Revista Matemática Iberoamericana
Vol. 1, n.° 3, 1985

Sur la corrélation des fonctions de Piltz

Etienne Fouvry et Gérald Tenenbaum

1. Résultats et méthodes

Pour k et l entiers supérieurs à 2, on s'intéresse ou nombre $\mathfrak{T}_{k,l}(x)$ de solutions de l'équation

$$m_1 \dots m_l - n_1 \dots n_k = 1 \tag{1}$$

où les m_i et les n_i sont des entiers $\geqslant 1$ vérifiant

$$n_1 \dots n_k \leqslant x.$$

En notant $\tau_k(n)$ la $k^{\text{ième}}$ fonction de Piltz, *i.e.* le nombre de représentations de l'entier n en produit de k entiers $\geqslant 1$, on a facilement la relation

$$\mathfrak{T}_{k,l}(x) = \sum_{n \leq x} \tau_k(n) \tau_l(n+1)$$

La question, non encore résolue, de trouver, pour x tendant vers l'infini, un équivalent de $\mathfrak{T}_{k,l}(x)$ pour $k \geqslant l \geqslant 3$ est un problème très difficile de théorie des nombres, bien que la technique de Vinogradov et Takhtadzhyan [12] laisse espérer y parvenir, dans le cas $k = l = 3$, par le biais de séries d'Eisenstein sur $SL(3, \mathbb{R})$.

Pour $l = 2$, la situation se simplifie; après différents travaux ([5], [8] entre autres), on est parvenu à

$$\mathfrak{T}_2(x) = x P_2(\log x) + O_\epsilon(x^{\frac{2}{3}+\epsilon}) \qquad (\epsilon > 0 \quad \text{quelconque}) \tag{2}$$

(on a posé $\mathfrak{T}_k(x) = \mathfrak{T}_{k,2}(x)$ et P_k est un polynôme de degré k). L'égalité (2), due à Deshouillers et Iwaniec [4], est basée sur la technique de Fourier et des majorations en moyenne de sommes de Kloosterman [3]. Cette méthode se prolonge à $k = 3$, donnant, par conséquent, la relation [2]:

$$\mathfrak{T}_3(x) = xP_3(\log x) + O(x^{1-\delta}) \quad (\delta \text{ constante} > 0).$$

Signalons qu'on peut aborder aussi cette question par l'étude de la répartition de la fonction τ_3 dans les progressions arithmétiques, en combinant la méthode de Burgess et la majoration individuelle de sommes de Kloosterman de dimension 2 —conséquence de la résolution, par Deligne, de la conjecture de Weil [7]. Mais ces méthodes semblent s'éteindre pour $k \geqslant 4$.

En (1), apparaît un problème additif binaire, pour lequel la méthode de dispersion, due à Linnik, est efficace. Elle donne ainsi, pour $k \geqslant 2$, l'estimation [9]

$$\mathfrak{T}_k(x) = xP_k(\log x) + O_\epsilon(x(\log x)^\epsilon). \tag{3}$$

Le terme d'erreur de (3) a été réduit à

$$O(x(\log\log x)^{c'_k}(\log x)^{-1})$$

(c'_k ne dépend que de k) par Mothashi [10], qui en plus de la dispersion, se sert de la méthode du cercle et du grand crible (il obtient ainsi une extension du théorème de Bombieri-Vinogradov au produit de convolution de deux suites arithmétiques).

L'objet de cet article est de donner la démonstration du théorème suivant, annoncé dans ([6], corollaire 4):

Théorème 1. *Pour $k \geqslant 4$, il existe $c = c(k) > 0$, tel qu'on ait l'égalité*

$$\mathfrak{T}_k(x) = xP_k(\log x) + O(x \exp(-c(\log x)^{\frac{1}{2}})).$$

La démonstration se scinde en deux parties; dans la première, on montre l'égalité

$$\mathfrak{T}_k(x) = \mathfrak{T}'_k(x) + O(x \exp(-c\mathfrak{L}^{\frac{1}{2}})) \tag{4}$$

avec $\mathfrak{L} = \log x$ et $\mathfrak{T}'_k(x) = 2 \sum_{q \leq \sqrt{x}} \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{q^2 \leq n \leq x \\ (n,q)=1}} \tau_k(n)$.

Le terme principal $\mathfrak{T}'_k(x)$ sera évalué dans la deuxième partie, par des techniques d'analyse complexe (Théorème 2).

2. Démonstration de (4)

Soit $\delta(n)$ la fonction caractéristique de l'ensemble des carrés. On a

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}_k(x) &= \sum_{n\leq x} \tau_k(n)\tau_2(n+1)\\ &= \sum_{n\leq x}\tau_k(n)\Bigg(2\sum_{\substack{q\mid n+1\\ q^2\leq n}} 1 + \delta(n+1)\Bigg)\\ &= 2\sum_{q\leq\sqrt{x}}\ \sum_{\substack{q^2\leq n\leq x\\ n\equiv -1[q]}} \tau_k(n) + O_\epsilon(x^{\frac{1}{2}-\epsilon}).\end{aligned}$$

La démonstration de (4) se ramène à la majoration

$$S_k(x) = O(x\exp(-c\mathcal{L}^{\frac{1}{2}})) \tag{5}$$

avec

$$S_k(x) = \sum_{q\leq\sqrt{x}}\Bigg(\sum_{n_1\ldots n_k\equiv -1[q]} 1 - \frac{1}{\varphi(q)}\sum_{(n_1\ldots n_k, q)=1} 1\Bigg) \tag{6}$$

où les variables $n_1\ldots n_k$ satisfont la condition

$$q^2 \leqslant n_1\ldots n_k \leqslant x. \tag{7}$$

La quantité $S_k(x)$ se place naturellement dans le cadre des problèmes liés aux extensions du théorème de Bombieri-Vinogradov; nous utiliserons des résultats de [6], créés dans le but d'améliorer le terme d'erreur dans le problème des diviseurs de Titchmarsh (ces résultats ont été aussi trouvés, de façon indépendante, par Bombieri, Friedlander et Iwaniec [1]).

a) *Préparation des variables $q, n_1, \ldots, n_k$*

On se propose de rendre les variables indépendantes dans la condition (7); on effectue pour cela un découpage des intervalles de variation par une technique classique (voir [1], [6] par exemple). On pose

$$\Delta = 1 + \exp(-\eta\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}) \qquad (\eta > 0 \quad \text{sera fixé plus tard})$$

et on note $(N_1, \ldots, N_k)$ un k-uplet de nombres de la forme

$$\Delta^{\nu_i} \quad (\nu_i = 0, 1, 2, \ldots; 1 \leqslant i \leqslant k)$$

vérifiant $N_1\ldots N_k \leqslant x\Delta^{-k}$. Il y a ainsi $O(\exp(2k\eta\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}))$ tels k-uplets qui donnent la décomposition

$$S_k(x) = \sum_{(N_1,\ldots,N_k)} S_k(N_1, \ldots, N_k) + O\left(x\exp\left(-\frac{\eta}{2}\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}\right)\right)$$

où $S_k(N_1, \dots, N_k)$ est défini par la formule (6), à la différence près que la condition (7) devient

$$q^2 \leqslant n_1 \dots n_k, \qquad N_i \leqslant n_i < N_i\Delta \qquad (1 \leqslant i \leqslant k).$$

Le terme d'erreur provient de la contribution des $(n_1, \dots, n_k)$ vérifiant

$$n_1 \dots n_k \leqslant x, \qquad \Delta^{\nu_i} \leqslant n_i < \Delta^{\nu_i + 1} \qquad (1 \leqslant i \leqslant k) \quad \text{et} \quad \Delta^{\nu_1 + \dots + \nu_k + k} > x,$$

ces conditions entraînent l'inégalité

$$x \geqslant n_1 \dots n_k \geqslant x\Delta^{-k} = x(1 - O(\exp(-\eta \mathcal{L}^{\frac{1}{2}})))$$

qui permet d'appliquer le lemme suivant.

Lemme 1 ([9] page 24). *Pour tout k, il existe k_1 tel qu'on ait l'estimation*

$$\sum_{\substack{X - Y < n \leq X \\ n \equiv a[q]}} \tau_k(n) = O_k(Yq^{-1}(\log X)^{k_1})$$

uniformément pour $(a, q) = 1$, $q \leqslant Y^{0,8}$ et $X^{0,9} \leqslant Y \leqslant X$.

On fait de même pour la variable q, pour parvenir finalement à

$$S_k(x) = \sum_{(N_1, \dots, N_k)} \tilde{S}_k(N_1, \dots, N_k) + O\left(x \exp\left(-\frac{\eta}{2} \mathcal{L}^{\frac{1}{2}}\right)\right)$$

avec

$$\tilde{S}_k(N_1, \dots, N_k) = \sum_{q \leq (N_1 \dots N_k)^{1/2}} \left(\sum_{n_1 \dots n_k \equiv -1[q]} 1 - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{(n_1 \dots n_k, q) = 1} 1 \right)$$

où les n_i vérifient

$$N_i \leqslant n_i < N_i\Delta \qquad (1 \leqslant i \leqslant k).$$

Pour démontrer (5), il suffit de montrer qu'il existe $\eta_1 > 0$ tel qu'on ait la majoration

$$\tilde{S}(N_1, \dots, N_k) = O(x \exp(-\eta_1 \mathcal{L}^{\frac{1}{2}})) \tag{8}$$

et de choisir $\eta = \dfrac{\eta_1}{4k}$.

Remarquons que le Lemme 1 entraîne qu'on peut se restreindre à

$$N_1 \dots N_k \geqslant x^{0,99}. \tag{9}$$

La démonstration est différente, suivant qu'il y a, ou non, un N_i dans l'intervalle $\mathcal{I} = [x^{1/1000k}, x^{0,3}]$.

b) *S'il y a un N_i dans $\mathcal{I}$*

La démonstration du lemme suivant ([6] proposition 1') repose sur un calcul de dispersion et des majorations en moyenne de sommes de Kloosterman ([3]). On montre:

Lemme 2. *Soient a un entier non nul, $\varkappa$ un entier $\geqslant 1$, $\epsilon > 0$, M et N deux réels vérifiant: $M, N \geqslant 2$ et $M^\epsilon \leqslant N \leqslant M^{\frac{1}{2}-\epsilon}$. On désigne aussi par $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ deux intervalles inclus dans $[M, 2M[$ et $[N, 2N[$ et par (α_m) une suite de réels vérifiant $|\alpha_m| \leqslant \tau_\varkappa(m)$.*

Sous ces conditions, il existe $c_1 = c_1(\varkappa, \epsilon) > 0$ tel qu'on ait la majoration

$$\sum_{\substack{q \le Q \\ (q,a)=1}} \left(\sum_{\substack{m \in \mathfrak{M},\, n \in \mathfrak{N} \\ mn \equiv a[q]}} \alpha_m - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{m \in \mathfrak{M},\, n \in \mathfrak{N} \\ (mn,q)=1}} \alpha_m \right) = O_{\varkappa,\epsilon,a} \quad (MN \exp(-c_1(\log MN)))$$

dès qu'on a

$$Q \leqslant M^{\frac{3}{4}-\epsilon}.$$

En donnant à N la valeur du N_i appartenant à $\mathcal{I}$ et à M celle du produit des N_j restants, le Lemme 2 fournit directement la majoration (8).

c) *Si aucun des N_i ne se trouve dans $\mathcal{I}$*

La définition de $\mathcal{I}$ et la restriction (9) impliquent qu'un, deux ou trois des N_i sont supérieurs à $x^{0,3}$. Le cas le plus difficile est celui où ils sont au nombre de trois; on peut alors supposer

$$N_3 \geqslant N_2 \geqslant N_1 > x^{0,3}.$$

On écrit $\tilde{S}_k(N_1, \ldots, N_k)$ sous la forme

$$\tilde{S}_k(N_1, \ldots, N_k) = \sum_{q \le (N_1 \ldots N_k)^{1/2}} \left(\sum_{mn_1n_2n_3 \equiv -1[q]} \alpha_m - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{(mn_1n_2n_3, q)=1} \alpha_m \right)$$

avec $|\alpha_m| \leqslant \tau_k(m)$, $(N_4 \ldots N_k) \leqslant m < (N_4 \ldots N_k)\Delta^{k-3}$ et

$$N_i \leqslant n_i < N_i\Delta \qquad (1 \leqslant i \leqslant 3).$$

On est ainsi ramené à la situation traitée dans [6], §4, qu'il est donc inutile de reprendre intégralement mais qu'on se contente de rappeler. On commence par rendre les variables q, n_1, n_2, n_3 «lisses» grâce aux fonctions $b_{l,\Delta'}$ du Lemme 2 de [6] (avec $\Delta' = 1 + \exp(-100\eta\mathcal{L}^{\frac{1}{2}})$), puis on applique la technique de Fourier à la grande variable n_3 et on fait appel aux majorations de sommes de Kloosterman déjà évoquées pour profiter des compensations sur q, n_1 et n_2 (la variable m est inférieure à $x^{1/1000}$). On obtient encore l'inégalité (8), ce qui termine la démonstration de (5).

3. Le terme principal

Dans cette section, nous nous proposons d'évaluer le terme principal $\mathfrak{T}_k'(x)$ de (4). Nous établissons le théorème suivant.

Theoreme 2. *Il existe un polynôme de degré k, P_k, tel que l'on ait pour $k \geqslant 1$ et $\epsilon > 0$*

$$\mathfrak{T}_k'(x) = xP_k(\log x) + O_{k,\epsilon}(x^{1-\beta_k+\epsilon}) \tag{10}$$

avec

$$\beta_k = \min\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2k}\right).$$

Compte tenu de (4), cela suffira à établir le Théorème 1.

Nous n'avons pas cherché à optimiser la valeur de β_k en fonction de k. Les coefficients du polynôme P_k sont explicitement calculables à partir des formules (17), (18), (20), (24), (25).

Le principe de la démonstration peut être exposé comme suit. On a

$$\mathfrak{T}_k'(x) = 2 \sum_{n \leq x} \tau_k(n) F(n)$$

avec

$$F(n) = \sum_{\substack{q \leq \sqrt{n} \\ (q,n)=1}} \frac{1}{\varphi(q)}.$$

Nous établirons par intégration complexe (Lemme 5) la formule asymptotique

$$F(n) = hg(n)\left[\tfrac{1}{2}\log n + \lambda(n) + h'\right] + O_\epsilon(n^{-\frac{1}{4}+\epsilon}) \tag{11}$$

où g est une fonction multiplicative, λ une fonction additive, et h, h' des constantes, qui seront explicitées. Nous montrerons ensuite que, pour chaque fonction multiplicative Ψ d'une certaine classe $\mathcal{C}$, la somme $\sum_{n \leq x} \Psi(n)\tau_k(n)$ posséde un développement asymptotique du type (10) avec un polynôme dépendant explicitement de Ψ, de degré $k-1$. Les fonctions $g(n)\exp\{z\lambda(n)\}$, $z \in \mathbb{C}$, $|z| \leqslant 1$, sont dans $\mathcal{C}$. Cela permet de traiter les trois termes principaux apparaissant dans (11): le terme en $g(n)$ découle du cas général, le terme en $g(n)\log n$ relève d'une intégration par parties, et, le terme en $g(n)\lambda(n)$, interpréte comme la dérivée en $z=0$ de $g(n)\exp\{z\lambda(n)\}$, est calculé par la formule de Cauchy.

Avant d'aborder la démonstration, fixons quelques notations et conventions.

La lettre p est exclusivement réservée pour dénoter un nombre premier. La lettre s désigne une variable complexe et σ, t, sont implicitement définis par $s = \sigma + it$.

Soit $\alpha_j, j \geqslant 0$, la dérivée d'ordre j à l'origine de $s\zeta(s+1)$. Ainsi $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \gamma$ (la constante d'Euler) et

$$\alpha_j = (-1)^j \int_1^\infty \{t\}(\log t)^{j-1}\frac{dt}{t^2}, \qquad (j \geqslant 2).$$

Nous notons $A_j(k)$ la dérivée d'ordre j en $s=0$ de $\{s\zeta(s+1)\}^k$, *i.e.*

$$A_j(k) = \sum_{j_1+\ldots+j_k=j} \binom{j}{j_1, j_2, \ldots, j_k} \alpha_{j_1}\ldots\alpha_{j_k}, \qquad (j, k \geqslant 1).$$

On introduit les séries de Dirichlet

$$f(n;s) = \sum_{\substack{q=1\\(q,n)=1}}^{\infty} \varphi(q)^{-1}q^{-s} = \prod_{p \nmid n}\left(1 + \frac{p^{-s}}{(p-1)(1-p^{-s-1})}\right)$$

$$h(s) = \prod_p \left(1 + \frac{p^{-s}}{p(p-1)}\right), \quad g(n;s) = \prod_{p \mid n}\left(1 + \frac{p^{-s}}{(p-1)(1-p^{-s-1})}\right)^{-1}$$

de sorte que

$$f(n;s) = g(n;s)h(s)\zeta(s+1) \tag{12}$$

On remarque que $h(s)$ est holomorphe et uniformément bornée pour $\sigma \geqslant \sigma_0 > -1$ et que $g(n;s)$ est, pour chaque n, méromorphe sur $\mathbb{C}$.

On pose

$$h = h(0) = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} = 1{,}9436\ldots, \qquad h' = \gamma + \frac{h'(0)}{h(0)},$$

et l'on définit les fonctions arithmétiques g et λ par

$$
\left.
\begin{aligned}
g(n) &= g(n;0) = \prod_{p|n}\left(1-\left(p-1+\frac{1}{p}\right)^{-1}\right),\\
\lambda(n) &= \frac{g'(n;0)}{g(n;0)} = \sum_{p|n}\frac{p^2(p^2-p+1)}{(p-1)^5}\log p.
\end{aligned}
\right\}\quad (n\geqslant 1)
$$

Lemme 3. *Pour chaque* $\epsilon > 0$, *il existe une constante* $\beta = \beta(\epsilon) > 0$ *telle que l'on ait*

$$|g(n;s)| \leqslant \prod_{p|n}(1+\beta p^{-\sigma-1}), \qquad (\sigma \geqslant -1+\epsilon, n \geqslant 1).$$

DÉMONSTRATION. Posons $G_p(z) = 1 + \dfrac{z}{(p-1)(1-z/p)}$, de sorte que

$$g(n;s) = \prod_{p|n} G_p(p^{-s})^{-1}, \qquad (n \geqslant 1).$$

Le seul zéro de $G_p(z)$ est $z = -p(p-1)$. il existe donc une fonction $G(p)$, dépendant de ϵ, telle que

$$|G_p(z)| \geqslant G(p), \qquad (|z| \leqslant p^{1-\epsilon}). \tag{13}$$

De plus, on a pour $|z| \leqslant p^{1-\epsilon}$, $G_p(z) = 1 + O_\epsilon(z/p)$. Cela implique l'existence d'un $p_0 = p_0(\epsilon)$ et d'un $\beta = \beta(\epsilon)$ tels que

$$|G_p(z)| \geqslant (1+\beta|z|/p)^{-1}, \qquad (p > p_0, |z| \leqslant p^{1-\epsilon}) \tag{14}$$

On déduit de (13) et (14) que l'on a

$$|g(n;s)| \leqslant \prod_{\substack{p|n\\ p\leq p_0}} G(p)^{-1} \prod_{\substack{p|n\\ p>p_0}}(1+\beta p^{-\sigma-1}), \qquad (n \geqslant 1).$$

Si β a été choisi suffisamment grand, cela implique la majoration souhaitée.

Le lemme suivant est une variante de la formule de Perron effective prouvée dans [11; Lemma 3.12]. Nous laissons la démonstration au lecteur.

Lemme 4. *Pour* $n \geqslant 1$, *posons* $n_1 = [\sqrt{n}] + \frac{1}{2}$, $\chi = \frac{1}{\log 2n}$. *On a uniformément pour* $T \geqslant 1$

$$F(n) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\chi-iT}^{\chi+iT} f(n;s)\frac{n_1^s}{s}\,ds + O\left(\frac{\log n}{T} + \frac{\log\log n}{\sqrt{n}}\right).$$

Lemme 5. *Soit* $\epsilon > 0$. *On a*

$$F(n) = hg(n)\left[\tfrac{1}{2}\log n + \lambda(n) + h'\right] + O_\epsilon(n^{-\frac{1}{4}+\epsilon}). \tag{15}$$

DÉMONSTRATION. On applique le lemme 4 en déplaçant la droite d'intégration vers la gauche jusqu'à $\sigma = -1 + \epsilon$. Le résidu en $s = 0$ fournit le terme principal à $O(n^{-\frac{1}{2}})$ près. L'intégrale sur le contour déformé est majorée en utilisant l'estimation

$$h(s)\zeta(s+1) \ll_\epsilon 1 + |t|^{-\sigma+\epsilon}, \quad (\sigma \geqslant -1+\epsilon)$$

et le lemme 3. Le choix optimal $T = n^{\frac{1}{4}}$ fournit le résultat annoncé.

Corollaire. *Soit* $\epsilon > 0$. *On a*

$$\mathfrak{T}_k'(x) = 2h \sum_{n \leq x} g(n)\tau_k(n)\left[\tfrac{1}{2}\log n + \lambda(n) + h'\right] + O_{\epsilon,k}(x^{\frac{3}{4}+\epsilon}).$$

Lemme 6. *Soit* $\delta > 0$ *fixé et soit* Ψ *une fonction arithmétique fortement multiplicative satisfaisant à*

$$|\Psi(p) - 1| \leqslant Cp^{-\delta}$$

pour tout p, *avec* $C > 0$. *Alors la fonction* $\theta_k(n)$ *définie par*

$$\theta_k = \Psi\tau_k * \tau_{-k}$$

satisfait

$$|\theta_k(n)| \leqslant C^{\omega(n)}\tau_k(n)n^{-\delta/k}, \quad (n \geqslant 1).$$

En particulier, la série de Dirichlet $\Sigma\theta(n)n^{-s}$ *est absolument convergente pour* $\sigma > 1 - \delta/k$.

DÉMONSTRATION. On a (formellement)

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \theta_k(n)n^{-s} &= \zeta(s)^{-k} \prod_p \left(1 + \Psi(p) \sum_{\nu=1}^{\infty} \binom{k+\nu-1}{\nu} p^{-\nu s}\right) \\
&= \prod_p (1-p^{-s})^k(1 + \Psi(p)[(1-p^{-s})^{-k} - 1]) \\
&= \prod_p ((1-p^{-s})^k + \Psi(p)[1 - (1-p^{-s})^k]) \\
&= \prod_p \left(1 + (1-\Psi(p)) \sum_{\nu=1}^{k} (-1)^\nu \binom{k}{\nu} p^{-\nu s}\right)
\end{aligned}$$

θ_k est donc la fonction multiplicative définie par

$$\theta_k(p^\nu) = (1-\Psi(p))(-1)^\nu \binom{k}{\nu}, \quad (\nu \geqslant 1, p \geqslant 2),$$

d'où:

$$|\theta_k(p^\nu)| \leqslant Cp^{-\delta}\binom{k}{\nu} \leqslant Cp^{-\delta\nu/k}\binom{k+\nu-1}{\nu} = Cp^{-\delta\nu/k}\tau_k(p^\nu).$$

La seconde inégalité utilise le fait que $\theta_k(p^\nu) = 0$ pour $\nu > k$. Cela implique la majoration souhaitée.

Lemme 7. *Sous les hypothèses du Lemme 6, posons*

$$\eta = \delta/(1+\delta), \quad et \quad F_k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_k(n) n^{-s}.$$

On a pour tout $\epsilon > 0$

$$\sum_{n \leq x} \Psi(n)\tau_k(n) = xQ_{k-1}(\log x) + O_{\epsilon,k}(x^{1-\eta/k+\epsilon}) \tag{16}$$

où $Q_{k-1}(\xi)$ *est le polynôme de degré* $(k-1)$ *défini par*

$$Q_{k-1}(\xi) = \frac{1}{(k-1)!} \sum_{j+r+m+q=k-1} (-1)^q q! \binom{k-1}{j, r, m, q} A_j(k) F_k^{(r)}(1) \xi^m. \tag{17}$$

DÉMONSTRATION. On a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Psi(n)\tau_k(n) n^{-s} = \zeta(s)^k F_k(s)$$

où, d'après le lemme 6, $F_k(s)$ est une série de Dirichlet absolument convergente pour $\sigma > 1 - \delta/k$. On peut donc appliquer la formule de Perron effective [11; Lemma 3.12] sous la forme

$$\sum_{n \leq x} \Psi(n)\tau_k(n) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{\zeta(s)^k F_k(s)}{s} x^s \, ds + O_{\epsilon,k}\left(\frac{x^{1+\epsilon}}{T}\right),$$

avec $c = 1 + 1/\log x$.

Le résidu en $s = 1$ est égal à $xQ_{k-1}(\log x)$. On obtient le résultat annoncé en déplaçant le segment d'intégration vertical vers la gauche jusqu'à $\sigma = 1 - \delta/k + \epsilon$, en utilisant la majoration classique de $|\zeta(s)|$ dans la bande critique, et, en choisissant finalement la valeur optimale $T = x^{\eta/k}$. Nous omettons les détails de cette manipulation classique.

Corollaire 1. *Soit* U_{k-1} *le polynôme de degré* $k-1$ *obtenu en choisissant dans* (17) $\Psi = g$. *On a*

$$\sum_{n \leq k} g(n)\tau_k(n) = xU_{k-1}(\log x) + O_{\epsilon,k}(x^{1-1/(2k)+\epsilon}). \tag{18}$$

C'est immédiat puisque g satisfait les hypothèses du Lemme 6 avec $\delta = 1$, $C = 2$.

Corollaire 2. *Il existe un polynôme de degré k, V_k, tel que l'on ait*

$$\sum_{n \leq x} g(n)\tau_k(n) \log n = xV_k(\log x) + O_{\epsilon,k}(x^{1-1/(2k)+\epsilon}). \tag{19}$$

DÉMONSTRATION. Soit $\Lambda(x)$ le membre de gauche de (18). Le membre de gauche de (19) vaut

$$\int_1^x \log y \, d\Lambda(y) = \Lambda(x) \log x - \int_1^x \Lambda(y) \frac{dy}{y} \cdot$$

On obtient donc le résultat annoncé avec

$$V_k(\xi) = \xi U_{k-1}(\xi) - e^{-\xi} \int_0^\xi e^\tau U_{k-1}(\tau) \, d\tau \tag{20}$$

Lemme 8. *Pour chaque nombre complexe z de module $\leqslant 1$, il existe un polynôme $Q_{k-1}(\xi; z)$ de degré $k-1$, dont les coefficients dépendent analytiquement de z, tel que l'on ait uniformément en z, $|z| \leqslant 1$,*

$$\sum_{n \leq x} g(n) e^{z\lambda(n)} \tau_k(n) = xQ_{k-1}(\log x; z) + O_{\epsilon,k}(x^{1-1/(2k)+\epsilon}). \tag{21}$$

DÉMONSTRATION. La fonction $\Psi(n) = g(n)e^{z\lambda(n)}$ satisfait les hypothèses du Lemme 6 avez $\delta = 1 - \epsilon$, et $C = C(\epsilon)$ pour tout $\epsilon > 0$. Cela permet d'appliquer le Lemme 7, avec un reste majoré uniformément par rapport à z. On a

$$Q_{k-1}(\xi; z) = \frac{1}{(k-1)!} \sum_{j+r+m+q=k-1} (-1)^q q! \binom{k-1}{j, r, m, q} A_j(k) \rho_{k,r}(z) \xi^m \tag{22}$$

où $\rho_{k,r}(z)$ est la dérivée r-ième en $s = 1$ de

$$\rho_k(s; z) = \prod_p (1 + (1 - g(p)e^{z\lambda(p)})((1 - p^{-s})^k - 1)).$$

En particulier, les $\rho_{k,r}(z)$ sont donc des fonctions holomorphes de z.

Corollaire. *On a*

$$\sum_{n \leq x} g(n)\lambda(n)\tau_k(n) = xW_{k-1}(\log x) + O_{k,\epsilon}(x^{1-1/(2k)+\epsilon}) \tag{23}$$

où W_{k-1} est le polynôme de degré $k-1$ défini par

$$W_{k-1}(\xi) = \frac{\partial}{\partial z} Q_{k-1}(\xi; 0). \tag{24}$$

DÉMONSTRATION. On multiplie la formule (21) par z^{-2} et on l'intègre sur le cercle $|z| = 1$.

Fin de la démonstration du Théorème 2. Compte tenu du corollaire au lemme 5, on obtient la formule annoncée avec

$$P_k(\xi) = 2h\left[\tfrac{1}{2} V_k(\xi) + W_{k-1}(\xi) + h' U_{k-1}(\xi)\right]. \tag{25}$$

Bibliographie

[1] Bombieri, E., Friedlander, J. and Iwaniec, H. Primes in arithmetic progressions to large moduli, *Acta Math.*, (à paraître).

[2] Deshouillers, J. M. Majorations en moyenne de sommes de Kloosterman. *Séminaire Théorie des Nombres de Bordeaux* (1980-81), exposé n.° 3.

[3] Deshouillers, J.-M. and Iwaniec, H. Kloosterman sums and the Fourier coefficients of cusp forms. *Invent. Math.*, **70** (1982), 219-288.

[4] Deshouillers, J.-M. and Iwaniec, H. An additive divisor problem. *J. London Math. Soc.* (2) **26** (1982), 1-14.

[5] Esterman, T. Über die Darstellung einer Zahl als Differenz von zwei Produkten, *J. reine angew. Math.*, **164** (1931), 173-182.

[6] Fouvry, E. Sur le problème des diviseurs de Titchmarsh, *J. reine angew. Math.*, **357** (1985), 51-76.

[7] Friedlander, J. and Iwaniec, H. Incomplete Kloosterman Sums and a Divisor Problem, *Annals of Math.*, **121** (1985), 319-350.

[8] Heath-Brown, D. R. The fourth power moment of the Riemann Zeta function, *Proc. London Math. Soc.*, (3) **38** (1979), 385-422.

[9] Linnik, Ju. V. The dispersion method in binary additive problems, *A.M.S. Transl. of Math. Monographs*, n.° 4, Providence, Rhode Island (1963).

[10] Motohashi, Y. An asymptotic series for an additive divisor problem, *Math. Zeit.*, **170** (1980), 43-63.

[11] Titchmarsh, E. C. *The Theory of the Riemann Zêta function.* Oxford at the Clarendon Press (1951).

[12] Vinogradov, A. I. and Takhtadzhyan, L. A. Theory of Eisenstein series for the group $SL(3, \mathbb{R})$ and its application to a binary problem. *J. Soviet. Math.*, **18** (1982), 293-324.

Etienne Fouvry
U.E.R. de Mathématiques et d'Informatique
Université de Bordeaux I
351, cours de la Libération
F-33405 Talence Cedex

Gérald Tenenbaum
Départament de Mathématiques
Université de Nancy I
B.P. 239
F-54506 Vandoeuvre Cedex