Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Vol. 10 (1991) 4, 569–572

Zum Bernsteinschen Satz für Quasiminimalflächen

E. Hoy

A generalization of Bernstein's theorem is proved for (parametric) surfaces with a quasiconformal Gauss map.

Key words: *Bernstein's theorem, parametric quasiminimal surface*
AMS subject classification: 53 A 10, 30 C 60

1. Einleitung. In der vorliegenden Arbeit soll der folgende Satz bewiesen werden.

Satz: *Es sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine einfach zusammenhängende, reguläre (also orientierbare) und vollständige Fläche mit einer dreimal stetig differenzierbaren Parameterdarstellung $x = (x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v))$, wobei die Gaußsche Krümmung K von S stets nichtpositiv und die Gaußsche Abbildung von S noch Q-quasikonform mit einem $Q \in [1,3)$ sei. Wenn das Bild bei der Gaußschen Abbildung vollständig in einer Hemisphäre liegt, so kann S nur eine Ebene sein.*

Flächen mit nichtpositiver Gaußscher Krümmung und quasikonformer Gaußscher Abbildung werden nach [13] *Quasiminimalflächen* genannt in Verallgemeinerung des Begriffes Minimalfläche, die ihrerseits eine konforme Gaußsche Abbildung besitzen. Man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß es sich in Satz 1 um die untere (südliche) Hemisphäre handelt. Satz 1 verallgemeinert somit den Bernsteinschen Satz für Minimalflächen, nämlich, daß jede Minimalfläche in expliziter (nichtparametrischer) Form

$$x_3 = f(x_1, x_2) \text{ für alle } x_1, x_2 \in \mathbf{R} \tag{1}$$

eine Ebene sein muß. Dazu wird auf [3] oder auch auf [2: Chapter III], [10], [11: § 751] und [12] verwiesen. Andererseits hängt Satz 1 eng mit einem Ergebnis von L. Simon (siehe [14] oder [7: Chapter 15.6]) zusammen, der den Bernsteinschen Satz auch für Quasiminimalflächen verallgemeinert hat. Allerdings wird im Gegensatz zum Satz 1 die Darstellung (1) benutzt, jedoch keine weitere Einschränkung an $Q \geq 1$ benötigt, wie es im Satz 1 der Fall ist. Verknüpft man die Gaußsche Abbildung mit der stereographischen Projektion in die komplexe g-Ebene, so läßt sich Satz 1 noch etwas allgemeiner formulieren.

Satz 2: *Es sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine einfach zusammenhängende, reguläre, orientierbare und vollständige Fläche mit einer dreimal stetig differenzierbaren Parameterdarstellung, wobei die Gaußsche Krümmung von S stets nichtpositiv und die Gaußsche Abbildung von S noch Q-quasikonform mit einem $Q \in [1,8)$ sei. Wenn die stereographische Projektion des sphärischen Bildes von S in der Kreisscheibe $\{w : |w|^2 \leq C\}$ liegt und die Ungleichungen*

$$QC < 4(1 - (1 + C)^{-2}) \tag{2}$$

sowie

$$0 < C < 3,828424\ldots \tag{3}$$

gelten, so muß S eine Ebene sein.

2. Hilfsmittel. In diesem Abschnitt werden für die Beweise der Sätze 1 und 2 einige Hilfsmittel zusammengestellt. Auf S werden im folgenden geodätische Polarkoordinaten r, ϑ mit $0 \leq r < \infty$ und $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ eingeführt. Wegen $K \leq 0$ kann man diese Koordinaten nach der Wahl eines festen Punktes P_0 mit $r = 0$ auf S sogar global einführen (siehe dazu [4] oder auch [6: Kap.VI, § 5]). Auf Grund der Vollständigkeit von S wird S umkehrbar eindeutig auf die Ebene mit den (gewöhnlichen) Polarkoordinaten r, ϑ abgebildet. Die Koordinatenfunktionen $x_j = x_j(r,\vartheta)$ mit $j = 1,2,3$ genügen bekanntlich den Gleichungen

$$\sum_{j=1}^{3} x_{jr}^2 = 1, \quad \sum_{j=1}^{3} x_{jr} x_{j\vartheta} = 0, \quad \sum_{j=1}^{3} x_{j\vartheta}^2 = G^2 = G^2(r,\vartheta) \tag{4}$$

mit einer nichtnegativen Funktion $G = G(r,\vartheta)$, die ihrerseits die Eigenschaften

$$G(0,\vartheta) = 0, \quad G_r(0,\vartheta) = 1 \tag{5}$$

hat, wie man aus [4: S. 302], [5: Kap. 4.6] und [6: Kap.VI, § 4] entnehmen kann. Die Gaußsche Krümmung K berechnet sich aus (siehe ebenda)

$$K = -G_{rr}/G, \tag{6}$$

so daß damit für die Funktion

$$L(r) = \int_0^{2\pi} G(r,\vartheta)\,d\vartheta \tag{7}$$

wegen $K \leq 0$ noch $L''(r) \geq 0$ für alle $r \in [0,\infty)$ gilt.

Es sei nun $g = g_1 + ig_2 = g_1(r,\vartheta) + ig_2(r,\vartheta)$ die Funktion, die durch Verknüpfung der Abbildung der Ebene mit den Polarkoordinaten r,ϑ auf S mit der Gaußschen Abbildung und der stereographischen Projektion in die g-Ebene entsteht, wobei g_1 und g_2 reellwertig seien. Dann ist die Q-Quasikonformität der Gaußschen Abbildung äquivalent zur Ungleichung

$$g_{1r}^2 + g_{2r}^2 + \frac{g_{1\vartheta}^2 + g_{2\vartheta}^2}{G^2} \leq \left(Q + \frac{1}{Q}\right)\frac{|g_{1r}\, g_{2\vartheta} - g_{2r}\, g_{1\vartheta}|}{G} \qquad \forall\ r > 0, \vartheta \in [0,2\pi], \tag{8}$$

wie man mittels (4) zeigen kann. Desweiteren gilt für $T = g_{2r}\, g_{1\vartheta} - g_{1r}\, g_{2\vartheta}$ wegen (6) noch

$$(1 + |g|^2)^2 G_{rr}/4 = T, \tag{9}$$

so daß aus $K \leq 0$ sogar $T \geq 0$ folgt.

3. Beweis der Sätze 1 und 2. Da Satz 1 ein Spezialfall des Satzes 2 für $C = 1$ ist, genügt es, Satz 2 zu beweisen. Wie in [10: Formel (10)] erhält man mit Hilfe des Stokesschen Integralsatzes bei Benutzung von $T = g_{2r}\, g_{1\vartheta} - g_{1r}\, g_{2\vartheta}$ die Identität

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \varphi^2(r) T\, dr\, d\vartheta = \int_0^R \int_0^{2\pi} \varphi(r)\varphi'(r)(g_1 g_{2\vartheta} - g_2 g_{1\vartheta})\, dr\, d\vartheta \tag{10}$$

für jede in $[0,R]$ stetig differenzierbare reellwertige Funktion $\varphi = \varphi(r)$ mit $\varphi(R) = 0$. Die rechte Seite von (10) kann mit Hilfe der Ungleichung

$$|\varphi(r)\varphi'(r)|\,|g_1 g_{2\vartheta} - g_2 g_{1\vartheta}| \leq \beta Q G \varphi'^2(r) + \varphi^2(r)|g|^2 |g_\vartheta|^2/4\beta Q G$$

nach oben abgeschätzt werden, wobei die Konstante $\beta > 1/8$ sein soll. Nutzt man noch die sich aus (8) ergebende Ungleichung $|g_\vartheta|^2 \leq QGT$, so folgt schließlich

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \varphi^2(r) T (1 - |g|^2/4\beta)\, dr\, d\vartheta \leq \beta Q \int_0^R \int_0^{2\pi} \varphi'^2(r) G\, dr\, d\vartheta. \tag{11}$$

Der Integrand auf der linken Seite kann mittels (9) in $\varphi^2(r) G_{rr} (1 + |g|^2)^2 (1 - |g|^2/4\beta)/4$ umgeformt werden. Man definiert nun eine Zahl $C > 0$ als Lösung von $(1 + C)^2(1 - C/4\beta) = 1$. Eine solche existiert für alle $\beta > 1/8$ und ist zudem eindeutig bestimmt. Des weiteren gilt dann für alle komplexen g mit $0 \le |g|^2 \le C$ sogar $(1+|g|^2)^2(1-|g|^2/4\beta) \ge 1$. Auf diese Weise folgt aus (11) schließlich $\int_0^R\int_0^{2\pi}\varphi^2(r)G_{rr}\,dr\,d\vartheta \le 4\beta Q\int_0^R\int_0^{2\pi}\varphi'^2(r)G\,dr\,d\vartheta$ bzw. wegen (7)

$$\int_0^R \varphi^2(r)L''(r)\,dr \le 4\beta Q\int_0^R \varphi'^2(r)L(r)\,dr. \tag{12}$$

Das ist eine notwendige Bedingung für die Q-Quasikonformität der Gaußschen Abbildung. Im folgenden wird die noch freie Größe $\beta > 1/8$ so gewählt, daß $\beta Q < 1$ gilt. Dann ergibt sich $Q < 8$, und aus $(1+C)^2(1-C/4\beta) = 1$ folgt die Ungleichung (2). Die obere Schranke von C in (3) erhält man durch das Lösen von $(1+C)^2(1-C/4) = 1$, d.h. im Grenzfall $\beta = 1$.

Nun muß nur noch gezeigt werden, daß die Gültigkeit von (12) im Fall $\beta Q < 1$ auf $L''(r) \equiv 0$ führt. Die Ungleichung (12) gilt nach entsprechenden Approximationsbetrachtungen auch für die Funktion φ mit $\varphi(r) = \int_\rho^R L^{-1/2}(t)\,dt$ = const für $0 \le r \le \rho$ und $\varphi(r) = \int_r^R L^{-1/2}(t)\,dt$ für $\rho < r \le R$, wobei $\rho \in (0,R)$ beliebig gewählt wird. Die linke Seite von (12) ergibt nach zweimaliger Anwendung der partiellen Integration wie in [10: Beweis von Lemma 1] die Größe

$$-2\pi\left(\int_\rho^R L^{-1/2}(r)\,dr\right)^2 - 4L^{1/2}(\rho)\int_\rho^R L^{-1/2}(r)\,dr + 4(R-\rho).$$

Andererseits gilt $\int_\rho^R \varphi'^2(r)L(r)\,dr = \int_\rho^R dr = R-\rho$, d.h., aus (12) folgt mit $I = \int_\rho^R L^{-1/2}(r)\,dr$ noch $-2\pi I^2 - 4L^{1/2}(\rho)I + (4-4\beta Q)(R-\rho) \le 0$. Das ist wegen $I > 0$ und $\beta Q < 1$ äquivalent zu

$$I \ge -L^{1/2}(\rho)/\pi + \left(L(\rho)/\pi^2 + (2-2\beta Q)(R-\rho)/\pi\right)^{1/2}. \tag{13}$$

Da die Funktion $L(r)/r$ wegen $L(0) = 0$ und $L''(r) \ge 0$ in $[0,R]$ monoton nichtfallend ist, gilt $I \le \int_\rho^R \rho^{1/2}L^{-1/2}(\rho)r^{-1/2}\,dr = 2(\rho/L(\rho))^{1/2}(R^{1/2}-\rho^{1/2})$. Zusammen mit (13) ergibt dies

$$2(\rho/L(\rho))^{1/2}(R^{1/2}-\rho^{1/2}) \ge -L^{1/2}(\rho)/\pi + \left(L(\rho)/\pi^2 + (2-2\beta Q)(R-\rho)/\pi\right)^{1/2}.$$

Die Division durch $R^{1/2}$ und der Grenzprozeß $R \to \infty$ liefern dann $\rho/L(\rho) \ge (1-\beta Q)/2\pi$, d.h., die Funktion $L(r)/r$ ist für alle $r \ge 0$ nach oben beschränkt. Daraus folgt wie in [10: Beweis von Lemma 1] durch das Einsetzen einer stückweise linearen Funktion in $\ln r$ für $\varphi = \varphi(r)$ schließlich $L''(r) \equiv 0$. Wegen (7) und (9) verschwindet daher die Funktionaldeterminante der Abbildung $g = g_1(r,\vartheta) + ig_2(r,\vartheta)$ überall. Somit ergibt sich $g \equiv$ const, also die Behauptung des Satzes ∎

4. Bemerkungen. 1. Der hier dargestellte Beweisgang hat wesentlich die Vorgehensweise in [10] benutzt. Jedoch ist das Ergebnis in [10] nur ein Spezialfall des Satzes von L. Simon (siehe [14] oder [7: Chapter 15.6]). Auch in der vorliegenden Arbeit sind nur Teilresultate bewiesen worden, wie besonders durch die Grenzfälle $C \to \infty$ (d.h. $Q \to 8-0$) und $C \to 3{,}828424\ldots-0$ (d.h. $Q \to 1+0$) deutlich wird. Im zweiten Fall ist ein Vergleich mit [12] angebracht, wo Satz 2 für $Q = 1$ und für beliebig großes (aber endliches) C bewiesen wird.

2. Es soll hier auch bemerkt werden, daß der Beweis von Satz 2 nicht ohne weiteres für wesentlich größere Q und C als 8 bzw. 3,82... durchführbar ist. Beispielsweise gilt für die Funktion L, $L(r) = 2\pi(r + r^n)$ mit $n > 2$, die Ungleichung

$$\int_0^R L''(r)\varphi^2(r)\,dr \le \tfrac{4n}{(n-1)}\int_0^R L(r)\varphi'^2(r)\,dr, \tag{14}$$

wobei $\varphi = \varphi(r)$ eine beliebige in $[0,R]$ stetig differenzierbare reellwertige Funktion mit $\varphi(R) = 0$ ist und $R > 0$ beliebig gewählt werden kann. Vergleicht man (14) mit (12), so ist ersichtlich, daß die jeweils auf der rechten Seite vor dem Integral stehenden Konstanten von verschiedenen Richtungen der Zahl 4 uneingeschränkt nahe kommen können. Es ist allerdings offen, ob es eine Fläche S mit einer solchen Funktion L gibt und ob diese Fläche den Voraussetzungen von Satz 2 (ohne die oberen Schranken für Q und C) genügt.

3. Die hier behandelte Problematik hängt eng mit dem Typenproblem für die Fläche S zusammen. S ist nämlich wegen $K \leq 0$ entweder vom parabolischen oder hyperbolischen Typ. Im ersten Fall gilt Satz 2 sogar für alle $Q \geq 1$ und $C > 0$. Es ist also nur zu zeigen, daß S vom parabolischen Typ ist. Dafür erweist sich nach [1] die Divergenz von $\int_1^\infty L^{-1}(r)\,dr$ als hinreichend. Mit der hier benutzten Methode läßt sich sogar der parabolische Typ von S nachweisen, wenn nur $\int_1^\infty L^{-\alpha}(r)\,dr$ für alle $\alpha < 1$ divergiert.

4. In [9] findet man einen anderen Weg, um aus (12) das Verschwinden von $L''(r)$ zu erhalten. Dort wird gezeigt, daß zu jeder Zahl $c < 4$ eine Zahl $R > 0$ und eine in $[0,R]$ stetig differenzierbare reellwertige Funktion $\psi = \psi(r)$ mit $\psi(R) = 0$ existiert, so daß $\int_0^R \psi^2(r)L''(r)\,dr > c\int_0^R \psi'^2(r)L(r)\,dr$ gilt, wenn die Fläche S regulär, dreimal stetig differenzierbar und vollständig sowie die Gaußsche Krümmung von S stets nichtpositiv und nicht identisch Null ist.

5. Die Voraussetzungen "orientierbar" und "einfach zusammenhängend" können in den Sätzen 1 und 2 nur durch "zusammenhängend" ersetzt werden, ohne daß sich in diesen Sätzen noch etwas ändern würde. Diese gängige Überlegung wird beispielsweise in [11: § 53 und § 147] und in [12,13] ebenfalls verwendet.

6. Da die notwendige Bedingung für die Quasikonformität von g in (12) mit Hilfe von Integralen gegeben ist, liegt es auch nahe, nach Abschwächungen von (8) zu suchen, ohne daß (12) verletzt wird. Ein solcher Gedanke hat in [8] Anwendung gefunden.

LITERATUR

[1] AHLFORS, L.V.: *Sur le type d'une surface de Riemann.* C.R. Acad. Sci. Paris **201** (1935), 30 - 32.

[2] BARBOSA, J.L., and A.G. COLARES: *Minimal Surfaces in* $\mathbb{R}^3$. Lect. Notes Math. **1195** (1980).

[3] BERNSTEIN, S.: *Sur un théorème de géométrie et son application aux équations aux dérivées partielles du type elliptique.* Comm. Soc. Math. Kharkov **15** (1915 - 17), 38 - 45.

[4] BIEBERBACH, L.: *Über Tschebyschefsche Netze auf Flächen negativer Krümmung, sowie auf einigen weiteren Flächenarten.* Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss. **23** (1926), 294 - 321.

[5] CARMO, M.P.: *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen.* Braunschweig - Wiesbaden: Vieweg 1983.

[6] DUSCHEK, A., und W. MAYER: *Lehrbuch der Differentialgeometrie* I. Leipzig - Berlin: Teubner - Verlag 1930.

[7] GILBARG, D., und N.S. TRUDINGER: *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Berlin - Heidelberg - New York: Springer - Verlag 1977.

[8] HOY, E.: *Über eine Erweiterung des Liouvilleschen Satzes.* Z. Anal. Anw. **10** (1991).

[9] KAWAI, S.: *Operator* $\Delta - aK$ *on surfaces.* Hokkaido Math. J. **17** (1988), 147 - 150.

[10] КЕСЕЛЬМАН, В. М.: *О теореме Бернштейна для поверхностей с квазиконформным гауссовым отображением.* Мат. заметки **35** (1984), 445 - 453.

[11] NITSCHE, J.C.C.: *Vorlesungen über Minimalflächen.* Berlin - Heidelberg - New York: Springer - Verlag 1975.

[12] OSSERMAN, R.: *Proof of a conjecture of Nirenberg.* Comm. Pure Appl. Math. **12** (1959), 229 - 232.

[13] OSSERMAN, R.: *On complete minimal surfaces.* Arch. Rat. Mech. Anal. **13** (1963), 392 - 404.

[14] SIMON, L.: *A Hölder estimate for quasiconformal maps between surfaces in Euclidean space.* Acta math. **139** (1977), 19 - 51.

Received 09.02.1990

Dr. Erich Hoy
Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität
Postfach
D (Ost) - 4010 Halle