Revista Matemática Iberoamericana
Vol. 2, n.os 1 y 2, 1986

Ondelettes et bases hilbertiennes

P. G. Lemarié et Y. Meyer

En hommage à A. P. Calderón

Introduction

La transformation en ondelettes apparaît implicitement dans un célèbre travail de A. P. Calderón ([2]). Elle a été redécouverte et explicitée par J. Morlet et ses collaborateurs ([4], [7], [8]) comme une technique efficace d'analyse numérique permettant le traitement du signal en liaison avec la recherche pétrolière.

La transformation en ondelettes s'apparente à la transformation de Fourier mais les exponentielles imaginaires $\exp(ix \cdot \xi)$ indexées par les fréquences $\xi \in \mathbb{R}^n$ y sont remplacées par les «ondelettes» ψ_Q indexées par la collection de tous les cubes $Q \subset \mathbb{R}^n$. Ces «ondelettes» ψ_Q sont toutes des copies (par translation et changement d'échelle) d'une même fonction ψ régulière et ayant la décroissance à l'infini la plus forte possible. Pour être plus précis, on choisira ψ dans la classe $S(\mathbb{R}^n)$ de L. Schwartz et si le cube Q est défini par $a_j \leqslant x_j \leqslant a_j + d$, $1 \leqslant j \leqslant n$, où $a = (a_1, \dots, a_n)$, alors $\psi_Q(x) = d^{-n/2}\psi((x-a)/d)$. Cela signifie que ψ_Q est *localisée* et *ajustée au cube Q*.

Le but poursuivi est par un choix judicieux de ψ, de pouvoir écrire n'importe quelle fonction f comme une somme ou comme une intégrale des $c_Q\psi_Q(x)$ où les coefficients c_Q se calculent comme des coefficients de Fourier:

$$c_Q = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\bar{\psi}_Q(x)\,dx.$$

Les auteurs mentionnés ci-dessus ont obtenu des conditions portant sur ψ et permettant de reconstituer f à l'aide de *l'information redondante* donnée par la connaissance de tous les «coefficients d'ondelettes» c_Q.

Suivant une démarche clairement explicitée par L. Carleson dans [3], nous nous proposons de faire disparaître cette redondance en remplaçant la collection de tous les cubes $Q \subset \mathbb{R}^n$ par celle, notée $\mathbb{Q}$ des *cubes dyadiques*. Un cube dyadique Q est défini par deux indices $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}^n$ et l'on a

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n; 2^j x - k \in [0,1]^n\}. \tag{1.1}$$

La construction qui suit est, comme dans [3], une imitation du système de Haar dont nous rappelons la définition.

On appelle $h^{(1)}(t)$ la fonction égale à 1 si $0 \leqslant t < 1/2$, à -1 si $1/2 \leqslant t < 1$ et à 0 ailleurs. D'autre part, $h^{(0)}(t)$ est la fonction indicatrice de l'intervalle $[0,1]$. On désigne par $E \subset \{0,1\}^n$ l'ensemble des $2^n - 1$ suites $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ de 0 et de 1, la suite $(0, 0, \ldots, 0)$ étant exclue. Alors le système de Haar pour $L^2(\mathbb{R}^n)$ se compose des fonctions $h_Q^{(\epsilon)}$, $\epsilon \in E$, $Q \in \mathbb{Q}$, définies par

$$h_Q^{(\epsilon)}(x) = 2^{nj/2} h^{(\epsilon_1)}(2^j x_1 - k_1) \ldots h^{(\epsilon_n)}(2^j x_n - k_n).$$

Le système de Haar est bien adapté aux espaces fonctionnels $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < +\infty$, mais ne permet pas l'étude des espaces de Sobolev, de Besov, ou de l'espace de Hardy $H^1(\mathbb{R}^n)$ de Stein et Weiss.

L'idée généralement admise est que «lisser le système de Haar fait disparaître l'orthogonalité». C'est ce qui apparaît en lisant [3] ou [6]. Nous allons voir cependant qu'il existe un choix exceptionnel de deux fonctions $\psi^{(0)}$ et $\psi^{(1)}$ de $S(\mathbb{R}^n)$ tel que la suite des fonctions

$$\psi_Q^{(\epsilon)}(x) = 2^{nj/2} \psi^{(\epsilon_1)}(2^j x_1 - k_1) \cdots \psi^{(\epsilon_n)}(2^j x_n - k_n) \tag{1.2}$$

soit une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^n)$ $(\epsilon \in E, Q \in \mathbb{Q})$.

Cette base convient à tous les espaces fonctionnels classiques: espaces de Sobolev, de Besov, de Hardy... qui se traduisent isomorphiquement en des espaces de suites. En particulier les coefficients d'une fonction $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$ dans la base des $\psi_Q^{(\epsilon)}$, $\epsilon \in E$, $Q \in \mathbb{Q}$ et ceux d'une fonction g de la version dyadique de H^1, dans la base des $h_Q^{(\epsilon)}$, sont caractérisés par la même condition. Cette remarque constitue une preuve très simple du théorème de Maurey.

Dans l'identité fondamentale

$$f(x) = \sum_{\epsilon \in E} \sum_{Q \in \mathbb{Q}} \langle f, \psi_Q^{(\epsilon)} \rangle \psi_Q^{(\epsilon)}(x) \tag{1.3}$$

nous disposons de plusieurs niveaux de lecture.

Si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, il s'agit de la décomposition usuelle dans une base orthonormée. La convergence a lieu en moyenne quadratique et presque-partout.

Si $f(x)$ et ses dérivées premières appartiennent à $L^2(\mathbb{R}^n)$, alors il y a encore convergence dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ de la série dérivée terme à terme. Si, plus généralement f et ses dérivées jusqu'à l'ordre s $(s \in \mathbb{N})$ appartiennent à $L^2(\mathbb{R}^n)$, alors la série (1.3) convergera automatiquement pour la norme correspondante, c'est-à-dire celle de l'espace de Sobolev H^s. En d'autres termes, la régularité de f accélère la convergence (comme c'est le cas pour les séries de Fourier, mais certainement pas pour le système de Haar). Enfin, nous montrerons que ce nouvel algorithme permet une écriture très simple du para-produit $\pi(a,f)$ de J. M. Bony [1].

2. Enoncé du théorème fondamental

Nous commençons par construire des fonctions spéciales d'une variable réelle. Nous désignerons par S l'intervalle $[2\pi/3, 4\pi/3]$. On a donc $2S = [4\pi/3, 8\pi/3]$, $S - 2\pi = -S = [-4\pi/3, -2\pi/3]$ et donc aussi $2\pi - S = S$. Nous noterons $\theta(t)$ une fonction de la variable réelle t, *impaire*, de classe C^∞, à valeurs dans $[-\pi/4, \pi/4]$, égale à $\pi/4$ si $t \geqslant \pi/3$ (et donc à $-\pi/4$ si $t \leqslant -\pi/3$). On définit la fonction paire $\omega(t)$ par $\omega(t) = 0$ si $0 \leqslant t \leqslant 2\pi/3$ ou si $t \geqslant 8\pi/3$, $\omega(t) = \pi/4 + \theta(t - \pi)$ si $2\pi/3 \leqslant t \leqslant 4\pi/3$ et $\omega(t) = \pi/4 - \theta(t/2 - \pi)$ si $4\pi/3 \leqslant t \leqslant 8\pi/3$.

Les identités fondamentales vérifiées par $\omega(t)$ sont $\omega(-t) = \omega(t)$, $\omega(2t) = \pi/2 - \omega(t)$, $t \in S$ et

$$\omega(t - 2\pi) = \omega(2\pi - t) = \frac{\pi}{2} - \omega(t), \qquad t \in S.$$

Par construction $\omega(t)$ est indéfiniment dérivable.

A l'aide de $\omega(t)$ on définit $\psi \in S(\mathbb{R})$ par

$$\hat{\psi}(t) = e^{-it/2} \sin \omega(t) = e^{-it/2} \tilde{\omega}(t). \tag{2.1}$$

On aura donc

$$\psi(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left[\left(t - \frac{1}{2}\right)s\right] \tilde{\omega}(s)\, ds. \tag{2.2}$$

Comme nous l'a fait remarquer J. Morlet, on peut également partir d'une fonction *impaire* $\omega_1(t)$ définie par $\omega_1(t) = -\omega(t)$ si $t \geqslant 0$ (et donc $\omega_1(t) = -\omega(t)$ si $t \leqslant 0$). On lui associe $\psi_1 \in S(\mathbb{R})$ définie par

$$\hat{\psi}_1(t) = e^{-it/2} \sin \omega_1(t) \tag{2.3}$$

ce qui entraîne

$$\psi_1(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \sin\left[\left(t - \frac{1}{2}\right)s\right] \sin \omega(s)\, ds. \tag{2.4}$$

Dans les théorèmes qui suivent ψ peut être systématiquement remplacée par ψ_1. Si $I \subset \mathbb{R}$ est l'intervalle dyadique défini par $2^j x - k \in [0, 1]$, nous définissons ψ_I par $\psi_I(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$.

On a alors

Théorème 1. *La collection des ondelettes $\psi_I(x)$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.*

Nous allons donner l'énoncé correspondant dans $\mathbb{R}^n$ en reprenant les notations de l'introduction et en imitant la construction du système de Haar. La fonction ψ reste la même que ci-dessus et on lui associe une fonction $\varphi \in S(\mathbb{R})$ d'intégrale égale à 1 définie par $\hat{\varphi}(t) = \cos \omega(t)$ si $|t| \leqslant 4\pi/3$ et par $\hat{\varphi}(t) = 0$ sinon.

On pose $\psi^{(0)}(t) = \varphi(t)$, $\psi^{(1)}(t) = \psi(t)$ et l'on définit $\psi^{(\epsilon)} \in S(\mathbb{R}^n)$ par $\psi^{(\epsilon)}(x) = \psi^{(\epsilon_1)}(x_1)\psi^{(\epsilon_2)}(x_2) \cdots \psi^{(\epsilon_n)}(x_n)$ où $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in E$; cela signifie que $\epsilon_j = 0$ où 1 mais que la suite ne comportant que des zéros est exclue.

Rappelons qu'un cube dyadique Q est défini par $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}^n$ et est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^n$ tels que $2^j x - k \in [0, 1]^n$. On pose alors

$$\psi_Q^{(\epsilon)}(x) = 2^{nj/2}\psi^{(\epsilon)}(2^j x - k) = 2^{nj/2}\psi^{(\epsilon_1)}(2^j x_1 - k_1) \cdots \psi^{(\epsilon_n)}(2^j x_n - k_n). \tag{2.5}$$

Avec ces notations, nous nous proposons de démontrer le résultat suivant.

Théorème 2. *La collection des fonctions $\psi_Q^{(\epsilon)}$, $\epsilon \in E$, $Q \in \mathcal{Q}$, est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Avant de démontrer ce résultat, introduisons quelques notations. Malgré le fait que le choix de ψ ne soit pas unique, les fonctions $\psi_Q^{(\epsilon)}$, $\epsilon \in E$, $Q \in \mathcal{Q}$, seront appelées les *ondelettes*. Toute série $\sum_{\epsilon \in E} \sum_{Q \in \mathcal{Q}} \alpha(\epsilon, Q)\psi_Q^{(\epsilon)}(x)$ s'appelle une série d'ondelettes.

Si $f(x)$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^n)$ ou, plus généralement, est une distribution tempérée, les coefficients

$$\alpha(\epsilon, Q) = \int f(x)\psi_Q^{(\epsilon)}(x)\, dx \tag{2.6}$$

s'appelleront les *coefficients d'ondelette*. Une conséquence facile du théorème 2 est que l'on aura toujours la formule d'inversion

$$f(x) = \sum_{\epsilon \in E} \sum_{Q \in \mathcal{Q}} \alpha(\epsilon, Q)\psi_Q^{(\epsilon)}(x) \tag{2.7}$$

au sens suivant: pour toute fonction de test $u(x) \in S(\mathbb{R}^n)$ dont tous les moments sont nuls,

$$\langle f, u \rangle = \sum_{\epsilon \in E} \sum_{Q \in \mathcal{Q}} \alpha(\epsilon, Q) \int_{\mathbb{R}^n} \psi_Q^{(\epsilon)}(x)u(x)\, dx.$$

Enfin la transformation qui à la distribution tempérée f associe la suite numérique $\alpha(\epsilon, Q)$ s'appellera la *transformation en ondelettes*. Elle joue le rôle d'une transformation de Fourier locale (en fait les intégrales portent sur $\mathbb{R}^n$ tout entier mais il y a un très fort amortissement dû à la décroissance rapide de ψ). Nous décomposerons la preuve du Théorème 1 en deux parties.

Nous démontrerons d'abord que $\psi_Q^{(\epsilon)}$ est orthogonale à $\psi_{Q'}^{(\epsilon')}$ si $(Q, \epsilon) \neq (Q', \epsilon')$. Ensuite nous vérifierons que toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^n; dx)$ orthogonale à chacune des $\psi_Q^{(\epsilon)}$, $\epsilon \in E$, $Q \in \mathcal{Q}$, est nécessairement nulle.

Les relations d'orthogonalité découlent des propriétés correspondantes en une variable réelle (que nous allons décrire).

Lemme 1. *On a*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(t)\bar{\hat{\psi}}(2^{-j}t)e^{ik2^{-j}t}\,dt = 0$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$ *et tout* $k \in \mathbb{Z}$. *De même on a*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(t)\bar{\hat{\psi}}(2^{-j}t)e^{ik2^{-j}t}\,dt = 0$$

pour $j \geqslant 1$ *et* $k \in \mathbb{Z}$.

Commençons par vérifier la première relation. Si $j \geqslant 1$, les supports de $\hat{\varphi}(t)$ et de $\hat{\psi}(2^{-j}t)$ sont disjoints.

Si $j = 0$, on a $\hat{\varphi}(t)\bar{\hat{\psi}}(t) = e^{it/2}\sin\omega(t)\cos\omega(t)$ si $|t| \leqslant 4\pi/3$, 0 sinon. Le support $\hat{\varphi}\bar{\hat{\psi}}$ se décompose donc des deux intervalles $S = [2\pi/3, 4\pi/3]$ et $S - 2\pi$. L'identité $\omega(t - 2\pi) = \pi/2 - \omega(t)$ et la relation $e^{i\pi} = -1$ achèvent la vérification.

La preuve des secondes assertions est identique. Si $j \geqslant 2$, les supports de $\hat{\psi}(t)$ et de $\hat{\psi}(2^{-j}t)$ sont disjoints. Il reste à traiter le cas $j = 1$ et l'on fait dans l'intégrale le changement de variable $t = 2s$. Revenant à la variable t, on remarque que $\hat{\psi}(2t)\bar{\hat{\psi}}(t) = e^{-it/2}\sin\omega(t)\cos\omega(t)$ si $|t| \leqslant 4\pi/3$, 0 sinon. On est ramené au cas précédent.

Nous allons maintenant élucider le cas $j = 0$.

Lemme 2. *Pour tout* $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$ *on a*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(t)|^2 e^{ikt}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(t)|^2 e^{ikt}\,dt = 0.$$

Pour le voir, nous allons démontrer que

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(t + 2\pi j)|^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(t + 2\pi j)|^2 = 1.$$

Nous nous limiterons à la première identité. La somme à calculer définit une fonction 2π-périodique qu'il suffit de connaître sur un intervalle de longueur 2π. On choisit l'intervalle $2\pi/3 \leqslant t \leqslant 8\pi/3$. Si $2\pi/3 \leqslant t \leqslant 4\pi/3$, les seules valeurs de j qui interviennent sont $j = 0$ et $j = -1$. Puisque $\omega(t - 2\pi) = \pi/2 - \omega(t)$, l'identité résulte de $\sin^2 \omega(t) + \cos^2 \omega(t) = 1$. Si $4\pi/3 \leqslant t \leqslant 8\pi/3$, on doit prendre $j = 0$ et $j = -2$ et l'on conclut de même.

Revenons à l'orthogonalité entre les $\psi_Q^{(\epsilon)}$. On est amené à calculer l'intégrale

$$I(j, j', k, k', \epsilon, \epsilon') = \int_{\mathbb{R}^n} \exp [i(k2^{-j} - k'2^{-j'})\xi]\hat{\psi}^{(\epsilon_1)}(2^{-j}\xi_1)\bar{\hat{\psi}}^{(\epsilon'_1)}(2^{-j'}\xi_1) \cdots \hat{\psi}^{(\epsilon_n)}(2^{-j}\xi_n) \bar{\hat{\psi}}^{(\epsilon'_n)}(2^{-j'}\xi_n)\, d\xi_1 \cdots d\xi_n.$$

Par symétrie, on peut supposer $j \geqslant j'$. On fait immédiatement le changement de variable $2^{-j}\xi = u$. On est donc ramené à $j = 0$, ce que nous supposerons désormais. Si $j' \geqslant 1$, on appelle m un indice tel que $\epsilon_m = 1$ (un tel indice existe parce que $\epsilon \in E$). On intègre d'abord par rapport à la variable x_m et le lemme 1 assure la nullité de I. Si $j' = 0$ et $k \neq k'$, il existe un indice m tel que $k_m \neq k'_m$. On intègre d'abord par rapport à la variable x_m et I est nulle, soit à cause de la première assertion du lemme 1, soit à cause du lemme 2.

Enfin le dernier cas à envisager est $j = 0$, $k = k'$ et $\epsilon \neq \epsilon'$. Il y a donc un indice m tel que $\epsilon_m = 1$ et $\epsilon'_m = 0$ et la première assertion du lemme 1 entraîne la nullité de l'intégrale.

On vérifie sans peine que $\|\psi_Q^{(\epsilon)}\|_2 = 1$ pour tout ϵ et tout Q.

3. La suite des $\psi_Q^{(\epsilon)}$ est une partie totale dans $L^2(\mathbb{R}^n)$

Nous arrivons à la partie la plus technique de la démonstration du Théorème 2.

Nous allons vérifier que $\langle f, \psi_Q^{(\epsilon)} \rangle = 0$ pour tout $\epsilon \in E$ et tout $Q \in \mathcal{Q}$ entraîne $f = 0$.

Pour cela nous allons écrire ces relations en utilisant la transformation de Fourier. Quitte à changer les notations, nous avons, pour une certaine fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\text{(3.1)} \qquad \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) \exp (ik2^{-j}\xi)\hat{\psi}^{(\epsilon_1)}(2^{-j}\xi_1) \cdots \hat{\psi}^{(\epsilon_n)}(2^{-j}\xi_n)\, d\xi_1 \cdots d\xi_n = 0$$

pour tout $j \in \mathbb{Z}$, tout $k \in \mathbb{Z}^n$ et toute suite $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \neq (0, \ldots, 0)$ de 0 où de 1.

Nous devons en conclure que $f = 0$. Nous procédons au changement de variable $2^{-j}\xi = u$. Alors (3.1) devient

$$\text{(3.2)} \qquad \int_{\mathbb{R}^n} f_j(\xi) \exp (ik\xi)\hat{\psi}^{(\epsilon_1)}(\xi_1) \cdots \hat{\psi}^{(\epsilon_n)}(\xi_n)\, d\xi = 0 \quad \text{où} \quad f_j(\xi) = f(2^j\xi).$$

Il est classique que (3.2) pour j fixé et tout $k \in \mathbb{Z}^n$ est équivalent à l'identité

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f_j(\xi + 2k\pi)\hat{\psi}^{(\epsilon_1)}(\xi_1 + 2k_1\pi) \cdots \hat{\psi}^{(\epsilon_n)}(\xi_n + 2k_n\pi) = 0. \tag{3.3}$$

Cette identité doit être satisfaite pour tout $j \in \mathbb{Z}$, tout $\epsilon \in E$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^n$. La situation idéale serait celle où existerait une partie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ayant les propriétés suivantes: les translatées $\Omega + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}^n$, sont deux à deux disjointes; pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, il existe un $j \in \mathbb{Z}$ tel que $2^j\xi \in \Omega$ et enfin pour tout $\xi \in \Omega$, il existe $\epsilon \in E$ tel que $\hat{\psi}^{(\epsilon_1)}(\xi_1) \neq 0, \ldots, \hat{\psi}^{(\epsilon_n)}(\xi_n) \neq 0$. Alors (3.3) impliquerait $f_j(\xi) = 0$ sur Ω pour tout $j \in \mathbb{Z}$ et donc $f = 0$. Naturellement ce n'est pas le cas mais nous allons essayer de nous rapprocher le plus possible de cette situation idéale.

Pour simplifier les notations qui suivent, nous nous limiterons à la dimension $n = 2$. Ecrivons à nouveau (3.3) de façon détaillée

$$\sum_k \sum_l f_j(u + 2k\pi, v + 2l\pi)\hat{\psi}(u + 2k\pi)\hat{\psi}(v + 2l\pi) = 0 \tag{3.4}$$

$$\sum_k \sum_l f_j(u + 2k\pi, v + 2l\pi)\hat{\varphi}(u + 2k\pi)\hat{\psi}(v + 2l\pi) = 0 \tag{3.5}$$

$$\sum_k \sum_l f_j(u + 2k\pi, v + 2l\pi)\hat{\psi}(u + 2k\pi)\hat{\varphi}(v + 2l\pi) = 0. \tag{3.6}$$

Les sommes (3.4) à (3.6) définissent évidemment des fonctions $(2\pi\mathbb{Z})^2$-périodiques que l'on analysera sur un «domaine fondamental». Nous allons dans un premier temps supposer

$$(u, v) \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]^2 = \Omega_1$$

et considérer que (3.4), (3.5) et (3.6) relient $f_j(u, v)$ (que nous cherchons à calculer) à des valeurs parasites $f_j(u + 2k\pi, v + 2l\pi)$ que nous chercherons à éliminer.

Pour $(u, v) \in \Omega_1$, on a nécessairement $k = 0$ ou $k = -1$ et $l = 0$ ou $l = -1$. En posant $f_j = f_j(u, v)$, $g_j = f_j(u - 2\pi, v)$, $\tilde{f}_j = f_j(u, v - 2\pi)$ et $\tilde{g}_j = f_j(u - 2\pi, v - 2\pi)$,

$$\begin{aligned} &\sin\omega(u)\sin\omega(v)f_j - \cos\omega(u)\sin\omega(v)g_j \\ &\quad - \sin\omega(u)\cos\omega(v)\tilde{f}_j + \cos\omega(u)\cos\omega(v)\tilde{g}_j = 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} &\cos\omega(u)\cos\omega(v)f_j + \sin\omega(u)\sin\omega(v)g_j \\ &\quad - \cos\omega(u)\cos\omega(v)\tilde{f}_j - \sin\omega(u)\cos\omega(v)\tilde{g}_j = 0 \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} &\sin\omega(u)\cos\omega(v)f_j - \cos\omega(u)\cos\omega(v)g_j \\ &\quad + \sin\omega(u)\sin\omega(v)\tilde{f}_j - \cos\omega(u)\sin\omega(v)\tilde{g}_j = 0. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Ces trois relations ne permettent évidemment pas de calculer les quatre inconnues que sont f_j, g_j, $\tilde{f}_j$ et $\tilde{g}_j$.

On considère (3.4) pour le point $(u'v') = (2u, 2v)$.

Alors les seules valeurs de k et l qu'il convient d'écrire sont $k = 0$ ou -2, $l = 0$ ou -2.

On observe que $f_j(u', v') = f_{j+1}(u, v), f_j(u' - 4\pi, v') = f_{j+1}(u - 2\pi, v)$ etc... En décalant d'une unité l'indice j, on obtient donc la relation manquante sous la forme

$$\begin{aligned}(3.10) \qquad & \sin\omega(u)\sin\omega(v)f_j + \cos\omega(u)\sin\omega(v)g_j \\ & + \sin\omega(u)\cos\omega(v)\tilde{f}_j + \cos\omega(u)\cos\omega(v)\tilde{g}_j = 0.\end{aligned}$$

Le déterminant des quatre relations écrites est égal à 1 et l'on obtient donc $f_j = g_j = \tilde{f}_j = \tilde{g}_j = 0$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$.

Désignons maintenant par Ω_2 le rectangle $\pi/3 \leqslant u \leqslant 2\pi/3$, $2\pi/3 \leqslant v \leqslant 4\pi/3$. On doit observer que $\hat{\psi}(u) = 0$ sur Ω_2 tandis que $\hat{\varphi}(u) = 1$. La seule relation pertinente pour calculer $f_j(u, v)$ si $(u, v) \in \Omega_2$ est donc (3.5). Les seules valeurs de k et l qui interviennent réellement sont $k = 0$ et $l = 0$ ou $l = -1$.

On pose encore $f_j = f_j(u, v)$ et $\tilde{f}_j = f_j(u, v - 2\pi)$ et l'on a

$$(3.11) \qquad f_j \sin\omega(v) - \tilde{f}_j \cos\omega(v) = 0.$$

Cette seule relation ne permet évidemment pas de calculer f_j et $\tilde{f}_j$. Mais, là encore, on considère le point $(2u, 2v)$ par lequel on écrit (3.4) et (3.5). Les seules valeurs de k ou l qui interviennent sont $k = 0$ et $k = -1$, $l = 0$ ou $l = -2$. Posons $\sigma_j = f_j(u, v)\cos\omega(v) + f_j(u, v - 2\pi)\sin\omega(v)$ et $\tau_j = f_j(u - \pi, v)\cos\omega(v) + f_j(u - \pi, v - 2\pi)\sin\omega(v)$ (en ayant pris soin de décaler d'un rang les indices).

On a donc $\sigma_j \cos\omega(2u) + \tau_j \sin\omega(2u) = 0$ et $\sigma_j \sin\omega(2u) - \tau_j \cos\omega(2u) = 0$. Ces deus relations impliquent $\sigma_j = 0$ ou encore

$$(3.12) \qquad f_j \cos\omega(v) + \tilde{f}_j \sin\omega(v) = 0.$$

Les relations (3.11) et (3.12) impliquent $f_j = \tilde{f}_j = 0$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$. Naturellement, la même approche convient pour les sept autres rectangles obtenus par symétrie par rapport aux axes de coordonnées ou de leurs bissectrices, à partir de Ω_2. Finalement, on étudie le rectangle Ω_3 défini par $0 \leqslant u \leqslant \pi/3$ et $2\pi/3 \leqslant v \leqslant 4\pi/3$. La seule relation significative est encore $f_j \sin\omega(v) - \tilde{f}_j \cos\omega(v) = 0$. On utilise le même stratagème que plus haut en écrivant (après le décalage nécessaire de j), la relation correspondante sur le rectangle $2\Omega_3$, pour le point $(2u, 2v)$. Il vient $f_j \cos\omega(v) + \tilde{f}_j \sin\omega(v) = 0$ et il en résulte que $f_j = \tilde{f}_j = 0$ sur Ω_3. Là encore on obtient la même conclusion pour tous les rectangles déduits de Ω_3 par toutes les symétries du problème.

Grâce à l'examen de ces trois «domaines fondamentaux», tout l'anneau $2\pi/3 \leqslant \sup(|u|, |v|) \leqslant 8\pi/3$ est rempli et $f(2^j u, 2^j v) = 0$ dans cet anneau. Il en résulte aussitôt que $f = 0$ presque-partout sur $\mathbb{R}^2$.

4. Convergence des séries d'ondelettes dans les espaces de fonctions de test ou de distributions

Soit $S(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions de test, muni de la topologie usuelle et $S_0 \subset S$ le sous-espace formé des fonctions $f \in S$ vérifiant $\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha f(x)\, dx = 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ (tous les moments sont nuls). Alors toutes les ondelettes $\psi_Q^{(\epsilon)}$ appartiennent à S_0. Si une série d'ondelettes converge dans S, elle converge donc dans S_0 vers une fonction de S_0. On montre facilement que la réciproque est exacte.

Lemme 3. *Si $f \in S_0$, la série d'ondelettes correspondante converge vers f, au sens de la topologie de S.*

Que se passe-*t*-il alors si f appartient à S? Il est facile de montrer que la série d'ondelettes converge vers f uniformément sur $\mathbb{R}^n$ et qu'il en est de même pour les séries dérivées.

Partons maintenant de la fonction 1 (identiquement égale à 1 sur tout $\mathbb{R}^n$). Chaque coefficient (en ondelettes) de 1 est 0. Pourquoi obtient-on une égalité numérique absurde?

Considérons l'espace topologique dual de $S_0(\mathbb{R}^n)$. C'est l'espace quotient $S'(\mathbb{R}^n)/\mathbb{C}[x]$ des distributions tempérées modulo les polynômes. Si S est une telle distribution tempérée, alors la série d'ondelettes correspondante $\sum_{Q \in \mathcal{Q}} \lambda_Q \psi_Q^{(\epsilon)}(x)$ converge au sens suivant: pour toute fonction $f \in S_0$, il y a convergence numérique de la série obtenue par intégration contre f. Voilà la raison pour laquelle on obtient $1 = 0$ (modulo les fonctions constantes).

5. Caractérisation des espaces $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < +\infty$, BMO$(\mathbb{R}^n)$ et de son prédual $H^1(\mathbb{R}^n)$ par la transformation en ondelettes

Soit E un espace de Banach séparable. Une suite $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E est une base de E si tout vecteur $x \in E$ s'écrit, de façon unique, $x = \sum_0^\infty \xi_k e_k$ où les ξ_k sont des scalaires et où les sommes partielles de la série écrite convergent vers x au sens de la norme de E. La base est dite inconditionnelle s'il existe une constante $C \geqslant 1$ telle que l'on ait, pour tout $m \geqslant 1$ et toute suite ξ_k, $k \in \mathbb{N}$, de scalaires $\left\| \sum_0^m \lambda_k \xi_k e_k \right\|_E \leqslant C \left\| \sum_0^m \xi_k e_k \right\|_E$ dès que $\sup |\lambda_k| \leqslant 1$.

Cela signifie que la condition d'appartenance à E d'une série $\sum_0^\infty \xi_k e_k$ ne porte que sur la suite $|\xi_k|$, $k \in \mathbb{N}$, et que cette condition, si elle est satisfaite pour une suite, l'est automatiquement pour toute autre dont les valeurs absolues sont, terme à terme, majorées par celles de la première.

L'espace $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ n'est pas séparable et ne possède donc pas de base inconditionnelle. Nous le remplaçons par la version séparable $\mathrm{VMO}(\mathbb{R}^n)$ qui est la fermeture, pour la norme de $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$, de l'espace $S(\mathbb{R}^n)$ des fonctions de test.

Théorème 3. *La suite $\psi_Q^{(\epsilon)}$, $\epsilon \in E$, $Q \in \mathbb{Q}$, est une base inconditionnelle pour $L^p(\mathbb{R}^n; dx)$, $1 < p < +\infty$,* $\mathrm{VMO}(\mathbb{R}^n)$ *et $H^1(\mathbb{R}^n)$.*

Pour le démontrer, on construit explicitement l'opérateur T qui transforme $\psi_Q^{(\epsilon)}$ en $\lambda(Q, \epsilon)\psi_Q^{(\epsilon)}$ si $|\lambda(Q, \epsilon)| \leqslant 1$. Le noyau-distribution de T est $K(x, y) = \sum_{\epsilon \in E} \sum_{Q \in \mathbb{Q}} \lambda(Q, \epsilon)\psi_Q^{(\epsilon)}(x)\psi_Q^{(\epsilon)}(y)$. On a, sans peine, les estimations de Calderón-Zygmund.

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta K(x, y)| \leqslant C(\alpha, \beta)|x - y|^{-n-|\alpha|-|\beta|} \tag{5.17}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, tout $y \neq x$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $\beta \in \mathbb{N}^n$.

Par ailleurs T est, de façon évidente, borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ car il est diagonalisé dans une base orthonormée. Enfin T vérifie, au sens du théorème de David et Journé $T(1) = T^*(1) = 0$.

Il en résulte que T est borné sur $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < +\infty$ et sur les «espaces limites» $H^1(\mathbb{R}^n)$ et $\mathrm{VMO}(\mathbb{R}^n)$.

Il reste à écrire des critères explicites d'appartenance à ces espaces fonctionnels. A cet effet, nous rappelons la construction de la base de Haar de $L^2(\mathbb{R}^n; dx)$. On désigne par $\tilde{\psi}(x)$ la fonction d'une variable réelle, égale à 1 sur $[0, 1/2[$, à -1 sur $[1/2, 1[$ et à 0 ailleurs. On appelle $\tilde{\varphi}$ la fonction indicatrice de l'intervalle $[0, 1]$ (égale à 1 sur cet intervalle et à 0 ailleurs). On construit alors, pour tout $\epsilon \in E$ et tout $Q \in \mathbb{Q}$,

$$\tilde{\psi}_Q^{(\epsilon)}(x) = 2^{nj/2}\tilde{\psi}^{(\epsilon_1)}(2^j x_1 - k_1) \cdots \tilde{\psi}^{(\epsilon_n)}(2^j x_n - k_n)$$

où $\tilde{\psi}^{(0)} = \tilde{\varphi}$, $\tilde{\psi}^{(1)} = \tilde{\psi}$.

Théorème 4. *L'isométrie U: $L^2(\mathbb{R}^n; dx) \to L^2(\mathbb{R}^n; dx)$ qui à $\psi_Q^{(\epsilon)}$ associe $\tilde{\psi}_Q^{(\epsilon)}$ se prolonge en un isomorphisme de $L^p(\mathbb{R}^n)$ sur lui-même si $1 < p < +\infty$, en un isomorphisme de l'espace de Hardy $H^1(\mathbb{R}^n; dx)$ de Stein et Weiss sur sa version dyadique H_d^1 et en un isomorphisme de l'espace* $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n; dx)$ *de John et Nirenberg sur sa version dyadique.*

Cela signifie que les coefficients (d'ondelettes) $\lambda(Q, \epsilon)$ de $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ sont caractérisés par la condition $\left(\sum_\epsilon \sum_Q |\lambda(Q, \epsilon)|^2 |Q|^{-1} \mathbb{1}_Q(x)\right)^{1/2} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ où $1 < p < +\infty$. On a désigné par $|Q|$ le volume de Q et par $\mathbb{1}_Q(x)$ la fonction indicatrice de Q.

Si $p = 1$, cette condition caractérise les coefficients de $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$. Enfin nous allons montrer, et ce sera le début de la démonstration, que les coefficients d'ondelettes $\lambda(Q, \epsilon)$ de $f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ sont caractérisés par la condition de Carleson

$$\sum_{\epsilon} \sum_{Q \subset R} |\lambda(Q, \epsilon)|^2 \leqslant C|R| \tag{5.2}$$

(pour tout cube dyadique R, la somme étant étendue à tous les sous-cubes dyadiques $Q \subset R$).

Montrons d'abord que (5.2) entraîne la convergence, pour la topologie $\sigma(\mathrm{BMO}, H^1)$ de la série $\sum_\epsilon \sum_Q \psi_Q^\epsilon$ vers une fonction $f \in \mathrm{BMO}$. Pour ce faire, nous ignorons l'indice ϵ et raisonnons sur des sommes finies. Le passage à la limite est de pure routine, une fois établie l'inégalité $\left\| \sum_Q \lambda(Q)\psi_Q(x) \right\|_{BMO} \leqslant$ $\leqslant C_0 |||\lambda(Q)|||$ sur ces sommes finies, C_0 ne dépend que de n et $|||\cdot|||$ est la borne inférieure des $\sqrt{C}$ dans (5.2).

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ une fonction d'intégrale égale à 1 et portée par le cube unité $0 \leqslant x_j \leqslant 1$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$.

Nous poserons $\varphi_Q(x) = 2^{nj}\varphi(2^j x - k)$ de sorte que $\varphi_Q(x)$ est portée par le cube dyadique Q et d'intégrale égale à 1. On considère alors la distribution

$$K(x, y) = \sum_{Q \in \mathcal{Q}} \lambda(Q)\psi_Q(x)\varphi_Q(y).$$

On a $|\lambda(Q)| \leqslant (C|Q|)^{1/2}$ et il en résulte aussitôt que $K(x, y)$ vérifie (5.1). Montrons que l'opérateur T, dont $K(x, y)$ est le noyau-distribution, est borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. On a

$$\begin{aligned}\|T(f)\|_2 &= \left\| \sum_{Q \in \mathcal{Q}} \lambda(Q)\left(\int f\varphi_Q\right)\psi_Q(x) \right\|_2 \\ &= \left(\sum_{Q \in \mathcal{Q}} |\lambda(Q)|^2 \left| \int f\varphi_Q \right|^2 \right)^{1/2} \leqslant C_0 |||\lambda(Q)||| \, \|f\|_2\end{aligned}$$

grâce à la version dyadique de l'inégalité de Carleson exprimée dans le lemme suivant.

Lemme 4. *Soient p_Q, $Q \in \mathcal{Q}$, x_Q, $Q \in \mathcal{Q}$, deux suites positives arbitraires et $\omega(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction maximale définie par $\omega(x) = \sup_{Q \ni x} x_Q$. Supposons que pout tout cube dyadique $R \in \mathcal{Q}$, on ait $\sum_{Q \subset R} p_Q \leqslant |R|$. Alors on a $\sum_{Q \in \mathcal{Q}} p_Q x_Q \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \omega(x)\, dx$.*

On a donc continuité de T: $L^2(\mathbb{R}^n; dx) \to L^2(\mathbb{R}^n; dx)$.

Ceci, joint à (5.1), entraîne $T(1) \in \mathrm{BMO}$ ce qui est bien ce que nous cherchions à prouver.

En sens inverse, supposons que f appartienne à BMO.

On désigne par R un cube dyadique et par R_j, $j \geqslant 1$, les cubes (non dyadiques) de même centre que R et dont les côtés sont 2^j fois celui de R. On décompose, comme d'habitude, f en la série

$$f = c(R) + f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_j(x) + \cdots$$

où $c(R) = m_R f$ est le moyenne de f sur R et où $f_0(x) = f(x) - c(R)$ sur le cube R, $f_0(x) = 0$ ailleurs et $f_j(x) = f(x) - c(R)$ sur $R_j \backslash R_{j-1}$, 0 ailleurs. La condition $f \in \mathrm{BMO}$ entraîne $|m_{R_{j+1}} f - m_{R_j} f| \leqslant C \| f \|_{\mathrm{BMO}}$ et donc $|m_{R_j} f - m_R f| \leqslant \leqslant Cj \| f \|_{\mathrm{BMO}}$. Finalement $\| f_j \|_2 \leqslant C(1+j) |R_j|^{1/2} \| f \|_{\mathrm{BMO}}$. On écrit alors $\langle f, \psi_Q \rangle = \sum_0^\infty \langle f_j, \psi_Q \rangle$.

Pour $j \geqslant 2$, on a

$$|\langle f_j, \psi_Q \rangle| \leqslant \| f_j \|_2 \Big(\int_{R_j \backslash R_{j-1}} |\psi_Q(x)|^2 \, dx \Big)^{1/2} \leqslant C_m \| f_j \|_2 \left(\frac{|Q|}{|R_j|} \right)^m$$

pour tout $m \geqslant 1$ (grâce à la décroissance rapide de ψ et à la condition géométrique $Q \subset R$).

Pour $j = 0$ ou $j = 1$, on utilise l'identité de Plancherel et l'on a

$$\sum_Q |\langle f_j, \psi_Q \rangle|^2 = \| f_j \|_2^2 \leqslant C |R| \, \| f \|_{\mathrm{BMO}}^2 .$$

On conclut, grâce à la remarque que

$$\sum_{Q \subset R} \sum_{j \geq 2} j^2 \frac{|Q|^2}{|R_j|} = c_n |R| .$$

La fin de la démonstration du Théorème 3 est alors immédiate. En effet, il est classique que l'espace BMO dyadique est aussi caractérisé par (5.2) en décomposant les fonctions dans le système de Haar. De sorte que U établit un isomorphisme entre ces deux espaces. Par dualité, U (qui est son propre transposé) définit un isomorphisme entre l'espace de Hardy $H^1(\mathbb{R}^n)$ usuel et sa version dyadique. Par interpolation, U est un isomorphisme sur tous les espaces $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < +\infty$.

6. Caractérisation des espaces de Hölder homogènes C^r, $r > 0$, des espaces de Sobolev H^s et des espaces de Besov $B_q^{s,p}$ $(1 \leqslant p \leqslant +\infty, 1 \leqslant q \leqslant +\infty, s \in \mathbb{R})$

Rappelons que si $0 < r < 1$, f appartient à l'espace de Hölder homogène C^r lorsque $|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y|^r$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $y \in \mathbb{R}^n$. Si $r = 1$, on convient de remplacer C^r par la classe de Zygmund définie par $|f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)| \leqslant C|y|$ $(x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n)$.

Si $r = m + s$, $0 < s \leqslant 1$, $m \in \mathbb{N}$, on écrit $f \in C^r$ si $\partial^\alpha f \in C^s$ pour tous les $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tels que $|\alpha| = m$.

L'espace de Sobolev H^s, $s \in \mathbb{R}$, est défini par

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s \, d\xi < +\infty$$

et enfin les espaces de Besov homogènes $\dot{B}_q^{s,p}$ sont caractérisés par la décomposition de Littlewood-Paley. On part d'une fonction $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, nulle au voisinage de 0 et telle que $\sum_{-\infty}^{\infty} |\theta(2^j \xi)| \geqslant 1$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ non nul. Alors une distribution tempérée f, modulo les polynômes, appartient à $\dot{B}_q^{s,p}$ si et seulement si $\|\Delta_j(f)\|_p \leqslant 2^{-js}\epsilon_j$ où $\epsilon_j \in l^q(\mathbb{Z})$ et où $\mathfrak{F}(\Delta_j(f))(\xi) = \theta(2^{-j}\xi)(\mathfrak{F}f)(\xi)$ en désignant par $\mathfrak{F}$ la transformation de Fourier (agissant sur la distribution tempérée f). On a désigné par $\|\cdot\|_p$ la norme $L^p(\mathbb{R}^n, dx)$.

Cet espace $\dot{B}_q^{s,p}$ ne dépend pas du choix de θ. On a $\dot{B}_\infty^{s,\infty} = \dot{C}^s$ (espace de Hölder homogène) et $H^s = L^2 \cap \dot{B}_2^{s,2}$ pour $s \geqslant 0$.

Théorème 5. *Une distribution tempérée f (modulo les polynômes) appartient à $\dot{B}_q^{s,p}$ si et seulement si* $\sup_{\epsilon \in E} |\langle f, \psi_Q^{(\epsilon)} \rangle| = \alpha(k,j)$ *vérifie*

$$\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\{ \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (\alpha(k,j))^p \right)^{1/p} 2^{j(s+n(1/2-1/p))} \right\}^q \right)^{1/q} < +\infty \tag{6.1}$$

(*avec les changements usuels si* $p = +\infty$ *ou* $q = +\infty$).

Montrons d'abord la partie directe. Pour simplifier légèrement l'écriture, nous nous limiterons à la dimension 1.

Alors la fonction $\bar{\hat{\psi}}$ servant à définir les ondelettes sera notre fonction θ et l'on a

$$\langle f, \psi_Q \rangle = 2^{-j/2}(2\pi)^{-1} \int \hat{f}(\xi) e^{i2^{-j}k\xi} \bar{\hat{\psi}}(2^{-j}\xi) \, d\xi = 2^{-j/2} \Delta_j(f)(2^{-j}k).$$

Pour conclure, on utilise le lemme évident d'échantillonnage.

Lemme 5. *Il existe une constante $C = C(n)$ telle que pour tout $R > 0$, tout $p \in [1, +\infty]$ et toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R}^n; dx)$ dont la transformée de Fourier est portée par la boule $|\xi| \leqslant 20R$, on ait* $\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} R^{-n} |f(kR^{-1})|^p \right)^{1/p} \leqslant C(n) \|f\|_p$.

Naturellement 20 peut être remplacé (quitte à changer la constante $C(n)$ par une autre constante. Pour nous, $20 \geqslant 8\pi/3$.

On a donc, pour tout $j \in \mathbb{Z}$,

$$\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} 2^{-nj} |\Delta_j f(2^{-j}k)|^p \right)^{1/p} \leqslant C(n) \|\Delta_j(f)\|_p$$

ce qui implique évidemment (6.1).

En sens inverse, supposons que $\alpha(k,j)$ vérifie (6.1) et montrons que $f(x) = \sum\sum \alpha(k,j)2^{j/2}\psi(2^j x - k)$ appartient à $B_q^{s,p}$. On teste cette appartenance sur la boule unité du dual $B_{q'}^{-s,p'}$ pour lequel on utilise la partie directe. Les détails sont laissés au lecteur.

7. Calcul des sommes partielles dans la transformation en ondelettes

Soit f une distribution tempérée (modulo les polynômes). Que peut-on dire de la différence

$$g(x) = f(x) - \sum_{\epsilon \in E} \sum_{|Q| \leq 1} \langle f, \psi_Q^{(\epsilon)} \rangle \psi_Q^{(\epsilon)}?$$

Il semble intuitif que les petits cubes soient responsables des petits détails de $f(x)$. Ces petits détails sont très importants ou significatifs si $f(x)$ est très irrégulière. De sorte que notre différence $g(x)$ devrait être indéfiniment dérivable.

Désignons par $\mathfrak{D}_Q^{(\epsilon)}$, $\epsilon \in E$, $Q \in \mathcal{Q}$, l'opérateur de projection orthogonale sur le vecteur $\psi_Q^{(\epsilon)}$ de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n; dx)$. Désignons de même par $\mathcal{E}_Q$, $Q \in \mathcal{Q}$, l'opérateur de projection orthogonale sur le vecteur φ_Q. Les fonctions φ et ψ sont définies par le théorème 2.

Appelons $\mathcal{Q}_j$ la collection des cubes dyadiques de côté 2^{-j} et posons

$$\mathfrak{D}_j = \sum_{\epsilon \in E} \sum_{Q \in \mathcal{Q}_j} \mathfrak{D}_Q^{(\epsilon)} \quad \text{et de même} \quad \mathcal{E}_j = \sum_{Q \in \mathcal{Q}_j} \mathcal{E}_Q.$$

On a alors l'identité remarquable suivante.

Théorème 6. *Pour tout* $j \in \mathbb{Z}$, $\mathfrak{D}_j = \mathcal{E}_{j+1} - \mathcal{E}_j$.

Observons que $\mathcal{E}_j$ est une «version régularisante» de l'opérateur d'espérance conditionnelle par rapport à la tribu $\mathfrak{F}_j$ engendrée par les cubes $Q \in \mathcal{Q}_j$. En effet, cette espérance conditionnelle $E_j(f) = \sum_{Q \in \mathcal{Q}_j} \mathbb{1}_Q 2^{nj} \langle f, \mathbb{1}_Q \rangle$ et $\mathcal{E}_j$ est donnée par la même identité, à ceci près que $2^{nj/2}\mathbb{1}_Q$ est remplacée par la «version C^∞» φ_Q de la fonction indicatrice normalisée du cube Q.

Donnons la structure de la preuve du théorème 6 pour la dimension 1. On désigne par Δ_j l'opérateur de convolution avec $2^j\psi(2^j x)$ et par M_j l'opérateur de multiplication ponctuelle par $\exp(2\pi i 2^j x)$. Alors une application sans malice de la formule sommatoire de Poisson montre que

$$\mathfrak{D}_j = \Delta_j \Delta_j^* + \Delta_j M_j \Delta_j^* + \Delta_j M_{j+1} \Delta_j^* + \Delta_j M_j^* \Delta_j^* + \Delta_j M_{j+1}^* \Delta_j^*.$$

On désigne par S_j l'opérateur de convolution avec $2^j\varphi(2^jx)$ et l'on a alors les identités remarquables suivantes

$$\begin{aligned}\Delta_j\Delta_j^* &= S_{j+1}S_{j+1}^* - S_jS_j^*\\ \Delta_jM_j\Delta_j^* &= -S_jM_jS_j^*\\ \Delta_jM_{j+1}\Delta_j^* &= S_{j+1}M_{j+1}S_{j+1}^*.\end{aligned}$$

Par ailleurs, on fait pour $\mathcal{E}_j$ le calcul que nous avons esquissé pour $\mathcal{D}_j$ et l'on obtient $\mathcal{E}_j = S_jS_j^* + S_jM_jS_j^* + S_jM_j^*S_j^*$. Il résulte de tout cela que

$$\mathcal{D}_j = \mathcal{E}_{j+1} - \mathcal{E}_j.$$

Passons au cas de la dimension supérieure. Par exemple, si $n = 2$, on a, en conservant les notations de la dimension 1,

$$\mathcal{E}_{j+1}\otimes\mathcal{E}_{j+1} - \mathcal{E}_j\otimes\mathcal{E}_j = \mathcal{D}_j\otimes\mathcal{D}_j + \mathcal{D}_j\otimes\mathcal{E}_j + \mathcal{E}_j\otimes\mathcal{D}_j$$

et ces trois termes correspondent aux trois ondelettes $\psi_Q^{(\epsilon)}$, $\epsilon\in E$, $Q\in\mathcal{Q}_j$, nécessaires pour obtenir notre base en dimension 2.

Le théorème 6 est donc démontré et ces remarques fournissent une nouvelle preuve du théorème 2.

Retournant à $g(x)$, on a donc

$$\begin{aligned}g(x) &= f(x) - \sum_{j\geq 0}\mathcal{D}_j(f) = f(x) - \sum_{j\geq 0}(\mathcal{E}_{j+1}(f) - \mathcal{E}_j(f)) = \mathcal{E}_0(f)\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k\varphi(x-k)\end{aligned}$$

où les coefficients c_k sont donnés par $c_k = \int f(u)\varphi(u-k)\,du$.

Cela signifie que $f(x)$ et $g(x)$ diffèrent d'un terme d'erreur trivial.

8. Le paraproduit et la transformation en ondelettes

La fonction φ est la même que dans le Théorème 2. L'opérateur S_j est la convolution avec $2^{nj}\varphi(2^jx)$. On pose $\Delta_j = S_{j+1} - S_j$ et finalement

$$\pi(a,f) = \sum_{-\infty}^{\infty} S_{j-3}(a)\Delta_j(f).$$

On suppose $a(x)\in L^\infty\cap C^r$ et l'on raisonne modulo les opérateurs r-régularisants; c'est-à-dire ceux qui transforment H^s en H^{s+r} pour tout $s\in\mathbb{R}$. Les termes d'erreur sont analysés par le lemme suivant.

Lemme 6. *Soient $f_j(x)$, $j \in \mathbb{Z}$, des fonctions de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dont les transformées de Fourier $\hat{f}_j$ vérifient, pour deux constantes $R_2 > R_1 > 0$*

$$\hat{f}_j(\xi) = 0 \quad si \quad |\xi| \leqslant R_1 2^j \quad ou\ si \quad |\xi| \geqslant R_2 2^j. \tag{8.1}$$

Alors, pour tout $s \in \mathbb{R}$, il existe une constante $C = C(R_1, R_2, s, n)$ telle que

$$\left\| \sum_{-\infty}^{\infty} f_j(x) \right\|_{H^s} \leqslant C\left(\sum_{-\infty}^{\infty} \|f_j\|_2^2 (1 + 4^j)^s \right)^{1/2} \tag{8.2}$$

Utilisant ce lemme, on commence par remplacer $S_{j-3}(a)$ par $S_{j-10}(a)$. On calcule ensuite $\pi(a, \psi_Q^{(\epsilon)})$ lorsque Q est défini par $2^m x - k \in [0, 1]^n$. Alors $\Delta_j(\psi_Q^{(\epsilon)}) = 0$ sauf si $|m - j| \leqslant 2$.

On définit (par linéarité) l'opérateur R_a par

$$R_a(\psi_Q^{(\epsilon)}) = \pi(a, \psi_Q^{(\epsilon)}) - S_{m-10}(a)\psi_Q^{(\epsilon)}$$

et, en utilisant notre lemme ainsi que la caractérisation des espaces de Sobolev en série d'ondelettes, on montre que R_a est r-régularisant.

On peut alors énoncer

Théorème 7. *Si $r > 0$ et $a(x) \in C^r \cap L^\infty$, le paraproduit $\pi(a,f)$ est défini par linéarité par*

$$\pi(a, \psi_Q^{(\epsilon)}) = S_Q(a)\psi_Q^{(\epsilon)}$$

où, par abus de langage, $S_Q(a) = S_{j-10}(a)$ lorsque

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n; 2^j x - k \in [0, 1]^n\};$$

si, de plus, $0 < r < 1$, on a, modulo un opérateur r-regularisant,

$$\pi(a, \psi_Q^{(\epsilon)}) = a(2^{-j}k)\psi_Q^{(\epsilon)}.$$

en d'autres termes, le paraproduit est diagonalisé dans la base hilbertienne des ondelettes.

9. Analyse des travaux antérieurs sur le sujet

La «version continue» de la transformation en ondelette a une longue histoire remontant aux travaux de A. Calderón et de ses collaborateurs. La version discrète apparaît en 1980 lorsque L. Carleson démontre que le système de Haar, correctement lissé est une base inconditionnelle de l'espace $H^1(\mathbb{T})$. Naturellement les ondelettes de Carleson ne forment pas une base hilbertienne mais il existe un système bi-orthogonal associé.

Une autre démarche a été introduite par Frazier et Jawerth [6] et, indépendamment, par l'un des auteurs [9].

Il s'agit d'exhiber ψ dans $S(\mathbb{R}^n)$ de sorte que l'on ait, pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^n; dx)$

$$f(x) = \sum_{Q \in \mathcal{Q}} \langle f, \psi_Q \rangle \psi_Q(x) \tag{9.1}$$

sans unicité.

Il suffit pour cela que la transformée de Fourier de ψ soit portée par le cube $-\pi \leqslant x_j \leqslant \pi$, $1 \leqslant j \leqslant n$ et que l'on ait, pour tout $\xi \neq 0$,

$$1 = \sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(2^j \xi)|^2. \tag{9.2}$$

Si l'on a unicité dans (9.1), les fonctions $\psi_Q(x)$ sont automatiquement orthogonales mais cela est exclu par la condition portant sur le support de $\hat{\psi}$.

References

[1] Bony, J. M. Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires. *Ann. Sc. E.N.S.,* **14** (1981), 209-246.

[2] Calderón, A. P. Intermediate spaces and interpolation, the complex method, *Studia Math.* **24** (1964), 113-190.

[3] Carleson, L. An explicit unconditional basis in H^1, *Bull. des Sciences Math.* **104**, 405-416.

[4] Daubechies, I., Grossmann, A., Meyer, Y. Painless non-orthogonal expansions (à paraître).

[5] David, G., Journé, J. L. A boundedness criterion for generalized Calderón-Zygmund operators, *Annals of Mathematics* **120** (1984), 371-397.

[6] Frazier, M., Jawerth, B. Decomposition of Besov Spaces (*Dept. of Mathematics, Washington University,* St-Louis, MO. 63130 U.S.A.).

[7] Goupillaud, P., Grossmann, Morlet, J. Cycle octave and related transforms in seismic signal analysis, Geo exploration **23** (1984/1985), 85-102. (*Elsevier Science Publishers,* B. V. Amsterdam).

[8] Grossmann, A., Morlet, J. Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape, *SIAM J. Math. Anal.* Vol. 15, N.° 4, July 1984.

[9] Meyer, Y. La transformation en ondelettes et les nouveaux paraproduits (à paraître aux Actes du Colloque d'Analyse non linéaire du CEREMADE, Univ. de Paris-Dauphine).

[10] Wojtaszczyk, P. The Franklin system is an unconditional basis in H^1, *Arkiv för Matematik,* **20**, 293-300.

P. G. Lemarié et Y. Meyer
Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique
Plateau de Palaiseau-91128 Palaiseau Cedex
«Unité Associée au C.N.R.S. n.° 169»

Ce travail a été effectué dans le cadre de la «R.C.P. ondelettes» du C.N.R.S.
M727.1285, Décembre 1985.