Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen
Journal for Analysis and its Applications
Volume 21 (2002), No. 1, 265–272

Die Nevanlinna-Charakteristik von algebroiden Funktionen und ihren Ableitungen

T. Sato

Abstract. It is well known that, when $f(z)$ is an entire function of order ρ and $\rho < \infty$, then the limit $\limsup_{r\to\infty} \frac{T(r,f')}{T(r,f)}$ is finite as $r \to \infty$ through all values or outside a set E of finite measure. But for $\rho = \infty$, Hayman has shown that the assertion does not hold by constructing an entire function $f(z)$ and an exceptional set E of even infinite measure. In this paper, we will further extend his result to the case where $f(z)$ is an algebroid function of order $\rho = \infty$.

Keywords: *Growth of characteristic functions, meromorphic functions and their derivatives, algebroid functions* (*in complex analysis*)

AMS subject classification: Nevanlinna theory

1. Einführung

Es sei f eine in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion mit $f(0) = 0$. Dann hat man bekanntlich

$$f(z) = \int_0^z f'(\xi)\, d\xi.$$

Wir definieren wie üblich

$$m(r,f) = \tfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})|\, d\theta \qquad (0 < r < \infty),$$

schreiben $n(r,f)$ für die Anzahl der Pole von f im Kreis $|z| \le r$ (einschließlich ihrer Vielfachheiten) und setzen

$$\begin{aligned} N(r,f) &= \int_0^r \frac{n(t,f) - n(0,f)}{t}\, dt + n(0,f) \log r \\ T(r,f) &= m(r,f) + N(r,f). \end{aligned}$$

T. Sato: Chiba Univ., Dept. Math., 1-33 Yayoicho, Inage-ku, Chiba City, Chiba-ken, 263-8522 Japan

ISSN 0232-2064 / \$ 2.50

Dann gelten offensichtlich die Abschätzungen

$$N(r,f) \le N(r,f') \le 2N(r,f) \tag{1}$$

$$m(r,f') \le m(r,f) + m\Big(r,\frac{f'}{f}\Big) \tag{2}$$

Wir erinnern auch an die Definition der Ordnung ρ und der unteren Ordnung μ von f gemäß

$$\mu = \liminf_{r\to\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r} \qquad \text{und} \qquad \rho = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r}.$$

Hayman [2] untersuchte das Verhältnis zwischen den Größenordnungen von $T(r,f')$ und $T(r,f)$ für $r \to \infty$. Zunächst erwähnt er einen klassischen Satz [3: p. 256] in der folgenden Form:

Lehrsatz A. *Es sei f eine transzendente meromorphe Funktion der Ordnung ρ. Dann gilt*

$$m\Big(r,\frac{f'}{f}\Big) = O\big\{\log[rT(r,f)]\big\} = o\big\{[T(r,f)]\big\} \qquad (r\to\infty)$$

mit einer möglichen Ausnahmemenge E endlichen Maßes von Punkten r, und $E \ne \emptyset$ kann nur im Falle $\rho = \infty$ sein.

Hieraus folgt sofort mit Benutzung von (1) und (2) der folgende

Lehrsatz B. *Es gilt*

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{T(r,f')}{T(r,f)} \le \begin{cases} 1 & \textit{wenn } f \textit{ ganz ist} \\ 2 & \textit{wenn } f \textit{ meromorph ist} \end{cases}$$

mit einer möglichen Ausnahmemenge E endlichen Maßes im Falle $\rho < \infty$.

Hayman hat auch durch ein Beispiel gezeigt, daß im Falle $\rho = \infty$ die Ausnahmemenge E tatsächlich vorkommen kann. Er hat nämlich eine ganze Funktion der Ordnung $\rho = \infty$ konstruiert, für welche der obere Limes in Lehrsatz B unendlich ist, wenn r auf einer Menge E gegen Unendlich strebt.

2. Der algebroide Fall

In der vorliegenden Abhandlung wollen wir die obigen Resultate von Hayman auf algebroide Funktionen f vom Grad n erweitern. Also nehmen wir an, daß f eine transzendente algebroide Funktion ist, d.h. nach Definition genügt f einer Gleichung der Form

$$A_0(z)f^n + A_1(z)f^{n-1} + \ldots + A_n(z) = 0 \tag{3}$$

wobei $A_0, A_1, \ldots, A_n$ ganze Funktionen ohne gemeinsame Nullstellen sind. Nach Valiron [6] besitzt sie n verschiedene Zweige, die man lokal unterscheiden kann. Wir bezeichnen diese im Folgenden mit $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Offenbar gilt

$$n(r, f) = n\Big(r, \frac{1}{A_0}\Big).$$

Wir definieren dann

$$T(r, f) = m(r, f) + \frac{1}{n} N\Big(r, \frac{1}{A_0}\Big)$$
$$m(r, f) = \tfrac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^{n} \log^+ |f_i(re^{i\varphi})| \, d\varphi.$$

Nun führen wir den folgenden Lehrsatz an, der in gewissen Sinne eine Analogie von Lehrsatz A für algebroide Funktionen ist.

Lehrsatz C. *Es sei f eine transzendente algebroide Funktion. Dann ist*

$$m\Big(r, \frac{f'}{f}\Big) = O\big\{\log[rT(r, f)]\big\} = o\big\{[T(r, f)]\big\} \qquad (r \to \infty)$$

mit einer möglichen Ausnahmemenge E endlichen Maßes von Punkten r, und dies nur wenn $\rho = \infty$ ist.

Wir erinnern an die Definitionen des Defektes δ und des Verzweigungsindexes ϑ von f gemäß

$$\delta(a) = \liminf_{r\to\infty} \frac{m(r; a)}{T(r, f)} = 1 - \limsup_{r\to\infty} \frac{N(r; a)}{T(r, f)}$$
$$\vartheta(a) = \liminf_{r\to\infty} \Big(1 - \frac{\overline{N}(r; a)}{T(r, f)}\Big) = 1 - \limsup_{r\to\infty} \frac{\overline{N}(r; a)}{T(r, f)}$$

wo $\overline{N}(r; a)$ sich von $N(r; a)$ darin unterscheidet, daß die mehrfachen w-Stellen von $f(z)$ in $\overline{N}$ nur einfach mitgezählt worden sind. Es ist dann $\delta(a) \le \vartheta(a) \le 1$. Sei ferner X die Riemannsche Fläche von f und sei

$$\Xi = \limsup_{r\to\infty} \frac{N(r, X)}{T(r, f)} \qquad \text{und} \qquad \xi = \liminf_{r\to\infty} \frac{N(r, X)}{T(r, f)}$$

gesetzt. Hieraus folgt sofort unter Gebrauch von diesen Definitionen

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{T(r,f')}{T(r,f)} \le 2-\liminf_{r\to\infty}\left(1-\frac{\overline{N}(r,f)}{T(r,f)}\right)+\limsup_{r\to\infty}\frac{N(r,X)}{T(r,f)} = 2-\vartheta(\infty)+\Xi.$$

Nun haben wir, nach dem Verzweigungssatz von Ullrich [5],

$$\xi \le \Xi \le 2n-2.$$

Andererseits ist $\vartheta(\infty)=1$, wenn f ganz ist. Dann haben wir

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{T(r,f')}{T(r,f)} \le \begin{cases} 2n-1 & \text{wenn } f \text{ ganz ist} \\ 2n-\theta(\infty) & \text{wenn } f \text{ meromorph ist} \end{cases}$$

mit einer möglichen Ausnahmemenge E endlichen Maßes, und dies nur wenn $\rho=\infty$ ist.

Es schien mir lange Zeit, als wäre dieses Resultat das schärfste für algebroide Funktionen, aber das war nicht richtig. Das beste Ergebnis wurde schon von Gackstatter und Laine [1] in der Form des folgenden Satzes gegeben:

Lehrsatz D. *Es ist*

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{T(r,f')}{T(r,f)} \le \begin{cases} n & \textit{wenn } f \textit{ ganz ist} \\ n+1 & \textit{wenn } f \textit{ meromorph ist} \end{cases}$$

mit einer möglichen Ausnahmemenge E endlichen Maßes, und dies nur wenn $\rho=\infty$ ist.

Der Verfasser möchte dem Referenten herzlich danken für mehrere lehrreiche Hinweise und Bemerkungen.

3. Zwei Gegenbeispiele

Wir zeigen nun durch zwei Gegenbeispiele, daß für algebroide Funktionen $f(z)$ im Falle $\rho=\infty$ eine Ausnahmemenge E endlichen Maßes tatsächlich vorkommen kann.

Wenn f ganz ist, setzen wir

$$\varphi(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z}{5^k}\right)^{p_k}$$

wobei $\{p_k\}$ gemäß $p_{k+1}=[\exp(\exp p_k)]$ ($[\cdot]$ bezeichnet wie üblich den ganzen Teil), der Hayman'schen Methode nachahmend, eine Reihe natürlicher Zahlen ist. Die Funktion f genüge der Gleichung

$$f(z)^n+\varphi(z)f(z)-1=0.$$

Dann erhält man durch Differenzierung $-(nf^{n-1}+\varphi)f' = \varphi' f$, also

$$\varphi' = -\frac{f'(nf^{n-1}+\varphi)}{f}.$$

Hieraus schließt man

$$\frac{T(r,\varphi')}{T(r,\varphi)} \le \left[\frac{T(r,f')}{T(r,f)} + n\right] \frac{T(r,f)}{T(r,\varphi)} + 1. \tag{4}$$

Wir erinnern an die Resultate von Selberg [4], die

$$\frac{1}{n} T(r, A_{n-1}) - O(1) \le T(r,f) \le \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} T(r, A_i) + O(1)$$

für die allgemeine algebroide Funktion f gemäß (3) besagen. In unserem Falle ist

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= 1 \\ A_i &= 0 \quad (i = 1, \ldots, n-2) \\ A_{n-1} &= \varphi \\ A_n &= -1. \end{aligned}\right\}$$

Somit hat man

$$\frac{1}{n} T(r,\varphi) - O(1) \le T(r,f) \le \frac{1}{n} T(r,\varphi) + O(1),$$

woraus weiter

$$T(r,f) = \frac{1}{n} T(r,\varphi) + O(1) \tag{5}$$

für genügend großes r folgt. Folglich erhält man zusammen mit (4) und (5) die Ungleichung

$$\frac{T(r,\varphi')}{T(r,\varphi)} \le \frac{1}{n} \frac{T(r,f')}{T(r,f)} \big(1 + o(1)\big) + 2 + o(1) \tag{6}$$

für r genügend groß. $\{p_k\}$ ist eine schnell wachsende Folge, deren p_1 der Voraussetzung $p_1 \ge 1$ genügt. Es sei $5^N \le r = |z| \le 3 \cdot 5^N$ und $E = \cup_{N=1}^{\infty} \{r : 5^N \le r < 3 \cdot 5^N\}$ – eine Menge, die ein unendliches gewöhnliches Maß besitzt. Dann ist

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{z}{5^k}\right)^{p_k} + \left(\frac{z}{5^N}\right)^{p_N} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \left(\frac{z}{5^k}\right)^{p_k} =: \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 + \sum\nolimits_3.$$

Hierin hat man

$$\left|\sum\nolimits_1\right| \le (N-1)\, r^{p_{N-1}} \qquad \text{und} \qquad \left|\sum\nolimits_3\right| \le \sum_{N+1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{p_k} \le \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{k} = \frac{3}{2}.$$

Ferner ist

$$z\varphi'(z) = z\sum\nolimits_1' + z\sum\nolimits_2' + z\sum\nolimits_3'$$

und

$$\left|z\sum\nolimits_1'\right| = (N-1)\, p_{N-1} r^{p_{N-1}}$$

$$\left|z\sum\nolimits_3'\right| \le \sum_{N+1}^{\infty} p_k \left(\frac{3}{5}\right)^{p_k} \le \sum_{1}^{\infty} k \left(\frac{3}{5}\right)^{k} = \frac{15}{4} \quad (N \ge 2).$$

Wir wählen nun $r = r_N$ so, daß $\left(\frac{r}{5^N}\right)^{p_N} = 2(N-1)\, p_{N-1} r^{p_{N-1}}$ ist, nämlich

$$r_N = \left\{5^{N p_N} \cdot 2(N-1)\, p_{N-1}\right\}^{\frac{1}{p_N - p_{N-1}}}.$$

Wegen $p_N = [\exp(\exp p_{N-1})]$ ist

$$\frac{p_{N-1}}{p_N} \to 0, \quad \frac{p_N}{p_N - p_{N-1}} \sim 1, \quad \frac{1}{p_N - p_{N-1}} \to 0$$

as $N \to \infty$. Aus der Definition von r_N folgt, daß r_N als

$$\begin{aligned} r_N &= \left\{5^{N p_N} \cdot 2(N-1) p_{N-1}\right\}^{\frac{1}{p_N - p_{N-1}}} \\ &= \left(5^N\right)^{\frac{p_N}{p_N - p_{N-1}}} \cdot \left\{2(N-1) p_{N-1}\right\}^{\frac{1}{p_N - p_{N-1}}} \end{aligned}$$

geschrieben werden kann. Nun haben wir

$$1 \le \left\{2(N-1) p_{N-1}\right\}^{\frac{1}{p_N - p_{N-1}}} \le (p_N)^{\frac{1}{p_N - p_{N-1}}} = \left(p_N^{\frac{1}{p_N}}\right)^{\frac{1}{1 - \frac{p_{N-1}}{p_N}}} \sim 1$$

wegen $x^{\frac{1}{x}} \to 1$ as $x \to \infty$. Also können wir auf

$$\left\{2(N-1) p_{N-1}\right\}^{\frac{1}{p_N - p_{N-1}}} \sim 1 \qquad (N \to \infty)$$

schließen und es folgt $r_N \sim 5^N$, aber $r_N > 5^N$.

Ferner gilt für $|z| = r = r_N$

$$|\varphi(z)| \sim \left(\frac{r}{5^N}\right)^{p_N} \sim 2N p_{N-1} r^{p_{N-1}}$$

$$|z\varphi'(z)| > p_N\left(\frac{r}{5^N}\right)^{p_N} - 2(N-1)p_{N-1}r^{p_{N-1}} - \frac{15}{4} \sim p_N\left(\frac{z}{5^N}\right)^{p_N} \sim p_N|\varphi(z)|.$$

Also erhält man

$$\begin{aligned}
T(r_N,\varphi) &= p_{N-1}\log r_N + \log(2Np_{N-1}) + o(1)\\
&= p_{N-1}[N\log 5 + o(1)] + \log(2Np_{N-1}) + o(1)\\
T(r_N,\varphi') &> T(r_N,\varphi) + \log p_N + o(1) - \log r_N\\
&= T(r_N,\varphi) + e^{p_{N-1}} + o(1) - N\log 5.
\end{aligned}$$

Wenn $N \to \infty$ ist, folgt hieraus

$$\lim_{r_N\to\infty}\frac{T(r_N,\varphi')}{T(r_N,\varphi)} = \infty \tag{7}$$

mit $\rho(\varphi) = \infty$ und also $\rho = \infty$ aus (5). Man findet aus (6) und (7) dann, daß $T(r_N, f')$ verglichen mit $T(r_N, f)$ beliebig groß auf einer Menge E, d.h. $E = \cup_{N=1}^{\infty}\{r : 5^N \le r < 3\cdot 5^N\}$ sein kann.

Hier ist

$$m(r,\varphi') = m\Big(r,\frac{\varphi'}{\varphi}\Big) \le m(r,\varphi) + m\Big(r,\frac{\varphi'}{f}\Big)$$

und folglich ist auch

$$T(r,\varphi') - T(r,\varphi) \le m\Big(r,\frac{\varphi'}{\varphi}\Big). \tag{8}$$

Mit Hilfe der Darstellung $\frac{\varphi'}{\varphi} = -\frac{f'}{f}\big(1 + n\cdot\frac{f^{n-1}}{\varphi}\big)$ ist andererseits

$$\begin{aligned}
m\Big(r,\frac{\varphi'}{\varphi}\Big) &\le m\Big(r,\frac{f'}{f}\Big) + m(r,\frac{f^{n-1}}{\varphi}\Big)\\
&\le m\Big(r,\frac{f'}{f}\Big) + (n-1)m(r,f) + m\Big(r,\frac{1}{\varphi}\Big)\\
&\le m\Big(r,\frac{f'}{f}\Big) + nT(r,f) + T(r,\varphi)\\
&= m\Big(r,\frac{f'}{f}\Big) + 2T(r,\varphi)
\end{aligned} \tag{9}$$

für genügend großes r. Folglich erhält man zusammen mit (8) und (9) die Ungleichung $T(r_N,\varphi') - 3T(r_N,\varphi) \le m\big(r_N,\frac{f'}{f}\big)$ und es ergibt sich

$$T(r_N,\varphi')(1-o(1)) \le m\Big(r_N,\frac{f'}{f}\Big) \qquad \text{und} \qquad nT(r_N,f) \le m\Big(r_N,\frac{f'}{f}\Big)$$

für genügend großes r_N auf der Menge E. Dies ist die Ausnahmemenge mit unendlichem Maß im Lehrsatz C für den Fall $p = \infty$.

Wenn f andererseits meromorph ist, setzen wir

$$h(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} \qquad \text{mit} \quad \psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cosh\sqrt{n}}{n!}\, z^n.$$

Hier ist ψ eine ganze Funktion der Ordnung 1, die unendlich viele Nullstellen hat, welche alle reell und positiv sind. Andererseits sei φ eine ganze Funktion der Ordnung ∞, die keine positive Nullstellen hat. Daher sind φ und ψ ganze Funktionen ohne gemeinsame Nullstellen. Die Funktion f genüge der Gleichung

$$f(z)^n + h(z)f(z) - 1 = 0.$$

Somit erhält man

$$h' = \frac{\varphi'\psi - \varphi\psi'}{\psi^2} = \left(\frac{\varphi'}{\varphi} - \frac{\psi'}{\psi}\right) h \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi' = \left(\frac{h'}{h} + \frac{\psi'}{\psi}\right) \varphi.$$

Hieraus folgt sofort

$$\frac{T(r,\varphi')}{T(r,\varphi)} \le \left(\frac{T(r,h')}{T(r,h)} + 1\right) \frac{T(r,h)}{T(r,\varphi)} + \frac{T(r,\psi')}{T(r,\varphi)} + \frac{T(r,\psi)}{T(r,\varphi)} + 1. \qquad (8).$$

Ferner haben wir

$$\frac{T(r,h)}{T(r,\varphi)} \le 1 + \frac{T(r,\psi)}{T(r,\varphi)} = 1 + o(1) \qquad (9)$$

für $r = r_N$ genügend groß, im Hinblick auf beide Ordnungen. Dann hat man, zusammen mit (8) und (9),

$$\frac{T(r,\varphi')}{T(r,\varphi)} \le \frac{T(r,h')}{T(r,h)} + O(1)$$

woraus weiter

$$\frac{T(r,\varphi')}{T(r,\varphi)} \le \frac{T(r,h')}{T(r,h)} + O(1) \le \frac{1}{n} \cdot \frac{T(r,f')}{T(r,f)} \big(1 + o(1)\big) + O(1) \qquad (10)$$

folgt wenn h als φ in (6) betrachtet wird. Also findet man aus (10) und (7), daß $T(r_N, f')$ verglichen mit $T(r_N, f)$ beliebig groß auf einer Menge E sein kann.

Also existieren tatsächlich die Ausnahmemengen E in den Lehrsätzen C und D.

References

[1] Gackstatter, F. and I. Laine: *Zur Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen im Komplexen.* Ann. Pol Math. 38 (1980), 259 – 287.

[2] Hayman, W. K.: *Die Nevanlinna-Charakteristik von meromorphen Funktionen und ihren Integralen.* In: Festband zum 70. Geburstag von Rolf Nevanlinna (Hrsg.: H. P. Künzi und A. Pfluger). Berlin - Heidelberg - New York: Springer-Verlag 1966, 16 – 20.

[3] Nevanlinna, R.: *Eindeutige analytische Funktionen*, 2-te Aufl. (Grundlehren der math. Wiss.: Band 46). Berlin - Göttingen - Heidelberg: Springer-Verlag 1953.

[4] Selberg, H.: *Algebroide Funktionen und Umkehrfunktionen Abelscher Integral.* Avh. utgitt av Det Norske Vid. i Oslo (1934), Nr. 8.

[5] Ullrich, E: *Über den Einfluss der Verzweigtheit einer Algebroide auf ihre Wertverteilung.* J. de Crelle 167 (1931), 198 – 220.

[6] Valiron, G.: *Sur la dérivée des fonctions algebroïdes.* Bull. Soc. math. 59 (1931), 17 – 39.

Received 03.05.2001, in revised form 01.10.2001