, sich im Falle $\gamma = \Phi$ in ein von R.T. Rockafeller und W. Fenchel entwickeltes Dualitätskonzept der konvexen Optimierung einordnet, das auf einer Störung der primalen Optimierungsaufgabe (4) und der Verwendung konjugierter Funktionale basiert (vgl. [1: S. 55 und S. 91ff.]).

Beweis von Satz 1: Aus Analogiegründen beschränken wir uns nur auf den Beweis von (4). Für die Funktionaldeterminante J von $w = u + iv$ gilt wegen (3) die Beziehung $J = u_x v_y - u_y v_x = p^{-1}|\nabla u|^2$, so daß

$$\iint_G p^{-1}|\nabla u|^2 dx\,dy = \iint_G J\,dx\,dy = h_p \tag{6}$$

ist. Weiter gilt

$$I = \iint_G p^{-1}\nabla u\,\nabla f\,dx\,dy = 0 \quad \forall\, f \in K_0(G) = \{f \in W_2^1(G)\colon f = 0 \text{ auf } \Gamma_1 \cup \Gamma_3\}. \tag{7}$$

Das sieht man folgendermaßen ein. Aus (3) folgt zunächst

$$I = \iint_G (v_y f_x - v_x f_y)\,dx\,dy. \tag{8}$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, daß f der Menge aller in $\bar{G}$ erklärten, reellwertigen und zweimal stetig partiell differenzierbaren Funktionen mit $(\operatorname{supp} f) \cap (\Gamma_1 \cup \Gamma_3) = \Phi$ angehört, die dicht in $K_0(G)$ liegt. Mittels partieller Integration erhalten wir dann

$$I = \iint_G v(f_{yx} - f_{xy})\,dx\,dy - \int_{\Gamma\cup\gamma} v\,\partial f/\partial s\,ds, \tag{9}$$

wobei das erste Integral ersichtlich verschwindet. Da v jeweils konstant auf Γ_2, Γ_4 und $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ und $f = 0$ auf $\Gamma_1 \cup \Gamma_3$ ist, gilt somit (7). Für jedes $f \in K_1(G)$ ist $f - u \in K_0(G)$. In Verbindung mit (6) und (7) ergibt das

$$\iint_G p^{-1}|\nabla f|^2 dx\,dy = \iint_G p^{-1}|\nabla(f-u)|^2 dx\,dy + \iint_G p^{-1}|\nabla u|^2 dx\,dy \ge h_p,$$

was (4) beweist. Das Gleiheitszeichen kann in (4) offenbar nur im Falle $f = u$ stehen ∎

§ 3 Folgerungen und Bemerkungen

Setzt man in (4) und (5) zulässige Funktionen ein, so erhält man obere und untere Schranken für den p-Modul von G. Sei jetzt G dergestallt, daß Γ mit dem Rand eines Rechtecks $R = \{(x,y)\colon 0 < x < 1 \text{ und } 0 < y < h\}$ zusammenfällt und $\gamma \subset \{(x,y)\colon 0 < \underline{h} \le y \le \bar{h} < h\}$ gilt. Schreibt man das Integral in (4) in der Form

$$\iint_R \rho|\nabla f|^2 dx\,dy \tag{10}$$

mit

$$\rho = \begin{cases} 1/p(x) & \text{für } x \in G \\ 0 & \text{für } x \in R\setminus G, \end{cases} \tag{11}$$

und fragt wie in [7] nach seinem Minimum unter allen $f \in K_1(R) \subset K_1(G)$, die nur von der Variablen x abhängen, so wird man über die Integration der für f entstehenden Eulerschen Differentialgleichung auf die Beziehung

$$f(x) = \int_0^x \rho_0^{-1}dx \Big/ \int_0^1 \rho_0^{-1}dx \quad (x \in [0,1]) \quad \text{mit } \rho_0 = \int_0^h \rho\,dy \tag{12}$$

geführt.

Analog kann mit (5) verfahren werden. Schreibt man das Integral in (5) in der Form

$$\iint_R \sigma|\nabla f|^2 dx\,dy \tag{13}$$

mit

$$\sigma = \begin{cases} p(z) & \text{für } z \in G \\ 0 & \text{für } z \in R \setminus G \end{cases} \tag{14}$$

und fragt nach seinem Minimum unter allen Funktionen $f \in K_2(R) \subset K_2(G)$, die nur von der Variablen y abhängen und auf $[\underline{h}, \overline{h}]$ konstant sind, so wird man jetzt über die Integration der für $f = f(y)$ entstehenden Eulerschen Differentialgleichung auf die Beziehung

$$f(y) = \left| \begin{array}{ll} \lambda\int_0^y \sigma_0^{-1}\, dy & \text{für } y \in [0, \underline{h}] \\ \lambda\int_0^{\underline{h}} \sigma_0^{-1}\, dy & \text{für } y \in [\underline{h}, \overline{h}] \\ 1 - \lambda\int_y^h \sigma_0^{-1}\, dy & \text{für } y \in [\overline{h}, h] \end{array} \right. \tag{15}$$

mit

$$\lambda^{-1} = \int_0^{\underline{h}} \sigma_0^{-1}\, dy + \int_{\overline{h}}^h \sigma_0^{-1}\, dy \quad \text{und} \quad \sigma_0(y) = \int_0^1 p\, dx \ \text{ für } y \in [0, h] \setminus (\underline{h}, \overline{h})$$

geführt.

Setzt man die Funktionen (12) und (15) entsprechend in (10) bzw. (13) ein, so erhalten wir aus (4) und (5) die

Folgerung 1: *Das Gebiet G genüge den zu Beginn dieses Abschnittes gemachten Voraussetzungen. Dann gilt die Ungleichung*

$$\int_0^{\underline{h}} \left(\int_0^1 p\, dx \right)^{-1} dy + \int_{\overline{h}}^h \left(\int_0^1 p\, dx \right)^{-1} dy \le h_p \le 1 \Big/ \int_0^1 \left(\int_0^h \rho\, dy \right)^{-1} dx \tag{16}$$

mit der in (11) *erklärten Funktion* ρ. *Die Integration versteht sich dabei jeweils längs achsenparalleler Strecken.*

Für den Fall $\gamma = \Phi$ ist (16) schon bekannt (vgl. [7: Formel (23)] und die dort zitierte Literatur).

Man kann nun in (4) und analog in (5) weitere spezielle Ansätze für zulässige Funktionen f machen. Dazu setze man z.B. $f = y\, a(x) + c(x) \in K_1(R) \subset K_1(G)$ in (10) ein und vergrößere (10) dadurch, daß man $a^2(x)$ durch den Ausdruck auf der rechten Seite der Ungleichung

$$a^2(x) \le \left(\int_0^x a'(x)\, dx \right)^2 \le \left(\int_0^1 \rho_2\, a'^2(x)\, dx \right) \left(\int_0^1 \rho_2^{-1}\, dx \right), \quad x \in [0,1]$$

mit $a(0) = 0$ und $\rho_2(x) = \int_0^h y^2 \rho\, dy$ ersetzt. Wird nun das nach dieser Vergrößerung von (10) erhaltene Integral minimiert, und zwar zunächst bezüglich aller Funktionen $c = c(x)$ mit $c(0) = 0 = c(1) - 1$ und anschließend bezüglich aller Funktionen $a = a(x)$ mit $a(0) = 0 = a(1)$, so erhält man durch Einsetzen der Lösungen der zugehörigen Eulerschen Differentialgleichung für a und c in dieses Integral eine Verschärfung der rechten Ungleichung in (16) für den Fall $\rho_1/\rho_0 \neq$ const, und zwar

$$h_p \le 1 \Big/ \int_0^1 \rho_0^{-1} dx - A \tag{17}$$

mit

$$A = \frac{\left(\int_0^1 \rho_0^{-2} \rho_1^2 \rho_2^{-1} dx \right) \left(\int_0^1 \rho_2^{-1}\, dx \right) - \left(\int_0^1 \rho_0^{-1} \rho_1 \rho_2^{-1} dx \right)^2}{\left(\int_0^1 \rho_0^{-1} dx \right)^2 \left(\int_0^1 \rho_2^{-1}\, dx \right) \left(1 + \left(\int_0^1 \rho_0\, dx \right) \left(\int_0^1 \rho_2^{-1}\, dx \right) \right)} \ge 0$$

$\rho_i(x) = \int_0^h y^{\,i}\rho\, dy$ $(i = 0,1,2)$ und in (11) erklärter Funktion ρ. Die Integration versteht sich dabei jeweils längs achsenparalleler Strecken.

Die Extremalprinzipien (4) und (5) gestatten weiter Aussagen über die Monotonie von h_p bezüglich des Gebietes. Wegen

$K_1(G) \subset K_1(G^0)$ im Falle $G \supset G^0$, $\Gamma_1 \supseteq \Gamma_1^0$ und $\Gamma_3 \supseteq \Gamma_3^0$,

$K_2(G) \subset K_2(G^0)$ im Falle $G \supset G^0$, $\Gamma_2 \supseteq \Gamma_2^0$ und $\Gamma_4 \supseteq \Gamma_4^0$ sowie $\gamma = \gamma^0$

erhalten wir in Verbindung mit (4) und (5) die

Folgerung 2: *Seien G und G^0 zwei den Voraussetzungen von Abschnitt 1 sowie den Relationen $G \supset G^0$ und $G \setminus G^0 \neq \emptyset$ genügende Gebiete. Dann ist*

$$h_p(G) > h_p(G^0) \text{ für den Fall } \Gamma_1 \supseteq \Gamma_1^0 \text{ und } \Gamma_3 \supseteq \Gamma_3^0 \tag{18}$$

und

$$h_p(G) < h_p(G^0) \text{ für den Fall } \Gamma_2 \supseteq \Gamma_2^0 \text{ und } \Gamma_4 \supseteq \Gamma_4^0 \text{ sowie } \gamma = \gamma^0. \tag{19}$$

Bezeichnet $J = |W_z|^2 - |W_{\bar z}|^2$ die Funktionaldeterminante einer beliebigen Abbildungsfunktion $W = U + iV \in A_p$, so gilt wegen der Inklusion $U \in K_1(G)$ und der Ungleichung (1) die Abschätzung

$$\begin{aligned} h_p &\le \iint_G p^{-1}|\nabla U|^2 dx\,dy = \iint_G p^{-1}|W_{\bar z} + \overline{W_z}|^2 dx\,dy \\ &\le \iint_G p^{-1}(|W_{\bar z}| + |\overline{W_z}|)^2 dx\,dy = \iint_G J\, dx\,dy \le h'. \end{aligned} \tag{20}$$

Offenbar ist $h_p = h'$ genau dann, wenn W fast überall in G das System (2) bzw. (3) erfüllt und $U = u$, also $W = w$ gilt. Damit ist der folgende Satz bewiesen.

Satz 2: *Unter allen Abbildungen $W \in A_p$ fällt das Funktional h' genau für $W = w$ minimal aus.*

In [4] wurde das Extremalproblem $h' \to \min$ für den Fall $\gamma = \emptyset$ in einer Teilklasse von A_p glatter quasikonformer Abbildungen gelöst, bei dem eine einparametrige Kurvenschar variiert.

Es sei jetzt noch eine zweite, den Voraussetzungen von Abschnitt 1 genügende Funktion $\mathfrak{p}$ gegeben. Dazu sei $\mathfrak{w} = \mathfrak{u} + i\mathfrak{v}$ diejenige Abbildung, die analog zu $w = u + iv$ definiert wird, wobei p durch $\mathfrak{p}$ zu ersetzen ist. Unter Berücksichtigung von (3), (6) und (7), wobei dort $f = u - \mathfrak{u} \in K_0(G)$ gesetzt wird, gilt

$$\begin{aligned} 0 &\le \iint_G p|\nabla(v - \mathfrak{v})|^2 dx\,dy = \iint_G p|\nabla u/p - \nabla\mathfrak{u}/\mathfrak{p}|^2 dx\,dy \\ &= \iint_G p^{-1}|\nabla u|^2 dx\,dy - 2\iint_G \mathfrak{p}^{-1}\nabla\mathfrak{u}\,\nabla u\, dx\,dy + \iint_G p|\nabla\mathfrak{u}|^2/\mathfrak{p}^2 dx\,dy \\ &= \iint_G p^{-1}|\nabla u|^2 dx\,dy - 2\iint_G \mathfrak{p}^{-1}|\nabla\mathfrak{u}|^2 dx\,dy + \iint_G p|\nabla\mathfrak{u}|^2/\mathfrak{p}^2 dx\,dy \\ &= h_p - h_{\mathfrak{p}} - \iint_G (\mathfrak{p} - p)|\nabla\mathfrak{u}|^2/\mathfrak{p}^2 dx\,dy. \end{aligned} \tag{21}$$

Analoge Überlegungen führen auf

$$0 \le \iint_G p^{-1}|\nabla(u - \mathfrak{u})|^2 dx\,dy$$

$$\begin{aligned}&=\iint_G p^{-1}|\nabla u|^2\,dx\,dy - 2\iint_G p^{-1}\,\nabla u\,\nabla\mathfrak{u}\,dx\,dy + \iint_G p^{-1}|\nabla\mathfrak{u}|^2\,dx\,dy\\ &=\iint_G p^{-1}|\nabla u|^2\,dx\,dy - 2\iint_G p^{-1}|\nabla u|^2\,dx\,dy + \iint_G p^{-1}|\nabla\mathfrak{u}|^2\,dx\,dy\\ &= h_{\mathfrak{p}} - h_p + \iint_G (\mathfrak{p}-p)|\nabla\mathfrak{u}|^2/(\mathfrak{p}p)\,dx\,dy\,.\end{aligned} \tag{22}$$

Vertauscht man noch in (21) und (22) die Rollen von w und $\mathfrak{w}$, so erhalten wir zusammenfassend den folgenden Satz.

Satz 3: *Für die zu den Abbildungen w und $\mathfrak{w}$ gehörenden Moduln h_p und $h_{\mathfrak{p}}$ gelten die Abschätzungen*

$$\iint_G (\mathfrak{p}-p)|\nabla\mathfrak{u}|^2/\mathfrak{p}^2\,dx\,dy \le h_p - h_{\mathfrak{p}} \le \iint_G (\mathfrak{p}-p)|\nabla u|^2/p^2\,dx\,dy \tag{23}$$

und

$$\iint_G (\mathfrak{p}-p)|\nabla u|^2/(p\mathfrak{p})\,dx\,dy \le h_p - h_{\mathfrak{p}} \le \iint_G (\mathfrak{p}-p)|\nabla\mathfrak{u}|^2/(\mathfrak{p}p)\,dx\,dy\,, \tag{24}$$

wobei die Gleichheitszeichen in (23) *und* (24) *genau für $v=\mathfrak{v}$* bzw. *$u=\mathfrak{u}$ stehen.*

Für hinreichend glatte Funktionen p und $\mathfrak{p}$ ist die rechte Ungleichung von (23) zuerst in [8 : S. 204] angegeben worden.

Im folgenden setzen wir $p=Q\ge 1$ und $\mathfrak{p}=\mathfrak{Q}\ge 1$, $Q\ne\mathfrak{Q}$ innerhalb einer Lebesgue-meßbaren Menge $\mathfrak{G}\subseteq G$ und $p=\mathfrak{p}\ge 1$ in $G\setminus\mathfrak{G}$. Die Ungleichungen (23) und (24) werden dann besonders einfach. Die Abbildung w hängt dann vom Parameter Q ab, und wir schreiben $w=w_Q=u_Q+iv_Q$, $h_p=h(Q)$. Ist das Lebesguesche Maß von $w_Q(\mathfrak{G})$ und $w_q(\mathfrak{G})$ gleich $I(Q)$ bzw. $I(\mathfrak{Q})$, dann ergibt sich aus Satz 3 die

Folgerung 3: *Es gelten für $\mathfrak{Q}>Q$ die Abschätzungen*

$$I(\mathfrak{Q})/\mathfrak{Q} \le -\bigl(h(Q)-h(\mathfrak{Q})\bigr)\big/(Q-\mathfrak{Q}) \le I(Q)/Q \tag{25}$$

und

$$I(Q)/\mathfrak{Q} \le -\bigl(h(Q)-h(\mathfrak{Q})\bigr)\big/(Q-\mathfrak{Q}) \le I(\mathfrak{Q})/Q. \tag{26}$$

Ferner ist $QI(Q)$ eine eigentlich monoton wachsende und $I(Q)/Q$ eine eigentlich monoton fallende Funktion von Q. Der p-Modul $h(Q)$ ist eine für $Q\ge 1$, mit eventueller Ausnahme einer Menge vom linearen Lebesgueschen Maß Null, zweimal differenzierbare und konvexe Funktion von Q und erfüllt für $Q\ge 1$ die Gleichung

$$dh(Q)/dQ = -I(Q)/Q. \tag{27}$$

Überdies konvergiert das Integral

$$\int_1^\infty I(Q)/Q\,dQ. \tag{28}$$

Die Monotonieaussagen folgen aus (25) und (26). Die Behauptungen zu (27) ergeben sich aus (25) in Verbindung mit der Tatsache, daß monotone Funktionen differenzierbar bis auf eine Menge vom linearen Lebesgueschen Maß Null sind. Da $h(Q)$ als absolut stetige Funktion von Q das unbestimmte Integral seiner Ableitung ist, folgt (28) aus (27). Nun gilt (27) für $Q\ge 1$, und $h(Q)$ ist sogar stetig differenzierbar, da wegen der lokal gleichmäßigen Konvergenz von $\mathfrak{w}$ gegen w auch $I(\mathfrak{Q})$ gegen $I(Q)$ für nach Q strebendes $\mathfrak{Q}$, bei eventueller Auswahl einer Teilfolge, konvergiert (vgl. [9: Folgerung 3.16 (1)]).

Der p-Modul $h(Q)$ ist sogar reell-analytisch von $Q \geq 1$ abhängig, wenn man z.B. zusätzlich fordert, daß $\mathfrak{G}$ aus endlich vielen einfach zusammenhängenden und paarweise disjunkten Punktmengen besteht, die von analytischen Jordan-Kurven berandet sind, und $p = \mathfrak{p} = 1$ in $G \setminus \mathfrak{G}$ gilt. Das ergibt sich aus [5: Abschnitt V], dort allerdings für ein analoges Beispiel durchgeführt.

Aus der linken Seite von (26) ergibt sich noch aus dem Grenzfall $\mathfrak{Q} \to \infty$ die Beziehung

$$I(Q) \leq h(Q) - \lim_{\mathfrak{Q} \to \infty} h(Q). \tag{29}$$

Dann gilt also

$$I(Q) \to 0 \text{ für } Q \to \infty. \tag{30}$$

Für die Größe $I(Q)$ selbst läßt sich in Abhängigkeit von Q i.a. keine einheitliche Monotonieaussage treffen. Das sieht man an folgendem einfachen Beispiel: Sei G das Rechteck $\{(x,y): 0 < x < 1, 0 < y < h\}$, $p = Q > 1$ in $\mathfrak{G} = \{(x,y): \xi < x < 1, 0 < y < h\}$ und $p = 1$ in $G \setminus \mathfrak{G}$. Die Abbildungsfunktion $w_Q = u_Q + iv_Q$ ist in diesem Fall explizit analytisch angebbar; nämlich

$$u_Q(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\xi + Q(1-\xi)} & \text{für } 0 < x \leq \xi \\ \dfrac{\xi + Q(x-\xi)}{\xi + Q(1-\xi)} & \text{für } \xi < x < 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad v_Q(y) = \frac{y}{\xi + Q(1-\xi)} \text{ für } 0 < y < h.$$

Die Abbildung w_Q bezieht G auf das Rechteck $\{(u,v): 0 < u < 1, 0 < v < h(Q)\}$ mit $h(Q) = h/(\xi + Q(1-\xi))$. Für den Flächeninhalt von $w_Q(\mathfrak{G})$ gilt $I(Q) = Qh(1-\xi)/(\xi + Q(1-\xi))^2$, der im Falle $1/2 < \xi < 1$ eine eigentlich monoton wachsende Funktion von Q für $1 \leq Q \leq \xi/(1-\xi)$ und eine eigentlich monoton fallende Funktion von Q für $Q > \xi/(1-\xi)$ ist. Aus der linken Seite von (26) und der Monotonie von $QI(Q)$ läßt sich noch entnehmen, daß

$$I(Q) - h(Q) \tag{31}$$

eine eigentlich monoton wachsende Funktion von Q ist.

Es soll noch eine präzisierende Aussage zum Sachverhalt (30) unter der Voraussetzung formuliert werden, daß $G \setminus \mathfrak{G}$ von hinreichend glatten Jordan-Kurven begrenzt wird. Der Einfachheit halber sei $\mathfrak{G}$ ein kompakt in G liegendes einfach zusammenhängendes Gebiet, das von einer analytischen Jordan-Kurve $\mathfrak{L}$ der Länge L mit der Parameterdarstellung $z = z(s)$, $s \in [0, L]$ begrenzt wird. Es bezeichne $|\mathfrak{G}|$ den Flächeninhalt von $\mathfrak{G}$. Bekanntlich existiert eine Konstante $c > 1$, so daß für beliebige Punkte z_1 und z_2 auf $\mathfrak{L}$ die Abschätzung

$$\Delta(z_1, z_2) \leq c|z_1 - z_2| \tag{32}$$

gilt. Dabei bedeutet $\Delta(z_1, z_2)$ die Länge des kürzeren Bogens von z_1 nach z_2. Unter diesen zusätzlichen Voraussetzungen gilt der

Satz 4: *Zu jedem $Q > 1$ gibt es eine Konstante λ_Q, $0 < \lambda_Q < h(1)$, für die*

$$\int_{\mathfrak{L}} |v_Q - \lambda_Q|\, ds \leq c(2|\mathfrak{G}|\, I(Q)/Q)^{1/2} \tag{33}$$

gilt.

Der Ungleichung (33) entnimmt man, daß $v_Q - \lambda_Q$ in der $L^1(\mathfrak{L})$-Norm und damit auch dem eindimensionalem Lebesgueschen Maße nach für $Q \to \infty$ gegen Null konvergiert.

Nach dem Satz von F. Riesz [11: S. 109] kann eine Teilfolge von v_Q ausgesondert werden, die auf $\mathfrak{L}$ (mit eventueller Ausnahme einer Menge vom Lebesgueschen Maße Null) gegen eine Konstante konvergiert. Zunächst beweisen wir folgenden

Hilfssatz: *Sei f eine in $\mathfrak{G}$ harmonische Funktion mit Lipschitz-stetiger Fortsetzung auf $\mathfrak{L}$. Es existiert also eine Konstante M, so daß*

$$|f(z_1) - f(z_2)| \le M\Delta(z_1, z_2) \text{ für beliebige Punkte } z_1 \text{ und } z_2 \text{ auf } \mathfrak{L} \tag{34}$$

ist. Dann gilt die Abschätzung

$$\iint_{\mathfrak{G}} |\nabla f|^2\,dx\,dy \le 2c^2M^2|\mathfrak{G}|. \tag{35}$$

Beweis: Es bezeichne $z = z(\zeta)$ eine schlichte konforme Abbildung des Einheitskreises D auf $\mathfrak{G}$. Dann ist $h(\zeta) = f(z(\zeta))$ in D harmonisch und stetig in der Abschließung von D. Wegen der Invarianz des Dirichletschen Integrals bei konformer Abbildung erhalten wir nach Anwendung der bekannten Formel von Douglas [14] sowie von (32) und (34) die Abschätzung

$$\begin{aligned} \iint_{\mathfrak{G}} |\nabla_z f|^2\,dx\,dy &= \iint_D |\nabla_\zeta h|^2\,d\xi\,d\eta = {}^1\!/_{2\pi}\iint_R \left|\frac{h(e^{it_1}) - h(e^{it_2})}{e^{it_1} - e^{it_2}}\right|^2 dt_1\,dt_2 \\ &= {}^1\!/_{2\pi}\iint_R \left|\frac{f(z_1) - f(z_2)}{\Delta(z_1,z_2)}\right|^2 \left|\frac{\Delta(z_1,z_2)}{z_1 - z_2}\right|^2 \left|\frac{z_1 - z_2}{e^{it_1} - e^{it_2}}\right|^2 dt_1\,dt_2 \\ &\le c^2M^2\!/_{2\pi}\iint_R \left|\frac{z_1 - z_2}{e^{it_1} - e^{it_2}}\right|^2 dt_1\,dt_2 \\ &= 2c^2M^2\iint_D |z'(\zeta)|^2\,d\xi\,d\eta \\ &= 2c^2M^2|\mathfrak{G}| \end{aligned} \tag{36}$$

mit $z_n = z(e^{it_n})$ $(n = 1,2)$ und $R = \{(t_1, t_2): 0 < t_n < 2\pi\ (n = 1,2)\}$ ∎

Beweis von Satz 4: Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, daß $p = Q$ konstant in einer ε-Umgebung von $\mathfrak{L}$ ist. Hat man für diesen Fall (33) bewiesen, so ergibt sich die Gültigkeit von (33) für den allgemeinen Fall durch den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ in Verbindung mit bekannten Konvergenzsätzen (vgl. [9: Hilfssatz 3.5(I) und Folgerung 3.16(I)] sowie [11:S. 301]). Analoge Überlegungen wie beim Beweis von Satz 1 führen unter Berücksichtigung, daß $w_Q = u_Q + iv_Q$ das System (3) in $\mathfrak{G}$ mit $p = Q$ erfüllt, auf die Beziehung

$$\int_{\mathfrak{L}} f\,\partial v_Q/\partial s\,ds = \iint_{\mathfrak{G}} Q^{-1}\nabla u_Q\,\nabla f\,dx\,dy, \tag{37}$$

die zunächst für alle in $\mathfrak{G}$ einschließlich des Randes zweimal stetig differenzierbaren Funktionen f gilt. Die Erweiterung der Gültigkeit von (37) für Funktionen $f \in W_2^1(\mathfrak{G})$ mit verallgemeinerten Randwerten aus $L^2(\mathfrak{G})$ gelingt - wie üblich - mit Hilfe eines Approximationsargumentes, vgl. [1: S. 301]).

Als affines Bild einer geschlossenen analytischen Jordan-Kurve kann $w_Q(\mathfrak{L})$ mit einer beliebigen zur reellen Achse parallelen Geraden $\{(u,v): v = \lambda \in \mathbf{R}^1\}$ höchstens endlich viele

Punkte gemeinsam haben, wobei die Anzahl der Schnittpunkte für alle $\lambda \in \mathbb{R}^1$ eine nur von $w_Q(\mathfrak{L})$ abhängige Konstante nicht übersteigt. Daraus folgt, daß die auf $[0, L]$ stückweise konstante Funktion g_λ,

$$g_\lambda(s) = \begin{cases} 1 & \text{im Falle } v_Q(s) \geq \lambda \\ -1 & \text{im Falle } v_Q(s) < \lambda, \end{cases} \tag{38}$$

für jedes reelle λ höchstens endlich viele Sprungstellen besitzt und ein λ_Q aus Stetigkeitsgründen so gewählt werden kann, daß

$$\int_{\mathfrak{L}} g_{\lambda_Q}(s)\,ds = 0 \tag{39}$$

gilt. Wegen $0 < v_Q < h(1)$ muß $0 < \lambda_Q < h(1)$ gelten. Andernfalls ergäbe sich zu (39) ein Widerspruch. Unter Berücksichtigung von (39) überzeugt man sich leicht, daß die Funktion f mit

$$f(z) = \int_0^s g_{\lambda_Q}\,ds\,,\ s \in [0, L] \text{ und } z(s) \in \mathfrak{L} \tag{40}$$

der Beziehung (34) mit $M = 1$ genügt.

Setzt man die in (40) erklärte Funktion ins Innere von $\mathfrak{L}$ harmonisch fort und wendet sie auf (37) an, so erhalten wir schließlich nach partieller Integration und Anwendung der Schwarzschen Ungleichung sowie des Hilfssatzes die Abschätzung

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{L}} |v_Q - \lambda_Q|\,ds &= \int_{\mathfrak{L}} g_{\lambda_Q}(v_Q - \lambda_Q)\,ds \\ &= \left|\int_{\mathfrak{L}} f\,\partial v_Q/\partial s\,ds\right| = \left|\iint_{\mathfrak{G}} Q^{-1}\nabla u_Q \nabla f\,dx\,dy\right| \\ &= \left(\iint_{\mathfrak{G}} Q^{-1}|\nabla u_Q|^2\,dx\,dy \cdot \iint_{\mathfrak{G}} Q^{-1}|\nabla f|^2\,dx\,dy\right)^{1/2} \\ &\leq c(2|\mathfrak{G}|I(Q)/Q)^{1/2}. \end{aligned}$$

Damit ist Satz 4 bewiesen ∎

LITERATUR

[1] EKELAND, I., and R. TEMAM: *Convex Analysis and Variational Problems.* Amsterdam - Oxford: North Holland Publ. Comp. 1976.

[2] HOY, E.: *Über die Approximation einiger extremaler quasikonformer Abbildungen.* Ann. Univ. M. Curie - Sklodovska Lublin - Polonia **40** (1986), 45 - 60.

[3] KIRSCH, S.: *Über ein Extremalproblem bei im Mittel quasikonformen Abbildungen.* Math. Nachr. (To appear).

[4] KÜHNAU, R.: *Über gewisse Extremalprobleme der quasikonformen Abbildung.* Wiss. Z. Martin - Luther - Universität Halle - Wittenberg **13** (1964), 35 - 40.

[5] KÜHNAU, R.: *Eine Integralgleichung in der Theorie der quasikonformen Abbildungen.* Math. Nachr. **76** (1977), 139 - 152.

[6] KÜHNAU, R.: *Einige Verzerrungsaussagen bei quasikonformen Abbildungen endlich vielfach zusammenhängender Gebiete.* L'Enseign. Math. **24** (1978), 189 - 201.

[7] KÜHNAU, R.: *Zur Moduländerung eines Vierecks bei quasikonformer Abbildung.* Math. Nachr. **93** (1979), 249 - 258.

[8] KÜHNAU, R.: *Eine Extremalcharakterisierung von Unterschallgasströmungen durch quasikonforme Abbildungen.* Complex Anal. Banach Center Publ. **11** (1983), 199 - 210.

[9] RENELT, H.: *Quasikonforme Abbildungen und elliptische Systeme erster Ordnung in der Ebene* (Teubner-Texte zur Mathematik: Vol. 40). Leipzig: B.G. Teubner Verlagsges. 1982.

[10] SCHIFFER, M.: *Analytical theory of subsonic and supersonic flows*. In: Handbuch der Physik, Vol. 9. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1960.

[11] SMIRNOV, W.I.: *Lehrgang der höheren Mathematik*, Vol. V (9th ed.). Berlin: Dt. Verlag Wiss. 1981.

[12] TEICHMÜLLER, O.: *Extremale quasikonforme Abbildungen und quadratische Differentiale*. Abh. Preuß. Akad. Wiss., Math.-Nat. Kl. **22** (1940), 1 - 197.

[13] WEISEL, J.: *Numerische Ermittlung quasikonformer Abbildungen mit finiten Elementen*. Num. Math. **35** (1980), 201 - 222.

[14] NITSCHE, J.C.C.: *Vorlesungen über Minimalflächen*. Berlin: Springer-Verlag 1975.

Received 16.03.1990

Dr. Siegfried Kirsch
Pädagogische Hochschule Halle/Köthen
Sektion Mathematik/Physik
Kröllwitzer Str. 44
D (Ost) - 4020 Halle

Book review

V. I. ARNOL'D: **Huygens & Barrow, Newton & Hooke.** Basel - Boston - Berlin: Birkhäuser Verlag 1990, 120 pp., 6 col. pl.

This booklet the Russian original of which was published in 1989 contains more than the title promises. Its content is better characterized by the subtitle *Pioneers in mathematcal analysis and catastrophe theory, from evolvents to quasicrystals*. The well-known author who distinguished himself by important papers and several books (so on mathematical methods of classical mechanics, textbooks on ordinary differential equations) gives an original and very lively description of the fundamental developments in mathematics and physics in the 17th century, from the modern point of view.

The focus of the book is on Chr. Huygens (1629 - 1695), the great Dutch scientist, I. Barrow (1630 - 1677), Newton's teacher, I. Newton (his *Principia naturalis* were published in 1687), and R. Hooke (1635 - 1703), the universal English scientist. Its five chapters form an arch from the theory of gravitation over the mathematical analysis (including the controversy between Leibnitz and Newton) and the wave theory of Huygens to the modern problems of chaotic movements in selestial mechanics, the uncommon structure of quasi-crystals and the topology of Abelian integrals.

It is again surprising to realize how many fundamental ideas have been traced out already by the early founders of modern mathematics and mathematical physics. The author's power of representation gives new and surprising insights into old problems and up-to-date developments. Numerous interesting notes on historical and other details supplement the text. This book can be highly recommended to mathematicians and natural scientists.

Leipzig G. Vojta