

## Sur la Distribution des Fonctions Dérivées

**Jean-Pierre Kahane**

en souvenir de José-Luis Rubio de Francia

On considère une fonction  $F$  à valeurs réelles définie et dérivable sur un intervalle réel  $I$ , et sa dérivée  $f = F'$ . Un théorème de Denjoy, trop peu connu, dit que, quels que soient les nombres réels  $A$  et  $B$ , l'ensemble

$$\{x: A < f(x) < B\}$$

et soit vide, soit de mesure (de Lebesgue) positive.

Prenons  $I = [0, 1]$ ,  $F$  dérivable sur  $]0, 1[$ , dérivable à droite en 0, à gauche en 1,  $f = F'$  sur  $]0, 1[$ ,  $f(0) = F'(0 + 0)$ ,  $f(1) = F'(1 - 0)$ . J'appellerai  $f$  une fonction dérivée définie sur  $I$ . La distribution de  $f$  (image par  $f$  de la mesure de Lebesgue sur  $I$ ) est une mesure de probabilité sur  $\mathbb{R}$ , qu'on désigne par  $\mu_f$ . Je me propose de caractériser les mesures de probabilités sur  $\mathbb{R}$  qui s'obtiennent de cette façon.

**Théorème.** *Pour qu'une mesure de probabilité  $\mu$  sur  $\mathbb{R}$  soit la distribution d'une fonction dérivée  $f$  définie sur  $I$ , il faut et il suffit que*

- (a) *le support de  $\mu$  soit connexe*
- (b) *on ait soit*

$$\int_{\mathbb{R}} |y| d\mu(y) < \infty \tag{b_1}$$

*soit*

$$\int_{\mathbb{R}_+} y d\mu(y) = \int_{\mathbb{R}_-} -y d\mu(y) = \infty. \tag{b_2}$$

**DÉMONSTRATION.** Soit  $f$  une fonction dérivée définie sur  $I$ . La condition (a) vient du théorème de Denjoy ci-dessus. La condition (b) est nécessaire pour

que l'intégrale de Denjoy de  $f$  (la «totale») soit finie. Montrons maintenant que, si  $\mu$  vérifie (a) et (b), il existe  $f$  telle que  $\mu = \mu_f$ . Voici les étapes.

1. Soit  $\mu$  une mesure de probabilité sur  $\mathbb{R}$ , à support connexe et borné, et de valeur moyenne nulle ( $\int y d\mu(y) = 0$ ). Elle est la distribution d'une fonction  $\varphi$  continue et croissante sur  $I$ , telle que  $\varphi(\alpha) = 0$  pour au moins un  $\alpha \in I$ . Montrons qu'elle est aussi la distribution d'une fonction  $g$  continue sur  $I$  et telle que  $g(0) = g(1) = 0$ . Il suffit de poser

$$\begin{aligned}\varphi(-x) &= \varphi(x) & (0 \leq x \leq 1) \\ \varphi(x+2) &= \varphi(x) & (-1 \leq x \leq 1) \\ g(x) &= \varphi(a+2x) & (0 \leq x \leq 1)\end{aligned}$$

La vérification est évidente en faisant un dessin.

2. Soit  $\mu$  comme ci-dessus, et  $\epsilon > 0$ . Montrons que  $\mu$  est la distribution d'une fonction  $h$  continue sur  $I$ , telle que  $h(0) = h(1) = 0$  et

$$\sup_x \left| \int_0^x h(t) dt \right| < \epsilon.$$

Il suffit de prolonger la fonction  $g$  ci-dessus par 1-périodicité, et de poser

$$h(x) = \chi_I(x)g(Nx)$$

pour un  $N = N(\epsilon)$  assez grand.

3. Soit  $\mu$  une mesure de probabilité sur  $\mathbb{R}$ , à support connexe, vérifiant (b<sub>1</sub>) avec  $\int y d\mu(y) = 0$ , ou (b<sub>2</sub>). Dans les deux cas on peut écrire

$$\mu = \sum_1^{\infty} 2^{-n} \mu_n,$$

où, pour chaque  $n$ ,  $\mu_n$  est une mesure de probabilité à support connexe borné et à valeur moyenne nulle (le choix de  $\mu_n$  est très arbitraire; il s'agit seulement que, pour chaque  $n$ , la mesure

$$2^n \left( \mu - \sum_{m=1}^n 2^{-m} \mu_m \right)$$

ait son support connexe). Posons  $\epsilon_n = 2^{-n}$ ,  $I_n = [2^{-n}, 2^{-n+1}]$ , considérons les fonctions  $h_n$  associées aux  $\mu_n$  et  $\epsilon_n$  (étape 2), prolongées par 0 hors de  $I$ , et posons

$$f(x) = \sum_1^{\infty} h_n(2^n(x - 2^{-n})) \quad (x \in ]0, 1[).$$

Le  $n$ -ième terme de la somme est porté par  $I_n$  et sa distribution est  $2^{-n} \mu_n$ .

Donc la distribution de  $f$  est  $\mu$ . La fonction

$$F(x) = - \int_x^1 f(t) dt$$

admet  $f$  pour dérivée sur  $]0, 1[$  (au point 1, cela signifie  $F'(1 - 0) = f(1) = 0$ ). Elle est nulle aux points  $2^{-n}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), et majorée en module par  $2^{-n}\epsilon_n$  sur  $I_n$ . Donc, en posant  $F(0) = 0$  et  $f(0) = 0$ ,  $F$  est dérivable à droite en 0 et  $F'(0 + 0) = f(0) = 0$ . Comme la valeur de  $\int y d\mu(y)$ , quand  $(b_1)$  a lieu, ne joue aucun rôle, cela achève la démonstration.

Ajoutons quelques remarques.

1. Le théorème de Denjoy ci-dessus date de 1916 [3]. Il a été réénoncé et redémontré par Clarkson en 1946 [4]. Il apparaît comme corollaire (p. 24) dans la grande étude faite par Zahorski en 1950 [5] (avec les références à Denjoy et à Clarkson). Il est énoncé dans le livre de Bruckner de 1978 [7], p. 87, dans le chapitre consacré aux résultats de Zahorski (je dois cette dernière référence à G. Choquet). La démonstration donnée par Denjoy me paraît la plus complète et la plus simple; elle repose sur les trois propriétés suivantes des fonctions dérivées.

- ( $\alpha$ ) La propriété de Darboux ( $f$  prend entre  $a$  et  $b$  toute valeur comprise entre  $f(a)$  et  $f(b)$ ; autrement dit, l'image par  $f$  d'un intervalle est connexe).
- ( $\beta$ ) La propriété de Baire ( $f$  est limite d'une suite de fonctions continues donc, pour tout sous-ensemble  $P$  parfait de  $I$  et tout  $\epsilon > 0$ , il existe une portion  $P'$  de  $P$  où l'oscillation de  $f$  est inférieure à  $\epsilon$ ).
- ( $\gamma$ ) Le fait que, si sur un intervalle  $J \subset I$ , on a  $f \geq 0$  partout et  $f \geq a$  (resp.  $f \leq b$ ) presque partout, alors  $f \geq a$  (resp.  $f \leq b$ ) partout sur  $J$ .

Par conséquent, le théorème de Denjoy est applicable à toute fonction vérifiant ( $\alpha$ ), ( $\beta$ ), ( $\gamma$ ). [3] en donne des exemples.

2. Dès son mémoire de 1875 [1], Darboux avait donné un exemple de fonction dérivée discontinue sur un ensemble dense. Plusieurs auteurs, ensuite, ont donné ou cru donner des exemples de fonctions dérivées prenant sur tout intervalle des valeurs positives et des valeurs négatives. Des exemples concluants sont dus à Denjoy [2]. Des exemples plus simples se trouvent en [6] et [7] p. 32.

3. La caractérisation des distributions des fonctions dérivées sur l'intervalle ouvert  $]0, 1[$  est évidente dès qu'on a le théorème de Denjoy: ce sont les mesures de probabilité sur  $\mathbb{R}$  dont le support est connexe. En effet, une telle mesure est la distribution d'une (unique) fonction continue croissante (au sens large) sur  $]0, 1[$ .

4. Les fonctions dérivées sur l'intervalle fermé  $[0, 1]$  peuvent être considérées comme limites de martingales dyadiques, définies sur  $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , et

partout convergentes sur  $\Omega$ . En effet,  $F$  désignant la primitive et  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots)$  un point de  $\Omega$ , la suite  $f_n$  définie par

$$f_n(\omega) = 2^{-n} \left( F \left( \frac{\omega_1}{2} + \dots + \frac{\omega_n}{2^n} + \frac{1}{2^n} \right) - F \left( \frac{\omega_1}{2} + \dots + \frac{\omega_n}{2^n} \right) \right)$$

est une martingale qui converge vers la dérivée  $f(x)$  au point  $x = \sum_1^\infty 2^{-n} \omega_n$ . Les distributions des limites de martingales partout convergentes se caractérisent ainsi: ce sont les mesures de probabilité sur  $\mathbb{R}$  qui vérifient la condition (b), cf. [8].

## Références

- [1] Darboux, G. Mémoire sur les fonctions discontinues, 1875. [Pour un résumé, voir *Bull. Sc. Math. France* **10**(1876), 76-82].
- [2] Denjoy, A. Sur les fonctions dérivées sommables. *Bull. Soc. Math. France* **43**(1915).
- [3] — Sur une propriété des fonctions dérivées. *L'Enseignement Mathématique*. **18**(1916), 320-328.
- [4] Clarkson, J. A. A property of derivatives. *Bull. Amer. Math. Soc.* **53**(1947), 124-125.
- [5] Zahorski, Z. Sur la première dérivée. *Trans. Amer. Math. Soc.* **69**(1950), 1-54.
- [6] Katznelson Y. and Stromberg, O. Everywhere differentiable, nowhere monotone functions. *Amer. Math. Monthly* **81**(1974), 349-354.
- [7] Bruckner, A. M. Differentiation of real functions. *Lecture Notes in Math.* **659**(1978).
- [8] Kahane, J. P. Une théorie de Denjoy des martingales dyadiques. *L'Enseignement Mathématique* (1988), volume à paraître.

Jean-Pierre Kahane  
 Université de Paris-Sud  
 Mathématique (Bât. 425)  
 91405 Orsay Cedex,  
 FRANCE