Revista Matemática Iberoamericana
Vol. 5, n.os 3 y 4, 1989

Bases D'Ondelettes sur les Courbes Corde-Arc, Noyau de Cauchy et Espaces de Hardy Associés

P. Auscher et Ph. Tchamitchian

Résumé

On construit deux bases inconditionnelles de $L^2(\mathbb{R})$ adaptées à l'étude de l'intégrale de Cauchy sur une courbe corde-arc, et on étend la construction à $L^2(\mathbb{R}^d)$. Cela permet de donner une preuve simple du «Théorème $T(b)$» de G. David, J. L. Journé et S. Semmes. Un espace de Hardy à poids $H^1_b(\mathbb{R}^d)$ est défini et caractérisé par les bases précédentes. Enfin, on applique ces méthodes à l'étude du potentiel de double couche sur une surface lipschitzienne.

Introduction

Soit T un opérateur linéaire continu de $D(\mathbb{R}^d)$ dans $D'(\mathbb{R}^d)$.

Un des moyens que nous donne l'analyse fonctionnelle pour tester la continuité sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ de cet opérateur est de disposer d'une famille dénombrable de fonctions f_λ, $\lambda \in \Lambda$, formant une base inconditionnelle de $L^2(\mathbb{R}^d)$ (on dit aussi base de Riesz). T admet alors une extension continue à $L^2(\mathbb{R}^d)$ si, et seulement si, la matrice M de l'opérateur T sur la base précédente est bornée sur $l^2(\Lambda)$.

Notre programme de travail est l'étude de certains opérateurs linéaires dits de Calderón-Zygmund à l'aide de cette remarque. (Nous rappelons leur définition ci-après.)

L'essentiel de notre tâche consiste alors à construire une base inconditionnelle de $L^2(\mathbb{R}^d)$ qui soit adaptée à ces opérateurs (Théorème 1): ce sera une base d'ondelettes possédant une propriété de compensation particulière.

Ainsi, nous pouvons redémontrer simplement le Théorème $T(b)$ de David, Journé et Semmes [DJS] dans le cas pseudo-accrétif (Théorème 4), et étudier des algèbres d'opérateurs de Calderón-Zygmund, isomorphes à celle étudiée par Lemarié [L] et contenant la valeur principale de Cauchy sur les courbes corde-arc (Théorème 5).

Dans [T], l'un des auteurs a réalisé ce programme pour démontrer la continuité L^2 de l'opérateur de Cauchy sur les graphes lipschitziens (théorème de Coifman, McIntosh et Meyer [CMM]). Notre travail en est le prolongement au cas «corde-arc».

Il n'en est pas pour autant une extension immédiate, et sans doute quelques mots d'explication, quoique nécessairement vagues, sont opportuns. Il y a deux grandes étapes dans l'élaboration des bases d'ondelettes dont nous avons besoin: d'abord leur construction, ensuite la preuve qu'il s'agit bien de bases inconditionnelles de $L^2(\mathbb{R}^d)$, et non pas seulement de familles complètes, par exemple. Cette dernière étape, dans [T], contient tous les arguments d'analyse réelle (en particulier l'emploi des mesures de Carleson) réputés indispensables à la preuve du théorème de Coifman, McIntosh et Meyer. Elle est inchangée dans le présent article.

En revanche, c'est dans la première étape, due en fait à Meyer et Lemarié dans le cas lipschitzien, et qui ne repose que sur des arguments de nature hilbertienne, que nous avons dû introduire une idée supplémentaire, qui revient à tenir compte de façon beaucoup plus forte de la géométrie du problème. Des explications plus détaillées sont bien sûr données dans le corps de l'article.

Nous concluons ce travail avec deux applications du résultat fondamental:

1. Nous définissons dans le cas corde-arc un espace $H_b^1(\mathbb{R}^d)$, substitut à l'espace atomique $H^1(\mathbb{R}^d)$ de Stein et Weiss utilisé classiquement (Théorème 6);
2. Grâce au calcul dans les algèbres de Clifford, nous montrons comment étudier le potentiel de double couche sur une surface lipschitzienne avec les idées précédentes.

Le contenu de ce travail se trouve dans la thèse de doctorat de l'un des auteurs [A1]. Nous tenons à remercier S. Jaffard et Y. Meyer de nous avoir communiqué certaines de leurs idées.

1. Définitions et enoncé du théorème fondamental

(1) *Opérateurs d'intégrales singulières*

Nous précisons ici la classe d'opérateurs que nous allons étudier. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ tels que $x \neq y$.

Définition 1. *Soit $\delta \in]0,1]$. Un noyau δ-standard est une fonction continue $K(x, y)$ sur Ω verifiant les propriétés suivantes: il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que*

(i) *Pour tout* $(x, y) \in \Omega \quad |K(x, y)| \leqslant C|x-y|^{-d}$.

(ii) *Pour* $(x, y) \in \Omega$ *et* $h \in \mathbb{R}^d$ *avec* $|h| \leqslant \frac{1}{2}|x-y|$

$$|K(x+h, y) - K(x, y)| \leqslant C|x-y|^{-d}\left(\frac{|h|}{|x-y|}\right)^{\delta},$$

(iii) *Pour* $(x, y) \in \Omega$, *et* $h \in \mathbb{R}^d$ *avec* $|h| \leqslant \frac{1}{2}|x-y|$,

$$|K(x, y+h) - K(x, y)| \leqslant C|x-y|^{-d}\left(\frac{|h|}{|x-y|}\right)^{\delta}.$$

Définition 2. *Soient b_1 et b_2 deux fonctions bornées sur $\mathbb{R}^d$ et $\delta \in]0, 1]$. Nous désignerons par $F(\delta, b_2, b_1)$ l'espace vectoriel des opérateur linéaires continus T de $D(\mathbb{R}^d)$ dans $D'(\mathbb{R}^d)$, dont le noyau distribution $S(x, y)$, restreint à Ω, s'écrit $b_2(x)K(x, y)b_1(y)$, K étant δ-standard, et tel que*

$$\langle Tg, f\rangle = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f(x)b_2(x)K(x, y)b_1(y)g(y)\,dy\,dx$$

pour tout couple de fonctions $f, g \in D(\mathbb{R}^d)$ à supports disjoints.

David-Journé-Semmes [DJS] ont donné des conditions nécessaires et suffisantes pour que de tels opérateurs admettent une extension continue à $L^2(\mathbb{R}^d)$ et des conditions presque optimales sur les fonctions b_1 et b_2 pour que ce résultat s'applique. Nous utiliserons une notion un peu plus forte dite de pseudo-accrétivité.

Soit Q l'ensemble des cubes dyadiques

$$Q_{j,k} = \{x: 2^j x - k \in [0, 1]^d\}, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{Z}^d.$$

Définition 3. *Soit b une fonction bornée sur $\mathbb{R}^d$, ainsi que son inverse. On* *dit que b est pseudoaccrétive (de constante $\delta_0 > 0$) s'il existe $\delta_0 > 0$ telle que*

$$\text{(4)} \qquad \textit{pour tout} \quad Q \in \mathcal{Q}, \qquad |m_Q b| \geqslant \delta_0,$$

$m_Q(b)$ désignant

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q b(x)\, dx,$$

dx étant la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

Voici l'exemple historique qui motive les définitions précédentes.

Soit Γ une courbe simple du plan complexe orientée et passant par l'infini. On suppose Γ rectifiable et l'on note $x \to z(x)$ une paramétrisation par longueur d'arc de Γ. On dit que Γ est corde-arc s'il existe un $\delta_0 > 0$ tel que

$$\text{(5)} \qquad \text{pour tout} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \delta_0 |x - y| \leqslant |z(x) - z(y)| \leqslant |x - y|.$$

La fonction $z(x)$ admet une dérivée presque partout et $z'(x)$ vérifie alors la condition (4) pour tout intervalle réel I: z' est pseudoaccrétive.

Comme exemple de telles courbes, on peut citer une courbe lipschitzienne ou une spirale logarithmique.

Maintenant, écrivons l'opérateur de Cauchy associé à la courbe Γ:

$$\text{si} \quad f \in D(\mathbb{R}), \qquad T_\Gamma f(x) = \text{v.p.} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{z'(y)}{z(y) - z(x)} f(y)\, dy,$$

cette valeur principale ayant un sens grâce à (5).

Il est immédiat de constater que $T_\Gamma \in F(1, 1, z')$.

Définition 4. *$T \in F(\delta, 1, 1)$ est dit de Calderón-Zygmund quand T est continu sur $L^2(\mathbb{R}^d)$.*

(2) *b-vaguelettes*

On désigne par b une fonction bornée. On pose $w_\eta(x) = (1 + |x|)^{-d-\eta}$ pour $x \in \mathbb{R}^d$ et $\eta > 0$.

Définition 5. *Soit $r \in]0, 1]$. On appelle famille de b-vaguelettes r-régulières toute famille de fonctions (θ_Q) indexée par les cubes dyadiques et vérifiant*

$$\text{(6)} \qquad \begin{gathered} \forall \eta > 0 \quad \exists C_\eta \geqslant 0, \\ |\theta_Q(x)| \leqslant C_\eta 2^{dj/2} w_\eta(2^j x - k) \end{gathered}$$

pour $Q = Q_{j,k}$ *et* $x \in \mathbb{R}^d$,

$$(7) \qquad \forall \eta > 0 \quad \exists C_\eta \geqslant 0 \quad \forall (x, x') \in \mathbb{R}^d, \quad \forall Q \in \mathcal{Q}, \quad Q = Q_{j,k},$$
$$|\theta_Q(x) - \theta_Q(x')| \leqslant C_\eta 2^{(r+d/2)j}|x - x'|^r(w_\eta(2^jx - k) + w_\eta(2^jx' - k))$$

$$(8) \qquad \forall Q \in \mathcal{Q}, \qquad \int_{\mathbb{R}^d} b(x)\theta_Q(x)\,dx = 0.$$

On dira que la famille (θ_Q) *est une famille de b-molécules de régularité r si,* (8) *étant vérifiée,* (6) *et* (7) *sont seulement satisfaites avec* $\eta = r$.

Remarque. Dans le cas des b-molécules r-régulières, (7) peut être remplacée par (9):

$$(9) \ \forall \delta \in]0, r],$$
$$|\theta_Q(x) - \theta_Q(x')| \leqslant C_r 2^{(\delta+d/2)j}|x - x'|^\delta(w_r(2^jx - k) + w_r(2^jx' - k)).$$

La raison de ce double formalisme est que pour la construction qui va suivre, nous aurons besoin d'estimations «à décroissance rapide» donc de b-vaguelettes, tandis que les propriétés des b-molécules nous suffiront pour étudier les opérateurs de la classe introduite ci-dessus.

On pose maintenant

$$B(f, g) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)b(x)\overline{g(x)}\,dx \quad \text{pour} \quad f, g \in L^2(\mathbb{R}^d).$$

Théorème 1. *Soit b une fonction pseudoaccrétive. Il existe un* $r \in]0, 1[$, *un ensemble fini* Λ *de cardinal* $2^d - 1$ *et, pour chaque* $\lambda \in \Lambda$, *deux familles* $(\theta_{\lambda,Q})$ *et* $(\tilde{\theta}_{\lambda,Q})$ *de b-vaguelettes r-régulières telles que*

$$(10) \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^d) \quad \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2\,dx \sim \sum_\lambda \sum_Q |B(f, \theta_{\lambda,Q})|^2 \sim \sum_\lambda \sum_Q |B(\tilde{\theta}_{\lambda,Q} f)|^2,$$

$$(11) \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^d) \quad f = \sum_\lambda \sum_Q B(f, \theta_{\lambda,Q})\tilde{\theta}_{\lambda,Q} = \sum_\lambda \sum_Q B(\tilde{\theta}_{\lambda,Q} f)\theta_{\lambda,Q},$$

$$(12) \quad \forall (\lambda, \lambda') \in \Lambda^2, \quad \forall (Q, Q') \in \mathcal{Q}^2, \quad B(\tilde{\theta}_{\lambda,Q}, \theta_{\lambda',Q'}) = \delta_{\lambda,\lambda'}\delta_{Q,Q'},$$

où δ *désigne le symbole de Kronecker.*

En d'autres termes, les collections de fonctions $(\theta_{\lambda,Q})$ et $(\tilde{\theta}_{\lambda,Q})$ forment deux bases inconditionnelles de $L^2(\mathbb{R}^d)$ bi-orthogonales pour la forme bilinéaire B.

La démonstration de ce théorème s'organisera comme suit. Nous nous placerons constamment en dimension 1, le cas de la dimension d étant traité dans la partie 6. Dans la partie 2, nous démontrerons deux séries de Lemmes abstraits. Nous élaborerons dans la partie 3 une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R}^d)$ adéquate. Les lemmes abstraits seront appliqués dans la partie suivante pour construire les deux familles de b-vaguelettes vérifiant (12). Nous en terminerons dans la partie 5 en montrant les propriétés (10) et (11).

2. Lemmes abstraits

(1) *Matrices à décroissance rapide*

L'emploi de bases inconditionnelles conduit à remplacer les opérateurs par leurs matrices infinies. Celles-ci appartiendront à une algèbre de matrices que nous décrivons.

Soit (T, d) un espace métrique vérifiant les deux propriétés suivantes:

$$\forall (t, t') \in T^2, \quad t \neq t' \qquad d(t, t') \geqslant 1. \tag{13}$$

$$\forall R \geqslant 1, \quad \forall \tau \in T \qquad \operatorname{Card}\{t: d(t, \tau) \leqslant R\} \leqslant CR^{\nu} \tag{14}$$

où C et ν ne dépendent que de T (T est donc nécessairement dénombrable).

Soit $\mathcal{M}$ l'espace vectoriel des matrices complexes infinies $\alpha(t, t')$, $t \in T$, $t' \in T$ telles que $\sup_{t,t'} |\alpha(t, t')| < \infty$.

Soit $\mathcal{M}_1$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}$ constitué des matrices $\mathcal{M} = (\alpha(t, t'))$ telles que

$$\forall N \in \mathbb{N}^* \quad \exists C_N \geqslant 0 \qquad |\alpha(t, t')| \leqslant C_N(1 + d(t, t'))^{-N}. \tag{15}$$

Le résultat suivant est dû à S. Jaffard et Y. Meyer (non publié).

Lemme 1.

(i) $\mathcal{M}_1$ *est une sous-algèbre de* $\mathcal{L}(l^2(T))$.
(ii) *soit* $M \in \mathcal{M}_1$ *un isomorphisme de* $l^2(T)$ *sur* $l^2(T)$.

Alors $M^{-1} \in \mathcal{M}_1$.

PREUVE.

(i) $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{L}(l^2(T))$ s'obtient par le lemme de Schur. Il s'agit de vérifier

$$\sup_t \sum_{t'} |\alpha(t, t')| < \infty$$

et

$$\sup_{t'} \sum_t |\alpha(t, t')| < \infty.$$

Les deux inégalités se traitant de la même façon, nous examinons la première.

Soit t arbitraire et $N \geqslant 1 + \nu$. D'après (13) et (14) il vient

$$\begin{aligned}\sum_{t'} |\alpha(t,t')| &\leqslant \sum_{j\geq 0} \sum_{2^j \leq d(t,t') \leq 2^{j+1}} |\alpha(t,t')| \\ &\leqslant \sum_{j\geq 0} C_N(1+2^j)^{-N} 2^{j\nu} \\ &\leqslant C_N \sum_{j\geq 0} 2^{j(\nu-N)} < \infty.\end{aligned}$$

Soient M_1 et $M_2 \in \mathcal{M}_1$. Montrons que $M_1M_2 \in \mathcal{M}_1$. Avec des notations évidentes, les coefficients de M_1M_2 s'écrivent

$$\alpha(t,t'') = \sum_{t'} \alpha_1(t,t')\alpha_2(t',t'').$$

Posons $d(t,t'') = 2R$, alors, soit $d(t,t') \geqslant R$, soit $d(t',t'') \geqslant R$. Soit alors $N \geqslant 1 + \nu$. En utilisant (15) et (14) il vient

$$\begin{aligned}|\alpha(t,t'')| &\leqslant C_N \sum_{t'} (1 + d(t,t'))^{-N}(1 + d(t',t''))^{-N} \\ &\leqslant C_N\Big(\sum_{d(t,t')\geq R} (1 + d(t,t'))^{-N} + \sum_{d(t,t')\geq R} (1 + d(t,t'))^{-N}\Big) \\ &\leqslant C_{N,\nu}(1+R)^{\nu - N}.\end{aligned}$$

(ii) Soit $\tau \in T$. Appelons X_τ l'opérateur non borné défini sur $l^2(T)$ par $(c_t) \to (d(t,\tau)c_t)$. Si $M \in \mathcal{M}$, nous désignons par $[M, X_\tau]$ le commutateur $MX_\tau - X_\tau M$ lorsqu'il a un sens. Ensuite, si $M_0 \in \mathcal{M}$, nous définissons une suite de matrices par $M_{n+1,\tau} = [M_{\eta,\tau}, X_\tau]$ et $M_{0,\tau} = M_0$. On voit facilement que

$$M_0 \in \mathcal{M}_1 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sup |||M_{n,\tau}||| < \infty$$

où $|||M_{n,\tau}|||$ est la norme d'opérateurs de $M_{n,\tau}$ agissant sur $l^2(T)$. (Nous adopterons cette notation par la suite.)

En effet, les coefficients de M_0 étant $\alpha(t,t')$, ceux de $M_{n,\tau}$ s'écrivent $(d(t',\tau) - d(\tau,t))^n \alpha(t,t')$ et il suffit d'employer à nouveau le lemme de Schur.

Supposons maintenant $M_0 : l^2(T) \to l^2(T)$ inversible et posons $A_0 = M_0^{-1}$. On a alors

$$A_{1,\tau} = [A_0, X_\tau] = -A_0[M_0, X_\tau]A_0 = -A_0M_{1,\tau}A_0.$$

En utilisant les règles de calcul sur les commutateurs, il s'ensuit que $A_{n+1,\tau}$ s'écrit comme une fonction polynômiale de $A_0, A_{1,\tau}, \ldots, A_{n,\tau}, M_{1,\tau}, \ldots, M_{n,\tau}$ dont les coefficients ne dépendent pas du choix de τ. Une simple récurrence montre que, si $n \geqslant 1$, $A_{n,\tau}$ est opérateur borné sur $l^2(T)$ dont la norme est majorée uniformément en τ. Par conséquent $A_0 \in \mathfrak{M}_1$.

(2) *Formes pseudoaccrétives.*

Dans cette section, V et H désigneront deux espaces de Hilbert séparables sur $\mathbb{C}$.

Définition 6. *Soit β une forme sesquilinaire continue sur $V \times V$. Nous dirons que β est pseudoaccrétive sur $V \times V$ s'il existe une constante $\delta_0 > 0$ telle que l'on ait*

$$\sup_{\|v'\| \leq 1} |\beta(v, v')| \geqslant \delta_0 \|v\| \quad \textit{pour tout} \quad v \in V, \tag{16}$$

et

$$\sup_{\|v\| \leq 1} |\beta(v, v')| \geqslant \delta_0 \|v'\| \quad \textit{pour tout} \quad v' \in V. \tag{17}$$

Adoptons dès à présent la notation suivante: si β est une forme sesquilinéaire sur $V \times V$, on appellera β^* la forme adjointe donnée par:

$$\beta^*(v, v') = \overline{\beta(v', v)}, \qquad v', v' \in V.$$

Enfin les produits scalaires canoniques sur V et sur H sont notés $(\bullet|\bullet)_V$, $(\bullet|\bullet)_H$ ou plus simplement $(\bullet|\bullet)$.

Démontrons maintenant plusieurs résultats sur les formes pseudoaccrétives. Ceux-ci seront utilisés au cours de la partie 4.

Lemme 2. *Soit (v_t) une base inconditionnelle de V (t parcourant l'ensemble T). Soit β une forme sesquilinéaire continue sur $V \times V$ et M la matrice infinie de coefficients $\beta(v_s, v_t)$, $s, t \in T$. Alors β est pseudoaccrétive sur $V \times V$ si, et seulement si M est inversible sur $l^2(T)$.*

Supposons maintenant β pseudoaccrétive sur $V \times V$. Alors

$$\|M^{-1}\| \leqslant C\delta_0^{-1} \tag{i}$$

où C ne dépend que de la base (v_t) et δ_0 est la constante figurant dans (16) et (17).

(ii) *Appelons $\alpha(s, t)$ les coefficients de M^{-1} et $\tilde{v}_s$ les vecteurs de V définis par*

$$\tilde{v}_s = \sum_t \alpha(s, t) v_t, \qquad s \in T. \tag{18}$$

La famille $(\tilde{v}_s)$ forme une base inconditionnelle de V telle que

$$\beta(\tilde{v}_s, v_t) = \delta_{s,t} \quad \textit{pour tout} \quad s, t \in T. \tag{19}$$

PREUVE. L'opérateur $A: l^2(T) \to V$ défini par

$$A\lambda = \sum_t \lambda_t v_t = v, \qquad \lambda = (\lambda_t) \in l^2(T),$$

est un isomorphisme de $l^2(T)$ sur V. Si $(\bullet|\bullet)$ désigne le produit scalaire sur $l^2(T)$, on a

$$\beta(v, v') = \beta(A\lambda, A\lambda') = (M\lambda|\lambda') = (\lambda|M^*\lambda').$$

La pseudoaccrétivité de β signifie alors que M et M^* sont injectifs et d'image fermée dans $l^2(T)$; c'est-à-dire que M est inversible sur $l^2(T)$. Dans ce cas, on obtient

$$|||M^{-1}||| \leqslant \|A\| \, \|A^{-1}\| \delta_0^{-1},$$

ce qui démontre (i).

Pour démontrer (ii), on commence par remarquer que (18) peut se réécrire

$$\tilde{v}_s = AM^{-1}A^{-1}v_s.$$

$AM^{-1}A^{-1}$ étant un isomorphisme de V sur lui-même, les vecteurs $(\tilde{v}_s)$ forment une base inconditionnelle de V. On a ensuite

$$\beta(\tilde{v}_s, v_t) = \beta(AM^{-1}A^{-1}v_s, v_t) = (A^{-1}v_s \,|\, A^{-1}v_t) = \delta_{s,t}$$

par définition de A.

Lemme 3. *Soient $l: V \to C$ une forme linéaire continue et β une forme pseudoaccrétive sur $V \times V$. Alors il existe un unique vecteur $v_0 \in V$ tel que $l(v) = \beta(v, v_0)$ pour tout $v \in V$.*

PREUVE. Soit R l'unique opérateur linéaire continu sur V défini par

$$(Rv \,|\, v') = \beta(v, v') \qquad v, v' \in V.$$

Les conditions (16) et (17) impliquent l'inversibilité de R sur V. Le théorème de représentation de Riesz nous donne ensuite un unique vecteur $w_0 \in V$ tel que $l(v) = (v \,|\, w_0)$ pout tout $v \in V$. Posons alors $v_0 = R^{*-1}w_0$. Il est immédiat de vérifier que v_0 convient.

Proposition 1.

(i) *Supposons $V \subset H$. Soit β une forme pseudoaccrétive sur $H \times H$ dont la restriction à $V \times V$ est encore pseudoaccrétive.*

Si nous introduisons

$$X = \{\theta \in H \colon \forall v \in V, \beta(v, \theta) = 0\},$$

alors H est la somme directe de V et X.

Soient ensuite $\pi_x \colon H \to X$ *l'opérateur de projection sur X parallèlement à V, et W l'espace orthogonal à V dans H. Alors la restriction de* π_x *à W induit un isomorphisme de W sur X.*

(ii) *Supposons V muni d'une base inconditionnelle* (v_t) *et appelons* $(\tilde{v}_t)$ *la base construite dans le Lemme* 2. *Alors*

$$\forall h \in H, \qquad \pi_x(h) = h - \sum_t \beta^*(h, \tilde{v}_t)v_t. \tag{20}$$

(iii) *Posons*

$$X^* = \{\theta^* \in H \colon \forall v \in V, \beta'(v, \theta^*) = 0\}.$$

En remplaçant β *par* β^* *on obtient les mêmes résultats. De plus, la restriction de* β *à* $X^* \times X$ *satisfait des relations analogues à* (16) *et* (17).

PREUVE.

(i) Le fait que H soit la somme directe de V et X est une conséquence facile de la pseudoaccrétivité de β sur $V \times V$ et du Lemme 3.

Montrons maintenant que π_x est un isomorphisme de W sur X. Soit $\theta \in X$, cherchons $w \in W$ tel que $\pi_x(w) = \theta$. Ecrivons pour cela $\theta = v + w$ où $v \in V$ et $w \in W$. Alors $\theta = \pi_x(\theta) = \pi_x(v) + \pi_x(w) = \pi_x(w)$ par définition de π_x. Ensuite, pour montrer que π_x est injectif, on choisit $w \in W$ et l'on écrit

$$\|w\|^2 = (w \mid w) = (w \mid \pi_x(w)) \leqslant \|w\| \, \|\pi_x(w)\|,$$

la deuxième égalité provenant du fait que V et W sont orthogonaux. Donc $\|\pi_x w\| \geqslant \|w\|$ pour tout $w \in W$.

(ii) Commençons par remarquer que comme corollaire du Lemme 2, on a

$$\forall v \in V \qquad v = \sum_t \overline{\beta(v, \tilde{v}_t)}v_t = \sum_t \beta'(v, \tilde{v}_t)v_t.$$

Soit $\pi_v = I - \pi_x$ la projection sur V parallèlement à X. Alors, si $h \in H$,

$$\pi_v(h) = \sum_t \beta^*(\pi_v(h), \tilde{v}_t)v_t = \sum_t \beta^*(h, \tilde{v}_t)v_t,$$

ce qui démontre (20).

(iii) Regardons la restriction de β à $X^* \times X$. Fixons $\theta^* \in X^*$. D'après (16), il existe $h \in H$, $\|h\| \leqslant 1$, tel que

$$\beta(\theta^*, h) \geqslant \delta_0 \|\theta^*\|.$$

On écrit ensuite $h = v + \theta$ où $v \in V$ et $\theta \in X$ et il vient $\beta(\theta', h) = \beta(\theta^*, \theta)$ et $\|\theta\| \leqslant \|\pi_x h\| \leqslant \|\pi_x\| \, \|h\| \leqslant C$. On a donc

$$\sup_{\theta \in X, \|\theta\| \leq 1} |\beta(\theta^*, \theta)| \geqslant C^{-1}\delta_0 \|\theta^*\|.$$

L'autre inégalité s'obtient de façon symétrique.

2. Construction d'une Analyse Multirésolution Adéquate

Il est temps pour nous d'abandonner ces notions abstraites et de rentrer dans le vif de la démonstration du Théorème 1. Le cadre fonctionnel sera l'espace $L^2(\mathbb{R})$. Il conviendra de prendre $d = 1$ et de remplacer les cubes dyadiques Q par les intervalles dyadiques $I = I_{j,k} = [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}[$, $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$, dans les définitions de la partie 1. La collection de tous les intervalles dyadiques sera notée $\mathfrak{I}$.

Dans toute cette partie, on désignera par $b(x)$ une fonction pseudoaccrétive de constante δ_0. Nous lui associerons une forme sesquilinéaire continue sur $L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$, notée β, par

$$(21) \qquad \beta(f, f') = \int_{\mathbb{R}} f(x) b(x) \overline{f'(x)}\, dx \qquad f \in L^2(\mathbb{R}), \qquad f' \in L^2(\mathbb{R}).$$

Notons que β^* est alors associée à $\bar{b}\,(x)$.

Théorème 2. *Il existe un $r \in]0, 1[$ et une analyse multirésolution r-régulière de $L^2(\mathbb{R})$, notée $V_j, j \in \mathbb{Z}$, telle que, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, la forme β restreinte à $V_j \times V_j$ soit pseudoaccrétive de constante $\delta_0/2$.*

Pour le confort du lecteur, nous allons rappeler ici la définition d'une analyse multirésolution r-régulière de $L^2(\mathbb{R})$ et les résultats que nous utiliserons. De plus amples développements sur ces analyses peuvent être trouvés dans [Ma] ou [M1].

Définition 7. *Une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$ est une suite de sous-espaces fermés de $L^2(\mathbb{R})$, notée $V_j, j \in \mathbb{Z}$, obéissant aux conditions suivantes:*

(22) $V_j \subset V_{j+1}$ *pour tout* $j \in \mathbb{Z}$.

(23) $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$ *et* $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ *est dense dans* $L^2(\mathbb{R})$.

(24) $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$ *pour tout* $j \in \mathbb{Z}$.

(25) $f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(x-k) \in V_0$ *pour tout* $k \in \mathbb{Z}$.

(26) *Il existe une fonction* $g \in V_0$ *telle que la famille de vecteurs* $g(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$, *forme une base inconditionnelle de* V_0.

On dira, sous ces hypothèses, que g engendre l'analyse multirésolution $V_j, j \in \mathbb{Z}$.

Celle-ci sera r-régulière si l'on peut choisir g r-régulière, c'est-à-dire si pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ *la fonction* $(1+|x|)^N g(x)$ *appartient à* $C^r(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

Rappelons que $C^r(\mathbb{R})$ est l'espace de Hölder homogène d'exposant r: $f \in C^r(\mathbb{R})$ si

$$\sup_{x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^r} < \infty.$$

(Pour nous, r sera toujours pris dans $]0,1[$.)

On peut exprimer de façon équivalente la r-régularité de g à l'aide des inégalités (6) et (7) où $d=1$ et $Q=[0,1[$ (*i.e.* $j=0$, $k=0$).

Prenons un exemple qui, pour nous sera fondamental. Soit $j \in \mathbb{Z}$. Soit V_j le sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{R})$ constitué des fonctions en escalier sur les intervalles dyadiques $I_{j,k}$, $k \in \mathbb{Z}$. On vérifie facilement que $V_j, j \in \mathbb{Z}$, est une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$ engendrée, par exemple, par $g(x) = \chi_{[0,1[}(x)$ (fonction indicatrice de $[0,1[$). Cette analyse n'est par r-régulière quel que soit $r>0$ puisque, excepté la fonction nulle, les fonctions de V_0 ne sont pas continues.

Voyons pourquoi elle est fondamentale en regard du Théorème 2. Fixons $j \in \mathbb{Z}$, examinons la restriction de β à $V_j \times V_j$. Posons pour cela $g_{j,k}(x) = 2^{j/2} g(2^j x - k)$, $k \in \mathbb{Z}$. D'après les règles (24) et (26), cette famille est une base inconditionnelle de V_j (et même orthonormée). Formons alors la matrice M_j de coefficients $\beta(g_{j,k}, g_{j,l})$, $k \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{Z}$. On voit facilement que

$$\begin{aligned} \text{si} \quad k \neq 1, \qquad & \beta(g_{j,k}, g_{j,l}) = 0 \\ \text{et si} \quad k = 1 \qquad & \beta(g_{j,k}, g_{j,k}) = m_I b \quad \text{où} \quad I = I_{j,k}. \end{aligned}$$

M_j est donc diagonale et, d'après la relation (4), ses coefficients diagonaux sont en module minorés par δ_0. M_j est donc inversible et, d'après le Lemme 2, β restreinte à $V_j \times V_j$ est pseudoaccrétive, la constante de pseudoaccrétivité étant même δ_0.

Nous aurions conclu le Théorème 2 si g avait été r-régulière. Pour démontrer ce théorème, notre tâche sera alors de modifier la situation précédente en lissant convenablement la fonction g par un argument de perturbation.

Tout d'abord, rappelons un résultat de S. Mallat [Ma], que nous avons légèrement amélioré pour la circonstance. On désignera par $\hat{f}(\xi)$ la transformée de Fourier de $f(x)$ donnée par

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)\, dx.$$

Théorème. [Ma] *Soit* $m(\xi)$ *une fonction* $C^{\infty}(\mathbb{R})$ 2π*-périodique telle que* $m(0) = 1$. *Posons*

$$G(\xi) = \prod_{j \geq 1} m(\xi 2^{-j}).$$

(i) *On suppose que* $m(\xi)$ *ne s'annule pas sur* $[-\pi/2, \pi/2]$ *et que* $|m(\xi)|^2 + |m(\xi + \pi)|^2 \leqslant 1$. *Alors* g *définie par* $\hat{g}(\xi) = G(\xi)$ *appartient à* $L^2(\mathbb{R})$ *et la collection des vecteurs* $g(x - k)$, $k \in \mathbb{Z}$ *est une famille inconditionnelle de* $L^2(\mathbb{R})$.

(ii) *On suppose de plus, qu'il existe* $G_1(\xi)$, $r \in]0, 1[$ *et* $C \geqslant 0$ *tels que*

$$G(\xi) = \frac{\sin \xi/2}{\xi/2} G_1(\xi)$$

avec

$$|G_1(\xi)| \leqslant C(1 + |\xi|)^{-r}; \tag{27}$$

alors g *est* r*-régulière et engendre une analyse multirésolution* r*-régulière de* $L^2(\mathbb{R})$.

Pour obtenir l'estimation (27), on utilisera un résultat dû à Y. Meyer [M2].

Lemme. [M2] *Soit* $q(\xi)$ *une fonction* C^{∞} 2π*-périodique et à valeurs dans* $[0, 1]$. *On suppose qu'il existe deux constantes* $a \in]0, 1[$ *et* $b \geqslant 1$ *telles que l'on ait*

$$0 \leqslant q(\xi) \leqslant a \quad si \quad \frac{2\pi}{3} \leqslant \xi \leqslant \frac{4\pi}{3},$$

$$|q(\xi)| \leqslant \frac{b}{2\pi} |\xi - \pi|$$

et

$$q(0) = 1.$$

Alors la fonction $\omega(\xi) = \prod_{j \geq 1} q(2^{-j}\xi)$ *est de classe* C^∞ *et il existe* $a \in]0, 1[$, $\alpha = \alpha(a, b)$, *et* $C \geqslant 0$ *tels que*

$$|\omega(\xi)| \leqslant C(1 + |\xi|)^{-\alpha}.$$

Ces résultats étant rappelés passons à la démonstration du Théorème 2. Pour commencer, nous fixons l'indice j égal à 0; les estimations que nous obtiendrons seront uniformes en j. La fonction $\chi_{[0,1[}(x)$ sera notée $G^{(0)}(x)$, l'espace V_0 associé, $V^{(0)}$, et les fonctions $g^{(0)}(x-k)$, $g_k^{(0)}(x)$.

Posons $q(\xi) = \exp[-\log^2 \cos^2 \xi/2]$ et $\omega(\xi) = \prod_{j \geq 1} q(\xi 2^{-j})$. Il est immédiat de vérifier les hypothèses du lemme précédent.

Ensuite, soit $\epsilon > 0$, posons $m_\epsilon(\xi) = e^{-i\xi/2} q(\xi)^\epsilon \cos \xi/2$. On définit une fonction $g^{(\epsilon)}(x)$ dans $L^2(\mathbb{R})$ par sa transformée de Fourier en posant

$$\hat{g}^{(\epsilon)}(\xi) = \prod_{j \geq 1} m_\epsilon(2^{-j}\xi) = e^{-i\xi/2} \frac{\sin \xi/2}{\xi/2} \omega(\xi)^\epsilon = \hat{g}^{(0)}(\xi)\omega(\xi)^\epsilon.$$

Remarquons que $q(\xi)$ est à valeurs dans $[0, 1]$, s'annule au point π (modulo 2π), est plate en ce point, donc $m_\epsilon(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R})$, et l'on vérifie aisément les conditions du théorème de S. Mallat.

On appellera $V_j(\epsilon)$, $j \in \mathbb{Z}$, l'annalyse multirésolution ainsi construite. Elle est $\alpha\epsilon$-régulière, α étant donné par le lemme d'Y. Meyer.

Revenons à $j = 0$ et posons $V_0^{(\epsilon)} = V^{(\epsilon)}$. La famille de vecteurs $g_k^{(\epsilon)}(x)$, $k \in \mathbb{Z}$, est une base inconditionnelle de $V^{(\epsilon)}$. Formons alors la matrice $M^{(\epsilon)}$ de coefficients $\beta(g_k^{(\epsilon)}, g_l^{(\epsilon)})$, $k \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{Z}$. Suivant le Lemme 2, pour montrer que β restreinte à $V^{(\epsilon)} \times V^{(\epsilon)}$ est pseudoaccrétive, il suffit de montrer que $M^{(\epsilon)}$ est inversible sur $l^2(\mathbb{Z})$. Ceci découlera du lemme suivant.

Lemme 4. *Il existe une constante* $C \geqslant 0$ *telle que pour tout* $\epsilon \geqslant 0$

$$|||M^{(0)} - M^{(\epsilon)}||| \leqslant C\epsilon.$$

Admettons un instant ce lemme et terminons la démonstration du Théorème 2. Puisque $M^{(0)}$ est inversible, $M^{(\epsilon)}$ est inversible pour ϵ choisi assez petit et, par suite, β restreinte à $V^{(\epsilon)} \times V^{(\epsilon)}$ est pseudoaccrétive. Il est alors facile de voir que la constante de pseudoaccrétivité, que nous notons $\delta^{(\epsilon)}$, de β restreinte à $V^{(\epsilon)} \times V^{(\epsilon)}$ dépend continuement de ϵ. Valant δ_0 pour $\epsilon = 0$, on choisit définitivement ϵ tel que $\delta^{(\epsilon)} \geqslant \delta_0/2$. Ceci achève la preuve du Théorème 2.

PREUVE DU LEMME 4. On définit une fonction $h^{(\epsilon)}(x)$ par sa transformée de Fourier en posant

$$\hat{h}^{(\epsilon)}(\xi) = \frac{\partial}{\partial \epsilon} \hat{g}^{(\epsilon)}(\xi) = \log \omega(\xi) \cdot \hat{g}^{(\epsilon)}(\xi).$$

Une estimation grossière de $\log \omega(\xi)$ nous donne pour tout ξ

$$|\log \omega(\xi)| \leqslant C(1 + |\log^3 |\xi|| + |\log |\xi| \log^2 (\sin \xi/2)|.$$

La preuve en est laissée au lecteur. On obtient alors les estimations

$$|\hat{h}^{(\epsilon)}(\xi)|^2 \leqslant C(\alpha)\left|\frac{\sin \xi/2}{\xi/2}\right|^{1+\alpha} \tag{28}$$

et

$$|\hat{h}^{(\epsilon)}(\xi) - \hat{h}^{(\zeta)}(\xi)|^2 \leqslant C(\alpha)|\epsilon - \zeta|^2\left|\frac{\sin \xi/2}{\xi/2}\right|^{1+\alpha},$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\epsilon \geqslant 0$, $\zeta \geqslant 0$ et $\alpha \in]0, 1[$. La fonction $\zeta \to \hat{h}^{(\zeta)}$ définit alors un chemin continu dans $L^2(\mathbb{R})$ et l'intégrale $\int_0^\epsilon \hat{h}^{(\zeta)}\, d\zeta$ est convergente dans $L^2(\mathbb{R})$. Sa valeur est donnée par

$$\int_0^\epsilon \hat{h}^{(\zeta)}\, d\zeta = \hat{g}^{(\epsilon)} - \hat{g}^{(0)}, \qquad \epsilon \geqslant 0.$$

La transformée de Fourier inverse et les translations étant continues sur $L^2(\mathbb{R})$, on obtient ensuite:

$$\hat{g}_k(\epsilon) - \hat{g}_k(0) = \int_0^\epsilon \hat{h}_k^{(\zeta)}\, d\zeta$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\epsilon \geqslant 0$.

Admettons un instant les inégalités suivantes: il existe $C \geqslant 0$ telle que

$$\forall \epsilon \geqslant 0 \qquad \left\|\sum_k \lambda_k h_k^{(\epsilon)}\right\|^2 \leqslant C \sum_k |\lambda_k|^2 \tag{29}$$

$$\forall \epsilon \geqslant 0 \qquad \left\|\sum_k \lambda_k g_k^{(\epsilon)}\right\|^2 \leqslant C \sum_k |\lambda_k|^2, \tag{30}$$

la norme étant ici celle de $L^2(\mathbb{R})$.

Soient (λ_k) et (μ_k) deux suites finies de nombres complexes. On calcule alors $([M^{(0)} - M^{(\epsilon)}](\lambda_k) \mid (\mu_k)) = A(\epsilon)$:

$$\begin{aligned} |A(\epsilon)| &= \left|\sum_k \sum_l \lambda_k \overline{\mu_l}[\beta(g_k^{(\epsilon)}, g_l^{(\epsilon)})]\right| \\ &\leqslant \int_0^\epsilon \left|\beta\left(\sum_k \lambda_k h_k^{(\xi)}, \sum_l \mu_l g_l^{(\epsilon)}\right)\right| + \left|\beta\left(\sum_k \lambda_k g_k^{(0)}, \sum_l \mu_l h_l^{(\zeta)}\right)\right| d\zeta. \end{aligned}$$

On a utilisé pour cela la sesquilinéarité et la continuité de β. Donc

$$A(\epsilon) \leqslant C\epsilon\left(\sum_k |\lambda_k|^2\right)^{1/2}\left(\sum_l |\mu_l|^2\right)^{1/2}$$

d'après (29) et 30). Cette inegalité nous donne donc celle désirée.

Passons à la démonstration de (29).

$$\Big\|\sum_k \lambda_k h_k^{(\epsilon)}(x)\Big\|^2 = \frac{1}{2\pi}\Big\|\sum_k \lambda_k \hat{h}_k^{(\epsilon)}\Big\|^2 = \frac{1}{2\pi}\Big\|\Big(\sum_k \lambda_k e^{-ik\xi}\Big)\hat{h}^{(\epsilon)}(\xi)\Big\|^2.$$

Posons

$$m(\xi) = \sum_k \lambda_k e^{-ik\xi}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_k \lambda_k h_k^{(\epsilon)}(x)\Big\|^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |m(\xi)|^2 |\hat{h}^{(\epsilon)}(\xi)|^2\, d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |m(\xi)|^2 \sum_k |\hat{h}^{(\epsilon)}(\xi + 2k\pi)|^2\, d\xi.\end{aligned}$$

Comme

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |m(\xi)|^2\, d\xi = \sum_k |\lambda_k|^2,$$

il suffit de montrer

$$\sum_k |\hat{h}^{(\epsilon)}(\xi + 2k\pi)|^2 \leqslant C$$

uniformément en ϵ et cela découle aisément de l'inégalité (28).

Pour démontrer (30), on applique le même raisonnement et l'on remarque que, pour tout $\epsilon \geqslant 0$, $|\hat{g}^{(\epsilon)}(\xi)| \leqslant |\hat{g}^{(0)}(\xi)|$.

Nous avons donc terminé la preuve du Théorème 2. Nous abandonnons désormais la notation de ϵ en exposant. Celui-ci étant fixé, on désignera par V_j l'espace $V^{(\epsilon)}$ et $g^{(\epsilon)}(x)$ devient $g(x)$. Enfin, on posera $r = \alpha\epsilon$ qui est la régularité de $g(x)$.

4. La contruction des *b*-vaguelettes

Dans cette partie j est fixé égal à 0, sauf mention du contraire. Nous noterons V pour V_0 et H pour V_1. Suivant S. Mallat [Ma], si nous appelons W l'espace orthogonal à V dans H, il existe dans W une fonction $\psi(x)$ r-régulière telle que la collection des vecteurs $\psi(x - k)$, $k \in \mathbb{Z}$, forme une base orthonormée de W. De plus, $\psi(x)$ vérifie la relation

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x)\, dx = 0. \tag{31}$$

Remarquons que, puisque $g(x)$ est à valeurs réelles, l'algorithme constructif de S. Mallat permet de choisir $\psi(x)$ à valeurs réelles. Notons enfin que si W_j est l'espace orthogonal à V_j dans V_{j+1}, alors une base orthonormée de W_j est donnée par la famille $2^{j/2}\psi(2^j x - k)$, $k \in \mathbb{Z}$. De sorte que la collection $2^{j/2}\psi(2^j x - k)$, $j, k \in \mathbb{Z}$ est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$ appelée base d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R})$.

Construisons maintenant les b-vaguelettes. On note $\psi_k(x)$ la fonction $\psi(x-k)$. Soient X et X^* les deux sous-espaces de H introduits dans la proposition 1 et Π_X et Π_{X^*} les deux projecteurs associés. On définit deux suites de fonctions $(\theta_k^{\#})$ et (θ_k^*) par

$$\theta_k^{\#}(x) = \Pi_X(\psi_k)(x) \in X, \qquad k \in \mathbb{Z} \tag{32}$$

et

$$\theta_k^*(x) = \Pi_{X^*}(\psi_k)(x) \in X^*, \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{33}$$

Image d'une base othornormée par un isomorphisme, $(\theta_k^{\#})$ (resp. (θ_k^*)) est une base inconditionnelle de X (resp. X^*). Cherchons une famille, que nous noterons $(\theta_k^{\sim})$, de vecteurs de X^* vérifiant

$$\beta(\theta_k^{\sim}, \theta_l^{\#}) = \delta_{k,l} \quad \text{pour tout} \quad (k,l) \in \mathbb{Z}^2. \tag{34}$$

On procède de la façon suivante. D'après le (iii) de la Proposition 1, β restreinte à $X^* \times X$ est (en étendant la définition 6) pseudoaccrétive. Une imitation du Lemme 2 (i) montre que la matrice N de coefficients $\beta(\theta_k^*, \theta_l^{\#})$, $k, l \in \mathbb{Z}$, est inversible sur $l^2(\mathbb{Z})$. Suivant le Lemme 2 (ii), on appelle $\gamma(k,l)$ les coefficients de N^{-1} et l'on pose

$$\theta_k^{\sim} = \sum_l \gamma(k,l)\theta_k^*, \qquad k \in \mathbb{Z} \tag{35}$$

$(\theta_k^{\sim})$ est alors la famille recherchée.

Nous allons maintenant nous intéresser aux estimations vérifiées par ces deux familles. Si $k \in \mathbb{Z}$, on a par exemple, d'après la formule (20) de la Proposition 1

$$\theta_k^{\#} = \psi_k - \sum_l \beta^*(\psi_k, g_l^{\sim})g_l \tag{36}$$

où la fonction $g_l^{\sim}$ est définite par la relation (18) du Lemme 2 appliqué dans l'espace V aux vecteurs (g_l). La fonction $g(x)$ étant r-régulière, on voit facilement que la matrice $(\beta(g_k, g_l))$ appartient à l'algèbre $\mathfrak{M}_1$ introduite dans le Lemme 1: T est ici $\mathbb{Z}$ muni de la distance $d(k,l) = |k-l|$. Par suite, $M^{-1} \in \mathfrak{M}_1$ et la fonction $g_l^{\sim}(x)$ s'écrit $h_l(x-l)$ où h_l est à décroissance rapide en x à l'infini. La fonction h_l est en fait r-régulière. Ensuite, grâce à (36), on voit que $\theta_k^{\#}(x)$ s'écrit $u_k(x-k)$ où $u_k(x)$ est r-régulière. Le même raisonnement s'applique aux fonctions θ_k^*, puis on utilise à nouveau le Lemme 1 et (35) pour voir que $\theta_k^{\sim}(x+k)$ est r-régulière. Notons pour finir que les constantes obtenues dans les majorations sont uniformes par rapport à $k \in \mathbb{Z}$.

Montrons maintenant que

$$\int_{\mathbb{R}} b(x)\overline{\theta_k^{\#}(x)}\, dx = 0,$$

c'est-à-dire $\beta(1, \theta_k^{\#}) = 0$ où 1 désigne la fonction identiquement égale à 1.

On a $\beta(g_l, \theta_k^{\#}) = 0$ pour tout $l \in \mathbb{Z}$ par définition de X. On peut alors remarquer que $\sum_l g_l(x) = \sum_l g(x-l) = 1$. En effet, il suffit d'appliquer la formule sommatoire de Poisson et d'observer que $\hat{g}(2k\pi) = 0$ pour $k \neq 0$ tandis que $\hat{g}(0) = 1$. Comme $b\overline{\theta_k^{\#}} \in L^1(\mathbb{R})$, on somme sur tous les $l \in \mathbb{Z}$ et par convergence dominée on obtient $\beta(1, \theta_k^{\#}) = 0$.

De façon symétrique, on obtient $\beta^*(1, \theta_k^*) = 0$, puis en appliquant (35) et la convergence dominée il vient $\beta^*(1, \theta_k^{\sim}) = 0$, c'est-à-dire

$$\int_{\mathbb{R}} \theta_k^{\sim}(x) b(x)\, dx = 0.$$

Pour terminer cette partie, laissons varier l'indice j dans $\mathbb{Z}$. On obtient alors deux familles de fonctions $(\theta_{j,k}^{\#})$ et $(\theta_{j,k}^{\sim})$ de $L^2(\mathbb{R})$. Identifiant l'intervalle dyadique $I = I_{j,k}$ avec le couple (j, k), on notera $\theta_I^{\sim} = \theta_{j,k}^{\sim}$ et $\theta_I = \overline{\theta_{j,k}^{\#}}$. Il suit de la construction précédente que (θ_I) et $(\theta_I^{\sim})$ sont deux familles de b-vaguelettes r-régulières. Pour montrer (12), on prend $X_j = \{\theta \in V_{j+1} : \beta(v, \theta) = 0\ \forall v \in V_j\}$ et X_j^* en remplaçant β par β^*. On observe facilement que si $j \neq j'$ alors $\beta(X_j^*, X_j) = 0$, c'est-à-dire que les deux espaces sont orthogonaux par rapport à la forme β. Avec la relation (34), on obtient la relation (12).

5. Estimation Quadratique

Nous allons montrer que (θ_I) est une base inconditionnelle de $L^2(\mathbb{R})$. Pour ce faire, rappelons que (ψ_I) est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$. Nous démontrons le théorème suivant:

Théorème 3. *L'opérateur défini par linéarité par*

$$T(\psi_I) = \theta_I, \qquad I \in \mathcal{I}$$

est un isomorphisme de $L^2(\mathbb{R})$ sur lui-même.

Une fois ce théorème démontré, la preuve du Théorème 1 sera complètement achevée.

Commençons la preuve du Théorème 3 par le résultat suivant:

Proposition 2. *La collection des vecteurs θ_I est totale dans $L^2(\mathbb{R})$.*

PREUVE. Il suffit de montrer que la somme algébrique des espaces X_j, X_{j-1}, $X_{j-2}, \ldots$ est dense dans V_{j+1} pour tout $j \in \mathbb{Z}$. Appelons alors P_j le projecteur de $L^2(\mathbb{R})$ sur V_j parallèlement à $\{f \in L^2(\mathbb{R})\colon \beta(v,f) = 0\ \forall v \in V_j\} = Y_j$. On peut alors appliquer la Proposition 1 et le Lemme 2 en posant $V_j = V$, $L^2(\mathbb{R}) = H$ (β est pseudoaccrétive sur $L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ car $b(x)^{-1}$ est bornée) et $Y_j = X$. On a donc la formule

$$P_j(f) = f - \sum_l \beta^*(f, g_{j,l}^{\sim}) g_{j,l} \quad \text{pour toute} \quad f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Avec (37) et les propriétés de décroissance des fonctions $g_{j,l}^{\sim}(x)$ et $g_{j,l}(x)$, on montre que $\lim\limits_{N \to +\infty} \|P_{-N}(f)\| = 0$.

Prouvons maintenant la continuité de l'opérateur T sur $L^2(\mathbb{R})$. Pour ce faire, nous utiliserons des résultats classiques de la théorie des opérateurs de Calderón-Zygmund. Grâce à l'orthogonalité des fonctions ψ_I entre elles par rapport au produit scalaire (et parce qu'elles sont à valeurs réelles), on peut écrire le noyau distribution de T comme

$$K(x,y) = \sum_{I \in \mathscr{I}} \theta_I(x)\psi_I(y) \quad \text{pour tout} \quad x \neq y.$$

Un simple calcul montre que $K(x,y)$ est δ-standard pour tout $\delta \in]0, r[$ (r étant la régularité des ondelettes et des b-vaguelettes). Pour montrer que T est continu, nous appliquons le Théorème $T(1)$ de David-Journé. Nous renvoyons le lecteur aux références suivantes pour les définitions et résultats concernant ce théorème: [DJ], [L], [M3].

Il s'agit de vérifier que T est faiblement borné. Ceci peut se voir de la façon suivante: soit $f \in D(\mathbb{R})$ et $g \in D(\mathbb{R})$ telle que $\int_{\mathbb{R}} g(x)\, dx = 0$. On calcule $\langle f, Tg \rangle$ (le crochet désigne maintenant la dualité distributions-fonctions formellement notée par $\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{Tg(x)}\, dx$).

On a

$$|\langle f, Tg \rangle| = \left| \sum_{I \in \mathscr{I}} \langle f, \theta_I \rangle \overline{\langle g, \psi_I \rangle} \right|.$$

Si $I = I_{j,k}$ on a $|\langle f, \theta_I \rangle| \leqslant C\|f\|_\infty 2^{-j/2}$, donc

$$|\langle f, Tg \rangle| \leqslant C\|f\|_\infty \sum_{I \in \mathscr{I}} 2^{-j/2} |\langle g, \psi_I \rangle|.$$

Or cette série définit une norme équivalente à celle de $B_1^{0,1}(\mathbb{R})$ (voir [LM]) donc

$$|\langle f, Tg\rangle| \leqslant C\|f\|_\infty \|g\|_{B_1^{0,1}}.$$

Ceci prouve la continuité faible de T (voir [L]).

On vérifie ensuite que $T(1)$ et ${}^tT(1)$ sont dans BMO ($\mathbb{R}$). Comme

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_I(y)\,dy = 0,$$

et grâce à la décroissance des θ_I, on obtient $T(1) = 0$. Ensuite, calculons ${}^tT(1)$. On a

$${}^tT(1)(y) = \sum_{I\in\mathcal{I}} c_I\psi_I(y) \quad \text{où} \quad c_I = \int_{\mathbb{R}} \theta_I(y)\,dy.$$

Utilisant un résultat de [LM], on sait que ${}^tT(1)\in \mathrm{BMO}(\mathbb{R})$ si, et seulement si, il existe $C \geqslant 0$ telle que pout tout $J\in\mathcal{I}$

$$\sum_{I\subset J,\, I\in\mathcal{I}} |c_I|^2 \leqslant C|J|,$$

qui est la condition de Carleson.

Calculons $\overline{c_I}$. Pour cela, on revient à la notation $I = I_{j,k}$ et $\overline{\theta_I}(x) = \theta^{\#}_{j,k}(x)$.

D'après la formule (36), on a

$$\theta^{\#}_{j,k}(x) = \psi_{j,k}(x) - \sum_l \beta^*(\psi_{j,k} g_{j,l}^{\sim}) g_{j,l}(x).$$

Posons

$$m_j(x) = \sum_l \left[\int_{\mathbb{R}} g_{j,l}\right] g_{j,l}^{\sim}(x).$$

Comme

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_{j,k}(x)\,dx = 0,$$

on a

$$\overline{c_I} = \int_{\mathbb{R}} \theta^{\#}_{j,k}(x)\,dx = \beta^*(\psi_{j,k}, \overline{m_j}) = \langle \bar{b} \mid \overline{\psi_{j,k} m_j}\rangle.$$

Posons $\omega_I(x) = \overline{\psi_{j,k}(x) m_j(x)}$. La collection (ω_I) est une famille de 1-vaguelettes r-régulières. La régularité s'obtient immédiatement. Pour montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} \omega_I(x)\,dx = 0,$$

il suffit d'observer que $m_j(x)$ appartient à l'adhérence de V_j dans $L^\infty(\mathbb{R})$ et que $\psi_{j,k}(x) \in W_j \cap L^1(\mathbb{R})$. Grâce à l'orthogonalité entre V_j et W_j, on voit que l'intégrale de $\omega_I(x)$ est nulle par convergence dominée.

Enfin $\bar{b}(x) \in L^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathrm{BMO}(\mathbb{R})$. On a alors classiquement

$$\sum_{I \subset J, I \in \mathcal{I}} |\langle \bar{b} \mid \omega_I \rangle|^2 \leqslant C|J|$$

qui est la condition de Carleson recherchée.

D'après le Théorème $T(1)$, T admet une extension linéaire bornée sur $L^2(\mathbb{R})$.

Passons à l'invertibilité.

Soit T' l'opérateur de la classe $\mathfrak{F}(\delta, 1, b)$, où $\delta < r$, dont le noyau-distribution vérifie

$$S(x,y) = K'(x,y)b(y) = \Big(\sum_{I \in \mathcal{I}} \psi_I(x)\theta_I^{\sim}(y)\Big)b(y) \quad \text{pour} \quad x \neq y.$$

On montre de manière analogue à ce qui précède que l'opérateur de Calderón-Zygmund de la classe $\mathfrak{F}$ $(\delta, 1, 1)$ de noyau $K'(x,y)$ est borné sur $L^2(\mathbb{R})$. Donc T' est borné sur $L^2(\mathbb{R})$ et l'on a:

$$T'T = I \quad \text{sur} \quad L^2(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad TT' = I \quad \text{sur} \quad F$$

où $F = \mathrm{Span}\,\{\theta_I : I \in \mathcal{I}\}$. F étant dense dans $L^2(\mathbb{R})$ et T' étant borné sur $L^2(\mathbb{R})$, la seconde égalité se prolonge par densité à tout $L^2(\mathbb{R})$. Ceci montre que T' inverse T sur $L^2(\mathbb{R})$.

Notation. L'opérateur qui envoie (ψ_I) sur (θ_I) sera noté désormais T_b et celui qui envoie (ψ_I) sur $(\theta_I^{\sim})$, $T_b^{\sim}$. On a donc

(37) $$T_b^{-1} = {}^tT_b^{\sim} M_b$$

où M_b est l'opérateur de multiplication par $b(x)$. L'importance de cette formule dépasse largement, comme nous allons le voir, le cadre du Théorème 3.4.

Remarque. La démonstration aurait pu se traiter sans introduire à la fois les espaces X^* et X. Nous avons cependant choisi cette approche pour pouvoir étendre les résultats qui suivent au cas où le corps des complexes est remplacé par une algèbre de Clifford (Partie 10).

6. Le cas de la dimension *d*

Il nous faut rappeler comment on construit une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R}^d)$ à l'aide de celles de $L^2(\mathbb{R})$. La définition d'une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R}^d)$ est analogue à la définition 7 où les translations entières par $\mathbb{Z}$ sont changées en celles indexées par $\mathbb{Z}^d$.

Soit Λ l'ensemble des indices $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d)$ où les λ_i sont non tous nuls et appartiennent à $\{0,1\}$. On posera $\bar{\Lambda} = \Lambda \cup \{(0,0,\ldots,0)\}$.

Soit $V_j, j \in \mathbb{Z}$ une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \Lambda$, fixons $j \in \mathbb{Z}$. On appelle E_j^λ le complété dans $L^2(\mathbb{R})$ du produit tensoriel algébrique $E_j^{\lambda_1} \otimes E_j^{\lambda_2} \otimes \cdots \otimes E_j^{\lambda_d}$ si $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$ et si $E_j^0 = V_j$ et $E_j^1 = W_j$. Appelons alors $V_j, j \in \mathbb{Z}$ l'espace $E_j^{(0,\ldots,0)}$. Il est immédiat de vérifier que $V_j, j \in \mathbb{Z}$, est une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R}^d)$. Les espaces E_j^λ étant 2 à 2 orthogonaux, on apelle W_j la somme orthogonale des $E_j^\lambda, \lambda \in \Lambda$. Il est clair que W_j est l'espace orthogonal à V_j dans V_{j+1}.

Partant de la fonction $g^{(0)}(x) = g^{(0)}(x_1)g^{(0)}(x_2) \cdots g^{(0)}(x_d)$ on construit

$$g^{(\epsilon)}(x) = g^{(\epsilon)}(x_1)g^{(\epsilon)}(x_2) \cdots g^{(\epsilon)}(x_d)$$

et la démonstration se déroule de la même façon.

7. Le théorème de continuité $T(b)$ de David-Journé-Semmes

Le premier Théorème $T(b)$ a été prouvé par McIntosh et Meyer dans [MM]: il affirmait essentiellement que, si $T(b) = {}^tT(b) = 0$, avec b fonction bornée accrétive (c'est-à-dire telle que $\operatorname{Re} b \geqslant \delta_0$), alors T est borné sur $L^2(\mathbb{R})$.

L'énoncé le plus général a été ensuite donné par David, Journé et Semmes ([DJS]). En voici une version légèrement plus faible:

Théorème 4. *Soit $b_1(x)$ et $b_2(x)$ deux fonctions pseudoaccrétives sur $\mathbb{R}^d$. Soit T un opérateur de la classe $F(\delta, b_2, b_1)$. Sont équivalents*:

(i) *T admet une extension linéraire continue sur $L^2(\mathbb{R}^d)$*
(ii) *T faiblement borné (WBP), $T(1) \in M_{b_2}\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)$, ${}^tT(1) \in M_{b_1}\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)$.*

La condition de bornitude faible est la même que celle adoptée dans [DJS]. Ici $T(1)$ est définie comme forme linéaire continue sur l'espace noté $\{D(\mathbb{R}^d)b_2(x)\}_0$ des fonctions de $D(\mathbb{R}^d)$ telles que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)b_2(x)\,dx = 0$$

tandis que ${}^tT(1)$ est définie sur $\{D(\mathbb{R}^d)b_1(x)\}_0$. Pour expliquer cela, on peut écrire $T = M_{b_2}SM_{b_1}$ où S peut être défini dans la classe $\mathfrak{F}(\delta, 1, 1)$. Suivant un théorème de Peetre, si S est continu sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ alors SM_{b_1} envoie $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans BMO $(\mathbb{R}^d)$.

Nous nous proposons de démontrer le Théorème $T(b)$ à l'aide de la construction précédente.

Nous allons présenter la structure de la preuve sans rentrer dans les détails techniques. Cette structure est analogue à celle adoptée originellement dans [DJS] et nous référons le lecteur à cet article pour les justifications.

Nous nous plaçons pour ce faire en dimension 1 en prenant $b_1(x) = b_2(x) = b(x)$ pour simplifier les notations.

Comme nous venons de le voir, l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est connue. Nous organisons la réciproque en deux étapes.

Première étape. Réduction au cas $T(1) = 0$ et ${}^tT(1) = 0$.

Il nous faut reprendre tout d'abord l'argument de perturbation en ϵ (Partie 3). Quitte à supposer ϵ plus petit, on impose la condition supplémentaire:

$$|B(g_I, g_I)| \geqslant \delta_0/2 \quad \text{pour tout} \quad I \in \mathcal{I}, \tag{38}$$

où $g(x)$ est la fonction «génératrice» de l'analyse multirésolution $V_j, j \in \mathbb{Z}$ et où $g_I(x) = 2^{j/2}g(2^jx - k)$ lorsque $I = I_{j,k}$.

Rappelons que (ψ_I) désigne la base d'ondelettes sur $L^2(\mathbb{R})$ associée et que r est la régularité des fonctions g et ψ et des systèmes de b-vaguelettes (θ_I) et $(\tilde{\theta}_I)$. Enfin δ désignera n'importe quel nombre pris dans $[0, r]$.

Reprenons l'opérateur T_b (Partie 5). Utilisant (37), on voit que T_b^{-1} envoie BMO $(\mathbb{R})$ dans BMO $(\mathbb{R})$ (T_b est même un isomorphisme de BMO$(\mathbb{R})$ sur lui-même). Soit alors $\beta \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R})$ tel que $T(1) = b\beta$. On pose

$$c_I = \langle T_b^{-1}(\beta), \psi_I \rangle B(g_I, g_I)^{-1} \quad \text{pout tout} \quad I \in \mathcal{I}$$

et on définit un opérateur de paraproduit Π_1 dans la classe $F(\delta, b, b)$ dont le noyau-distribution est donné par $b(x)K_1(x, y)b(y)$ lorsque $(x, y) \in \Omega$ où

$$K_1(x, y) = \sum_{I \in \mathcal{I}} c_I \theta_I(x) g_I(y)^2.$$

On vérifie classiquement que Π_1 est borné sur $L^2(\mathbb{R})$, que $\Pi_1(1) = b\beta$ dans M_bBMO $(\mathbb{R})$, et que ${}^t\Pi_1(1) = 0$ dans M_bBMO $(\mathbb{R})$.

On définit ensuite un deuxième opérateur de paraproduit Π_2 dans $F(\delta, b, b)$. On prendra pour cela, si $\gamma \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R})$ est tel que ${}^tT(1) = b\gamma$,

$$d_I = B(g_I, g_I)^{-1} \langle \tilde{T}_b^{-1}(\gamma), \psi_I \rangle$$

et

$$K_2(x, y) = \sum_{I \in \mathcal{I}} d_I (g_I(x))^2 \tilde{\theta}_I(y)$$

Π_2 envoie $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$, $\Pi_2(1) = 0$ et ${}^t\Pi_2(\gamma) = b\gamma$ dans M_bBMO $(\mathbb{R})$.

On est donc réduit à l'étude de $R = T - \Pi_1 - \Pi_2$ qui vérifie $R(1) = 0 = {}^tR(1)$ dans M_bBMO $(\mathbb{R})$ et $R \in F(\delta, b, b)$.

Deuxième étape. $T(1) = 0 = {}^tT(1)$ dans $M_b\mathrm{BMO}(\mathbb{R})$.

On écrit $T = M_bSM_b$ où S est faiblement borné et peut être défini dans la classe $F(\delta, 1, 1)$. Si $\nu < \delta$, d'après un théorème de Lemarié adapté dans [DJS], les opérateurs SM_b et ${}^tSM_b$ envoient continuement $C^\nu(\mathbb{R})$ dans $C^\nu(\mathbb{R})$. Ceci permet de calculer $SM_b(\theta_J)$ pour tout $J \in \mathcal{I}$. Des calculs classiques (*cf.* [L] ou [M3]) montrent que la collection des fonctions $\omega_J = SM_b(\theta_J)$ est une famille de b-molécules ν-régulières. On écrit ensuite grâce au Théorème 1:

$$\begin{aligned}\omega_J(x) = SM_b(\theta_J)(x) &= \sum_{I\in\mathcal{I}} B(\tilde{\theta}_I, SM_b\theta_J)\theta_I(x)\\ &= \sum_{I\in\mathcal{I}} \gamma_{I,J}\theta_I(x).\end{aligned}$$

SM_b, et par conséquent T, est borné sur $L^2(\mathbb{R})$ si, et seulement si, la matrice $\mathfrak{M}$ de coefficients $\gamma_{I,J}, I, J \in \mathcal{I}$ est bornée sur $l^2(\mathcal{I})$. On peut estimer $\gamma_{I,J}$ de la façon suivante: supposons $|I| \leqslant |J|$, $\theta_I(x)b(x)$ est une fonction localisée dans l'intervalle I et d'intégrale nulle tandis que $\omega_J(x)$ est régulière et plate à l'échelle de θ_I. On écrit alors

$$\gamma_{I,J} = \int_{\mathbb{R}} \theta_I(x)b(x)(\omega_J(x) - \omega_J(x_I))\,dx$$

(x_I étant $\inf I$), ce qui conduit à la majoration (voir [M3] pour les détails):

$$|\gamma_{I,J}| \leqslant C \inf(|I|, |J|)^\nu \frac{|I|^{1/2}|J|^{1/2}}{(|I| + |J| + \mathrm{dist}(I, J))^{1+\nu}}$$

où ν est n'importe quel nombe tel que $0 < \nu < \delta < r$ et où $\mathrm{dist}(I, J) = |x_I - x_J|$ si $x_I = \inf I$ et $x_J = \inf J$.

Pour montrer enfin la continuité de M sur $l^2(\mathcal{I})$, on utilise un lemme de Schur à poids:

$$\begin{aligned}\Big|\sum_I\sum_J \lambda_I\gamma_{I,J}\overline{\mu_J}\Big| &\leqslant \left[\sum_I |\lambda_I|^2\Big(\sum_J |\gamma_{I,J}|\frac{|J|^\alpha}{|I|^\alpha}\Big)\right]^{1/2}\left[\sum_J |\mu_J|^2\Big(\sum_I |\gamma_{I,J}|\frac{|I|^\alpha}{|J|^\alpha}\Big)\right]^{1/2}\\ &\leqslant C\Big(\sum_I |\lambda_I|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_I |\mu_I|^2\Big)^{1/2}\end{aligned}$$

dès que

$$\operatorname*{Sup}_I\left[\sum_J |\gamma_{I,J}|\Big(\frac{|J|}{|I|}\Big)^\alpha + \sum_J |\gamma_{J,I}|\Big(\frac{|J|}{|I|}\Big)^\alpha\right] < \infty.$$

Et cette relation se vérifie aisément pour tout $\alpha \in \left]\frac{1}{2} - \nu, \frac{1}{2} + \nu\right[$. Le Théorème 4 est donc démontré.

Par exemple, T_Γ s'étudie par la méthode de la deuxième étape, ce qui prouve une nouvelle fois la continuité sur $L^2(\mathbb{R})$ de l'opérateur de Cauchy sur une courbe corde-arc.

8. Un isomorphisme remarquable entre algèbres d'opérateurs

On appelle $\mathcal{A}(\delta, 1, b)$ le sous-espace vectoriel de $F(\delta, 1, b)$ constitué des opérateurs T continus sur $L^2(\mathbb{R})$ tels que $T(1) = 0$ dans BMO $(\mathbb{R}^d)$ et ${}^tT(1) = 0$ dans M_bBMO $(\mathbb{R}^d)$.

L'algèbre $\mathcal{A}_b^r$ que nous définissons ci-dessous, est une sous algèbre de l'algèbre A_b étudiée dans [MM]. Le point nouveau est la relation entre $\mathcal{A}_b^r$ et $\mathcal{A}_1^r$ démontré dans le théorème suivant.

Théorème 5. *Soit $b(x)$ une fonction pseudoaccrétive sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. Il existe un $r \in]0, 1]$ tel que*

$$\mathcal{A}_b^r = \bigcup_{0<\delta<r} \mathcal{A}(\delta, 1, b)$$

constitue une sous-algèbre d'opérateurs continus sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. Cette algèbre est isomorphe à l'algèbre

$$\mathcal{A}_1^r = \bigcup_{0<\delta<r} \mathcal{A}(\delta, 1, 1),$$

sous-algèbre de l'algèbre de Lemarié, par conjugaison intérieure dans $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^d))$.

Enfin, si $T \in \mathcal{A}(\delta, 1, b)$ alors $M_b^{-1}\,{}^tTM_b \in \mathcal{A}(\delta, 1, b)$.

PREUVE. Nous l'effectuons en dimension 1 pour simplifier l'écriture. Reprenons alors les fonctions (ψ_I), (θ_I) et $(\tilde{\theta}_I)$ que nous avons précédemment construites. Le nombre r désigne la régularité de ces fonctions. Alors l'application

$$C: \quad \begin{array}{l} \mathcal{A}_b^r \to \mathcal{A}_1^r \\ S \to T_b^{-1} S T_b \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Si nous admettons cela un instant, C étant un opérateur de conjugaison, et $\mathcal{A}_1^r$ une sous-algèbre de $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$ (*cf.* [L]), il suit facilement que $\mathcal{A}_b^r$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$.

Montrons maintenant que C est un isomorphisme de $\mathcal{A}_b^r$ sur $\mathcal{A}_1^r$. Par symétrie, il suffit de montrer que si $S \in \mathcal{A}_b^r$ alors $C(S) \in \mathcal{A}_1^r$.

Soient donc α, ν, δ tels que $0 < \alpha < \nu < \delta < r$.

Soit $S \in \mathcal{A}(\delta, 1, b)$, posons $A = T_b^{-1} S T_b$. Montrons que $A \in \mathcal{A}(\alpha, 1, 1)$. Tout d'abord A est continu sur $L^2(\mathbb{R})$. Désignons par $\gamma_{I,J}$ le coefficient $B(\tilde{\theta}_I, S\theta_J)$

où B désigne la forme bilinéaire usuelle. Il s'ensuit que

$$A\psi_I(x) = \sum_{I \in \mathcal{I}} \gamma_{I,J}\psi_J(x). \tag{39}$$

L'orthogonalité des fonctions $\psi_I(x)$ prises deux à deux nous permet de voir que le noyau-distribution de A s'écrit

$$K(x,y) = \sum_{I \in \mathcal{I}} A\psi_I(x)\psi_I(y) \quad \text{pour} \quad (x,y) \in \Omega.$$

Des calculs classiques montrent que les fonctions $A\psi_I(x)$ définies par (39) forment une famille de 1-molécules ν-régulières. Par suite $K(x,y)$ est un noyau α-standard et $A \in F(\alpha, 1, 1)$. Comme $A\psi_I(x)$ et $\psi_I(x)$ sont d'intégrale nulle, on vérifie aisément que $A(1) = {}^tA(1) = 0$ dans BMO $(\mathbb{R})$. Donc $A \in \mathfrak{A}(\alpha, 1, 1)$.

Enfin, le dernier point du théorème ne présente aucune difficulté.

9. Une base inconditionnelle de l'espace $H_b^1(\mathbb{R}^d)$

Définition 8. *On appelle $H_b^1(\mathbb{R}^d)$ l'espace $M_b^{-1}H^1(\mathbb{R}^d)$ muni de la norme $\|f\|_{H_b^1(\mathbb{R}^d)} = \|g\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}$ si $f = b^{-1}g$. $H^1(\mathbb{R}^d)$ est ici l'espace atomique de Stein et Weiss.*

On a le résultat suivant:

Théorème 6. *Soit $b(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ une fonction pseudoaccrétive.*

(i) *T_b se prolonge en un isomorphisme de $H^1(\mathbb{R}^d)$ sur $H_b^1(\mathbb{R}^d)$.*

(ii) *$(\theta_{\lambda,Q})$ est une famille inconditionnelle de $H_b^1(\mathbb{R}^d)$ et*

$$f \in H_b^1(\mathbb{R}^d) \Leftrightarrow f = \sum_\lambda \sum_Q B(\tilde{\theta}_{\lambda,Q}, f)\theta_{\lambda,Q}$$

avec

$$\left(\sum_\lambda \sum_Q |B(\tilde{\theta}_{\lambda,Q}, f)|^2 \frac{1}{|Q|}\chi_Q(x)\right)^{1/2} \in L^1(\mathbb{R}^d).$$

(iii) *L'application* BMO $(\mathbb{R}^d) \to (H_b^1(\mathbb{R}^d))'$

$$\beta \to (f \to B(f, \beta))$$

est un isomorphisme.

(iv) *Pour tout $\beta \in$* BMO $(\mathbb{R}^d)$, *$\sum_\lambda \sum_Q B(\theta_{\lambda,Q}, \beta)\tilde{\theta}_{\lambda,Q}$ converge vers β dans* BMO $(\mathbb{R}^d)$ *pour la topologie de dual définie dans* (iii), *que nous noterons σ_B^*(BMO $(\mathbb{R}^d)$, $H_b^1(\mathbb{R}^d)$).*

Remarque. On peut interchanger la famille $(\theta_{\lambda,Q})$ avec $(\tilde{\theta}_{\lambda,Q})$ et T_b avec $\tilde{T}_b$. Les énoncés restent identiques.

PREUVE. Nous allons encore une fois nous placer en dimension 1. On a vu que $\tilde{T}_b$ était un isomophisme de BMO $(\mathbb{R})$ sur BMO $(\mathbb{R})$. Par conséquent, ${}^t\tilde{T}_b$ est un isomorphisme de $H^1(\mathbb{R})$ sur $H^1(\mathbb{R})$. Or $T_b^{-1} = {}^t\tilde{T}_b M_b$. Il s'ensuit que T_b^{-1} est un isomorphisme de $H_b^1(\mathbb{R})$ sur $H^1(\mathbb{R})$ ce qui établit (i). Pour montrer (ii) nous allons utiliser un résultat de [LM] ou de [AEPT]:

$$h \in H^1(\mathbb{R}) \Leftrightarrow h = \sum_I \langle h \mid \psi_I \rangle \psi_I$$

avec

$$\left(\sum_I |\langle h \mid \psi_I \rangle|^2 \frac{1}{|I|} \chi_I(x) \right)^{1/2} \in L^1(\mathbb{R}).$$

Soit alors $f \in H_b^1(\mathbb{R})$. On écrit, au sens des distributions,

$$f = \sum_I \alpha_I \theta_I$$

et il vient $\alpha_I = B(\tilde{\theta}_\lambda, f)$ (qui a un sens puisque $\tilde{\theta}_I(x) b(x) f(x) \in L^1(\mathbb{R})$). La fonction $h = T_b^{-1}(f)$ appartient à $H^1(\mathbb{R})$ et il vient

$$h = \sum_I \alpha_I \psi_I \quad \text{avec} \quad \left(\sum_I |\alpha_I|^2 |I|^{-1} \chi_I(x) \right)^{1/2} \in L'(\mathbb{R}).$$

(iii) est une évidence car $B(\theta, \beta) = \langle M_b \theta, \beta \rangle$ si $\theta \in H_b^1(\mathbb{R})$ et $\beta \in$ BMO $(\mathbb{R})$. Or $M_b \theta \in H^1(R)$ et l'isomorphisme s'établit à l'aide de la dualité entre $H^1(\mathbb{R})$ et BMO $(\mathbb{R})$.

(iv) Soit $\beta \in$ BMO $(\mathbb{R})$. On sait que $\tilde{T}_b^{-1}(\beta) \in$ BMO $(\mathbb{R})$. Alors, d'après [LM],

$$\tilde{T}_b^{-1}(\beta) = \sum_I \langle \tilde{T}_b^{-1}(\beta), \psi_I \rangle \psi_I$$

et la convergence a lieu dans BMO $(\mathbb{R})$ pour la topologie σ^* (BMO $(\mathbb{R})$, $H^1(\mathbb{R})$). Soit alors $f \in H^1(\mathbb{R})$; on a

$$\left| \sum_I \langle \tilde{T}_b^{-1}(\beta), \psi_I \rangle \langle \psi_I, f \rangle \right| \leqslant C \|f\|_{H^1(\mathbb{R})} \|\tilde{T}_b^{-1}(\beta)\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R})}.$$

Or $\langle \tilde{T}_b^{-1}(\beta), \psi_I \rangle = B(\beta, \theta_I)$ et si $\theta = T_b(f) \in H_b^1(\mathbb{R})$ on a

$$\left| B\left(\sum_I B(\beta, \theta) \tilde{\theta}_I, \theta \right) \right| \leqslant C \|\theta\|_{H_b^1(\mathbb{R})} \|\beta\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R})}.$$

Donc $\sum_I B(\beta, \theta) \tilde{\theta}_I$ converge dans BMO pour la topologie faible σ_B^*(BMO $(\mathbb{R})$, $H_b^1(\mathbb{R})$) et il est facile de montrer que la limite est β.

10. Une excursion dans les algèbres de Clifford

David-Journé-Semmes ont montré que le $T(b)$ s'étendait au cas où le calcul dans les corps des complexes était remplacé par celui dans une algèbre de Clifford. Notre démonstration du $T(b)$ s'appuyant sur la théorie des espaces de Hilbert complexes, il n'est pas clair que nous puissions l'adopter. Nous allons donner les éléments nécessaires à cette extension.

Pourquoi une algèbre de Clifford? Parce que le potentiel de double couche sur une surface lipschitzienne de $\mathbb{R}^{d+1}$ se réécrit simplement par le biais des algèbres de Clifford. Cette observation nous a été communiquée par R. Coifman. Soit $X_0 = \varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ le graphe de $\varphi(x)$ où φ est telle que $\|\partial\varphi/\partial x_i\|_\infty < M$ pout tour $i \in \{1, \ldots, d\}$. Le potentiel de double couche est l'opérateur

$$T_\varphi f(x) = \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}^d} K_\varphi(x, y) f(y)\, dy \quad \text{pour} \quad f \in D(\mathbb{R}^d)$$

où

$$K_\varphi(x, y) = \frac{\varphi(x) - \varphi(y) - \langle x - y, \nabla\varphi(y)\rangle_{\mathbb{R}^d}}{(|x-y|^2 + |\varphi(x) - \varphi(y)|^2)^{(d+1)/2}}.$$

El dans l'algèbre de Clifford $\mathfrak{A}_d, K_\varphi(x, y)$ est la partie réelle du noyau

$$\mathcal{K}(x, y) b(y) = \frac{\varphi(x) - \varphi(y)e_0 - \sum_{d}^{i=1} (x_i - y_i) e_i}{(|x-y|^2 + |\varphi(x) - \varphi(y)|^2)^{(d+1)/2}} \left(e_0 - \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(y) e_i\right)$$

$\mathcal{K}(x, y)b(y)$ est donc un noyau du type de ceux que nous avons vu précédemment.

Nous allons rappeler brièvement la définition d'une algèbre de Clifford et voir comment adapter les méthodes précédentes.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P = P(\{1, 2, \ldots, n\})$. L'algèbre de Clifford $\mathfrak{A}_n$ est engendrée sur $\mathbb{R}$ par 2^n vecteurs e_A, $A \in P$, construits de la façon suivante: on part de $n+1$ vecteurs $e_0, e_1, \ldots, e_n$ vérifiant $e_0^2 = e_0$, $e_i^2 = e_i$, $e_i e_0 = e_0 e_i$ et $e_i e_j = -e_j e_i$ pour tout $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$, $i \neq j$. On posera par la suite $e_0 = 1$ et si $A \in P$, $e_A = e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_r}$ lorsque A est la famille ordonnée $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$.

$\mathfrak{A}_n$ est une algèbre non commutative pour la multiplication définie cidessus. $\mathfrak{A}_n$ est munie d'une involution $\alpha \to \bar{\alpha}$ définie par: si $\alpha = \sum_A \alpha_A e_A$, alors $\bar{\alpha} = \sum \alpha_A \overline{e_A}$ où $\overline{e_A} = (-1)^{r(A)} e_A$ et $r(A) = (\# A)(\# A + 1)/2$. On vérifie que $\overline{\alpha\alpha'} = \overline{\alpha'} \cdot \bar{\alpha}$ pour tout $\alpha, \alpha' \in \mathfrak{A}_n$. Enfin, $\mathfrak{A}_n$ peut être munie du produit scalaire $(\alpha, \alpha') \to \operatorname{Re}(\alpha\bar{\alpha}')$ où pout tout $\mu \in \mathfrak{A}_n$, $\operatorname{Re}\mu$ désigne la composante de μ sur le vecteur $e_0 = 1$. On notera $|\ \ |$ la norme euclidienne induite sur $\mathfrak{A}_n$ par ce produit scalaire. $(\mathfrak{A}_n, |\ \ |)$ est alors un espace euclidien et une algèbre normée.

Pour terminer, on distingue dans $\mathfrak{A}_n$ le sous-espace de dimension $n+1$, noté $\mathcal{C}_n$ et appelé espace des vecteurs de Clifford, composé des vecteurs $x = \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$. $\mathcal{C}_n$ possède la propriété remarquable suivante: si $x = \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$ alors $\bar{x} = \alpha_0 e_0 - \alpha_1 e_1 - \cdots - \alpha_n e_n$ et $x\bar{x} = |x|^2 e_0 = |x|^2$. On définit alors $x^{-1} \in \mathcal{C}_n$ par $x^{-1} = \bar{x}/|x|^2$ pour $x \in \mathcal{C}_n - \{0\}$.

Nous renvoyons le lecteur à [BDS] pour toutes les justifications de ce que nous allons employer.

Passons aux définitions de l'espace $L^2(\mathbb{R}^d, \mathfrak{A}_n)$. On dit que $f(x) \in L^2(\mathbb{R}^d, \mathfrak{A}_n)$ si

$$f(x) = \sum_A f_A(x) e_A \quad \text{où} \quad f_A(x) \in L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}).$$

On munit $L^2(\mathbb{R}^d, \mathfrak{A}_n)$ du produit scalaire réel

$$\langle f, g \rangle = \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{g(x)}\, dx \quad \text{et} \quad \|f\|^2 = \langle f, f \rangle$$

et l'on a également

$$\|f\|^2 = \sum_A \|f_A\|^2.$$

Soit $b(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathfrak{A}_n)$ à valeurs dans $\mathcal{C}_n$ et soient β et β^* les formes associées à $b(x)$ et à $\bar{b}(x)$ par (21). On dira que β est pseudoaccrétive sur un sous-espace fermé $\mathcal{V}$ de $L^2(\mathbb{R}^d, \mathfrak{A}_n)$ si $\mathcal{V}$ est un $\mathfrak{A}_n$-module à gauche et si

$$\forall f \in \mathcal{V}, \qquad \sup_{\|f\| \leq 1} \operatorname{Re} \beta(f, f') \geqslant \delta_0 \|f\|,$$

et symétriquement en échangeant les rôles de f et f'.

On généralise les lemmes abstraits de la façon suivante: si $\mathcal{V}$ est un sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{R}^d, \mathfrak{A}_n)$ et un $\mathfrak{A}_n$-module à gauche, une forme $\mathfrak{A}_n$-linéaire à gauche L sur $\mathcal{V}$ vérifie $L(\alpha v + v') = \alpha L(v) + L(v')$ pour tout $\alpha \in \mathfrak{A}_n$, $v, v' \in \mathcal{V}$. Alors, à chaque forme $\mathfrak{A}_n$-linéaire à gauche L continue sur $\mathcal{V}$ correspond une unique forme $\mathbb{R}$-linéaire, notée $\operatorname{Re} L$, telle que $\operatorname{Re} L(v) = \operatorname{Re}(L(v))$ pour tout $\mathcal{V}$. La réciproque est également vraie. Ce résultat permet de nous ramener au cadre classique des formes $\mathbb{R}$-linéaires.

Nous utiliserons églement le test d'inversibilité suivant.

Proposition 3. *Soit M une matrice à coefficients dans $\mathfrak{A}_n$, notés $\alpha_{s,t}$, $s, t \in T$. On posera*

$$(M\lambda \mid \mu) = \sum_s \sum_t \lambda_s \alpha_{s,t} \bar{\mu}_t$$

qui fait de M un opérateur $\mathfrak{A}_n$-linéaire à gauche sur $l^2(T, \mathfrak{A}_n)$. On suppose que M est continu sur $l^2(\mathbb{C}, \mathfrak{A}_n)$ et vérifie

$$\forall \lambda \in l^2(T, \mathfrak{A}_n) \qquad \sup_{\|\mu\| \leq 1} \operatorname{Re}(M\lambda \mid \mu) \geqslant \delta_0 \|\lambda\|$$

et

$$\forall \mu \in l^2(T, \mathfrak{A}_n) \qquad \sup_{\|\lambda\| \leq 1} \operatorname{Re}(M\lambda \mid \mu) \geqslant \delta_0 \|\mu\|$$

où $\delta_0 > 0$. Alors M est inversible sur $l^2(T, \mathfrak{A}_n)$.

La preuve est laissée au lecteur. Nous lui laissons aussi le soin d'adapter les lemmes abstraits de la partie 2.

Une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R}^d, \mathfrak{A}_n)$ est définie de la façon suivante: on dit que $f \in \mathbb{V}_j$ si $f = \sum f_A e_A$ avec pour tout A, $f_A \in V_j$ (*cf.* partie 6) et l'on définit de manière analogue $\mathbb{W}_j$. Il convient de remarquer l'importance du fait que la fonction g et l'ondelette ψ sont à valeurs réelles car $\mathbb{R}$ identifié ici à $\mathbb{R}e_0$ est le centre de l'algèbre $\mathfrak{A}_n$. Par suite $\mathbb{V}_j$ et $\mathbb{W}_j$ sont des $\mathfrak{A}_n$-module à gauche.

On applique alors l'argument de perturbation. Là aussi, la fonction $g^{(\epsilon)}$ et l'ondelette $\psi^{(\epsilon)}$ sont à valeurs réelles et les espaces $\mathbb{V}_j^{(\epsilon)}$ sont des $\mathfrak{A}_n$-modules à gauche. Les espaces $\mathbb{X}_j^{(\epsilon)}$ et $\mathbb{X}_j^{(\epsilon)*}$ que l'on est amené à définir seront également des $\mathfrak{A}_n$-modules à gauche, de sorte que nous pouvons utiliser les remarques précédentes.

Pour terminer, notons que la contruction des b-vaguelettes n'utilise pas un calcul commutatif. Le lecteur intéressé pourra en vérifier les détails. On obtient finalement le théorème suivant.

Théorème 7. *Soit $b(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathfrak{A}_n)$ à valeurs dans $\mathbb{C}_n$ et pseudoaccrétive. Il existe un $r \in]0, 1[$, un ensemble Λ de cardinal $2^d - 1$ et, pour chaque $\lambda \in \Lambda$, deux familles de b-vaguelettes r-régulières $(\theta_{\lambda, Q})$ et $(\tilde{\theta}_{\lambda, Q})$ à valeurs dans $\mathfrak{A}_n$ telles que*

(i) $\forall f \in L^2(\mathbb{R}^d, \mathfrak{A}_n)$,

$$f = \sum_\lambda \sum_Q B(f, \theta_{\lambda, Q}) \tilde{\theta}_{\lambda, Q} = \sum_\lambda \sum_Q \theta_{\lambda, Q} B(f, \tilde{\theta}_{\lambda, Q}).$$

(ii) $$\|f\|^2 \approx \sum_\lambda \sum_Q |B(\tilde{\theta}_{\lambda, Q}, f)|^2 \approx \sum_\lambda \sum_Q |B(\theta_{\lambda, Q}, f)|^2.$$

(iii) $$B(\tilde{\theta}_{\lambda', Q'}, \theta_{\lambda, Q}) = \delta_{\lambda, \lambda'} \delta_{Q, Q'} \textit{ pour tous } \lambda, \lambda', Q, Q'.$$

Précisons que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \tilde{\theta}_{\lambda, Q}(x) b(x)\, dx = 0 = \int_{\mathbb{R}^d} b(x) \theta_{\lambda, Q}(x)\, dx,$$

$\tilde{\theta}_{\lambda,Q}$ est une b-vaguelette «à gauche» tandis que $\theta_{\lambda,Q}$ en est une «à droite». B est la forme donnée par

$$B(f, g) = \int fbg.$$

Remarque. L'hypothèse $b(x)$ à valeurs dans $\mathcal{C}_n$ n'est pas nécessaire dans cet énoncé. Toutefois, elle apparait de façon cruciale dans le $T(b)$ où l'on a besoin de calculer $B(g_I, g_I)^{-1}$ comme l'inverse d'un vecteur de Clifford.

L'adaptation des théorèmes 4, 5, 6 est laissée au lecteur.

11. Commentaires

La théorie 6(ii) peut s'étendre, si $\frac{d}{d+r} < p < 1$, en définissant de façon similaire un espace $H_b^p(\mathbb{R}^d)$. Une démonstration directe de la caractérisation de $H^p(\mathbb{R}^d)$ par la fonction maximale $\left(\sum_\lambda \sum_Q |\alpha_{\lambda,Q}|^2 |Q|^{-1} \chi_Q(x)\right)^{1/2}$ peut se trouver dans [AEPT].

En dimension 1, l'espace $H_b^1(\mathbb{R})$ est lié de façon très étroite à l'analyse complexe sur les courbes corde-arc ($b(x)$ étant ici la fonction $z'(x)$). Voir [Z] par exemple. Lorsque $p < 1$, $H_b^p(\mathbb{R})$ est seulement un espace de distributions et on ne sait pas relier cet espace avec des espaces de fonctions holomorphes.

On peut également montrer que les familles $(\tilde{\theta}_{\lambda,Q})$ et $(\theta_{\lambda,Q})$ forment des bases inconditionnelles des espaces $L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$ et donner des critères d'appartenance à l'un de ces espaces d'une série $\sum_\lambda \sum_Q \alpha_{\lambda,Q} \theta_{\lambda,Q}$. On s'appuie pour cela sur l'article [LM] et l'on utilise les propriétés de l'opérateur T_b (ou $\tilde{T}_b$).

Bibliographie

[A1] Auscher, P. Thèse de doctorat. Université de Paris-Dauphine.

[A2] Auscher, P. Wavelets on Chord-arc curves, in *Wavelets, time-frequency methods and phase space.* Springer Verlag, 1988.

[AEPT] Aguirre, J., Escobedo, M., Peral, J., Tchamitchian, P. Basis of wavelets and atomic decompositions of $H^1(\mathbb{R}^n)$ and $H^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. A paraître, in Proc. A.M.S.

[BDS] Brackx, F., Delanghe, R., Sommen, F. Clifford analysis, Pitnam 1982.

[DJ] David, G., Journé, J. L. A boundedness criterion for generalized Calderón-Zygmund operators, *Ann. of Math.* **120**(1984), 371-389.

[DJS] David, G., Journé, J. L., Semmes, S. Opérateurs de Calderón-Zygmund, fonctions para-accrétives et interpolation, *Rev. Mat. Iberoamericana* **1**(1985), 1-56.

[L] Lemarié, P. G. Algèbre d'opérateurs et semi-groupes de Poisson sur une space de nature homogène. Thèse de 3ème cycle, Orsay, 1984.

[LM] Lemarié, P. G., Meyer, Y. Ondelettes et bases hilbertiennes, *Rev. Mat. Iberoamericana* **2**(1986), 1-18.

[M1] Meyer, Y. Ondelettes, fonctions splines et analyses graduées. Cahiers des mathématiques de la décision, 1987. Université de Paris-Dauphine.

[M2] Meyer, Y. Wavelets with compact support, Zygmund Lectures (Univ. of Chicago, 1987).

[M3] Meyer, Y. Les nouveaux opérateurs de Calderón-Zygmund, Actes du colloque Schwartz. Astérisque.

[M4] Meyer, Y. Real analysis and operator theory. McMaster University, 1984.

[Ma] Mallat, S. Multiresolution approximation and wavelets, GRASP Lab, CISSEAS, Univ. of Pennsylvannia, Philadelphie, PA 19104-6389.

[MM] McIntosh, A., Meyer, Y. Algèbres d'opérateurs définis par des intégrales singulières. C.R.A.D. **301**(1985), 395-397.

[T] Tchamitchian, P. Ondelettes et intégrale de Cauchy sur les courbes lipschitziennes, *Ann. of Math.* **128**(1988).

[Z] Zinsmeister, M. Espaces de Hardy généralisés, Thèse de 3ème cycle. Orsay (1981).

Recibido: 6 de junio de 1989.

P. Auscher*
Department of Mathematics
Washington University,
St. Louis, Mo 63130
USA

Ph. Tchamitchian
Centre de Physique Théorique
CNRS-Luminy, Case 907
F-13288-Marseille Cedex 9, et
Faculté des Sciences et Techniques
de St. Jérôme,
13397 Marseille Cedex 13
FRANCE

* Ce travail a été realisé alors que l'auteur était à: Université Bordeaux 1. UER de Math-Info.