Revista Matemática Iberoamericana
Vol. 4, n.° 1, 1988

Constructions de Bases Orthonormées D'Ondelettes

Yves Meyer

A la mémoire de José-Luis Rubio de Francia

1. Introduction

Bien des bases orthonormées ont été découvertes, puis utilisées par les mathématiciens, les physiciens et les ingénieurs. Ces bases étaient, le plus souvent construites par l'un ou l'autre des deux procédés suivants. Soit elles se composaient des fonctions propres d'un opérateur auto-adjoint compact, soit elles étaient obtenues en appliquant la procédure standard de Gram-Schmidt à une suite convenable de fonctions. Dans les deux cas, les problèmes que l'on rencontre sont les suivants:

(1.1) la base orthonormée $u_k(x)$ n'est pas numériquement explicite

(1.2) les coefficients a_k d'une série $\sum a_k u_k(x)$ ne donnent qu'une information en moyenne et de nature globale sur les propriétés de la somme $f(x)$.

Par exemple, il est impossible d'estimer la norme L^p, $p \neq 2$, de la somme $f(x)$ d'une série trigonométrique en ne connaissant que les modules des coefficients de Fourier de $f(x)$. De même, les coefficients de Fourier ne fournissent pas d'information directe et accessible sur des propriétés locales, comme la dérivabilité en un point donné.

Au début des années 80, les ondelettes sont apparues comme la seule méthode permettant d'éviter toutes les difficultés que nous venons de décrire. Par exemple, en traitement du signal, on a cherché à enregistrer numériquement des phénomènes transitoires, relatifs à des échelles de temps qu'on ne connait pas à l'avance, ce qui est impossible lorsqu'on se límite à des séries ou des intégrales de Fourier traditionnelles. Les ondelettes ont une description numérique essentiellement triviale, puisqu'elles sont engendrées à partir d'une fonction de base $w(x)$, la «mère des ondelettes», par des translations entières, suivies de dilatations dyadiques. En revanche, la base orthonormée des ondelettes n'est pas l'ensemble des fonctions propres d'un opérateur différentiel auto-adjoint. C'est évident car un tel opérateur devrait être invariant par translations et dilatations, c'est à dire être un opérateur à coefficients constants. Or seules les exponentielles sont les fonctions propres de tels opérateurs. Tout cela signifie que nous ne disposerons d'aucune «recette bon marché» pour construire les bases orthonormées d'ondelettes et explique pourquoi elles ont été découvertes si tardivement.

En fait, le système de Haar a été inventé par Alfred Haar en 1909 et il a fallu attendre 1981 pour que les chaînons suivants apparaissent.

Rappelons que le système de Haar, dans sa version convenant à $L^2(\mathbb{R})$, se compose des fonctions $2^{j/2}h(2^jx - k)$, $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$, où $h(x)$ est nulle hors de $[0,1)$, est égale à 1 sur $[0, 1/2)$ et à -1 sur $[1/2, 1)$.

Nous dirons qu'une fonction $w(x)$, de la variable réelle x, est une *ondelette* d'ordre $m \geqslant 1$ si $w(x)$ appartient à l'espace de Sobolev $H^m(\mathbb{R})$, si $w(x)$, ainsi que ses dérivées d'ordre $\leqslant m$, est bornée et a une décroissance rapide à l'infini et si $2^{j/2}w(2^jx - k)$, $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$, est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$. Ces conditions impliquent que tous les moments de $w(x)$, d'ordre $\leqslant m$ soient nuls. Une ondelette est donc une fonction réguliére, bien localisée et oscillante, c'est à dire une petite onde.

Dans cet article nous nous proposons d'abord de rendre justice à un travail de Stromberg, paru en 1981, où la première base orthonormée d'ondelettes, était construite, puis de comparer les ondelettes de Stromberg à celles que l'on obtient aujourd'hui par des procédés plus généraux. Nous terminerons en examinant un problème ouvert: existe-t-il une méthode universelle fournissant toutes les bases orthonormées d'ondelettes?

2. Les Ondelettes de Stromberg

Nous débutons par la description d'une suite emboîtée $V_j, j \in \mathbb{Z}$, de sous espaces de $L^2(\mathbb{R})$. Désignons, tout d'abord, par V_0 le sous espace de $L^2(\mathbb{R})$ qui se compose de toutes les fonctions splines d'ordre $m \geqslant 1$ dont les noeuds appartiennent à $\mathbb{Z}$. En d'autres termes, $f(x)$ appartient à V_0 si $f(x)$ appartient à l'espace de Sobolev H^m et si la restriction de $f(x)$ à tout intervalle $[k, k+1]$, $k \in \mathbb{Z}$, est un polynome de degré au plus égal à m. A partir de V_0 on construit les $V_j, j \in \mathbb{Z}$, en imposant la condition que $f(x)$ appartient à V_j si et seulement si $f(2x)$ appartient à V_{j+1}. Alors V_j est inclus dans V_{j+1} et l'on désigne par W_j le complément orthogonal de V_j dans V_{j+1}. Tous les espaces W_j se déduisent de W_0 par la remarque évidente que $f(x)$ appartient à W_0 si et seulement si $f(2^j x)$ appartient à W_j. Le lemme qui suit nous apprend qu'une fonction $w(x)$, appartenant à W_0, ayant une décroissance rapide à l'infini et telle que la suite $w(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$, soit une base ortonormée de W_0 est automatiquement une ondelette.

En fait, il suffit de demander que $w(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$, soit une suite orthonormée et que $w(x)$ ait une décroissance rapide à l'infini.

Lemme 1. *Sous les hypothéses précédentes, la suite* $2^{j/2}w(2^j x - k)$ $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$, *est automatiquement une base orthonormée de l'espace* L^2.

En effet L^2 est la somme orthogonale des W_j, $j \in \mathbb{Z}$, et, pour chaque j, les fonctions $2^{j/2}w(2^j x - k)$, $k \in \mathbb{Z}$, forment une base orthonormée de W_j, comme on le voit par un simple changement d'échelle.

Pour construire $w(x)$, Stromberg emploie la méthode suivante. Il introduit un espace à mi-chemin entre V_0 et V_1, à savoir l'espace $V_{1/2}$ des fonctions appartenant à V_1 et dont la restriction à $[0, \infty)$ coincide avec celle d'une fonction de V_0. En d'autres termes, une fonction de $V_{1/2}$ est une fonction spline, de carré sommable, dont les noeuds sont les entiers positifs, négatifs ou nuls et les demi-entiers négatifs. On désigne par T l'opérateur de translation par 1, agissant sur $L^2(\mathbb{R})$. Il est immédiat que $V_{1/2}$ est inclus dans $T(V_{1/2})$ mais il est moins évident que la codimension de $E = V_{1/2}$ dans $F = T(V_{1/2})$ soit égale à 1. Pour le voir, on suit Stromberg et l'on considère la forme linéaire L sur F définie par

$$L(f) = (d/dx)^m f(1/2 + 0) - (d/dx)^m f(1/2 - 0).$$

Le noyau de L est $V_{1/2}$ puisque deux polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ de degré $\leqslant m$ qui se raccordent en 1/2 à l'ordre m sont nécessairement identiques. Il en résulte que la codimension de E dans F est égale à 1 et qu'il existe une fonction (unique à la multiplication près par une constante de module 1) $w(x) = w_m(x)$, appartenent à F, vérifiant $\|w\|_2 = 1$ et orthogonale à E (au sens du produit scalaire de l'espace de Hilbert de référence $L^2(\mathbb{R})$). *C'est cette fonction* $w(x)$ *qui est l'ondelette de Stromberg.* Par construction $w(x)$ appartient à $H^m(\mathbb{R})$ et, plus précisément, les dérivées de $w(x)$ d'ordre $\leqslant (m-1)$ sont continues, la dérivée m-ième est une fonction en escalier, mais il est beaucoup moins évident que $w(x)$ soit à décroissance exponentielle. Nous nous proposons d'établir cette dernière propriété en démontrant que la construction de $w(x)$ coincide aves les algorithmes généraux de construction d'ondelettes orthogonales développés par S. Mallat et l'auteur. Nous allons décrire ces algorithmes et les appliquer au cas qui nous occupe en privilégiant des solutions de «type causal» au lieu de rechercher, comme nous le faisions jusque là les solutions symétriques. Nous verrons alors apparaître les ondelettes $w_m(x)$ de Stromberg. Bien que les particularités géométriques de la construction de Stromberg ne soient pas généralisables à d'autres cadres que celui des suites emboîtées d'espaces de fonctions splines, la forme analytique obtenue s'insère donc dans un contexte d'une plus grande portée.

3. Analyses Multirésolutions et Ondelettes

Une analyse multirésolution de l'espace de référence $H = L^2(\mathbb{R})$ est, par définition, une suite emboîtée $V_j, j \in \mathbb{Z}$, de sous-espaces fermés de H ayant les propriétés suivantes.

(3.1) $f(x) \in V_j$ si et seulement si $f(2x) \in V_{j+1}$
(3.2) pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $f(x) \in V_0$ si et seulement si $f(x-k) \in V_0$
(3.3) l'intersection des V_j est réduite à $\{0\}$
(3.4) la réunion des V_j est dense dans $H = L^2$
(3.5) il existe une fonction $g(x)$ dans V_0 telle que $g(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$, soit une base de Riesz de H.

Une base de Riesz d'un espace de Hilbert H est, par définition, l'image d'une base orthonormée par un isomorphisme, non nécessairement isométrique. En d'autres termes, une base de Riesz, est une suite e_j, $j \in J$, ayant les deux propriétés suivantes

(3.6) il existe deux constantes C_1 et C_2, strictemente positives, telles que, pour toute suite (finie) α_j, $j \in J$, de coefficients scalaires, on ait

$$C_1(\Sigma|\alpha_j|^2)^{1/2} \leqslant \|\Sigma\alpha_j e_j\| \leqslant C_2(\Sigma|\alpha_j|^2)^{1/2}$$

(3.7) les combinaisons linéaires finies $\Sigma\alpha_j e_j$ sont denses dans H.

On dira qu'une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$ est m-régulière si, en outre, on peut choisir $g(x)$ bornée, à décroissance rapide à l'infini, ainsi que toutes ses dérivées d'ordre $\leqslant m$.

La première opération que l'on effectue sur une analyse multirésolution m-réguliére est de remplace $g(x)$ par $q(x)$, ayant les mêmes propriétés de régularité et de décroissance à l'infini et de sorte que (3.5) devienne la condition que $q(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$, soit une base orthonormée de V_0. Pour ce faire, on ne peut employer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt car il n'est pas compatible avec la structure particulière des bases que l'on cherche à construire. On le remplace par un algorithme différent que nous décrivons maintenant en situation générale. Si $e_j, j \in J$, est une base de Riesz d'un espace de Hilbert H, on considère la matrice de Gram associée qui est, par définition,

$$G = (\langle e_j, e_k \rangle)_{(j,k) \in J \times J}.$$

Cette matrice est définie-positive, précisément parce que e_j, $j \in J$, est une base de Riesz de H. On forme alors

$$G^{-1/2} = (\mu_{j,k})_{(j,k) \in J \times J}$$

et $\Sigma \mu_{j,k} e_k = f_j$ est la base orthonormée cherchée.

En revenant au cas particulier qui nous occupe, ce procédé d'orthonormalisation produit une suite de la forme $q(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$, lorsqu'on l'applique à une suite $g(x-k)$. Qui plus est, la transformée de Fourier

$$Q(u) = \int e^{-iux} q(x)\, dx$$

de $q(x)$ et celle, notée $G(u)$ de $g(x)$ sont reliées par

$$Q(u) = G(u) \left(\sum_{-\infty}^{\infty} |G(u + 2k\pi)|^2 \right)^{-1/2}$$

ce qui permet le calcul effectif de $q(x)$. En outre, on a

$$C_1 \leqslant \left(\sum_{-\infty}^{\infty} |G(u + 2k\pi)|^2 \right)^{1/2} \leqslant C_2$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes positives. On montre sans difficulté que $\sum_{-\infty}^{\infty} |G(u + 2k\pi)|^2$ est indéfiniment dérivable et que $q(x)$ a la même régularité et la même décroissance à l'infini que $g(x)$.

Se pose alors le problème de l'unicité de la fonction $q(x)$ telle que la suite $q(x-k)$ soit une base orthonormée de l'espace V_0. Si $s(x)$ est une autre solution, les transformées de Fourier de $q(x)$ et de $s(x)$ sont reliées par $Q(u) = S(u)\pi(u)$ où $\pi(u)$ est une fonction 2π-périodique et unimodulaire. Réciproquement cette relation fournit toujours une base orthonormée et enfin, si $q(x)$ et $s(x)$ sont toutes deux bornées et à décroissance rapide à l'infini, la fonction $\pi(u)$ est nécessairement C^∞. La réciproque est vraie, ce qui permet d'expliciter tous les choix possibles de $q(x)$. La fonction, $q(x)$ est «le père des ondelettes». Nous pouvons alors construire la fonction $w(x)$ telle que $w(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$, soit une base orthonormée de W_0. On se sert de l'inclusion $V_0 \subset V_1$ des analyses multi-résolutions et l'on définit la fonction $m_0(u)$ par

$$Q(2u) = m_0(u) Q(u)$$

et la condition que $m_0(u)$ soit 2π-périodique. Alors $m_0(u)$ est indéfiniment dérivable et, pour construire $w(x)$, on procède comme suit. On forme

$$m_1(u) = e^{-iu} \overline{m_0(u + \pi)}$$

puis

$$W(u) = m_1(u/2) Q(u/2)$$

et enfin $w(x)$ est la transformée de Fourier inverse de $W(u)$. Dans ces conditions $w(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$, est une base orthonormée de W_0. Une fois de plus se pose le problème de l'unicité. Comme ci-dessus, les seuls autres choix sont donnés par la possibilité de multiplier $W(u)$ par une fonction indéfiniment dérivable et 2π-périodique. Les vérifications de ces assertions sont faciles ([5]). Nous venons de décrire la construction générale de toutes les ondelettes. Il reste à indiquer quels choix particuliers conduisent aux ondelettes de Stromberg, ce que nous ferons dans la section suivante.

4. Les Ondelettes de Stromberg

Pour produire les ondelettes de Stromberg, on fixe un entier $m \geqslant 1$ et l'on considère la suite emboîtee V_j, $j \in \mathbb{Z}$, des espaces de fonctions splines que nous avons déjà décrite dans la Section 2. On commence par désigner par $g(x) = g_m(x)$ le produit de convolution $c * c * \cdots * c$ ($m+1$ termes) où $c(x)$ est la fonction caractéristique de $[-1, 0]$. La transformée de Fourier de $g(x)$ est

$$G(u) = (e^{iu} - 1)^{m+1}/(iu)^{m+1}.$$

Ensuite, on cherche $q(x)$, portée par $]-\infty, 0]$, telle que $q(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$, soit une base orthonormée de V_0. A cet effet, on utilise l'identité

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |G(u + 2k\pi)|^2 = P_m(\cos u)$$

où P_m est un polynôme de degré m. En outre P_m est positif sur $[-1, 1]$ et l'on a donc, grâce à un lemme dû à F. Riesz,

$$P_m(\cos u) = c_m |(1 + z_1 e^{iu})(1 + z_2 e^{iu}) \cdots (1 + z_m e^{iu})|^2 \tag{4.1}$$

où $|z_1| < 1, \ldots, |z_m| < 1$ et où c_m est une constante positive. En fait, un calcul plus explicite, dû à I. J. Schoenberg, montre que les z_j sont des réels positifs deux à deux distinctis que l'on notera $s_m < s_{m-1} < \cdots < s_1$.

On pose

$$A_m(u) = \sqrt{c_m}\,(1 + s_1 e^{iu}) \cdots (1 + s_m e^{iu})$$

et l'on définit la transformée de Fourier $Q(u)$ de $q(x)$ par

$$Q(u) = G(u)/A_m(u). \tag{4.2}$$

Il est immédiat de vérifier que $q(x)$ est portée par $]-\infty, 0]$ et a les propriétés annoncées. On suit ensuite la procédure générale du paragraphe précédent ce qui conduit à

$$W(u) = e^{-iu/2}\overline{m_0(u/2+\pi)}\,Q(u/2) \tag{4.3}$$

où $Q(2u) = m_0(u)Q(u)$. Nous nous proposons de démontrer le résultat suivant.

Théorème 1. *La fonction $w(x)$ dont la transformée de Fourier est donnée par* (4.3) *est, à la multiplication près par une constante unimodulaire, l'ondelette de Stromberg.*

La preuve de cet énoncé se ramène à trois vérifications. Par construction, $w(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$, est une base orthonormée de W_0. Nous voulons, en outre, montrer que $w(x)$ et orthogonale à l'espace X des fonctions de V_1 portées par $]-\infty, 0]$ et enfin vérifier que $w(x)$ appartient à $V_{1/2}$. La décroissance exponentielle de $w(x)$ sera essentiellement évidente.

Pour faire la première vérification, il convient d'utiliser le lemme suivant.

Lemme 2. *La suite $\sqrt{2}\,q(2x+k)$, $k \in \mathbb{N}$, est une base orthonormée de X.*

Il est évident que cette suite est orthonormée et il faut démontrer qu'elle est complète. On commence par faire un changement d'échelle évident et se ramener au cas où V_1 est remplacé par V_0 et l'on désigne par Y l'espace des fonctions de V_0 portées par $]-\infty, 0]$. Ensuite, il faut observer que $g(x+k)$, $k \in \mathbb{N}$, est une base de Riesz de Y.

Les transformées de Fourier des fonctions de Y sont donc de la forme $\mu(u)G(u)$ où

$$\mu(u) = a_0 + a_1 e^{iu} + \cdots + a_k e^{ikx} + \cdots$$

appartient à l'espace de Hardy H^2.

Or les transformées de Fourier des séries $\sum_0^\infty a_k q(x+k)$ sont les produits $\mu(u)G(u)/A_m(u)$ et la preuve se conclut par la remarque que $A_m(u)$ est un polynôme en e^{iu} et que $1/A_m(u)$ est holomorphe et bornée dans le disque unité.

Revenons à $w(x)$. On a successivement

$$Q(u) = c_m^{-1/2}(e^{iu}-1)^{m+1}(iu)^{-m-1}(1+s_1e^{iu})^{-1}\cdots(1+s_me^{iu})^{-1}$$

puis

$$m_0(u) = 2^{-m-1}(1+e^{iu})^{m+1}(1+s_1e^{iu})(1+s_1e^{2iu})^{-1} \cdots (1+s_me^{iu})(1+s_me^{2iu})^{-1}$$

et enfin

$$m_1(u) = \frac{2^{-m-1}e^{-iu}(1-e^{-iu})^{m+1}\prod_1^m (1-s_je^{-iu})}{\prod_1^m (1+s_je^{-2iu})}. \tag{4.4}$$

Il vient donc

$$w(x) = a_1 q(2x - 1) + \cdots + a_k q(2x - k) + \cdots \tag{4.5}$$

où les a_k sont à décroissance exponentielle. Cela entraîne évidemment l'orthogonalité avec X.

La vérification de l'appartenance à $T(V_{1/2})$ est un peu plus subtile. Il faut vérifier que $w(x+1) = u(x) + v(x)$ où $u \in V_0$ et $v \in X$. Par transformée de Fourier, cela se ramène à

$$\begin{aligned} e^{iu} W(u) = {} & (e^{iu/2} - 1)^{m+1} (iu/2)^{-m-1} A(u/2) \\ & + (e^{iu} - 1)^{m+1} (iu)^{-m-1} B(u) \end{aligned} \tag{4.6}$$

où $A(u)$ est 2π-périodique et appartient à l'espace de Hardy H^2 et $B(u)$ est également 2π-périodique et de carré sommable. Après simplification, on est amené, on posant

$$f(u) = e^{iu}(1 - e^{-iu})^{m+1} \prod_1^m (1 - s_j e^{-iu})(1 + s_j e^{iu})^{-1}(1 + s_j e^{-2iu})^{-1} \tag{4.7}$$

à savoir si

$$f(u) = g(u) + (1 + e^{iu})^{m+1} h(2u) \tag{4.8}$$

où $g(u)$ est 2π-périodique et appartient à l'espace de Hardy H^2 et $h(u)$ est aussi 2π-périodique et de carré sommable. On utilise alors le lemme suivant

Lemme 3. *Pour une fonction 2π-périodique et de carré sommable $f(u)$,* (4.8) *est équivalent à*

$$r(u) = f(u)(1 - e^{iu})^{m+1} - f(u + \pi)(1 + e^{iu})^{m+1} \in H^2. \tag{4.9}$$

Dans un sens, c'est immédiat. Dans l'autre, on commence par observer que toute fonction $r(u)$ de H^2 s'écrit

$$r(u) = s(u)(1 - e^{iu})^{m+1} + t(u)(1 + e^{iu})^{m+1}$$

où $s(u)$ et $t(u)$ appartiennent toutes deux à H^2. Cette observation est une conséquence immédiate du théorème de Bezout. Mais on a $r(u + \pi) = -r(u)$ et il en résulte que $t(u) = -s(u + \pi)$. Finalement on obtient

$$\begin{aligned} [f(u) - s(u)](1 - e^{iu})^{m+1} &= [f(u + \pi) - s(u + \pi)](1 + e^{iu})^{m+1} \\ &= h(2u) \end{aligned}$$

où $h(u)$ a les propriétés annoncées.

Revenant au cas particulier qui nous occupe, on conclut grâce à l'identité remarquable

$$(4.10) \qquad P_m(\cos 2u) = [\cos(u/2)]^{2m+2} P_m(\cos u) + [\sin(u/2)]^{2m+2} P_m(-\cos u).$$

L'identité (4.10) découle immédiatement de la définition des polynômes P_m.

5. Le Problème Général de la Construction des Ondelettes

Nous venons de démontrer que la construction faite par J. O. Stromberg rentre dans le cadre général des analyses multirésolutions et des formules explicites qui fournissent alors l'ondelette $w(x)$ à partir de la fonction $q(x)$ correspondante. Mais nous ne savons pas, à l'heure actuelle, s'il s'agit d'un fait général. Voici un énoncé plus précis. Soit $w(x)$ une ondelette d'ordre $m \geqslant 1$. Existe-*t*-il une analyse multirésolution m-régulière V_j, $j \in \mathbb{Z}$, telle que $w(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$, soit une base orthonormée du complément orthogonal W_0 de V_0 dans V_1? Nous ne savons pas répondre à cette question. Dans tous les exemples dont nous disposons, l'ondelette $w(x)$ provient d'une analyse multirésolution m-régulière.

Références

[1] Daubechies, I. The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis, AT&T Bell Labs., Murray Hill, USA.

[2] Daubechies, I. Orthonormal basis of compactly supported wavelets, AT&T Bell Labs., Murray Hill, USA.

[3] Mallat, S. Multiresolution approximation and wavelets orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$, à paraître dans *Trans. Amer. Math. Soc.*

[4] Meyer, Y. Wavelets and Operators, *Proceedings of the special year in modern analysis*, Urbana 1986/87, to be published by Cambridge University Press, (1989).

[5] Meyer, Y. Ondelettes, fonctions splines et analyses graduées, Cahiers du CEREMADE, n.° 8703.

[6] Stromberg, J. O. A modified Fanklin system and higher order spline systems on $\mathbb{R}^n$ as unconditional bases for Hardy spaces. *Conference in Harmonic Analysis in Honor of Antoni Zygmund,* Vol. II, 475-493, edited by W. Beckner and al., Wadsworth Math. Series.

Yves Meyer
CEREMADE
Université Paris IX-Dauphine
Place de Lattre de Tassigny
75775 Paris Cedex 16, France