Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen
Journal for Analysis and its Applications
Volume 14 (1995), No. 1, 95–104

Problèmes aux limites pour des équations intégro-différentielles de type Barbachine

J. Appell et O. W. Diallo

Abstract. We discuss existence and uniqueness of solutions of a non-stationary integro-differential equation of Barbashin type, subject to natural boundary conditions. We show that the boundary value problem may be reduced to either a linear Fredholm integral equation, or a system of two linear Volterra integral equations. In the latter case one may apply fixed point principles in K-normed spaces to prove solvability and continuous dependence.

Keywords: *Integro-differential equations, boundary value problems, Fredholm integral equations, Volterra integral equations, fixed point principles, K-normed spaces*

AMS subject classification: 45 K 05, 45 B 05, 45 D 05, 34 G 10, 34 B 10, 47 H 10

Acknowledgement: This paper was written while the second author was visiting the University of Würzburg (Germany); financial support by the Deutscher Akademischer Austauschdienst (DAAD Bonn) is gratefully acknowledged.

Considérons l'équation intégro-différentielle linéaire non stationnaire

$$\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} = c(t,s)x(t,s) + \int_{-1}^{1} k(t,s,\sigma)x(t,\sigma)\,d\sigma + f(t,s) \tag{1}$$

($(t,s) \in Q = [a,b] \times [-1,1]$), satisfaisant les conditions aux limites

$$x(a,s) = \phi(s) \quad (0 < s \leq 1) \qquad \text{et} \qquad x(b,s) = \psi(s) \quad (-1 \leq s < 0). \tag{2}$$

Ici les fonctions

$$\begin{array}{lll} c : Q \to \mathbb{R}, & k : Q \times [-1,1] \to \mathbb{R} & \\ f : Q \to \mathbb{R}, & \phi : (0,1] \to \mathbb{R}, & \psi : [-1,0) \to \mathbb{R} \end{array}$$

J. Appell: Universität Würzburg, Mathematisches Institut, Am Hubland, D - 97074 Würzburg, République Féderale d'Allemagne
O. W. Diallo: Université de Conakry, Départment de Mathématiques, B. P. 1147, Conakry, République de Guinée

ISSN 0232-2064 / $ 2.50

sont des fonctions données mesurables.

Ce problème a été étudié pour l'équation (1) dans le cas stationnaire $c(t,s) = c(s)$ et $k(t,s,\sigma) = k(s,\sigma)$ dans [2]. Le but de cette note est d'appliquer les methodes utilisées dans [2] pour l'étude du cas non-stationnaire.

Supposons pour le moment que la famille d'opérateurs $A : [a,b] \to \mathcal{L}(L_p([-1,1]))$ définie par

$$A(t)x(s) = c(t,s)x(s) + \int_{-1}^{1} k(t,s,\sigma)x(\sigma)\,d\sigma \tag{3}$$

soit fortement continue; cela implique, en particulier, que $c \in L_\infty(Q)$. Si l'opérateur (3) est régulier dans $L_p([-1,1])$ (voir [1, 4]), alors la question de solvabilité du problème (1)/(2) se ramène à l'étude d'une équation "unidimensionelle" de Fredholm (voir Théorème 1 plus avant). En réalité, dans ce cas l'opérateur de Cauchy $U = U(t,\tau)$ pour l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t) \tag{4}$$

dans $L_p([-1,1])$ s'écrit sous la forme [1, 4]

$$U(t,\tau)x(s) = \hat{c}(t,\tau,s)x(s) + \int_{-1}^{1} h(t,\tau,s,\sigma)x(\sigma)\,d\sigma, \tag{5}$$

où

$$\hat{c}(t,\tau,s) = \exp\left\{\int_{\tau}^{t} c(\xi,s)\,d\xi\right\}$$

et $h = h(t,\tau,s,\sigma)$ est une fonction mesurable. Ainsi la solution de l'équation différentielle (4) satisfaisant la condition initiale $x(a) = x_a$ peut s'écrire sous la form

$$x(t) = U(t,a)x_a + \int_{a}^{t} U(t,\xi)f(\xi)\,d\xi; \tag{6}$$

ici il est utile d'identifier la "valeur initiale" $x_a \in L_p([-1,1])$ avec la fonction $x(a,\cdot) : [-1,1] \to I\!R$ dans (2).

En vue de (2), nous nous interéssons au problème aux limites

$$x(a) = x_a \qquad \text{et} \qquad x(b) = x_b \tag{7}$$

pour l'équation (1), ou

$$x_a = \begin{cases} \phi & \text{sur } (0,1] \\ z & \text{sur } [-1,0) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad x_b = \begin{cases} y & \text{sur } (0,1] \\ \psi & \text{sur } [-1,0); \end{cases}$$

ici les fonctions $z \in L_p([-1,0))$ et $y \in L_p((0,1])$ sont à préciser plus tard. De l'égalité (6) on a

$$x(t,s) = \begin{cases} m_1(t,s) + \int_{-1}^{0} h(t,a,s,\sigma)z(\sigma)\,d\sigma & (0 < s \leq 1) \\ m_2(t,s) + \hat{c}(t,a,s)z(s) + \int_{-1}^{0} h(t,a,s,\sigma)z(\sigma)\,d\sigma & (-1 \leq s < 0) \end{cases} \tag{8}$$

où

$$m_1(t,s) = \hat{c}(t,a,s)\phi(s) + \int_0^1 h(t,a,s,\sigma)\phi(\sigma)\,d\sigma + \int_a^t \left\{ f(\tau,s)\hat{c}(t,\tau,s) + \int_{-1}^{1} h(t,\tau,s,\sigma)f(\tau,\sigma)\,d\sigma \right\} d\tau$$

et

$$m_2(t,s) = \int_0^1 h(t,a,s,\sigma)\phi(\sigma)\,d\sigma + \int_a^t \left\{ f(\tau,s)\hat{c}(t,\tau,s) + \int_{-1}^{1} h(t,\tau,s,\sigma)f(\tau,\sigma)\,d\sigma \right\} d\tau.$$

Pour définir les fonction y et z il suffit donc de résoudre le système d'équations intégrales en y et z

$$\begin{aligned} y(s) &= m_1(b,s) + \int_{-1}^{0} h(b,a,s,\sigma)z(\sigma)\,d\sigma && (0 < s \leq 1) \\ \hat{c}(b,a,s)z(s) + \int_{-1}^{0} h(b,a,s,\sigma)z(\sigma)\,d\sigma &= \psi(s) - m_2(b,s) && (-1 \leq s < 0). \end{aligned} \tag{9}$$

De plus, posant

$$p(s,\sigma) = \frac{h(b,a,s,\sigma)}{\hat{c}(b,a,s)} \tag{10}$$

et

$$r(s) = \frac{\psi(s) - m_2(b,s)}{\hat{c}(b,a,s)}, \tag{11}$$

la résolution du système (9) est équivalente à la résolution de l'équation intégrale

$$z(s) + \int_{-1}^{0} p(s,\sigma)z(\sigma)\,d\sigma = r(s). \tag{12}$$

Ainsi, la résolution du problème au bord (1)/(2) se ramène à la résolution d'une équation de Fredholm de seconde espèce. Pour donner le résultat précis, denotons par $\hat{L}_p(Q)$ l'espace de toutes les fonctions $f : Q \to \mathbb{R}$ telles que la fonction $t \mapsto f(t, \cdot)$ soit continue de $[a, b]$ en $L_p([-1, 1])$.

Théorème 1. *Soient $c : Q \to \mathbb{R}$ et $k : Q \times [-1, 1] \to \mathbb{R}$ des fonctions mesurables, et soit la famille d'opérateurs* (3) *fortement continue et régulière dans $L_p([-1, 1])$. Alors pour toutes fonctions $\phi \in L_p((0, 1]), \psi \in L_p([-1, 0))$, et $f \in \hat{L}_p(Q)$, le problème* (1)/(2) *admet une solution (unique) si et seulement si l'équation intégrale* (12) *admet une solution (unique) dans $L_p([-1, 0))$.*

Remarquons que dans les conditions du Théorème 1 la solution x du problème (1)/(2) est telle que $t \mapsto x(t, \cdot)$ et $t \mapsto \partial x(t, \cdot)/\partial t$ sont des fonctions continues à valeur dans $L_p([-1, 1])$, c'est-à-dire, $x \in \hat{L}_p(Q)$ et $\partial x/\partial t \in \hat{L}_p(Q)$.

L'équivalence du problème (1)/(2) à une équation intégrale de Fredholm permet d'appliquer la théorie classique de Riesz - Schauder, d'où découle le théorème suivant.

Théorème 2. *Soient les conditions du Théorème 1 satisfaites. Si $\lambda = -1$ n'appartient pas au spectre de l'opérateur*

$$Pz(s) = \int_{-1}^{0} p(s, \sigma) z(\sigma)\, d\sigma, \tag{13}$$

où le noyau $p = p(s, \sigma)$ est défini par (10) *alors pour toutes fonctions $\phi \in L_p((0, 1]), \psi \in L_p([-1, 0))$, et $f \in \hat{L}_p(Q)$, le problème* (1)/(2) *admet une solution unique. Cette solution s'obtient par la formule* (8). *D'autre part, si $\lambda = -1$ appartient au spectre de l'opérateur* (13), *et la famille d'opérateurs intégraux*

$$K(t)x(s) = \int_{-1}^{1} k(t, s, \sigma) x(\sigma)\, d\sigma \tag{14}$$

est compacte dans $L_p([-1, 1])$, alors le problème (1)/(2) *admet une solution seulement si la fonction $r = r(s)$ donnée par* (11) *est orthogonale aux solutions v de l'équation intégrale*

$$v(s) + \int_{-1}^{0} \overline{p(\sigma, s)} v(\sigma)\, d\sigma = 0.$$

Dans ce cas le problème (1)/(2) *admet un nombre fini de solutions linéairement indépendantes.*

La methode décrite dans l'étude du problème (1)/(2) permet de considérer seulement le cas des fonctions bornées $c = c(t, s)$ dans (1). En effet, le bornage de c est une condition nécessaire pour la continuité forte de la famille d'opérateurs (3) à valeurs dans $\mathcal{L}(L_p([-1, 1]))$. La transformation du problème (1)/(2) à une équation intégrale "bidimensionelle" permet de couvrir aussi le cas d'une fonction c non bornée. Il est important de considerer l'équation (1) avec c non bornée du point de vue d'applications en physique et mécanique. Par exemple, certains modèles pour la propagation de radiation à travers l'atmosphère d'une planète [3, 8, 9], ou bien pour le transfer de dispersion radio-active à travers des membranes dans une centrale nucléaire [10] se ramène à la résolution de (1) avec $c \in L_1([a,b]) \otimes L_\infty([-1,1])$, mais $c \notin L_\infty([a,b] \times [-1,1])$. Analogiquement à [2], on peut transformer le problème (1)/(2) à l'équation

$$x(t,s) = Lx(t,s) + g(t,s), \tag{15}$$

où

$$Lx(t,s) = \begin{cases} \displaystyle\int_a^t\int_{-1}^1 \hat{c}(t,\tau,s)k(\tau,s,\sigma)x(\tau,\sigma)\,d\sigma d\tau & (0 < s \leq 1) \\ \displaystyle\int_b^t\int_{-1}^1 \hat{c}(t,\tau,s)k(\tau,s,\sigma)x(\tau,\sigma)\,d\sigma d\tau & (-1 \leq s < 0) \end{cases} \tag{16}$$

et

$$g(t,s) = \begin{cases} \displaystyle\int_a^t f(\tau,s)\hat{c}(t,\tau,s)\,d\tau + \hat{c}(t,a,s)\phi(s) & (0 < s \leq 1) \\ \displaystyle\int_b^t f(\tau,s)\hat{c}(t,\tau,s)\,d\tau + \hat{c}(t,b,s)\psi(s) & (-1 \leq s < 0). \end{cases}$$

C'est pourquoi nous pouvons comprendre la résolution du problème (1)/(2) comme celle de l'équation (15).

Introduisons les notations

$$\begin{matrix} u(t,s) = x(t,s) \\ v(t,s) = x(t,-s) \end{matrix} \quad \text{et} \quad \begin{matrix} \xi(t,s) = g(t,s) \\ \eta(t,s) = g(t,-s) \end{matrix} \qquad (a \leq t \leq b, 0 < s \leq 1).$$

Posons également pour $a \leq t,\tau \leq b$ et $0 < s,\sigma \leq 1$

$$\begin{aligned} a(t,\tau,s,\sigma) &= \hat{c}(t,\tau,s)k(\tau,s,\sigma) \\ b(t,\tau,s,\sigma) &= \hat{c}(t,\tau,s)k(\tau,s,-\sigma) \\ c(t,\tau,s,\sigma) &= \hat{c}(t,\tau,-s)k(\tau,-s,\sigma) \\ d(t,\tau,s,\sigma) &= \hat{c}(t,\tau,-s)k(\tau,-s,-\sigma). \end{aligned} \tag{17}$$

A l'aide des fonctions a, b, c et d on peut définir des opérateurs A, B, C et D par

$$\begin{aligned}
Au(t,s) &= \int_a^t\int_0^1 a(t,\tau,s,\sigma)u(\tau,\sigma)\,d\sigma d\tau \\
Bv(t,s) &= \int_a^t\int_0^1 b(t,\tau,s,\sigma)v(\tau,\sigma)\,d\sigma d\tau \\
Cu(t,s) &= \int_b^t\int_0^1 c(t,\tau,s,\sigma)u(\tau,\sigma)\,d\sigma d\tau \\
Dv(t,s) &= \int_b^t\int_0^1 d(t,\tau,s,\sigma)v(\tau,\sigma)\,d\sigma d\tau.
\end{aligned} \tag{18}$$

Écrivons maintenant l'équation (15) sous forme de système

$$\begin{aligned}
u(t,s) &= Au(t,s) + Bv(t,s) + \xi(t,s) \\
v(t,s) &= Cu(t,s) + Dv(t,s) + \eta(t,s)
\end{aligned}$$

ou bien sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} I-A & -B \\ -C & I-D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Théorème 3. *Soient les opérateurs intégraux* (18) *définis et réguliers dans* $\hat{L}_p(Q)$. *Si* $c \in L_1([a,b]) \otimes L_\infty([-1,1])$ *et*

$$1 \notin \sigma\big((I-A)^{-1}B(I-D)^{-1}C\big), \tag{20}$$

alors l'opérateur $I - L$ *(voir* (16)) *est inversible dans* $\hat{L}_p(Q)$.

Démonstration. Pour la démonstration il suffit de verifier que les rayons spectrales des opérateurs A et D sont nuls. Par hypothèse, nous savons que $\hat{c}(t,\tau,s) \le M < \infty$ pour $-1 \le s \le 1$, ce qui implique que

$$|a(t,\tau,s,\sigma)| \le M|k(\tau,s,\sigma)| \quad \text{et} \quad |d(t,\tau,s,\sigma)| \le M|k(\tau,-s,-\sigma)|.$$

Ainsi pour $u(t,s) \ge 0$ et $v(t,s) \ge 0$ on a

$$|Au(t,s)| \le \bar{A}u(t,s) \quad \text{et} \quad |Dv(t,s)| \le \bar{D}v(t,s),$$

où les opérateurs $\bar{A}$ et $\bar{D}$ sont définis par

$$\bar{A}u(t,s) = M\int_a^t\int_0^1 |k(\tau,s,\sigma)|u(\tau,\sigma)\,d\sigma d\tau \tag{21}$$

et

$$\bar{D}v(t,s) = M \int_t^b \int_0^1 |k(\tau,-s,-\sigma)|v(\tau,\sigma)\,d\sigma d\tau. \tag{22}$$

En posant

$$|K_+(t)|x(s) = \int_{-1}^{1} |k(t,s,\sigma)|x(\sigma)\,d\sigma$$

et

$$|K_-(t)|x(s) = \int_{-1}^{1} |k(t,-s,-\sigma)|x(\sigma)\,d\sigma,$$

on obtient les inégalités

$$||\bar{A}|| \le \frac{1}{n!} M^n (b-a)^n \sup_{a\le t\le b} ||\,|K_+(t)|\,||^n \tag{23}$$

et

$$||\bar{D}|| \le \frac{1}{n!} M^n (b-a)^n \sup_{a\le t\le b} ||\,|K_-(t)|\,||^n. \tag{24}$$

Mais ces inégalités implique que les rayons spectrales des opérateurs (21) et (22) et, par conséquent des opérateurs intégraux A et D sont nuls. ∎

Remarquons que la régularité des opérateurs (16) se verifie par des schémas standarts (voir par exemple [6: §§ 5.2 - 5.5]). La condition (20) se réalise souvent pour des limitations naturelles sur les fonctions $c = c(t,s)$ et $k = k(t,s,\sigma)$; en effet, les limitations de ce genre impliquent souvent que les rayons spectrales des opérateurs A et D soient nuls. Un cas particulier, bien que typique, est donné par le théorème suivant.

Théorème 4. *Soient les opérateurs intégraux* (18) *définis et réguliers dans* $\hat{L}_p(Q)$, *et soient satisfaites les hypothèses suivantes:*

(a) *Les conditions de bornage*

$$|a(t,\tau,s,\sigma)| \le a_1(t,\tau)a_2(s,\sigma) \qquad et \qquad |d(t,\tau,s,\sigma)| \le d_1(t,\tau)d_2(s,\sigma)$$

ont lieu.

(b) *Les opérateurs intégraux*

$$A_1x(t) = \int_a^t a_1(t,\tau)x(\tau)\,d\tau \qquad et \qquad D_1x(t) = \int_a^t d_1(t,\tau)x(\tau)\,d\tau \tag{25}$$

sont compacts dans l'espace $L_p([a,b])$.

(c) *Les opérateurs intégraux*

$$A_2 y(s) = \int_0^1 a_2(s,\sigma) y(\sigma)\, d\sigma \qquad et \qquad D_2 y(s) = \int_0^1 d_2(s,\sigma) y(\sigma)\, d\sigma \tag{26}$$

sont continus dans $L_p((0,1])$.

Si la relation (20) *a lieu, alors l'opérateur* $I - L$ (*voir* (16)) *est inversible dans* $\hat{L}_p(Q)$.

Démonstration. Pour la démonstration il suffit de vérifier que les rayon spectrales des opérateurs intégraux A et D sont nuls. Pour $u(t,s) \geq 0$ on a

$$|Au(t,s)| \leq (A_1 \otimes A_2) u(t,s).$$

Puisque $r(A_1) = 0$ (voir [11]), alors

$$r(A) \leq r(A_1 \otimes A_2) = r(A_1) r(A_2) = 0.$$

De manière analogique on demontre que $r(D) = 0$. ∎

Remarquons que pour $p = 1$ ou $p = \infty$ la compacité des opérateurs A_1 et D_1 dans Théorème 4 peut être remplacée par la compacité faible (voir aussi [11, 12]).

La vérification de la condition (20) dans les théorèmes précedents peut poser des difficultés. Décrivons maintenant deux situations dans lesquelles cette condition est réalisée d'office.

Théorème 5. *Soient les opérateurs intégraux* (18) *définis et réguliers dans* $\hat{L}_p(Q)$. *Supposons que*

$$c(t,s) \leq 0 \qquad (a \leq t \leq b, 0 < s \leq 1)$$

et

$$c(t,s) \geq 0 \qquad (a \leq t \leq b, -1 \leq s < 0).$$

De plus, supposons que l'opérateur

$$\tilde{K}x(t,s) = \int_a^b \int_{-1}^1 |k(t,s,\sigma)| x(\tau,\sigma)\, d\sigma d\tau$$

soit défini dans $\hat{L}_p(Q)$ *avec rayon spectrale* $r(\tilde{K}) < 1$. *Alors l'équation* (15) *admet une solution unique pour chaque* $g \in \hat{L}_p(Q)$.

Démonstration. Pour la démonstration il suffit de remarquer que, dans les hypothèses ci dessus, le rayon spectrale de l'opérateur (16) satisfait $r(L) < 1$. ∎

Le théorème suivant est basé sur le principe du point fixe dans un espace muni d'une "K-norme" (voir, par exemple, [13 - 16]).

Théorème 6. *Soient les opérateurs intégraux* (18) *définis et réguliers dans* $\hat{L}_p(Q)$. *Supposons que les conditions de bornage*

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^1 a(t,\tau,\cdot,\sigma)u(\sigma)\,d\sigma \right\| &\le \alpha\|u\|, & \left\| \int_0^1 b(t,\tau,\cdot,\sigma)v(\sigma)\,d\sigma \right\| &\le \beta\|v\| \\
\left\| \int_0^1 c(t,\tau,\cdot,\sigma)u(\sigma)\,d\sigma \right\| &\le \gamma\|u\|, & \left\| \int_0^1 d(t,\tau,\cdot,\sigma)v(\sigma)\,d\sigma \right\| &\le \delta\|v\|
\end{aligned} \tag{27}$$

soient satisfaites, où a, b, c *et* d *sont définis par* (17). *De plus, posons* $\Delta = (\alpha+\delta)^2 - 4\beta\gamma$ *et supposons qu'une des conditions suivantes soit verifiée:*

(a) $\Delta > 0$ *et* $\sqrt{\Delta} < \log \dfrac{\alpha+\delta+\sqrt{\Delta}}{\alpha+\delta-\sqrt{\Delta}}$

(b) $(\alpha+\delta)^2 = 4\beta\gamma < 4$

(c) $\Delta < 0, \alpha+\delta \neq 0$ *et* $\sqrt{-\Delta} < 2\arctan \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{\alpha+\delta}$

(d) $\Delta < 0, \alpha+\delta = 0$ *et* $\sqrt{-\Delta} < \pi$.

Alors l'équation (15) *admet une solution unique pour chaque* $g \in \hat{L}_p(Q)$.

Démonstration. Définissons des opérateurs F et Q par

$$Fx(t,s) = F\begin{pmatrix} u(t,s) \\ v(t,s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(t,s) \\ v(t,s) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi(t,s) \\ \eta(t,s) \end{pmatrix} \tag{28}$$

et

$$Qz(t) = Q\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\int_a^t \big(\alpha u(\tau) + \beta v(\tau)\big)\,d\tau \\ \displaystyle\int_t^b \big(\gamma u(\tau) + \delta v(\tau)\big)\,d\tau \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Ainsi la condition de contraction [2]

$$]|Fx_1 - Fx_2|[\le Q(]|x_1 - x_2|[),$$

où $]|\cdot|[$ dénote la K-norm "naturelle" sur $L_p \times L_p$, est une conséquence des inégalités (27). Par l'analogue du théorème de Banach - Caccioppoli dans les espaces K-normés [13, 14], l'opérateur (28) a un point fixe dans $\hat{L}_p(Q)$, si $r(Q) < 1$. De plus, chaque point fixe de F définie une solution de (19), et vice versa.

Il suffit donc de démontrer que le rayon spectrale de l'opérateur (29) est < 1. Lorsque Q est un opérateur positif, en vertue du théorème de Krejn - Rutman ([5: §8] et [7]) il faut (et il suffit) de trouver $\rho > 0$ tel que $Q(u,v) = \rho(u,v)$ avec deux fonctions non-negatives u et v. Par conséquent, nous devons résoudre le système

$$\left.\begin{aligned} \rho u' &= \alpha u + \beta v \\ \rho v' &= -\gamma u - \delta v \end{aligned}\right\}$$

avec conditions sur bord $u(a) = v(b) = 0$. Mais la solution explicite de ce système existe (pour $\rho < 1$) si et seulement si une des conditions (a) - (d) est vérifiée. ∎

References

[1] Appell, J., Diallo, O. W. and P. P. Zabrejko: *On linear integro-differential equations of Barbashin type in spaces of continuous and measurable functions.* J. Int. Equ. Appl. 1 (1988), 227 - 247.

[2] Appell, J., Kalitvin, A. S. and P. P. Zabrejko: *Boundary value problems for integro-differential equations of Barbashin type.* J. Int. Equ. Appl. 6 (1994), 1 - 30.

[3] Chandrasekhar, S.: *Radiative Transfer.* Oxford: Oxford Univ. Press 1950.

[4] Diallo, O. W.: *On the theory of linear integro-differential equations of Barbashin type in Lebesgue spaces* (in Russian). Deposited in VINITI No. 1013-B88, Minsk 1988.

[5] Krasnosel'skij, M. A., Lifshits, Je. A. and A. V. Sobolev: *Positive Linear Systems.* Berlin: Heldermann Verlag 1989.

[6] Krasnosel'skij, M. A., Zabrejko, P. P., Pustyl'nik, Je. I. and P. Je. Sobolevskij: *Integral Operators in Spaces of Summable Functions* (in Russian). Moscow: Nauka 1966; Engl. transl.: Leyden: Noordhoff 1976.

[7] Krejn, M. G. and M. Rutman: *Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space* (in Russian). Uspekhi Mat. Nauk 3 (1948), 3 - 95.

[8] Minin, I. N.: *Theory of Radiation Transfer in the Atmosphere of Planets* (in Russian). Moscow: Nauka 1988.

[9] Sobolev, V. V.: *The Transfer of Radiation Energy in the Atmosphere of Stars and Planets* (in Russian). Moscow: Gostekhizdat 1956.

[10] van der Mee, C. V. M.: *Transport theory in L_p spaces.* Int. Equ. Oper. Theory 6 (1983), 405 - 443.

[11] Zabrejko, P. P.: *On the spectral radius of Volterra integral operators* (in Russian). Lit. Mat. Sbornik 7 (1967), 281 - 287.

[12] Zabrejko, P. P.: *On Volterra integral operators* (in Russian). Uspekhi Mat. Nauk 22 (1967), 167 - 168.

[13] Zabrejko, P. P.: *The contraction mapping principle in K-metric and locally convex spaces* (in Russian). Dokl. Akad. Nauk BSSR 34 (1990), 1065 - 1068.

[14] Zabrejko, P. P.: *Iteration methods for the solution of operator equations and their application to ordinary and partial differential equations.* Rend. Mat. Univ. Roma 12 (1992), 381 - 397.

[15] Zabrejko, P. P. and T. A. Makarevich: *On some generalization of the Banach - Caccioppoli principle to operators in pseudometric spaces* (in Russian). Diff. Uravn. 23 (1987), 1497 - 1504.

[16] Zabrejko, P. P. and T. A. Makarevich: *A fixed point principle and a theorem of L. V. Ovsjannikov* (in Russian). Vestnik Belgos Univ. 3 (1987), 53 - 55.

Received 17.06.1994