

Ljapunov-Bohl-Exponent und Greensche Funktion für eine Klasse von Integro-Differentialgleichungen

E. A. Ermolova

Abstract. We give upper estimates (and in special cases even explicit formulas) for the Ljapunov-Bohl exponent of both the linear integro-differential equation

$$\frac{\partial x(t, s)}{\partial t} = c(t, s) x(t, s) + \int_a^b k(t, s, \sigma) x(t, \sigma) d\sigma$$

and the nonlinear integro-differential equation

$$\frac{\partial x(t, s)}{\partial t} = c(t, s) x(t, s) + \int_a^b k(t, s, \sigma, x(t, \sigma)) d\sigma.$$

Such estimates are achieved by considering these equations as integral perturbations of the differential equation $x' = C(t)x$ with multiplication operator $(C(t)x)(s) = c(t, s)x(s)$ in a suitable Banach space. We also obtain necessary and sufficient conditions for the exponential dichotomy of the differential equation, as well as an integral representation of the corresponding Green function. As application we derive stability and boundedness results for the solutions of the above mentioned integro-differential equations on the real line.

Keywords: *Integro-differential equations of Barbashin type, differential equations in Banach spaces, Ljapunov-Bohl exponent, stability, Green functions, bounded solutions*

AMS subject classification: 45 K 05, 34 G 10, 34 G 20, 34 D 08, 34 B 25, 34 C 11

0. Aufgabenstellung

Ziel dieser Arbeit ist es, *Stabilitäts- und Beschränktheitsaussagen* für Lösungen der *Integro-Differentialgleichung vom Barbashin-Typ*

$$\frac{\partial x(t, s)}{\partial t} = c(t, s) x(t, s) + \int_a^b k(t, s, \sigma, x(t, \sigma)) d\sigma \quad (1)$$

E. A. Ermolova: Zolotodolinskaja ul. 21 - 45, R - 630090 Novosibirsk, Russia

This paper was written while the author was visiting the University of Würzburg as a DAAD fellow. Financial support by the DAAD Bonn (Kz. A/94/12174) is gratefully acknowledged.

herzuleiten. Dazu schreiben wir diese Gleichung zunächst als Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = C(t)x + K(t, x) \quad (2)$$

mit einem (linearen) *Multiplikationsoperator*

$$(C(t)x)(s) = c(t, s)x(s) \quad (3)$$

und einem (nichtlinearen) *Integraloperator*

$$K(t, x)(s) = \int_a^b k(t, s, \sigma, x(\sigma)) d\sigma \quad (4)$$

in einem Banachraum X , d.h. wir identifizieren die reellwertige Funktion zweier Variabler $(t, s) \mapsto x(t, s)$ mit der X -wertigen Funktion $t \mapsto x(t, \cdot)$. Die entscheidende Idee besteht dann darin, die Gleichung (2) als *Störung* der (linearen!) Gleichung

$$\frac{dx}{dt} = C(t)x \quad (5)$$

aufzufassen. Dies erlaubt es uns nämlich, Informationen über die *Stabilität* der Differentialgleichung (2) (und damit der Integro-Differentialgleichung (1)) aus bekannten Ergebnissen über den *Ljapunov-Bohl-Exponenten* (siehe [7: S. 116ff]) der Gleichung (5) herzuleiten. Dieselbe Idee führt auch zu Ergebnissen über die *Greensche Funktion* der Gleichung (2), d.h. zu Existenzsätzen für *beschränkte Lösungen* der Barbashin-Gleichung (1) auf der reellen Achse.

Es ist nicht verwunderlich, daß die Theorie besonders einfach wird, wenn wir auch die Integralstörung K in (2) als linear voraussetzen, d.h. (2) durch

$$\frac{dx}{dt} = C(t)x + K(t)x \quad (6)$$

mit

$$(K(t)x)(s) = \int_a^b k(t, s, \sigma)x(\sigma) d\sigma \quad (7)$$

ersetzen. Die hierfür hergeleiteten Ergebnisse lassen sich dann natürlich auf die lineare Integro-Differentialgleichung vom Barbashin-Typ

$$\frac{\partial x(t, s)}{\partial t} = c(t, s)x(t, s) + \int_a^b k(t, s, \sigma)x(t, \sigma) d\sigma \quad (8)$$

anwenden. Den linearen Fall werden wir im Abschnitt 1 betrachten, während dem nichtlinearen Fall der Abschnitt 2 gewidmet ist. Im Abschnitt 3 werden wir dann die

Existenz beschränkter Lösungen auf der reellen Achse mittels der Greenschen Funktion diskutieren.

Integro-Differentialgleichungen vom Typ (1) oder (8) treten in verschiedenen Transportproblemen der Mechanik, Physik und Astronomie auf. Beispielsweise beschreibt (1) die Strahlungsausbreitung in der Atmosphäre von Planeten und Fixsternen (s. [8] und [11]). In anderer Interpretation beschreiben (1) und (8) die Elektronenstreuung durch dünne Membranen und Platten in Atomreaktoren [13]. Daneben tritt die Gleichung (8) in der akustischen Streutheorie [6], in einigen Problemen der Wahrscheinlichkeitstheorie [1] sowie in Systemen mit wesentlich verteilten Parametern [5] auf.

1. Der Ljapunov-Bohl-Exponent im linearen Fall

Wir rufen zunächst einige Definitionen aus der Stabilitätstheorie gewöhnlicher Differentialgleichungen in Banach-Räumen in Erinnerung (siehe, z.B., [7: S. 116ff]). Sei $A = A(t)$ eine starkstetige Operatorfamilie in einem Banach-Raum X (d.h. für jedes t ist die Abbildung $x \mapsto A(t)x$ stetig in X) und sei x eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad (9)$$

in X . Sei t_0 fest. Der *Ljapunov-Bohl-Exponent* $\omega^*(x)$ von x ist dann als Infimum aller reellen Zahlen ν definiert, für die ein $N > 0$ derart existiert, daß

$$\|x(t)\| \leq N e^{\nu(t-\tau)} \|x(\tau)\| \quad (10)$$

für all diejenigen $t > \tau \geq t_0$ ist, für die $x(t)$ definiert ist. Falls $\omega^*(x)$ endlich ist, gilt die Formel

$$\omega^*(x) = \limsup_{\substack{\tau \rightarrow \infty \\ t \rightarrow \infty}} \frac{\log \|x(t)\| - \log \|x(\tau)\|}{t - \tau}.$$

Das Supremum der Exponenten $\omega^*(x)$, genommen über alle Lösungen x der Gleichung (9), bezeichnet man als *Ljapunov-Bohl-Exponenten* ω^* von (9). Für diesen gilt, falls er endlich ist, die Formel

$$\omega^* = \limsup_{\substack{\tau \rightarrow \infty \\ t \rightarrow \infty}} \frac{\log \|U(t, \tau)\|}{t - \tau}, \quad (11)$$

wobei U den *Cauchy-Operator* von (9) bezeichnet. Diese Exponenten haben eine besondere Bedeutung für die Stabilität der Gleichung (9). Zum Beispiel ist die Ungleichung $\omega^* \leq 0$ notwendig für die asymptotische Stabilität der trivialen (und damit jeder) Lösung von (9), während die Ungleichung $\omega^* < 0$ hinreichend ist. Vom Standpunkt der Störungstheorie (die uns hier ja gerade interessiert) ist der Ljapunov-Bohl-Exponent auch geeigneter als der klassische Ljapunov-Exponent

$$\omega = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \|U(t, 0)\|}{t},$$

da ω^* im Unterschied zu ω stabil gegenüber "kleinen" Störungen ist.

Wir betrachten nun die ungestörte Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = C(t)x \quad (12)$$

zusammen mit der gestörten

$$\frac{dx}{dt} = C(t)x + K(t)x, \quad (13)$$

wobei die Operatorfamilien $C = C(t)$ und $K = K(t)$ gemäß (3) und (7) in einem Banach-Raum X definiert seien. Wir setzen voraus, daß C und K lokal integrierbar sind in der Algebra $\mathcal{L}(X)$ aller beschränkten linearen Operatoren in X , so daß die Cauchy-Operatoren U_0 der Gleichung (12) und U der Gleichung (13) definiert sind (siehe [7: S. 94ff]).

Lemma 1. *Seien $T_1 \geq t_0$ und $T_2 \geq 0$ fest. Falls der Cauchy-Operator U_0 der Gleichung (12) eine Abschätzung*

$$\|U_0(t, \tau)\| \leq M e^{\delta(t-\tau)} \quad (T_1 \leq \tau \leq t - T_2) \quad (14)$$

erfüllt, so gilt für den Cauchy-Operator U der Gleichung (13) die Abschätzung

$$\|U(t, \tau)\| \leq \gamma(\tau) \exp \left\{ \delta(t - \tau) + M \int_{\tau+T_2}^t \|K(\xi)\| d\xi \right\} \quad (T_1 \leq \tau \leq t - T_2), \quad (15)$$

wobei

$$\gamma(\tau) = M \left(1 + \int_{\tau}^{\tau+T_2} e^{-\delta(\xi-\tau)} \|K(\xi)U(\xi, \tau)\| d\xi \right) \quad (16)$$

ist.

Beweis. Es gilt

$$U(t, \tau) = U_0(t, \tau) + \int_{\tau}^t U_0(t, \xi) K(\xi) U(\xi, \tau) d\xi,$$

also nach (14) für $T_1 \leq \tau \leq t - T_2$

$$\begin{aligned} \|U(t, \tau)\| &\leq M e^{\delta(t-\tau)} + \int_{\tau}^{\tau+T_2} M e^{\delta(t-\xi)} \|K(\xi)U(\xi, \tau)\| d\xi \\ &\quad + \int_{\tau+T_2}^t M e^{\delta(t-\xi)} \|K(\xi)\| \|U(\xi, \tau)\| d\xi. \end{aligned}$$

Setzen wir $W(t, \tau) = e^{-\delta(t-\tau)} \|U(t, \tau)\|$, so läßt sich dies in der Form

$$W(t, \tau) \leq \gamma(\tau) + M \int_{\tau+T_2}^t \|K(\xi)\| W(\xi, \tau) d\xi \quad (T_1 \leq \tau \leq t - T_2)$$

schreiben. Für jedes feste τ können wir das Gronwallsche Lemma anwenden und erhalten

$$W(t, \tau) \leq \gamma(\tau) \exp \left\{ M \int_{\tau+T_2}^t \|K(\xi)\| d\xi \right\}.$$

Dies ist aber nur eine Umformung von (15) ■

Wir nehmen nun zusätzlich an, daß

$$\sup_t \int_t^{t+1} \|C(\xi)\| d\xi < \infty \tag{17}$$

$$\sup_t \int_t^{t+1} \|K(\xi)\| d\xi < \infty \tag{18}$$

ist. Insbesondere impliziert dies für $A(t) = C(t) + K(t)$, daß

$$b = \sup_t \int_t^{t+1} \|A(\xi)\| d\xi < \infty \tag{19}$$

gilt. Unter diesen Voraussetzungen wurde unser Lemma 1 in [7: Lemma III.2.3] im Spezialfall $T_1 = t_0$ und $T_2 = 0$ bewiesen. In diesem Fall ist natürlich $\gamma(\tau) \equiv M$. Allgemeiner gilt das folgende

Lemma 2. *Unter den Voraussetzungen (17) und (18) ist die Funktion (16) auf $[t_0, \infty)$ beschränkt.*

Beweis. Da stets

$$\|U(t, \tau)\| \leq \exp \left\{ \int_{\tau}^t \|A(\xi)\| d\xi \right\} \tag{20}$$

ist, folgt aus (19) die Abschätzung $\|U(t, \tau)\| \leq \exp [b(t - \tau + 1)]$ ($t_0 \leq \tau \leq t$), also

$$\begin{aligned} \gamma(\tau) &\leq M \left(1 + \int_{\tau}^{\tau+T_2} e^{(b-\delta)(\xi-\tau)+b} \|K(\xi)\| d\xi \right) \\ &= M \left(1 + \int_0^{T_2} e^{(b-\delta)\xi+b} \|K(\xi + \tau)\| d\xi \right) \end{aligned} \quad (\tau \geq t_0).$$

Zusammen mit (18) erhalten wir die gewünschte Abschätzung ■

Wir wollen die Lemmata 1 und 2 nun auf die Gleichung (6) anwenden. Dazu sei X gleich $C([a, b])$ oder ein idealer Raum über $[a, b]$ mit vollem Träger (siehe, z.B., [15]). Wir definieren dann

$$\omega_0^* = \limsup_{t \rightarrow \infty} \operatorname{ess\,sup}_{s \in [a, b]} \frac{1}{t - \tau} \int_{\tau}^t c(\xi, s) d\xi \tag{21}$$

$$\omega_0^{**} = \sup_{t_0 \leq \tau < t} \operatorname{ess\,sup}_{s \in [a, b]} \frac{1}{t - \tau} \int_{\tau}^t c(\xi, s) d\xi \tag{22}$$

sowie

$$\|K\|^* = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - \tau} \int_{\tau}^t \|K(\xi)\| d\xi \tag{23}$$

$$\|K\|^{**} = \sup_{t_0 \leq \tau < t} \frac{1}{t - \tau} \int_{\tau}^t \|K(\xi)\| d\xi. \tag{24}$$

Setzen wir die Funktion c als produkt-meßbar voraus, können wir statt (22) einfacher

$$\omega_0^{**} = \operatorname{ess\,sup}_{\substack{t \geq t_0 \\ s \in [a, b]}} c(t, s)$$

schreiben. Außerdem können wir (24) alternativ durch

$$\|K\|^{**} = \operatorname{ess\,sup}_{t \geq t_0} \|K(t)\|$$

ersetzen, da in allen Lebesgue-Punkten t (also für fast alle t ; siehe, z.B., [10: Theorem 7.7])

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} \|K(\xi)\| d\xi = \|K(t)\|$$

ist. Es gelten stets die Abschätzungen $\omega_0^* \leq \omega_0^{**}$ und $\|K\|^* \leq \|K\|^{**}$, wobei in ihnen strikte Ungleichheit auftreten kann.

Lemma 3. Falls der Ljapunov-Bohl-Exponent der Differentialgleichung (5) mit dem Multiplikationsoperator (3) endlich ist, ist er durch ω_0^* gegeben. Falls $\omega_0^{**} < \infty$ ist, so ist dieser Exponent endlich, und der Cauchy-Operator U_0 erfüllt die Abschätzung

$$\|U_0(t, \tau)\| \leq e^{\omega_0^{**}(t-\tau)}. \tag{25}$$

Beweis. In den angegebenen Räumen gilt

$$U_0(t, \tau)x(s) = \left(\exp \int_{\tau}^t c(\xi, s) d\xi \right) x(s) \tag{26}$$

und

$$\|U_0(t, \tau)\| = \operatorname{ess\,sup}_{s \in [a, b]} \left(\exp \int_{\tau}^t c(\xi, s) d\xi \right).$$

Hieraus folgt sofort die Behauptung ■

Aus den obigen Lemmata ergeben sich nun die beiden folgenden Sätze.

Satz 1. *Unter den Voraussetzungen (17) und (18) sind die Ljapunov-Bohl-Exponenten ω^* der Gleichung (13) und ω_0^* der Gleichung (12) endlich, und es gilt*

$$\omega^* \leq \omega_0^* + \|K\|^*. \quad (27)$$

Beweis. Wir zeigen (27). Zu $\varepsilon > 0$ gibt es $T_1, T_2 \geq 0$, so daß

$$\frac{\log \|U_0(t, \tau)\|}{t - \tau} \leq \omega_0^* + \varepsilon \quad (T_1 \leq \tau \leq t - T_2),$$

also

$$\|U_0(t, \tau)\| \leq e^{(\omega_0^* + \varepsilon)(t - \tau)} \quad (T_1 \leq \tau \leq t - T_2)$$

ist. Wir benutzen Lemma 1 für $M = 1$ und $\delta = \omega_0^* + \varepsilon$ und erhalten

$$\|U(t, \tau)\| \leq \gamma(\tau) \exp \left\{ (\omega_0^* + \varepsilon)(t - \tau) + \int_{\tau}^t \|K(\xi)\| d\xi \right\} \quad (T_1 \leq \tau \leq t - T_2).$$

Aus der Definition (11) von ω^* und der Beschränktheit von γ (siehe Lemma 2) folgt dann die Behauptung ■

Falls wir auf die Voraussetzungen (17) und (18) verzichten wollen, müssen wir fordern, daß ω^* endlich ist und erhalten im folgenden Satz nur schwächere Abschätzungen.

Satz 2. *Falls der Ljapunov-Bohl-Exponent ω^* der Gleichung (13) endlich ist, gilt*

$$\omega^* \leq \omega_0^{**} + \|K\|^* \quad (28)$$

$$\omega^* \leq \omega_0^* + \|K\|^{**}. \quad (29)$$

Beweis. Wir zeigen (28). Wegen (25) können wir Lemma 1 für $\delta = \omega_0^{**}$, $M = 1$, $T_1 = t_0$ und $T_2 = 0$ anwenden und erhalten für gegebenes $\varepsilon > 0$

$$\|U(t, \tau)\| \leq \exp \left(\omega_0^{**}(t - \tau) + (\|K\|^* + \varepsilon)(t - \tau) \right)$$

falls τ und $t - \tau$ groß genug sind. Die Behauptung folgt dann wieder aus der Definition (11) von ω^* . Die Abschätzung (29) zeigt man analog durch Vertauschen der Rollen von C und K unter Benutzung von (20) anstelle von (25) ■

Die Definitionen (21) - (24) zeigen, daß ω_0^* und ω_0^{**} nur von der Multiplikatorfunktion c abhängen, aber nicht vom unterliegenden Banach-Raum X , während $\|K\|^*$ und $\|K\|^{**}$ nicht nur von der Kernfunktion k , sondern auch von X abhängen. Haben wir in irgendeinem Banach-Raum X die Abschätzung $\|K\|^* < -\omega_0^{**}$ oder $\|K\|^{**} < -\omega_0^*$ bewiesen, so wissen wir nach Satz 2, daß die triviale Lösung der Differentialgleichung (13) asymptotisch stabil in X ist, falls $\omega^* < \infty$ ist. Wir illustrieren dies anhand der beiden folgenden Beispiele.

Beispiel 1. Sei $X = C([a, b])$. Nach bekannten Formeln über die Norm eines Integraloperators (siehe, z.B., [12]) gilt dann

$$\|K\|^* = \limsup_{\substack{\tau \rightarrow \infty \\ t - \tau \rightarrow \infty}} \frac{1}{t - \tau} \int_{\tau}^t \sup_{s \in [a, b]} \int_a^b |k(\xi, s, \sigma)| d\sigma d\xi$$

$$\|K\|^{**} = \operatorname{ess\,sup}_{t \geq t_0} \sup_{s \in [a, b]} \int_a^b |k(t, s, \sigma)| d\sigma.$$

Dies läßt sich in vielen Fällen explizit berechnen und liefert damit eine hinreichende Bedingung für die asymptotische Stabilität der Gleichung (13) in $C([a, b])$.

Beispiel 2. Sei $X = L_p([a, b])$ ($1 \leq p \leq \infty$). Für $p = \infty$ gilt ähnlich wie im vorigen Beispiel

$$\|K\|^* = \limsup_{\substack{\tau \rightarrow \infty \\ t - \tau \rightarrow \infty}} \frac{1}{t - \tau} \int_{\tau}^t \operatorname{ess\,sup}_{s \in [a, b]} \int_a^b |k(\xi, s, \sigma)| d\sigma d\xi$$

$$\|K\|^{**} = \operatorname{ess\,sup}_{t \geq t_0} \operatorname{ess\,sup}_{s \in [a, b]} \int_a^b |k(t, s, \sigma)| d\sigma,$$

während für $p = 1$ die "dualen" Formeln

$$\|K\|^* = \limsup_{\substack{\tau \rightarrow \infty \\ t - \tau \rightarrow \infty}} \frac{1}{t - \tau} \int_{\tau}^t \operatorname{ess\,sup}_{\sigma \in [a, b]} \int_a^b |k(\xi, s, \sigma)| ds d\xi$$

$$\|K\|^{**} = \operatorname{ess\,sup}_{t \geq t_0} \operatorname{ess\,sup}_{\sigma \in [a, b]} \int_a^b |k(t, s, \sigma)| ds$$

gelten. Im Fall $1 < p < \infty$ sind keine expliziten Formeln für die Norm des Integraloperators (7) angebar. Man kann aber, z.B., die oberen Abschätzungen

$$\|K\|^* \leq \limsup_{\substack{\tau \rightarrow \infty \\ t - \tau \rightarrow \infty}} \frac{1}{t - \tau} \int_{\tau}^t \|k(\xi, \cdot, \cdot)\|_{Z_p} d\xi$$

$$\|K\|^{**} \leq \operatorname{ess\,sup}_{t \geq t_0} \|k(t, \cdot, \cdot)\|_{Z_p}$$

benutzen, wobei $\|\cdot\|_{Z_p}$ die Norm der Zaanen-Kernklasse Z_p bezeichnet (siehe [14]).

2. Der Ljapunov-Bohl-Exponent im nichtlinearen Fall

Nun betrachten wir die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = A(t, x) \quad (30)$$

in einem Banach-Raum X . Sei t_0 fest. Wir nennen (30) bezüglich einer Lösung x_0 *Ljapunov-Bohl-stabil* zum Exponenten ν mit den Konstanten $N, \rho > 0$, falls

$$\|x(t) - x_0(t)\| \leq N e^{\nu(t-\tau)} \|x(\tau) - x_0(\tau)\| \quad (31)$$

für alle Lösungen x der Gleichung (30) mit $\|x(t_0) - x_0(t_0)\| \leq \rho$ und all diejenigen $t > \tau \geq t_0$ gilt, für die $x(t)$ definiert ist. Im linearen Fall (9) kann ρ beliebig gewählt werden.

Den *Ljapunov-Bohl-Exponenten* $\omega_{x_0}^*$ der Gleichung (30) (bez. x_0) definieren wir als das Infimum aller Exponenten ν , für die (30) Ljapunov-Bohl-stabil mit geeigneten Konstanten N und ρ ist.

Im Spezialfall $A(t, 0) = 0$ können wir für $x_0(t) \equiv 0$ auch (31) durch die einfachere Formel (10) ersetzen. Im linearen Fall ist $\omega_{x_0}^*$ unabhängig von x_0 , und für $x_0(t) \equiv 0$ erhalten wir die alte Definition.

Wie oben betrachten wir die Gleichung

$$\frac{dx}{dt} = C(t)x + K(t, x) \quad (32)$$

(mit $K(t, x)$ gemäß (4)) zusammen mit der ungestörten Gleichung

$$\frac{dx}{dt} = C(t)x. \quad (33)$$

Der folgende Satz wurde in [7: Theorem VII.3.1] für den Spezialfall $K(t, 0) = 0$, $x_0(t) \equiv 0$ bewiesen. Wir können uns nicht mit derselben Begründung wie dort auf diesen Spezialfall zurückziehen, da (30) bei der in [7: Chapter VII, §1.2] beschriebenen Transformation die Eigenschaft verliert, daß der lineare Teil ein Multiplikationsoperator ist. Dennoch funktioniert ein ähnlicher Beweis.

Wir nehmen an, daß C in $\mathcal{L}(X)$ lokal integrierbar ist und daß

$$\|K(t, x(t)) - K(t, x_0(t))\| \leq \eta(t) \|x(t) - x_0(t)\| \quad (t \geq t_0) \quad (34)$$

für alle stetigen $x : [t_0, \infty) \rightarrow X$ mit $\|x(t) - x_0(t)\| \leq \rho$ gilt, wobei η lokal integrierbar und für ein $\tau_0 > 0$

$$q = \sup_{t \geq t_0} \frac{1}{\tau_0} \int_t^{t+\tau_0} \eta(\tau) d\tau < \infty \quad (35)$$

ist. Außerdem sei die Abbildung $t \mapsto K(t, x(t))$ für die angegebenen Funktionen x stetig.

Satz 3. *Es mögen die Bedingungen (34) und (35) gelten. Falls die Nulllösung der ungestörten Gleichung (33) Ljapunov-Bohl-stabil zum Exponenten $\nu_0 < 0$ mit der Konstanten N_0 und falls $\nu = \nu_0 + N_0q < 0$ ist mit q gemäß (35), so ist auch die nichtlineare Gleichung (32) bezüglich x_0 Ljapunov-Bohl-stabil zum Exponenten ν .*

Beweis. Wir zeigen, daß (31) für $A(t, x) = C(t)x + K(t, x)$ gilt für die Konstanten $N = N_0e^{N_0q\tau_0}$ und $\rho > 0$ mit $\rho < \rho_0/N$ und $\rho < \rho_0$. Sei x eine Lösung von (32) mit $\|x(\tau) - x_0(\tau)\| \leq \rho$. Für ein $T > 0$ gilt dann

$$\|x(t) - x_0(t)\| < \rho_0 \quad (\tau \leq t < \tau + T). \tag{36}$$

Sei wie oben U_0 der Cauchy-Operator von (33). Dann ist

$$x(t) = U_0(t, \tau)x(\tau) + \int_{\tau}^t U_0(t, s)K(s, x(s)) ds$$

$$x_0(t) = U_0(t, \tau)x_0(\tau) + \int_{\tau}^t U_0(t, s)K(s, x_0(s)) ds.$$

Da nach Voraussetzung $\|U_0(t, \tau)\| \leq N_0e^{\nu_0(t-\tau)}$ ($t \geq \tau$) ist, folgt mit (34)

$$\|x(t) - x_0(t)\| \leq N_0e^{\nu_0(t-\tau)}\|x(\tau) - x_0(\tau)\|$$

$$+ \int_{\tau}^t N_0e^{\nu_0(t-s)}\eta(s)\|x(s) - x_0(s)\| ds \quad (\tau \leq t < \tau + T).$$

Nach dem Gronwall-Lemma folgt wegen $\nu_0 < 0$

$$\|x(t) - x_0(t)\| \leq N_0e^{\nu_0(t-\tau)}\|x(\tau) - x_0(\tau)\| \exp \int_{\tau}^t N_0\eta(s) ds \quad (\tau \leq t < \tau + T),$$

also nach (35)

$$\|x(t) - x_0(t)\|$$

$$\leq N_0\|x(\tau) - x_0(\tau)\|e^{\nu_0(t-\tau)} \exp \left[\left(\frac{t-\tau}{\tau_0} + 1 \right) \tau_0qN_0 \right] \quad (\tau \leq t \leq \tau + T) \tag{37}$$

$$= Ne^{\nu(t-\tau)}\|x(\tau) - x_0(\tau)\|$$

$$\leq \rho_0e^{\nu(t-\tau)}.$$

Wir haben mithin gezeigt, daß aus (36) stets (37) folgt. Dies zeigt aber, daß die Voraussetzung (36) sogar für alle $T > 0$ erfüllt ist. In der Tat, wäre das Supremum T^* aller T , für die (36) gilt, endlich, so gälte (37) aus Stetigkeitsgründen auch noch für $t = \tau + T^*$. Dann müßte aber (36) auch noch für ein $T > T^*$ gelten. Folglich gilt (37) für alle $t \geq \tau$ ■

Wir wollen dieses Ergebnis auf die Barbashin-Gleichung (1) anwenden. Den Ljapunov-Bohl-Exponenten der ungestörten Gleichung können wir (falls er endlich ist) nach Lemma 3 gemäß (21) berechnen. Das Problem besteht also darin, die Bedingungen (34) und (35) zu überprüfen. Dazu halten wir t in (34) fest und überlegen uns Kriterien, für welche $\eta(t)$ die Bedingung (34) erfüllbar ist.

Betrachten wir zunächst die Räume $X = C([a, b])$ und $X = L_\infty([a, b])$. Dann ist (34) sicherlich erfüllt, falls

$$\eta(t) \geq \operatorname{ess\,sup}_{s \in [a, b]} \int_a^b \sup_{|u - x_0(t, \sigma)| \leq \rho} \frac{|k(t, s, \sigma, u) - k(t, s, \sigma, x_0(t, \sigma))|}{|u - x_0(t, \sigma)|} d\sigma \quad (38)$$

gilt. Diese Abschätzung ist im allgemeinen nicht "scharf", selbst wenn alle auftretenden Funktionen glatt sind, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 3. Sei $[a, b] = [-1, 1]$, $k(t, s, \sigma, u) = \sigma u^2$, $x_0(t) \equiv 0$ und $\rho = 1$. Dann gilt (34) mit $\eta(t) = \frac{1}{2}$, denn für $x(t) = y(t, \cdot)$ ist

$$\|K(t, x(t)) - K(t, x_0(t))\| = \left| \int_{-1}^1 \sigma y^2(t, \sigma) d\sigma \right| \leq \frac{1}{2} \|x(t)\|$$

für $\|x(t)\| \leq 1$. Die Abschätzung (38) liefert aber nur 1 auf der rechten Seite.

Die Situation ändert sich, wenn wir fordern, daß (34) für alle Werte $x(t)$, $x_0(t)$ mit $\|x(t) - x_0(t)\| \leq \rho$ und $\|x(t)\|, \|x_0(t)\| \leq r$ gelten möge (also wenn insbesondere jede durch r beschränkte Lösung stabil sein soll). In diesem Fall ist (34) eine Lipschitz-Bedingung an einen Uryson-Operator, und in [4] werden hierfür das in $C([a, b])$ notwendige und hinreichende Kriterium

$$\eta(t) \geq \sup_{s \in [a, b]} \int_a^b \sup_{\substack{|u|, |v| \leq r \\ |u - v| \leq \rho}} \frac{|k(t, s, \sigma, u) - k(t, s, \sigma, v)|}{|u - v|} d\sigma$$

sowie das in $L_\infty([a, b])$ ebenfalls notwendige und hinreichende Kriterium (falls k eine Carathéodory-Bedingung erfüllt)

$$\eta(t) \geq \lim_{\delta \rightarrow 0} \operatorname{ess\,sup}_{s \in [a, b]} \int_a^b \sup_{\substack{|u|, |v| \leq r \\ |u - v| \leq \delta}} \frac{|k(t, s, \sigma, u) - k(t, s, \sigma, v)|}{\delta} d\sigma$$

bewiesen. Im Raum $X = L_p([a, b])$ ($1 \leq p < \infty$) ist die Bedingung

$$|k(t, s, \sigma, u) - k(t, s, \sigma, x_0(t, \sigma))| \leq \frac{\eta(t)}{b - a} |u - x_0(t, \sigma)| \quad (t \geq t_0; s, \sigma \in [a, b]) \quad (39)$$

natürlich hinreichend für (34).

Wir betrachten im folgenden nur den Spezialfall $[a, b] = [0, 1]$, $x_0(t) \equiv 0$ und $k(t, s, \sigma, 0) \equiv 0$. Dann wird (39) zu der Wachstumsbedingung

$$|k(t, s, \sigma, u)| \leq \eta(t) |u|. \quad (40)$$

Wir bemerken, daß auch hier die Funktion η in (40) größer sein kann als diejenige in (34), wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 4. Sei $[a, b] = [0, 1]$ und $k(t, s, \sigma, u) = s^{\alpha/p}|u|$ mit $1 \leq p < \infty$ und $\alpha > 0$. Dann erfüllt k für $s \in [0, 1]$ die Bedingung (40) nur für $\eta(t) \geq 1$, aber in $L_p([0, 1])$ ist für $x(t) = y(t, \cdot)$

$$\|K(t, x(t))\|^p \leq \int_0^1 \int_0^1 s^\alpha |y(t, \sigma)|^p d\sigma ds = \frac{1}{\alpha + 1} \|x(t)\|^p,$$

und die Funktion $\eta(t) \equiv (\alpha + 1)^{-1/p}$ kann für $\alpha \rightarrow \infty$ beliebig klein gemacht werden.

In unserem Spezialfall folgt also aus (40) zwar (34), aber aus der Wachstumsbedingung (34) für den Uryson-Operator kann man nicht auf eine entsprechende Wachstumsbedingung (40) für die erzeugende Kernfunktion schließen. Für den Superpositionsoperator ist ein ähnlicher Sachverhalt schon lange bekannt (siehe [2]). Für den Uryson-Operator kann man obiges Beispiel sogar noch verschärfen – aus (34) folgt nicht einmal, daß es Funktionen ξ und η gibt, so daß die Wachstumsbedingung

$$|k(t, s, \sigma, u)| \leq \xi(t, \sigma) + \eta(t, \sigma)|u| \tag{41}$$

erfüllt ist.

Beispiel 5. Sei $[a, b] = [0, 1]$ und

$$k(t, s, \sigma, u) = \begin{cases} s^{(|u|-1)/2p}|u| & \text{für } |u| \leq 1 \\ |u| & \text{für } |u| \geq 1. \end{cases}$$

Dann erfüllt k für $s \in [0, 1]$ die Bedingung (41) nicht, aber in $L_p([0, 1])$ ist für $x(t) = y(t, \cdot)$ wegen $|k(t, s, \sigma, u)| \leq s^{-1/2p}|u|$ nach Hölder

$$\|K(t, x(t))\|^p \leq \left(\int_0^1 s^{-1/2} ds \right) \left(\int_0^1 |y(t, \sigma)| d\sigma \right)^p = 2 \|x(t)\|_{L_1}^p \leq 2 \|x(t)\|_{L_p}^p,$$

d.h. (34) gilt mit $\eta(t) \equiv 2^{1/p}$. Dieses Beispiel ist insofern schwächer als das vorhergehende, als (40) zumindest für große $|u|$ erfüllt ist.

Die Beispiele 4 und 5 zeigen, daß selbst im betrachteten Spezialfall eine reine Wachstumsbedingung an k nicht zugleich notwendig und hinreichend für das Erfülltsein von (34) sein kann.

Falls wir wieder fordern wollen, daß (34) für alle Werte $x, x_0 \in L_p([a, b])$ gilt, erhalten wir wieder eine Lipschitz-Bedingung für einen Uryson-Operator, die in [9] untersucht wurde – nach dem dortigen Ergebnis ist (falls k eine Carathéodory-Bedingung erfüllt)

$$\|K(t, x(t)) - K(t, x_0(t))\|_{L_p} \leq \eta^*(t) \|x(t) - x_0(t)\|_{L_1}$$

äquivalent dazu, daß für alle meßbaren $D \subseteq [a, b]$ und alle u die Abschätzung

$$\sup_{h \neq 0} \left(\int_a^b \left| \int_D \frac{k(t, s, \sigma, u+h) - k(t, s, \sigma, u)}{h} d\sigma \right|^p ds \right)^{1/p} \leq \eta^*(t) \text{mes } D \tag{42}$$

gilt. Insbesondere ist dann für unsere Anwendung hinreichend (und zumindest im Fall $p = 1$ auch notwendig), daß (42) für $\eta(t) = (b - a)^{(p-1)/p} \eta^*(t)$ erfüllt ist.

3. Greensche Funktion und beschränkte Lösungen

Wir nennen die lineare Differentialgleichung (9) in einem Banach-Raum X *exponentiell dichotom*, wenn es ein t_0 und abgeschlossene Unterräume X_1 und X_2 mit $X = X_1 \oplus X_2$ sowie Konstanten $N_k > 0$ und $\nu_k < 0$ ($k = 1, 2$) gibt, die folgendes erfüllen:

1. Für alle Lösungen x von (9) mit $x(t_0) \in X_1$ gilt

$$\|x(t)\| \leq N_1 e^{\nu_1(t-\tau)} \|x(\tau)\| \quad (t \geq \tau). \quad (43)$$

2. Für alle Lösungen x von (9) mit $x(t_0) \in X_2$ gilt

$$\|x(t)\| \leq N_2 e^{\nu_2(\tau-t)} \|x(\tau)\| \quad (t \leq \tau). \quad (44)$$

3. Ist P_k der zur Zerlegung $X = X_1 \oplus X_2$ gehörende Projektor von X auf X_k ($k = 1, 2$) und U Cauchy-Operator von (9), so hat die Operatorfamilie $\{U(t, t_0)P_k U(t_0, t)\}_t$ gleichmäßig beschränkte Operatornorm, d.h.

$$\sup_t \|U(t, t_0)P_k U(t_0, t)\| < \infty \quad (k = 1, 2). \quad (45)$$

Die letzte Bedingung ist überflüssig, falls (19) gilt (siehe [7: Lemma IV.3.2]). Für unsere Zwecke wird sich herausstellen, daß diese Bedingung immer überflüssig ist. Für exponentiell dichotome Differentialgleichungen können wir die *Greensche Funktion*

$$G(t, \tau) = \begin{cases} U(t, t_0)P_1 U(\tau, t_0)^{-1} & \text{falls } t > \tau \\ -U(t, t_0)P_2 U(\tau, t_0)^{-1} & \text{falls } t < \tau \end{cases} \quad (46)$$

definieren. Es gilt dann

$$\gamma = \sup_t \int_{-\infty}^{+\infty} \|G(t, \tau)\| d\tau \leq \left| \frac{N_1}{\nu_1} + \frac{N_2}{\nu_2} \right|. \quad (47)$$

Wir werden G bald explizit angeben. Zunächst beweisen wir allerdings einen Satz, der im wesentlichen in [7: Theorem VII.4.1] für stationäres $C(t) = C$ bewiesen wurde und laut einer Bemerkung dort (allerdings ohne Beweis) auch allgemein gilt.

Satz 4. Sei (33) *exponentiell dichotom*, $0 < q < \gamma^{-1}$ und $\rho > 0$. Sei K stetig mit

$$\|K(t, u)\| \leq \frac{\rho}{\gamma} \quad (\|u\| \leq \rho) \quad (48)$$

$$\|K(t, u) - K(t, v)\| \leq q\|u - v\| \quad (\|u\|, \|v\| \leq \rho). \quad (49)$$

Dann hat die gestörte Gleichung (32) genau eine auf der reellen Achse durch ρ beschränkte Lösung.

Beweis. Wir betrachten auf der Kugel $B_\rho = \{x \in C(X) : \|x(t)\| \leq \rho\}$ den Hammerstein-Operator

$$Hx(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, \tau) K(\tau, x(\tau)) d\tau.$$

Da H die Kugel B_ρ wegen (47) und (48) in sich abbildet, sind nach [7: Theorem IV.3.2] die Fixpunkte von H durch ρ beschränkte Lösungen von (32). Ist umgekehrt $x \in B_\rho$ Lösung von (32), so ist die durch $f(t) = K(t, x(t))$ gegebene Funktion f stetig und beschränkt. Da die auf $[t_0, \infty)$ beschränkten Lösungen der homogenen Gleichung (33) genau diejenigen mit $x(t_0) \in X_1$ und die auf $(-\infty, t_0]$ beschränkten diejenigen mit $x(t_0) \in X_2$ sind (siehe [7: S. 164]), hat die inhomogene Gleichung

$$\frac{dx}{dt} = C(t)x + f(t) \quad (50)$$

höchstens eine beschränkte Lösung. Eine solche ist nach [7: Theorem IV.3.2] durch

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, \tau) f(\tau) d\tau$$

gegeben, d.h. x ist Fixpunkt von H . Es bleibt also zu zeigen, daß H einen eindeutigen Fixpunkt besitzt. Wegen (49) und $q\gamma < 1$ ist H aber kontrahierend ■

Für unsere Barbashin-Gleichung (1) ist (49) wieder eine Lipschitz-Bedingung an einen Uryson-Operator.

Für den Multiplikationsoperator (3) läßt sich exponentielle Dichotomie leicht überprüfen und sogar die Greensche Funktion explizit angeben.

Satz 5. Sei X gleich $C([a, b])$ oder ein idealer Raum über $[a, b]$ mit vollem Träger. Genau dann ist (33) exponentiell dichotom in X , wenn sich $[a, b]$ in zwei meßbare Mengen $S_1, S_2 \subseteq [a, b]$ zerlegen läßt (d.h. $S_1 \cup S_2 = [a, b]$ und $\text{mes}(S_1 \cap S_2) = 0$), so daß

$$\text{ess sup}_{s \in S_1} \frac{1}{t - \tau} \int_{\tau}^t c(\xi, s) d\xi \leq \frac{M_1}{t - \tau} + \nu_1 \quad (t > \tau) \quad (51)$$

$$\text{ess inf}_{s \in S_2} \frac{1}{\tau - t} \int_t^{\tau} c(\xi, s) d\xi \geq \frac{M_2}{\tau - t} - \nu_2 \quad (t < \tau) \quad (52)$$

mit geeigneten Konstanten M_k und $\nu_k < 0$ ($k = 1, 2$) gilt. In diesem Fall sind die Bedingungen (43) und (44) mit $N_k = \exp M_k$ erfüllt. Die Räume $X_k = \{x \in X : \text{supp } x \subseteq S_k\}$ sind unabhängig von t_0 , und die Greensche Funktion (46) läßt sich als

$$G(t, \tau)x(s) = \begin{cases} \left(\exp \int_{\tau}^t c(\xi, s) d\xi \right) x(s) & \text{falls } t > \tau, s \in S_1 \\ - \left(\exp \int_{\tau}^t c(\xi, s) d\xi \right) x(s) & \text{falls } t < \tau, s \in S_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

schreiben.

Beweis. Sei (33) zunächst exponentiell dichotom und sei U_0 der Cauchy-Operator von (33). Aus (44) folgt, daß für alle Lösungen x mit $x(t_0) \in X_2$

$$\|U_0(t_0, t)x(t)\| \leq N_2 e^{\nu_2(t-t_0)} \|x(t)\| \quad (t \geq t_0)$$

gilt. Setzen wir $X_2(t) = \{U_0(t, t_0)x_0 : x_0 \in X_2\}$, so folgt wegen der Äquivalenz der Inklusionen $x(t) \in X_2(t)$ und $x(t_0) \in X_2$ die Abschätzung

$$\|U_0(t_0, t)\|_{\mathcal{L}(X_2(t), X)} \leq N_2 e^{\nu_2(t-t_0)} \quad (t \geq t_0).$$

Analog erhalten wir aus (43), daß

$$\|U_0(t, t_0)\|_{\mathcal{L}(X_1, X)} \leq N_1 e^{\nu_1(t-t_0)} \quad (t \geq t_0)$$

ist. Sei $S_k = \text{supp } X_k$, $S_2(t) = \text{supp } X_2(t)$ und $S(t) = S_1 \cap S_2(t)$. Da U_0 in den angegebenen Räumen der Multiplikationsoperator (26) ist, haben wir

$$\begin{aligned} \|U_0(t, t_0)\|_{\mathcal{L}(X_1, X)} &\geq \exp \left(\text{ess sup}_{s \in S(t)} \int_{t_0}^t c(\xi, s) d\xi \right) \\ \|U_0(t_0, t)\|_{\mathcal{L}(X_2(t), X)} &\geq \exp \left(\text{ess sup}_{s \in S(t)} \left[-\int_{t_0}^t c(\xi, s) d\xi \right] \right) = \exp \left(-\text{ess inf}_{s \in S(t)} \int_{t_0}^t c(\xi, s) d\xi \right). \end{aligned}$$

Falls $\text{mes } S(t) > 0$ für alle $t \geq t_0$ wäre, ergäbe dies zusammen

$$\begin{aligned} \frac{e^{-\nu_2(t-t_0)}}{N_2} &\leq \exp \left(\text{ess inf}_{s \in S(t)} \int_{t_0}^t c(\xi, s) d\xi \right) \\ &\leq \exp \left(\text{ess sup}_{s \in S(t)} \int_{t_0}^t c(\xi, s) d\xi \right) \leq N_1 e^{\nu_1(t-t_0)} \end{aligned}$$

was nicht möglich ist. Für ein gewisses $t \geq t_0$ ist also $\text{mes } S(t) = 0$. Da $U_0(t_0, t)$ ein Multiplikationsoperator ist, ist $\text{supp } X_2 \subseteq \text{supp } X_2(t) = S_2(t)$, also $S_1 \cap S_2 \subseteq S(t)$ und daher $\text{mes}(S_1 \cap S_2) = 0$. Es folgen (51) und (52) mit $M_k = \log N_k$.

Seien umgekehrt (51) und (52) erfüllt und X_k wie im Satz angegeben. Dann ist $X = X_1 \oplus X_2$ und $P_k x(s) = \chi_{S_k}(s)x(s)$ (für ideale Räume ist dies trivial, und für $X = C([a, b])$ ist nach der nachfolgenden Bemerkung $X_1 = \{0\}$ oder $X_2 = \{0\}$). Es folgt

$$U_0(t, t_0)P_k U_0(t_0, t)x(s) = \chi_{S_k}(s)x(s),$$

also $\|U_0(t, t_0)P_k U_0(t_0, t)\| \leq 1$, und aus (51) und (52) folgen (43) und (44). Also ist (33) exponentiell dichotom ■

Man beachte, daß sich Satz 5 für $X = C([a, b])$ besonders vereinfacht: in diesem Fall folgt aus (51) und (52) nämlich sogar, daß $X_1 = \{0\}$ oder $X_2 = \{0\}$ sein muß. In der Tat, wegen $C(\xi) \in \mathcal{L}(X)$ ist $c(\xi, \cdot)$ stetig und $|c(\xi, s)| \leq \|C(\xi)\|$. Man wähle $t > \tau$ so, daß $\frac{M_1}{t-\tau} \leq -\frac{\nu_1}{2}$ und $\frac{M_2}{t-\tau} \geq \frac{\nu_2}{2}$ ist. Nach dem Satz von Lebesgue mit integrierbarer Majorante $\xi \mapsto \|C(\xi)\|$ ist

$$f(s) = \frac{1}{t-\tau} \int_{\tau}^t c(\xi, s) d\xi$$

stetig. Aus (51) und (52) folgt $f(s) \leq \frac{\nu_1}{2}$ für $s \in S_1$ und $f(s) \geq -\frac{\nu_2}{2}$ für $s \in S_2$. Wegen $\nu_k < 0$ ist dies nur möglich, wenn $S_1 = \emptyset$ oder $S_2 = \emptyset$ ist.

Im Falle des konstanten Multiplikationsoperators $(C(t)x)(s) = (Cx)(s) = c(s)x(s)$ in $C([a, b])$ (also mit stetigem c) besagt Satz 5, daß (33) exponentiell dichotom genau dann ist, wenn c nullstellenfrei ist, d.h. wenn alle Werte von c (und damit das Spektrum von C) nur auf der positiven oder nur auf der negativen reellen Achse liegen.

Ein hinreichendes Kriterium für die Existenz einer Greenschen Funktion wird in [3] angegeben. Dieses ist sogar hinreichend für exponentielle Dichotomie, wie das folgende Lemma zeigt.

Lemma 4. Sei X gleich $C([a, b])$ oder ein idealer Raum über $[a, b]$. Falls der Grenzwert

$$c_0(s) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} c(\xi, s) d\xi$$

gleichmäßig und unabhängig von t existiert mit $0 < m \leq |c_0(s)| \leq M < \infty$, so ist (33) exponentiell dichotom.

Beweis. Wir benutzen Satz 5 für $S_1 = \{s : c_0(s) < 0\}$ und $S_2 = \{s : c_0(s) > 0\}$. Wir zeigen (51). Zu $0 < \varepsilon < m$ gibt es ein $T_0 > 0$ mit

$$-M - \varepsilon \leq \frac{1}{T} \int_t^{t+T} c(\xi, s) d\xi \leq -m + \varepsilon = \nu_1 < 0 \quad (s \in S_1, T \geq T_0). \tag{53}$$

Im Falle $t - \tau > T_0$ und Lösungen x mit $x(\tau) \in X_1$ ist

$$\|x(t)\| \leq \operatorname{ess\,sup}_{s \in S_1} \left(\exp \int_{\tau}^t c(\xi, s) d\xi \right) \|x(\tau)\| \leq e^{\nu_1(t-\tau)} \|x(\tau)\|.$$

Im Falle $0 < t - \tau \leq T_0$ haben wir für $T = t - \tau + T_0$ nach (53)

$$\int_{\tau}^{t+T_0} c(\xi, s) d\xi \leq T\nu_1 \leq 2T_0\nu_1$$

und daher

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \operatorname{ess\,sup}_{s \in S_1} \left(\exp \int_{\tau}^{t+T_0} c(\xi, s) d\xi \right) \left(\exp \int_{t+T_0}^t c(\xi, s) d\xi \right) \|x(\tau)\| \\ &\leq e^{2T_0\nu_1} e^{T_0(M+\epsilon)} \|x(\tau)\| \quad (0 \leq t - \tau \leq T_0) \\ &\leq e^{T_0(\nu_1+M+\epsilon)} e^{\nu_1(t-\tau)} \|x(\tau)\|. \end{aligned}$$

Die Abschätzung (52) folgt analog ■

Die Bedingung (48) ist in $X = C([a, b])$ und $X = L_\infty([a, b])$ natürlich erfüllt, falls

$$\int_a^b \sup_{|u| \leq \rho} |k(t, s, \sigma, u)| d\sigma \leq \frac{\rho}{\gamma} \tag{54}$$

gilt. Dies ist allerdings nicht notwendig, wie das Beispiel $k(t, s, \sigma, u) = \rho\gamma^{-1} \sin \sigma$ auf $[0, 2\pi]$ zeigt.

In allen regulären idealen Räumen (zum Beispiel in $L_p([a, b])$ mit $1 \leq p < \infty$) ist die Bedingung

$$\left\| \int_D k(t, \cdot, \sigma, u) d\sigma \right\| \leq \frac{\rho \operatorname{mes} D}{\gamma (b-a)} \quad (|u| \| \chi_D \| \leq \rho) \tag{55}$$

hinreichend – für einfache Funktionen

$$u(s) = \sum_{i=1}^n u_i \chi_{D_i}(s)$$

mit paarweise disjunkten Trägern D_i mit $D_1 \cup \dots \cup D_n = [a, b]$ ist nämlich $|u_i| \| \chi_{D_i} \| \leq \|u\| \leq \rho$ und daher

$$\left\| \int_a^b k(t, \cdot, \sigma, u(\sigma)) d\sigma \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n \int_{D_i} k(t, \cdot, \sigma, u_i) d\sigma \right\| \leq \sum_{i=1}^n \frac{\rho \operatorname{mes} D_i}{\gamma (b-a)} = \frac{\rho}{\gamma}.$$

Falls u keine einfache Funktion ist, approximieren wir u punktweise durch einfache Funktionen u_n mit $|u_n| \leq |u|$. In regulären Räumen folgt $\|u - u_n\| \rightarrow 0$ und daher

$$\|K(t, u)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|K(t, u_n)\| \leq \frac{\rho}{\gamma}$$

aufgrund der Stetigkeit von $K(t, \cdot)$. Die Bedingung (55) ist wieder nicht notwendig, wie unser letztes Beispiel zeigen wird.

Beispiel 6. Sei $[a, b] = [0, 1]$ und $k(t, s, \sigma, u) = 2\rho\gamma^{-1} \chi_{[0, 1/2]}(\sigma)$. Dann erfüllt der durch k erzeugte Operator K die Abschätzung (48) in jedem Raum $L_p([0, 1])$ ($1 \leq p < \infty$). Für $D = [0, \frac{1}{2}]$ ist aber

$$\left\| \int_0^{1/2} k(t, \cdot, \sigma, u) d\sigma \right\|_{L_p} = \frac{\rho}{\gamma},$$

während die rechte Seite von (55) nur $\frac{\rho}{2\gamma}$ ist.

References

- [1] Agekjan, T. A.: *Probability Theory for Astronomers and Physicists* (in Russian). Moscow: Nauka 1974.
- [2] Appell, J.: *Implicit functions, nonlinear integral equations, and the measure of noncompactness of the superposition operator*. J. Math. Anal. Appl. 83 (1981), 251 - 263.
- [3] Appell, J., De Pascale, E. und O. W. Diallo: *La fonction de Green pour des équations intégral-différentielles de type Barbachine*. Rend. Acad. Sci. Lomb. A-127 (1993), 1 - 11.
- [4] Appell, J., De Pascale, E. und P. P. Zabrejko: *On the application of the Newton-Kantorovich method to nonlinear integral equations of Uryson type*. Numer. Funct. Anal. Optimiz. 12 (1991), 271 - 283.
- [5] Brack, G.: *Systems with substantially distributed parameters*. Math. Res. 27 (1985), 421 - 424.
- [6] Case, K. M. und P. F. Zweifel: *Linear Transport Theory*. Reading, Mass.: Addison-Wesley 1967.
- [7] Daletskii, Ju. L. und M. G. Krein: *Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space* (Transl. Math. Monographs: Vol.43). Providence, R.I.: Amer. Math. Soc. 1974.
- [8] Minin, I. N.: *Theory of Radiation Transfer in the Atmosphere of Planets* (in Russian). Moscow: Nauka 1988.
- [9] Nurekenov, T. K.: *Necessary and sufficient conditions for a superposition or Uryson operator to satisfy a Lipschitz condition* (in Russian). Izv. Akad. Nauk Kaz. 1459 (1981), 2 - 13.
- [10] Rudin, W.: *Real and Complex Analysis*. New York: McGraw-Hill 1966.
- [11] Sobolev, V. V.: *The Transfer of Radiation Energy in the Atmosphere of Stars and Planets* (in Russian). Moscow: Gostekhizdat 1956.
- [12] Taylor, A. E.: *Introduction to Functional Analysis*. New York: John Wiley 1964.
- [13] van der Mee, C. V. M.: *Transport theory in L_p spaces*. Int. Equ. Oper. Theory 6 (1983), 405 - 443.
- [14] Zabrejko, P. P.: *Nonlinear integral operators* (in Russian). Voronezh. Gos. Univ. Trudy Sem. Funk. Anal. 8 (1966), 1 - 148.
- [15] Zabrejko, P. P.: *Ideal function spaces, Part I* (in Russian). Jarosl. Gos. Univ. Vestnik 8 (1974), 12 - 52.

Received 9.2.1995