

Construction de Bases D'Ondelettes α -Hödériennes

Albert Cohen

Résumé

Dans cet article, nous reprenons une méthode due à Ingrid Daubechies pour générer des bases orthonormales de fonctions dans $L^2(\mathbb{R})$ de la forme $\{2^{j/2}\psi(2^jx - k)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ à partir de filtres miroir en quadrature (QMF) tels que l'ondelette ψ ait de bonnes propriétés de régularité. Une estimation de l'exposant de Hölder global optimal est obtenue en caractérisant précisément la décroissance de la fonction $\hat{\psi}$. Nous précisons finalement les liens exacts entre la régularité de l'ondelette et son ordre de cancellation (nombre de moments nuls).

Introduction

Depuis les travaux d'Yves Meyer ([1], [2]) et de J. O. Strömberg ([10]), on sait construire des bases orthonormées de l'espace $L^2(\mathbb{R})$ de la forme

$$\{2^{j/2}\psi(2^jx - k)\}_{j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}}.$$

Le cas du système de Haar, inventé en 1911, s'identifie à une base de ce type où l'ondelette ψ est d'intégrale nulle, à support compact mais mal localisée en fréquence car discontinue. Dans certaines applications, telles que le codage, la compression des données, le calcul numérique performant ([4]) ou l'analyse mathématique des singularités ([5]), on souhaite que la fonction ψ présente plus de régularité et de moments nuls que dans l'exemple de la base de Haar.

D'autre part, les liens établis par Stéphane Mallat entre l'analyse multirésolution et les algorithmes pyramidaux montrent que l'implémentation numérique de la décomposition en ondelettes fait appel à la donnée unique d'une paire de QMF («quadrature mirror filter» au sens donné dans [6] par Smith et Barnwell). Réciproquement, s'ils satisfont certaines conditions, les QMF permettent de générer une analyse multirésolution et des ondelettes.

Il est donc intéressant de pouvoir estimer la régularité de la fonction ψ construite à partir d'un filtre donné. Les principaux travaux dans ce domaine ont été menés par Ingrid Daubechies ([7], [8]) qui a établi des conditions suffisantes portant sur les QMF pour obtenir de la régularité sur l'ondelette.

En poursuivant cette approche, nous allons chercher une estimation de l'exposant de Hölder global obtenu dans ces constructions. On verra notamment que, contrairement à ce qui a pu être conjecturé, la régularité de l'ondelette ne s'identifie pas au nombre de ses premiers moments qui s'annulent.

Nous commencerons par rappeler brièvement les liens entre les analyses multirésolutions et les QMF. Le lecteur désireux d'approfondir ses connaissances trouvera sur ce sujet des détails plus précis dans [3] et [9].

1. Construction des analyses multirésolutions

1.a. Analyse multirésolution et ondelettes

Par définition, une analyse multirésolution est une suite $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ de sous-espaces vectoriels fermés de $L^2(\mathbb{R})$ qui vérifie les propriétés suivantes

- (1) $V_j \subset V_{j+1}$
- (2) $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$
- (3) $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$
- (4) $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$

- (5) Il existe une fonction φ de V_0 telle que la famille $\{\varphi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ soit une base hilbertienne de V_0 .

Remarquons qu'alors, $\{2^{j/2}\varphi(2^j - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de l'espace V_j qui est donc invariant par les translations de pas $k2^{-j}$.

La fonction φ vérifie deux propriétés importantes:

$$-\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = \hat{\varphi}(0) = 1 \text{ qui est liée à la propriété (4)}$$

— φ satisfait l'identité

$$(6) \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2k\pi)|^2 = 1$$

ou encore

$$(7) \quad \int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(\omega)|^2 e^{ik\omega} = 2\pi \delta_{0,k}$$

qui expriment l'orthonormalité de la suite $\{\varphi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

Si nous définissons à présent le sous-espace W_j comme étant le supplémentaire orthogonal de V_j dans V_{j+1} , il est clair que la somme orthogonale $\bigoplus W_j$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ et que W_j s'obtient en dilatant W_{j+1} d'un rapport 2.

On peut alors trouver une fonction ψ telle que $\{\psi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ soit une base orthonormée de W_0 . La famille $\{2^{j/2}\psi(2^j x - k)\}_{j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}}$ est par conséquent une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$ tout entier. La construction de l'ondelette ψ va être précisée grâce à l'introduction des QMF.

1.b. Analyse multirésolution et QMF

Les filtres QMF s'introduisent naturellement de la manière suivante: grâce à l'inclusion de V_{-1} dans V_0 , on peut développer $\varphi(x/2)$ suivant les $\varphi(x - k)$.

On a donc

$$(8) \quad \frac{1}{2} \varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi(x - k).$$

Définissons à présent la fonction m_0 par

$$m_0(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-ik\omega}.$$

C'est la fonction de transfert du filtre discret c_k et elle est 2π -périodique.

En prenant la transformée de Fourier de (8), il vient

$$(9) \quad \hat{\varphi}(2\omega) = m_0(\omega)\hat{\varphi}(\omega).$$

Introduisons la relation (9) dans l'inégalité (6). L'expression

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(2\omega + 2k\pi)|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2) |\hat{\varphi}(\omega + 2k\pi)|^2$$

se simplifie en donnant la relation caractéristique des filtres QMF:

$$(10) \quad |m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2 = 1.$$

Par abus de langage nous confondrons désormais le filtre $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ avec sa fonction de transfert m_0 . Nous appellerons «filtres QMF» les fonctions 2π -périodiques qui vérifient la propriété (10).

En traitement du signal, les «filtres QMF» désignent la paire constituée de la fonction m_0 et de son filtre conjugué défini par l'égalité

$$m_1(\omega) = e^{-i\omega} \overline{m_0(\omega + \pi)}$$

([6]). D'autre part, puisqu'on a $\hat{\varphi}(0) = 1$, il est clair d'après (9) que m_0 vaut 1 en 0.

Dans toute la suite on supposera que la fonction φ vérifie la propriété donnée par la définition suivante.

Définition 1. *Une analyse multirésolution est «localisée» si et seulement si la fonction $\hat{\varphi}(\omega)$ est dans l'espace de Sobolev $H^m(\mathbb{R})$, c'est-à-dire si*

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + |x|)^{2m} |\varphi(x)|^2 dx < +\infty,$$

et ceci pour tout entier m .

La suite

$$\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}} = \left\{ \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} \varphi\left(\frac{x}{2}\right) \varphi(x - k) dx \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

est alors rapidement décroissante et la fonction m_0 est donc régulière.

En itérant la relation (9), nous pouvons alors exprimer la fonction $\hat{\varphi}$ sous la forme d'un produit qui converge en tout point. On a

$$(11) \quad \hat{\varphi}(\omega) = \prod_{k=1}^{+\infty} m_0\left(\frac{\omega}{2^k}\right).$$

Un choix possible pour l'ondelette ψ est alors le suivant

$$(12) \quad \hat{\psi}(2\omega) = m_1(\omega) \hat{\varphi}(\omega) = e^{-i\omega} \overline{m_0(\omega + \pi)} \prod_{k=1}^{+\infty} m_0\left(\frac{\omega}{2^k}\right).$$

Grâce au produit (11), on peut donc générer une analyse multirésolution et des bases d'ondelettes à partir de la donnée simple d'un QMF. Cependant, les filtres ayant la propriété (10) ne conviennent pas tous à la réalisation d'un tel programme. Nous allons maintenant préciser les caractéristiques des QMF associés à des analyses multirésolution.

1.c. QMF associés à des analyses multirésolution

Rappelons que nous nous plaçons dans le cadre des analyses localisées définies précédemment. Nous aurons besoin de la définition suivante.

Définition 2. *Un ensemble compact K de \mathbb{R} est dit congru à $[-\pi, \pi]$ modulo 2π si et seulement si pour presque tout x dans $[-\pi, \pi]$, il existe un unique y dans K tel que $x - y$ soit un multiple entier de 2π . On exige de plus que cet ensemble soit formé d'une réunion finie d'intervalles.*

Nous pouvons alors caractériser précisément les QMF associés à des analyses multirésolution localisées.

Proposition 1. *Le produit (11) génère une analyse multirésolution localisée si et seulement si la fonction $m_0(\omega)$ est régulière et il existe un compact K , congru à $[-\pi; \pi]$ et contenant un voisinage de 0, sur lequel ce produit ne s'annule pas.*

La preuve de ce résultat est détaillée dans [9], ainsi que le sens de cette condition portant sur le QMF m_0 .

Nous en présentons ici une esquisse:

—Dans un premier sens, partant d'une analyse multirésolution localisée, l'identité (6) permet alors de construire l'ensemble K souhaité. En effet, en utilisant la continuité de $\hat{\varphi}$, on peut écrire

$$\sum_{|x+2k\pi| \leq A_\epsilon} |\hat{\varphi}(x+2k\pi)|^2 \geq 1 - \epsilon \quad \text{pour tout } \epsilon > 0.$$

De cette localisation de l'identité (6), il découle que pour tout x dans $[-\pi; \pi]$, il existe un entier k_x tel que l'on ait $|\hat{\varphi}(x+2k_x\pi)| \geq C > 0$ et $|k_x| \leq B$, les constantes B et C étant indépendantes de x . Ceci fournit un procédé pour la construction de notre compact par une union d'intervalles bien choisis. L'origine peut être choisie dans l'intérieur de K puisque $\hat{\varphi}(0) = 1$.

—Dans l'autre sens, on part d'un QMF ayant les propriétés requises. L'essentiel est alors de démontrer que si l'on construit $\hat{\varphi}(\omega)$ d'après (11), alors la suite $\{\varphi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est orthonormée. On peut, pour cela, définir une suite de fonctions h_n par

$$(13) \quad \hat{h}_n(\omega) = \prod_{k=1}^n m_0\left(\frac{\omega}{2^k}\right) 1_{2^n K}(\omega)$$

$1_{2^n K}(\omega)$ est ici la fonction indicatrice du compact K dilaté d'un facteur 2^n .

Un raisonnement par récurrence sur n , utilisant la propriété (10) et la structure particulière de K permet de montrer que \hat{h}_n vérifie la propriété (7) et donc que $\{h_n(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une suite orthonormée.

Par ailleurs, puisque K contient un voisinage de l'origine, il est clair que \hat{h}_n tend vers $\hat{\varphi}$ au sens de la convergence simple. On peut donc affirmer, grâce au lemme de Fatou, que $\hat{\varphi}$ est dans $L^2(\mathbb{R})$.

On remarque alors que l'on a

$$\hat{h}_n(\omega) = \frac{\hat{\varphi}(\omega)}{\varphi\left(\frac{\omega}{2^n}\right)}$$

si ω est dans $2^n K$ et $\hat{h}_n(\omega) = 0$ sinon.

Dans les deux cas, on a, d'après les hypothèses,

$$(14) \quad |\hat{h}_n(\omega)| \leq \frac{|\hat{\varphi}(\omega)|}{C}.$$

Ceci nous permet d'utiliser le théorème de la convergence dominée pour conclure que h_n tend vers φ dans $L^2(\mathbb{R})$ et que $\{\varphi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est aussi une suite orthonormée.

L'appartenance de $\hat{\varphi}$ à tous les Sobolev $H^m(\mathbb{R})$ peut se démontrer en utilisant des produits finis du type (13) mais tronqués de manière plus douce que les \hat{h}_n . On raisonne là aussi par récurrence en exploitant essentiellement le caractère C^∞ de la fonction m_0 .

Nous avons donc caractérisé les filtres QMF associés à une classe très large d'analyses multirésolution. On y trouve, par exemple, toutes les ondelettes à support compact dont le cas classique du système de Haar où les fonctions φ et ψ sont clairement discontinues.

Il est temps d'examiner la régularité exacte des fonctions φ et ψ obtenues dans ces constructions.

2. Les analyses multirésolutions α -régulières

Dans toute la suite, on s'intéresse uniquement aux propriétés de régularité de la fonction φ . Les mêmes propriétés se déduisent aisément pour l'ondelette ψ .

2.a. Les analyses r -régulières

Les analyses r -régulières ont été introduites par P. G. Lemarié et Yves Meyer ([2]).

r désigne ici un entier positif et on exige que la fonction φ vérifie les propriétés suivantes:

- φ est $r - 1$ fois continûment dérivable.
- Pour tout m dans \mathbb{N} et pour tout n tel que $0 \leq n \leq r$, on a

$$(15) \quad \int_{\mathbb{R}} (1 + |x|)^m |\varphi^{(n)}(x)| dx < +\infty.$$

Les $r - 1$ premières dérivées de φ sont alors à décroissance rapide.

Un exemple intéressant est fourni par les ondelettes de P. G. Lemarié et B. Battle ([11]) qui sont des fonctions splines d'ordre r .

Une propriété importante des analyses r -régulières remarquée par Yves Meyer ([2]) est l'annulation des r premiers moments de l'ondelette ψ . En effet, si l'on applique la formule de Taylor aux points $k2^{-j}$ dans l'intégrale nulle

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(u) \bar{\psi}(2^{-j}u + 2^{-j}k) du,$$

en utilisant la propriété (15) pour majorer les restes, on voit que nécessairement

$$\int_{\mathbb{R}} x^n \psi(x) dx = 0 \quad \text{pour } 0 \leq n \leq r.$$

On peut se demander si, réciproquement, cette dernière propriété entraîne la régularité de classe C^r ou C^{r-1}). Nous allons voir, par la suite, qu'il n'en est rien.

Dans un premier temps, revenons momentanément sur le procédé de construction des analyses multirésolution à partir des QMF.

2.b. L'algorithme en cascade

La démonstration de la Proposition 1 nous fournit en plus un procédé de construction numérique pour la fonction φ (qui permet aussi de calculer ψ).

La fonction φ est en effet approchée par la suite h_n . Par ailleurs, l'échantillonnage $\{h_n(2^{-n}k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ s'identifie aux coefficients de Fourier de la fonction $2^{n+1}\pi$ -périodique

$$m_n(\omega) = \prod_{k=1}^n m_0\left(\frac{\omega}{2^k}\right).$$

Lorsque m_0 a une réponse impulsionnelle finie, le calcul de ces coefficients peut se faire de manière très simple, suivant un algorithme «en cascade» introduit par Ingrid Daubechies ([7]).

Dans cet algorithme, après avoir appliqué le filtre m_0 sur une suite de Dirac initiale, on l'itère, contracté à chaque fois d'un rapport 2.

Le résultat après n itération, présenté sur la figure 1, approche la fonction φ avec un pas d'échantillonnage de 2^{-n} .

Cependant la Proposition 1 ne nous fournit rien de plus que la convergence dans $L^2(\mathbb{R})$ de la suite h_n qui peut conduire à des résultats très chahutés comme le montre la figure 2. Le résultat suivant va nous donner des précisions sur cette convergence.

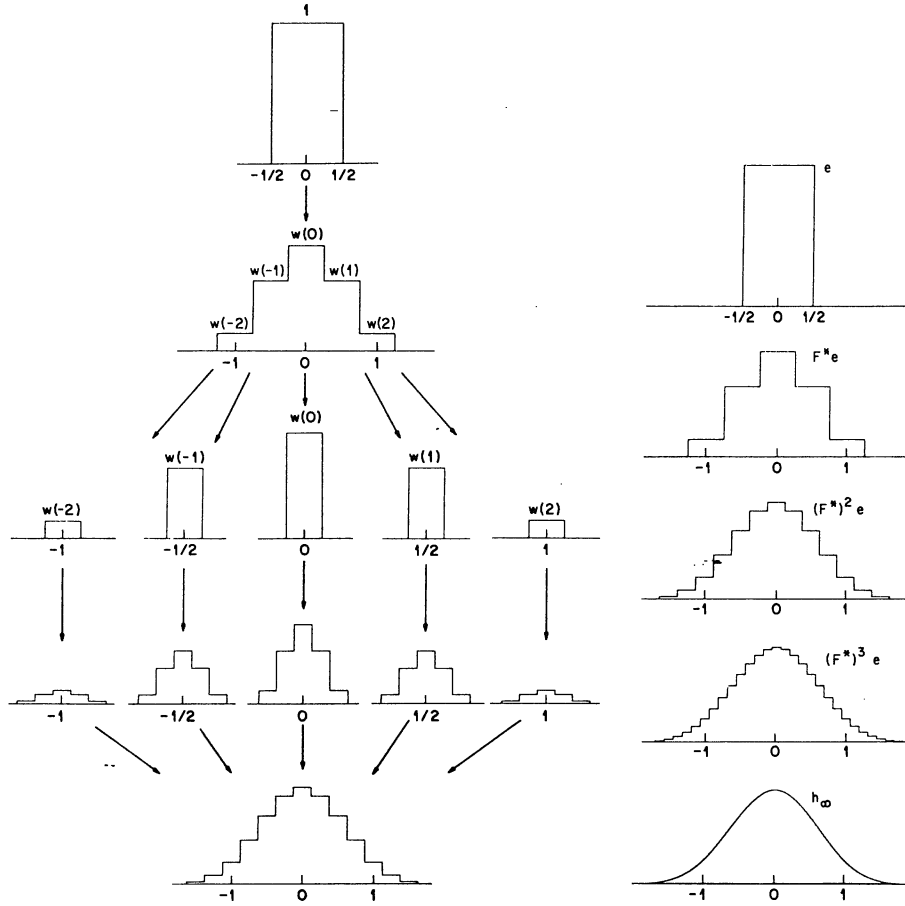


Fig. 1. L'Algorithme en cascade.

Proposition 2. *Supposons que les hypothèses de la Proposition 1 soient toutes remplies et que de plus, pour un entier r positif on ait*

$$(16) \quad \int_{\mathbb{R}} |\omega|^r |\hat{\varphi}(\omega)| d\omega < +\infty.$$

Alors $\omega^r \hat{h}_n(\omega)$ tend vers $\omega^r \hat{\varphi}(\omega)$ dans $L^1(\mathbb{R})$ et la suite h_n tend donc vers φ au sens de la convergence uniforme pour toutes les dérivées jusqu'à l'ordre r .

De même, l'approximation discrète $h_n(2^{-n}k)$ tend uniformément vers φ pour tous les schémas de dérivation jusqu'à l'ordre r .

Pour démontrer ce résultat on remarque simplement que l'on peut multiplier par $|\omega|^r$ les deux membres de l'inégalité (14) et appliquer de façon similaire un argument de convergence dominée.

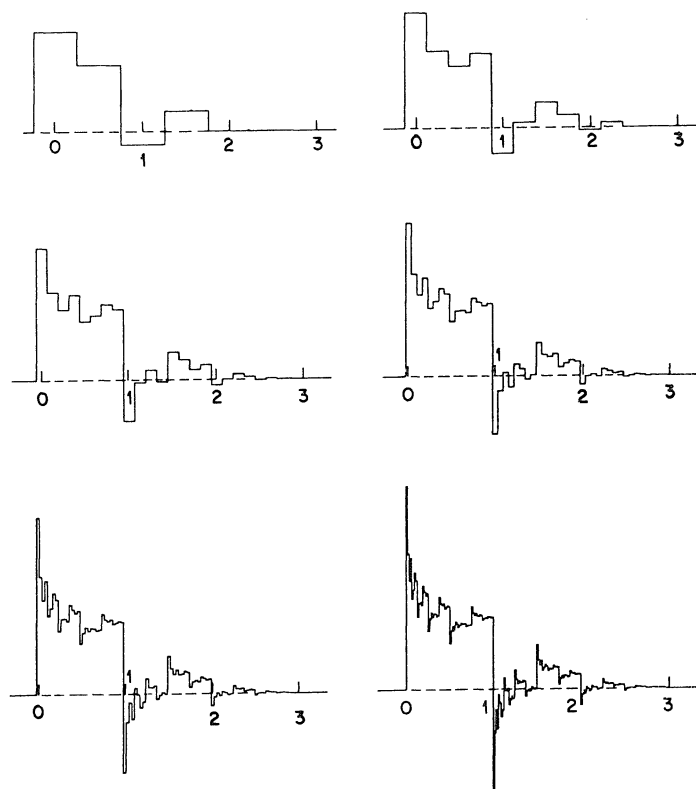


Fig. 2. Un cas où la convergence est mauvaise. †

Le fait que les approximations discrètes obtenues dans l'algorithme en cascade convergent uniformément ainsi que leurs schémas de dérivation provient simplement d'une généralisation du théorème des accroissements finis pour des dérivées d'ordre supérieur à 1.

Nous allons donc nous intéresser de plus près à la propriété (16), en l'étendant au cas où r n'est pas un entier.

2.c. Les analyses α -régulières

Dans toute la suite, α désigne un réel positif. Nous pouvons alors définir les analyses multirésolutions α -régulières et l'espace des fonctions de régularité C^α par

† Ces figures sont extraites de [7].

$$\varphi \in C^\alpha \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} |x|^\alpha |\hat{\varphi}| < +\infty.$$

Notons que, si l'on désigne par G^α l'espace classique des fonctions höldériennes d'exposant α on a alors

$$C^\alpha \subset G^\alpha.$$

En revanche G^α n'est pas inclu dans C^α . Si l'on se restreint aux fonctions à support compact on a $G^\alpha \subset C^{\alpha - (1/2) - \epsilon}$ pour $\epsilon > 0$. Il faut donc distinguer ces deux types d'espace.

Signalons enfin que la cascade décrite précédemment s'identifie à l'algorithme de reconstruction utilisé dans les travaux de Stéphane Mallat ([12]) sur les décompositions multiéchelles.

L'algorithme en cascade opère en effet cette reconstruction à partir d'un seul coefficient non nul à basse échelle et dans plusieurs applications, on peut exiger que la composante obtenue à l'issue d'une telle opération ait une régularité du type C^α .

Il est donc souhaitable de pouvoir caractériser ces classes de régularité à partir de la forme du QMF m_0 .

3. Régularité et filtres QMF

3.a. Une condition suffisante de régularité

Un critère permettant d'obtenir de la régularité sur le fonction φ a été introduit par I. Daubechies et P. Tchamitchian ([7]). Il repose essentiellement sur le degré d'annulation de la fonction m_0 en π .

On peut en effet factoriser m_0 sous la forme

$$(17) \quad m_0(\omega) = \left(\frac{1 + e^{i\omega}}{2} \right)^N f(\omega).$$

La fonction f est dans $C^\infty(\mathbb{R})$. Pour $j > 0$, on définit alors

$$B_j = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \left| \prod_{k=1}^j f\left(\frac{\omega}{2^k}\right) \right|$$

et $B_0 = 1$.

Notons

$$b_j = \frac{\log B_j}{j \log 2}.$$

Proposition 3. *Avec les définitions précédentes, il existe une constante C telle que pour tout ω dans \mathbb{R} on ait*

$$(18) \quad |\hat{\varphi}(\omega)| = \left| \prod_{k=1}^{+\infty} m_0\left(\frac{\omega}{2^k}\right) \right| \leq C(1 + |\omega|)^{-N+b_j}.$$

Pour obtenir cette inégalité, il suffit de remarquer que l'on a

$$\left| \frac{1 + e^{i\omega}}{2} \right| = \left| \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|.$$

On se sert alors de l'identité classique

$$\prod_{k=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{\omega}{2^k}\right) = \frac{\sin \omega}{\omega}.$$

On observe ensuite que pour majorer le produit $\left| \prod_{k=1}^{+\infty} f\left(\frac{\omega}{2^k}\right) \right|$, il suffit de se restreindre aux premiers facteurs dans un nombre de l'ordre de $\log(\omega)/\log 2$. La majoration globale s'en déduit.

D'après cette estimation, il est clair que φ est dans C^α dès que α est strictement inférieur à $N - b_j - 1$.

Notons que N est aussi, d'après (12), le degré du premier terme dans le développement limité de $\hat{\psi}$ en 0. On retrouve donc ici des liens entre la régularité et l'annulation des premiers moments de l'ondelette.

Ce critère ne fournit cependant qu'une condition suffisante pour avoir de la régularité que l'on aimerait cerner de plus près. Nous allons tout d'abord affiner l'estimation (18) en exploitant le fait que cette inégalité vaut quel que soit l'entier j choisi.

3.b. L'exposant critique du QMF

On appellera exposant critique du QMF m_0 , la quantité

$$b = \inf_{j>0} b_j.$$

Puisque $f(0) = 1$, il est clair que b est positif.

Le résultat suivant nous sera utile par la suite.

Lemme 1. *La suite b_j converge et admet b pour limite.*

DÉMONSTRATION. Soit $\epsilon > 0$. Il existe un entier j_ϵ tel que $|b_{j_\epsilon} - b| < \epsilon/2$ ou encore $b_{j_\epsilon} < b + \epsilon/2$. Posons alors pour j dans \mathbb{N} , la division euclidienne $j = n_j \cdot j_\epsilon + r_j$ avec $r_j < j_\epsilon$.

On a facilement

$$B_j \leq (B_{j_\epsilon})^{n_j} (B_1)^{j_\epsilon}$$

d'où

$$B_j \leq (B_{j_\epsilon})^{n_j} (B_1)^{j_\epsilon}$$

en passant aux logarithmes, il vient

$$b_j \leq b_{j_\epsilon} + \frac{b_1}{n_j}.$$

Si j est suffisamment grand, on a alors $b_1/n_j < \epsilon/2$ et par conséquent $b_j < b + \epsilon$. Ceci montre que b est la limite des b_j .

Par ailleurs, nous pouvons reformuler le résultat de P. Tchamitchian et I. Daubechies, à l'aide de la quantité b . Il est clair, en effet, que la fonction φ est dans l'espace C^α pour tout α strictement inférieur à $N - b - 1$ (les ϵ différenciant b des b_j sont compris dans l'inégalité stricte).

Nous allons voir que cette nouvelle estimation est en fait optimale au sens suivant: si α est strictement supérieur à $N - b$ alors φ n'est pas dans C^α , ceci moyennant une légère hypothèse supplémentaire sur la fonction m_0 .

4. Estimation de l'exposant de Hölder global

Énonçons tout de suite le résultat qui va être démontré.

Théorème. *Soit*

$$m_0(\omega) = \left(\frac{1 + e^{i\omega}}{2} \right)^N f(\omega)$$

un QMF satisfaisant les hypothèses de la Proposition 1 et soit b son exposant critique. On suppose de plus que l'on a

$$(19) \quad |f(\pi)| > |f(0)| = 1.$$

Alors la fonction φ engendrée par le produit (11) n'est pas C^α si α est strictement supérieur à $N - b$.

L'exposant optimal pour la régularité C^α se situe donc dans l'intervalle $[N - b - 1; N - b]$.

Avant de donner la preuve de cet énoncé, commentons l'hypothèse (19) faite sur la fonction m_0 . Le lecteur se rendra compte qu'elle n'est pas strictement

nécessaire dans ce qui va suivre. On peut en effet la remplacer par des hypothèses plus faibles ou plus générales. Cependant, (19) se trouve vérifiée dans tous les cas fréquemment utilisés et entre autre, celui des ondelettes à support compact introduites par Ingrid Daubechies ([7]). Dans ce cas, la fonction m_0 est un polynôme trigonométrique et l'on a

$$|f(\pi)|^2 = \sum_{j=0}^{N-1} \binom{n-1+j}{j} > 1.$$

Notons à présent

$$f_j(\omega) = \prod_{k=1}^j f\left(\frac{\omega}{2^k}\right)$$

et K le compact introduit dans les hypothèses de la Proposition 1.

La démonstration du théorème s'appuie sur deux lemmes concernant les fonctions $f_j(\omega)$.

Lemme 2. *Il existe une suite de réels ω_j tels que $2^{-j}\omega_j$ appartienne au compact K et $|f_j(\omega_j)| = B_j$. On a de plus*

$$(20) \quad 0 < C_1 < |2^{-j}\omega_j| < a_2.$$

DÉMONSTRATION. Il est clair que f_j est $2^{j+1}\pi$ -périodique. Puisque K est congru à $[-\pi; \pi]$ modulo 2π , B_j est donc aussi le maximum de $|f_j(\omega)|$ sur l'ensemble 2^jK .

Soit alors ω_j dans 2^jK tel que $|f_j(\omega_j)| = B_j$. Nous allons nous servir de la propriété (19) pour démontrer (20). On remarque que sous l'hypothèse (19) on a $|f(\omega + \pi)| > |f(\omega)|$ sur un voisinage de l'origine du type $|\omega| \leq C_1$.

Nous pouvons aussi l'écrire sous la forme

$$\left| f\left(\frac{\omega + 2^j\pi}{2^j}\right) \right| > \left| f\left(\frac{\omega}{2^j}\right) \right| \quad \text{lorsque} \quad \left| \frac{\omega}{2^j} \right| \leq C_1.$$

On a par ailleurs

$$\left| f\left(\frac{\omega + 2^j\pi}{2^j}\right) \right| = \left| f\left(\frac{\omega}{2^{j'}}\right) \right| \quad \text{pour} \quad j' < j.$$

Par conséquent

$$|f_j(\omega + 2^j\pi)| > |f_j(\omega)| \quad \text{si} \quad |2^j\omega| \leq C_1.$$

Ceci nous montre que le point ω_j se trouve hors de l'intervalle $[-2^jC_1; 2^jC_1]$.

Finalement, puisque ω_j est dans $2^{-j}K$ et que K est un compact, on peut écrire

$$(20) \quad 0 < C_1 < |2^{-j}\omega_j| < C_2.$$

L'hypothèse (19) nous fournit donc une information sur la croissance de la suite ω_j .

Lemme 3. *Soit ϵ dans $]0, 1[$. On note $B = 2^b$. Il existe une constante C telle que $|f_j(\omega)|$ reste supérieure à $B^j/2$ sur un intervalle I_j inclus dans 2^jK , contenant ω_j et de taille $C(1 - \epsilon)^j$.*

DÉMONSTRATION. Il est clair, tout d'abord que $|f_j(\omega_j)| = B_j \geq B^j$. Examinons à présent la dérivée de la fonction $f_j(\omega)$.

$$(21) \quad f'_j(\omega) = \sum_{l=1}^j 2^{-l} f'_l\left(\frac{\omega}{2^l}\right) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^j f\left(\frac{\omega}{2^k}\right).$$

Par conséquent,

$$(22) \quad \max_{\omega \in \mathbb{R}} |f'_j(\omega)| \leq C \sum_{l=0}^{j-1} 2^{-l} B_l B_{j-l-1}.$$

En se servant du Lemme 1, on a, pour tout $l \geq l_\epsilon$,

$$(23) \quad B_l \leq (B + \epsilon)^l.$$

À un changement de constante près dans (22), on peut alors écrire,

$$(24) \quad \max_{\omega \in \mathbb{R}} |f'_j(\omega)| \leq C(B + \epsilon)^j$$

Il en découle que $|f_j(\omega)|$ reste supérieur à $B^j/2$ sur un intervalle I_j , de taille $C(1 - \epsilon)^j$ qui contient ω_j . Le compact K étant formé d'une réunion finie d'intervalles, il nous est possible, quitte à modifier encore une fois la constante C , de choisir I_j inclus dans 2^jK .

Notons que ces intervalles I_j peuvent se recouvrir, mais «pas trop» en ce sens: si nous considérons uniquement les intervalles I_{a_j} où a est tel que $2^a C_1 > 2C_2$, il est clair que, pour J suffisamment grand, ces intervalles sont disjoints.

Pour prouver le théorème, nous allons étudier l'intégrale

$$\int_{\cup I_{a_j}} |\omega|^\alpha |\hat{\varphi}(\omega)| d\omega,$$

ce qui revient, d'après la remarque précédente à préciser la nature de la série

$$(25) \quad \sum_{j>0} \int_{I_{a_j}} |\omega|^\alpha |\hat{\varphi}(\omega)| d\omega.$$

Pour cela, on décompose $\hat{\varphi}(\omega)$ de la manière suivante,

$$(26) \quad |\hat{\varphi}(\omega)| = |f_j(\omega)| \left| \prod_{k=1}^j \left(\frac{1 + e^{i\omega/2^k}}{2} \right) \right|^N \left| \prod_{k=j+1}^{+\infty} m_0 \left(\frac{\omega}{2^k} \right) \right|.$$

Nous allons traiter indépendamment ces trois facteurs.

- On a vu auparavant que sur I_j on a l'inégalité

$$|f_j(\omega)| \geq \frac{B^j}{2}.$$

- Puisque I_j est dans $2^j K$, en utilisant les hypothèses de la Proposition 1, on peut écrire pour tout ω de I_j .

$$\left| \prod_{k=j+1}^{+\infty} m_0 \left(\frac{\omega}{2^k} \right) \right| \geq C > 0 \quad \text{indépendamment de } j.$$

- On a enfin

$$\left| \prod_{k=1}^j \left(\frac{1 + e^{i\omega/2^k}}{2} \right) \right|^N \geq \left| \frac{\sin \omega}{\omega} \right|^N.$$

En utilisant le Lemme 2 pour évaluer la distance de I_{a_j} à l'origine, il vient,

$$(27) \quad \int_{I_{a_j}} |\omega|^\alpha |\hat{\varphi}(\omega)| d\omega \geq CB^{aj} 2^{aaj} \int_{I_{a_j}} \left| \frac{\sin \omega}{\omega} \right|^N d\omega.$$

L'intégrale contenue dans le membre de droite peut elle-même être minorée par

$$(28) \quad \int_{I_{a_j}} \left| \frac{\sin \omega}{\omega} \right|^N \geq C 2^{-aNj} (1 - \epsilon)^{aNj}.$$

Ceci nous conduit finalement à l'inégalité

$$(29) \quad \int_{I_{a_j}} |\omega|^\alpha |\hat{\varphi}(\omega)| d\omega \geq C 2^{aj(b + \alpha - N - N\epsilon)}.$$

(A chaque étape, on a modifié la constante C , ce qui n'a aucune importance.)

La série (25) explose donc lorsque α est supérieur à $N - b + N\epsilon$. ϵ étant arbitrairement petit, on en déduit que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} |\omega|^\alpha |\hat{\varphi}(\omega)|$ diverge dès que α est strictement supérieur à $N - b$. Ceci achève notre démonstration.

5. Applications

5.a. Estimation de l'exposant critique

Les propriétés de régularité dépendent donc essentiellement du degré N d'annulation des moments et de la quantité b . Il est par conséquent souhaitable de pouvoir estimer b par des techniques de calcul raisonnables.

Par définition, on a toujours $b \leq b_j$ pour tout j dans \mathbb{N}^* et ceci nous permet de majorer l'exposant critique.

Pour le minorer, on peut faire la remarque suivante: $f_j(2^{j+1}\pi/3)$ est en fait un produit alterné des valeurs de f en $2\pi/3$ et en $-2\pi/3$. On a, par conséquent,

$$(30) \quad \lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log \left| f_j \left(\frac{2^j \pi}{3} \right) \right|}{j \log 2} = \frac{1}{2 \log 2} \log \left(\left| f \left(\frac{2\pi}{3} \right) f \left(\frac{-2\pi}{3} \right) \right| \right).$$

De cette limite, on déduit la minoration

$$(31) \quad b \geq \frac{1}{\log 2} \log \left(\sqrt{\left| f \left(\frac{2\pi}{3} \right) f \left(\frac{-2\pi}{3} \right) \right|} \right).$$

Des estimations similaires peuvent être établies de manière générale, à l'aide des valeurs $f_j \left(\frac{2^{j+1}\pi}{2k+1} \right)$ pour k dans \mathbb{N}^* .

5.b. Cas des ondelettes à support compact

Rappelons dans ce cas la forme des filtres QMF à réponse impulsionnelle finie. On peut considérer pour cela la variable $y = \cos^2(\omega/2)$ et on a alors une famille de QMF m_0^N définis par

$$(32) \quad |m_0^N(\omega)|^2 = y^N P_N(1-y)$$

avec

$$(33) \quad P_N(y) = \sum_{j=0}^{N-1} \binom{N-1+j}{j} y^j.$$

Dans [8], Ingrid Daubechies utilise une technique différente pour estimer plus précisément les exposants de Hölder globaux et locaux de la fonction φ : on travaille dans ce cas directement sur φ (et non $\hat{\varphi}$) à l'aide des coefficients c_k de m_0 et de l'équation (8).

Cette méthode est plus précise (et de plus, locale) que celle que nous avons décrite (qui place l'exposant α dans un intervalle de taille 1). Elle devient cependant complexe lorsque N prend des valeurs élevées.

Nos estimations deviennent au contraire intéressantes lorsque N est grand et que l'on cherche un résultat de type asymptotique où un écart de 1 n'a pas d'importance.

Notons b_j^N , b^N et $f_N(\omega)$ les quantités b_j , b et le facteur $f(\omega)$ associés à la fonction m_0^N .

On sait d'après (32) que

$$\left| f_N\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right| = \left| f_N\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \right| = \left(P_N\left(\frac{3}{4}\right) \right)^{1/2}$$

et on a $P_N(3/4) \sim C3^N$ lorsque N tend vers $+\infty$. On a alors

$$\limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} (N - b^N) \leq 1 - \frac{\log 3}{2 \log 2} \approx 0,2075.$$

En utilisant b_4^N , Ingrid Daubechies obtient par ailleurs

$$\liminf_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} (N - b^N) > 0,1936.$$

L'exposant α est donc compris asymptotiquement entre $0,1936N$ et $0,2075N$ (figure 3). Ceci nous prouve notamment que la régularité ne s'identifie pas au nombre de premiers moments nuls de l'ondelette. Pour une régularité de classe C^r , il faut environ $N \approx 5r$ moments nuls. Notons, de plus, que le filtre m_0 est de taille $2N$ et aurait donc à peu près $10r$ coefficients.

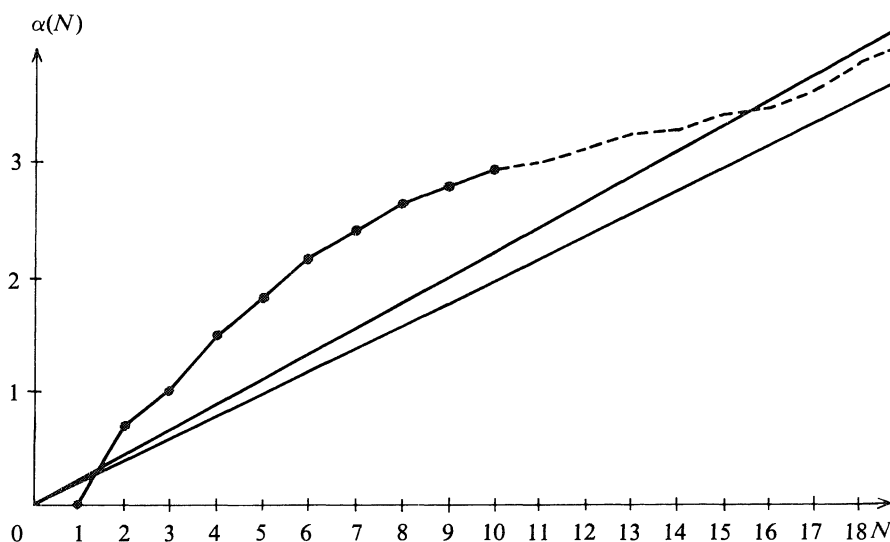


Fig. 3. Allure conjecturale de la courbe $\alpha(N)$ (les 10 premiers points sont estimés par Ingrid Daubechies dans [7] et [8]).

Il convient de tenir compte de cette estimation pour faire un compromis entre la régularité que l'on recherche et la taille des calculs mis en jeu par l'emploi des QMF.

Bibliographie

- [1] Meyer Y. Ondelettes et Opérateurs. Edition Hermann.
- [2] Meyer Y. Ondelettes, fonctions splines et analyses graduées. Rapport CEREMADE no. 8703, 1987.
- [3] Meyer Y. Ondelettes, filtres miroirs en quadrature et traitement numérique de l'image. Raport CEREMADE no. 8908, 1989.
- [4] Coifman, R., Beylkin G., Rokhlin. Fast wavelet transforms. Preprint Yale University.
- [5] Jaffard, S. Estimations Höldériennes ponctuelles des fonctions au moyen de leurs coefficients d'ondelettes. A paraître au *C.R.A.S.* Paris.
- [6] Barnwell, T. P., Smith, M. J. T. Exact reconstruction technique for tree structured subband coders. *IEEE trans. ASSP* 30, 5(1982), 751-765.
- [7] Daubechies, I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure and Appl. Math.* 41(1988), 909-996.
- [8] Daubechies, I., Lagarias J. Two scale difference equations I & II. A.T.T. Bell Labs.
- [9] Cohen A. Ondelettes, analyses multirésolution et filtres miroirs en quadrature. A paraître aux *Annales de l'I.H.P. analyse non linéaire*.
- [10] Strömberg, J. O. A modified Harr system and higher order spline systems. Conference in honor of Antoni Zygmund. Vol II, 475-493. Ed. W. Beckner and al., Wadworth Math. series.
- [11] Lemarié, P. G. Ondelettes à localisation exponentielle. *Journal de Math. Pures et Appliquées*, 67(1988), 227-236.
- [12] Mallat S. Mémoire de Ph. D. University of Pennsylvania. Philadelphia.
- [13] Mallat S. Multiresolution approximation and wavelet orthonormal basis of $L^2(\mathbb{R})$. *American Math. Soc.* (1989).
- [14] Esteban, D., Galand, C. Application of quadrature mirror filters to split band voice coding scheme. IBM Lab., France.

Recibido: 28 de marzo de 1990.

Albert Cohen
CEREMADE
Université de Paris, IX
Dauphine
FRANCE