Revista Matemática Iberoamericana
Vol. 6, N.$^{\text{os}}$ 3 y 4, 1990

Sur les Variétés Riemanniennes a Flot Géodésique Topologiquement Transitif

Ángel J. Montesinos

Introduction

Si M est une variété riemannienne C^∞ complète, nous pouvons considérer son flot géodésique $\{\varphi_t\}$ sur le fibré unitaire tangent T_1M. Soit X le champ engendré par $\{\varphi_t\}$.

D'autre part, si θ est un r-tenseur covariant sur M, on définit la fonction $F(\theta): T_1M \to \mathbb{R}$ par $F(\theta)(v) = \theta(v, \ldots, v)$. On peut donc calculer $XF(\theta)$ et exploiter les implications sur le tenseur du fait $XF(\theta) = 0$ lorsque le flot géodésique est topologiquement transitif. Remarquons que si $r = 1$ ou bien si $r = 2$ et θ est symétrique, la fonction $F(\theta)$ permet de «reconstruire» le tenseur.

Nous utilisons cette technique pour prouver les résultats suivants:

Soit (M, g) une variété riemannienne complète à flot géodésique topologiquement transitif. Alors

(*a*) Le groupe de Lie des isométries de (M, g) est discret.

(*b*) Si $f: (M, g) \to (M', g')$ est une correspondance géodésique, c'est-à-dire que f est un difféomorphisme qui envoie les géodésiques (non paramétrées) de (M, g) sur celles de (M', g'), alors f est une homothétie.

(*c*) Soit ρ le tenseur de Ricci de (M, g). Si $\nabla_v\rho(v, v) = 0$, pour tout champ de vecteurs v sur M, alors $\rho = cg$ où c est une constante.

Dans les dernières sections nous exploitons la même idée sur $O(M)$ (le fibré des repères orthonormés de M) et $\Omega_p(M)$ (le fibré des p-repères orthonormés) à la place de T_1M: les tenseurs sur M induisent des fonctions sur ces fibrés et nous étudions l'action des flots géodésiques généralisés (sur $O(M)$) et celle du flot de p-repères sur ces fonctions.

Rappelons que la condition la plus générale sur la variété riemannienne complète (M, g) impliquant la transitivité topologique de son flot géodésique sur T_1M est due à Eberlein (voir [2], Théorème 3.7). Enonçons ce résultat dans le cas compact:

(1) Si (M, g) est compacte et vérifie l'axiome de visibilité uniforme alors son flot géodésique est topologiquement transitif.

Il est intéressant de signaler aussi (voir [2], Théorème 5.1) que:

(2) Si (M, g) vérifie l'axiome de visibilité uniforme, alors toute métrique sur M sans points conjugués vérifie aussi cet axiome.

Si M est une variété à courbure sectionnelle non positive, des propriétés supplémentaires très faibles impliquent que M vérifie l'axiome de visibilité uniforme (voir [2], Théorème 4.1 et [3], Section 5). Il est en particulier ainsi si M est compacte à courbure sectionnelle négative.

D'autre part, Klingenberg ([8], remarque de la page 11) a montré que si M est compacte et son flot géodésique est d'Anosov, alors M vérifie l'axiome de visibilité uniforme; dans ce cas, la transitivité topologique du flot géodésique était bien connue mais (2) montre que cette propriété est héritée pour toute métrique sur M sans points conjugués.

Remarquons, enfin, que Gulliver [7] a construit des exemples de variétés (de dimension arbitraire) ayant des morceaux à courbure sectionnelle positive et dont le flot géodésique est d'Anosov.

1. Flot géodésique et 1-formes

Soit (M, g) une variété riemannienne complète, désignons par $\{\varphi_t\}$ son flot géodésique sur le fibré unitaire tangent T_1M. Soit X le champ engendré par $\{\varphi_t\}$.

Si φ est une 1-forme sur M on définit la fonction $F(\varphi)\colon T_1M \to \mathbb{R}$ par $F(\theta)(v) = \varphi(v)$. De même, si θ est un 2-tenseur covariant sur M, la fonction $F(\theta)\colon T_1M \to \mathbb{R}$ est donnée par $F(\theta)(v) = \theta(v, v)$.

Si Φ est un champ vectoriel sur M, $L_\Phi g$ désignera la dérivée de Lie de la métrique g par rapport à Φ; c'est-à-dire que $L_\Phi g$ est le 2-tenseur covariant symétrique

$$L_\Phi g(v, w) = g(\nabla_v \Phi, w) + g(\nabla_w \Phi, v).$$

Proposition 1. *Soit Φ un champ de vecteurs sur M et Φ^* sa 1-forme duale $\Phi^*(v) = g(\Phi, v)$. Alors*

$$XF(\Phi^*)(v) = \frac{1}{2}F(L_\Phi g)(v), \quad \textit{pour tout} \quad v \in T_1M.$$

PREUVE. Désignons par π: $T_1M \to M$ la projection canonique. Remarquons que le champ $t \to \varphi_t v$ est parallèle sur la courbe $t \to \pi(\varphi_t v)$ car $\{\varphi_t\}$ est le flot géodésique; en conséquence:

$$X(F(\Phi^*))(v) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F(\Phi^*)(\varphi_t v) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g(\Phi(\pi\varphi_t v), \varphi_t v) = g(\nabla_v \Phi, v).$$

Soit $i(M)$ l'algèbre de Lie des champs de Killing (ou isométries infinitésimales) sur M et notons par $I(M)$ le groupe de Lie des isométries de M.

Rappelons (voir [9], Section 3 du Chapitre VI) que $\Phi \in i(M)$ si $L_\Phi g = 0$ (c'est-à-dire, si $F(\Phi^*)$ est invariante par le flot géodésique $\{\varphi_t\}$). D'autre part, comme la variété M est complète, les champs de $i(M)$ engendrent des groupes à un paramètre de difféomorphismes (isométries) de M. Il y a donc un isomorphisme naturel entre $i(M)$ et l'algèbre de Lie de $I(M)$.

Enfin, si le flot géodésique est topologiquement transitif et $\Phi \in i(M)$, alors $F(\Phi^*)$ est constante, donc $F(\Phi^*) = 0$ et $\Phi = 0$. En résumé:

Théorème 1. *Soit M une variété riemannienne complète à flot géodésique topologiquement transitif. Alors le groupe de Lie des isométries de M, $I(M)$, est discret (c'est-à-dire que son algèbre de Lie est nulle). En particulier, si M est compacte, $I(M)$ est fini.*

2. Flot géodésique et 2-tenseurs covariants

Comme dans la section précédente, si θ est un 2-tenseur covariant, on définit $F(\theta)$: $T_1M \to \mathbb{R}$ par $F(\theta)(v) = \theta(v, v)$.

Proposition 2. *Soit M une variété riemannienne complète; désignons par $\{\varphi_t\}$ le flot géodésique sur T_1M et par X le champ géodésique.*

Si θ est un 2-tenseur covariant, alors

$$XF(\theta)(v) = \nabla_v\theta(v, v), \quad \textit{pour tout} \quad v \in T_1M.$$

PREUVE. Soit $v \in T_1M$ fixe et choisissons un repère $\{E_1, \ldots, E_n\}$ de $T_{\pi(v)}M$ où $E_1 = v$. Désignons par $E_i(t)$ le transporté par parallélisme de E_i sur la géodésique $s \to \pi(\varphi_s v)$ jusqu'à $\pi(\varphi_t v)$; en particulier $E_1(t) = \varphi_t v$.

Soit $\{E^1(t), \ldots, E^n(t)\}$ le repère dual de $\{E_1(t), \ldots, E_n(t)\}$ (c'est-à-dire que $E^i(t)(E_j(t)) = \delta^i_j$).

Écrivons le tenseur θ en $\pi(\varphi_t v)$ par

$$(1) \qquad \theta(\pi\varphi_t v) = \theta_{ij}(t)E^i(t) \otimes E^j(t).$$

Alors le 2-tenseur covariant $\nabla_{E_1(t)}\theta$ s'écrira

$$\begin{aligned}(\nabla_{E_1(t)}\theta)(\pi\varphi_t v) = \left(\frac{d}{dt}\theta_{ij}(t)\right)&E^i(t) \otimes E^j(t)\\ &+ \theta_{ij}(t)(\nabla_{E_1(t)}E^i(t)) \otimes E^j(t)\\ &+ \theta_{ij}(t)E^i(t) \otimes (\nabla_{E_1(t)}E^j(t)).\end{aligned}$$

Il est aisé de montrer que $\nabla_{E_1(t)}E^\alpha(t) = 0$, pour tout $\alpha = 1, \ldots, n$, en conséquence

$$\nabla_{E_1(t)}\theta = \left(\frac{d}{dt}\theta_{ij}(t)\right)E^i(t) \otimes E^j(t),$$

il en résulte en particulier que

$$[\nabla_{E_1(t)}\theta](E_1(t), E_1(t)) = \frac{d}{dt}\theta_{11}(t)$$

et la proposition en découle car, d'après (1):

$$\theta_{11}(t) = F(\theta)(E_1(t))$$

et

$$\frac{d}{dt}\theta_{11}(t) = [XF(\theta)](E_1(t)).$$

Corollaire 1. *Si le flot géodésique est topologiquement transitif et θ est un 2-tenseur covariant symétrique vérifiant $\nabla_v\theta(v, v) = 0$, pour tout $v \in TM$ alors, il existe une constante c telle que $\theta = cg$, où g est le tenseur métrique.*

PREUVE. D'après la proposition 2, $F(\theta)|_{T_1M} = c$.

2.1 Variétés dans la classe $\mathfrak{A}$

Soit M une variété riemannienne et ρ son tenseur de Ricci. On dit que M est dans la classe $\mathfrak{A}$ si $\nabla_v\rho(v, v) = 0$ pout tout $v \in TM$.

Gray [5] a montré que si M est compacte, à courbure sectionnelle négative et elle est dans la classe $\mathfrak{A}$ alors M est un espace d'Einstein, c'est-à-dire $\rho = cg$ où c est une constante et g est le tenseur métrique.

Le Corollarie 1 nous permet de généraliser ce résultat.

Théorème 2. *Si M est dans la classe $\mathfrak{A}$ et si son flot géodésique est tologiquement transitif, alors M est un espace d'Einstein.*

2.2. Correspondance géodésique

Soient M et M' des variétés différentielles de dimension $n > 1$ munies des connexions ∇ et ∇'. Un difféomorphisme $f: (M, \nabla) \to (M', \nabla')$ est dit application affine si $df(\nabla_Z Y) = \nabla'_{dfZ}\, df\, Y$, pour tous champs de vecteurs Z, Y sur M (voir [9], Section 1 du Chapitre VI). En particulier, f envoie les géodésiques paramétrées de (M, ∇) sur celles de (M', ∇'); c'est-à-dire, que $t \to f(\gamma(t))$ est géodésique en (M', ∇') si $t \to \gamma(t)$ l'est en (M, ∇).

Cette propriété caractérise les applications affines si les connexions ∇ et ∇' sont sans torsion (en effet, deux connexions ∇ et $\bar{\nabla}$ sur M ont les mêmes géodésiques si et seulement si $\Gamma^i_{jk} + \Gamma^i_{kj} = \bar{\Gamma}^i_{jk} + \bar{\Gamma}^i_{kj}$; voir [9], p. 146).

Considérons maintenant deux métriques g et g' sur les variétés M et M' respectivement, et soient ∇ et ∇' leurs connexions riemanniennes. D'après les remarques précédentes, les applications affines $f: (M, g) \to (M', g')$ sont les difféomorphismes qui préservent les géodésiques (paramétrées). On appelle correspondance géodésique entre (M, g) et (M', g') à tout difféomorphisme $f: M \to M'$ qui envoie les géodésiques (non paramétrées) de (M, g) sur celles de (M', g'); les applications affines sont donc des correspondances géodésiques.

Nous considérons le problème suivant: dans quelles conditions la correspondance géodésique $f: (M, g) \to (M', g')$ est-elle une homothétie? (c'est-à-dire, qu'il existe une constante c telle que $g'(dfv, dfw) = cg(v, w)$, pour tous $v, w \in TM$).

On peut donner la solution du problème pour les applications affines en termes du groupe d'holonomie: rappelons (voir [9], p. 71) que si $x \in (M, \nabla)$ le groupe d'holonomie en x, que sera désigné par $\psi(x)$, est le sous-groupe des transformations linéaires de T_xM induites par le transport parallèle sur les courbes fermées en x. Si $\psi(x)$ ne laisse aucun sous-espace (non trivial) de T_xM invariant, on dit que $\psi(x)$ est irreductible. Si M est connexe, tous les groupes $\psi(x)$, pour $x \in M$, sont isomorphes: on obtient ainsi le groupe d'holonomie de M, que sera désigné par ψ.

Proposition 3. *Soit (M, g) une variété riemannienne connexe et ψ son groupe d'holonomie. Alors: ψ est irréductible si et seulement si toute application affine $f: (M, g) \to (M', g')$ est une homothétie.*

PREUVE. Supposons que ψ soit irréductible. Prenons une application affine $f\colon (M, g) \to (M', g')$ et considérons la métrique $\bar{g}$ sur M définie par $\bar{g}(v, w) = g'(dfv, dfw)$. En particulier, si ∇ est la connexion de g, $\nabla\bar{g} = 0$ et $\bar{g}_x$ est invariant par $\psi(x)$. Or, ce groupe étant irréductible, on a $\bar{g}_x = c_x g_x$, où c_x est une constante (voir [9], p. 277); comme $\nabla\bar{g} = \nabla g = 0$, il en résulte que $c_x = c$ pour tout $x \in M$. Ainsi $\bar{g} = cg$ et f est une homothétie.

Supposons maintenant que ψ ne soit pas irréductible. Nous allons construire une métrique $\bar{g}$ sur M telle que $\bar{g} \neq cg$ et l'application identite Id: $(M, g) \to (M, \bar{g})$ soit une application affine.

Soit $x \in M$ fixé et T'_x un sous-espace non trivial de T_xM invariant par $\psi(x)$. Etant donné $y \in M$, nous définissons T'_y comme le sous-espace de T_yM obtenu par transport parallèle de T'_x sur une courbe joignant x et y (T'_y ne dépend pas de la courbe choisie). Soit T''_y le complément g-orthogonal de T'_y en T_yM. Les distributions $y \to T'_y$ et $y \to T''_y$ sont différentiables; en outre (voir [9], p. 180-183) elles sont involutives et vérifient aussi la propriété suivante:

Soit $y \in M$ et désignons par M'_y et M''_y les sous-variétés intégrales de T' et T'' par y. Alors ils existent: un voisinage ouvert V_y de y en M, des voisinages ouverts V'_y et V''_y de y en M'_y et M''_y respectivement, et un diféomorphisme $h\colon V_y \to V'_y \times V''_y$ vérifiant

$$h\colon (V_y, g) \to (V'_y \times V''_y, g|_{V'_y} \times g|_{V''_y}) \quad \text{est une isométrie.} \tag{2}$$

Prenons deux constantes positives c' et c'' et définissons la métrique $\bar{g}$ sur M par les conditions

$$\bar{g}|_{T'_y} = c'g|_{T'_y}, \qquad \bar{g}|_{T''_y} = c''g|_{T''_y} \tag{3}$$

et les espaces T'_y et T''_y sont $\bar{g}$-orthogonaux, pour tout $y \in M$.

Il est aisé de montrer, utilisant (2) et (3), que

$$h\colon (V_y, \bar{g}) \to (V'_y \times V''_y, \bar{g}|_{V'_y} \times \bar{g}|_{V''_y}) \quad \text{est une isométrie.} \tag{4}$$

D'après (3), il en résulte que $(V'_y, g|_{V'_y})$ et $(V'_y, \bar{g}|_{V'_y})$ ont les mêmes géodésiques (parametrées); il en est de même pour $(V''_y, g|_{V''_y})$ et $(V_y'', \bar{g}|_{V''_y})$. En conséquence, les métriques $\bar{g}|_{V'_y} \times \bar{g}|_{V''_y}$ et $g|_{V'_y} \times g|_{V''_y}$ ont les mêmes géodésiques or, (2) et (4) impliquent ce résultat pour les métriques g et $\bar{g}$ sur V_y. En résumé, l'identité Id: $(M, g) \to (M, \bar{g})$ est une application affine, mais $\bar{g} \neq cg$ si l'on prend $c' \neq c''$.

Néanmoins, dans le cas des correspondances géodésiques, l'irreductibilité de ψ ne suffit pas pour garantir qu'elles soient des homothéties comme le montre l'exemple suivant:

Considérons les coordonnées canoniques (x, y) de $\mathbb{R}^2$ et deux fonctions $\varphi_1(x) > \varphi_2(y) > 0$. Définissons les métriques g et $\bar{g}$ par

$$ds^2 = (\varphi_1 - \varphi_2)(dx^2 + dy^2)$$

$$d\bar{s}^2 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\varphi_1(\varphi_1\varphi_2)} dx^2 + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\varphi_2(\varphi_1\varphi_2)} dy^2$$

Il en résulte que $\bar{g} \neq cg$ et on peut vérifier à l'aide de l'égalité (5) ci-dessous que l'identité Id: $(\mathbb{R}^2, g) \to (\mathbb{R}^2, \bar{g})$ est une correspondance géodésique (remarquons que l'exemple est naturel au vue des résultats de Levi-Civita; voir [10], p. 287 et [4], Section 41). La courbure de g est

$$k(x, y) = (\varphi_2 - \varphi_1)\left(\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial x}\log\sqrt{\varphi_1 - \varphi_2} + \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial y}\log\sqrt{\varphi_1 - \varphi_2}\right).$$

Alors, on peut choisir φ_1 et φ_2 de façon à avoir $k \neq 0$ ce qui implique que le groupe d'holonomie de $(\mathbb{R}^2, g)$ est irreductible.

Observons que si l'on prend $\varphi_i(x + n) = \varphi_i(x)$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ $(i = 1, 2)$, on a les mêmes résultats sur le tore T^2.

Théorème 3. *Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension $n > 1$, complète, à flot géodésique topologiquement transitif.*

Alors, toute correspondance géodésique f: $(M, g) \to (M', g')$ est une homothétie.

PREUVE. Considérons la métrique $\bar{g}$, sur M, donnée par

$$\bar{g}(v, w) = g'(dfv, dfw).$$

Nous allons montrer que $\bar{g} = cg$, c'est-à-dire que f est une homothétie.

Prenons des coordonnées $(x^1, \ldots, x^n)$ sur un ouvert de M et soient g_{ij} et Γ^k_{ij} les composantes de la métrique g et de sa connexion; désignons par $\det g = \det(g_{ij})$. Pour $\bar{g}$ nous utilisons des notations analogues $\bar{g}_{ij}$, $\bar{\Gamma}^k_{ij}$ et $\det \bar{g} = \det(\bar{g}_{ij})$.

D'après l'hypothèse, g et $\bar{g}$ ont les mêmes géodésiques (non paramétrées) ce qui équivaut (voir [4], Section 40) à:

$$\bar{\Gamma}^k_{ij} - \Gamma^k_{ij} = \delta^k_j \frac{\partial}{\partial x^i}\psi + \delta^k_i \frac{\partial}{\partial x^j}\psi, \tag{5}$$

où

$$\psi = \frac{1}{2(n+1)} \log \frac{\det \bar{g}}{\det g}.$$

En conséquence, si $\bar{\nabla}$ est la connexion de $\bar{g}$, on a:

$$
\begin{aligned}
0 &= \bar{\nabla}_k \bar{g}_{ij} \\
&= \frac{\partial}{\partial x^k} \bar{g}_{ij} - \bar{\Gamma}^{\alpha}_{ki} \bar{g}_{\alpha j} - \bar{\Gamma}^{\beta}_{kj} \bar{g}_{i\beta} \\
&= \frac{\partial}{\partial x^k} \bar{g}_{ij} - \left(\Gamma^{\alpha}_{ki} + \delta^k_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^i} \psi + \delta^{\alpha}_i \frac{\partial}{\partial x^k} \psi \right) \bar{g}_{\alpha j} - \left(\Gamma^{\beta}_{kj} + \delta^{\beta}_j \frac{\partial}{\partial x^k} \psi + \delta^{\beta}_k \frac{\partial}{\partial x^j} \psi \right) \bar{g}_{i\beta}
\end{aligned}
$$

C'est-à-dire, que

$$
\nabla_k \bar{g}_{ij} = 2\bar{g}_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k} \psi + \bar{g}_{ik} \frac{\partial}{\partial x^j} \psi + \bar{g}_{jk} \frac{\partial}{\partial x^i} \psi. \tag{6}
$$

Si l'on fait

$$
\mu = \left(\frac{\det g}{\det \bar{g}} \right)^{1/(n+1)}
$$

alors

$$
\psi = -\frac{1}{2} \log \mu
$$

et (6) s'écrit:

$$
2\mu \nabla_k \bar{g}_{ij} = -2\bar{g}_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k} \mu - \bar{g}_{ik} \frac{\partial}{\partial x^j} \mu - \bar{g}_{jk} \frac{\partial}{\partial x^i} \mu. \tag{7}
$$

Comme μ ne dépend pas du système de coordonnées, nous pouvons définir le tenseur symmétrique

$$
\theta_{ij} = \mu^2 \bar{g}_{ij}.
$$

Il est aisé de montrer à l'aide de (7) que

$$
\nabla_k \theta_{ij} + \nabla_i \theta_{jk} + \nabla_j \theta_{ki} = 0. \tag{8}
$$

Or, θ étant symétrique, (8) revient à dire que $\nabla_v \theta(v, v) = 0$ pour tout $v \in TM$. En conséquence, d'après le Corollaire 1, il existe une constante λ telle que

$$
\mu^2 \bar{g}_{ij} = \left(\frac{\det g}{\det g} \right)^{2/(n+1)} \bar{g}_{ij} = \lambda g_{ij}. \tag{9}
$$

Alors $\mu^{2n} \det \bar{g} = \lambda^n \det g$ et on a

$$\mu^{n+1} = \frac{\det g}{\det \bar{g}} = \frac{\mu^{2n}}{\lambda^n},$$

or $n \neq 1$ implique μ est constante et (9) s'écrit $\bar{g}_{ij} = cg_{ij}$.

3. Les Flots Géodésiques Généralisés

Soit M une variété riemannienne complète de dimension n; désignons par $O(M)$ le fibré des repères orthonormés de M. Il s'agit d'une variété différentiable qui, en outre, est un fibré principal sur M dont la fibre est le groupe de Lie compact des matrices orthogonales $O(n)$ (voir [9], p. 60). L'application $\pi: O(M) \to M$ est la projection canonique.

Soit $C: (a, b) \to O(M)$ une courbe sur $O(M)$; désignons par c sa projection $\pi \circ C$. On peut écrire

$$C(t) = (E_1(t), \ldots, E_n(t)) \quad \text{où} \quad (E_1(t), \ldots, E_n(t)) \in \pi^{-1}(c(t)).$$

La courbe C est appelée courbe horizontale si $\nabla_{c'(t)} E_i(t) = 0$ pour tous $t \in (a, b)$, $i = 1, \ldots, n$. Etant donnée une courbe $c(t)$ sur M, et si l'on fixe $(E_1, \ldots, E_n) \in \pi^{-1}(c(0))$, il existe une unique courbe horizontale $C(t)$ telle que $C(0) = (E_1, \ldots, E_n)$ et $c(t) = \pi \circ C(t)$, pout tout t. On appelle $C(t)$ le relèvement horizontal de c par $(E_1, \ldots, E_n)$.

Soient $p \in M$ et $u \in \pi^{-1}(p)$ fixés. Un vecteur $W \in T_u(O(M))$ est horizontal (respectivement vertical) s'il est tangent à une courbe horizontale (respectivement si $d\pi W = 0$). Il en résulte que $T_u(O(M)) = \mathcal{V}(u) \otimes \mathfrak{H}(u)$, où $\mathcal{V}(u)$ et $\mathfrak{H}(h)$ sont les espaces des vecteurs verticaux et horizontaux de $T_u(O(M))$.

Définissons maintenant les flots géodésiques géneralisés sur $O(M)$: étant donné $(E_1, \ldots, E_n) \in \pi^{-1}(p)$, et si l'on fixe $i \in \{1, \ldots, n\}$, soit $\gamma_{E_i}(t)$ la géodésique sur M déterminée par les conditions $\gamma_{E_i}(0) = p$, $\gamma'_{E_i}(0) = E_i$. Soit $\varphi_t^i(E_1, \ldots, E_n)$ le repère en $\gamma_{E_i}(t)$ obtenu par transport parallèle de $(E_1, \ldots, E_n)$ sur γ_{E_i}. Le flot φ_t^i ainsi défini est appelé le i-ème flot géodésique généralisé. Le champ de φ_t^i est noté par X^i. Remarquons que $\mathfrak{H}(u)$ est engendré par $\{X^1(u), \ldots, X^n(u)\}$.

Désignons par $T_s^r(M)$ l'espace des tenseurs r-contravariants et s-covariants sur M. Nous pouvons associer à chaque tenseur $K \in T_s^r(M)$ une fonction $F(K): O(M) \to T_s^r(\mathbb{R}^n) \approx [\mathbb{R}^n]^{(s+r)}$ de la façon suivante:

Si $(E_1, \ldots, E_n) \in \pi^{-1}(p)$, soit $(E^1, \ldots, E^n)$ le repère dual $E^i(E_j) = \delta_j^i$. Alors $K(p) \in T_s^r(T_pM)$ s'écrira

$$K(p) = K_{j_1, \ldots, j_s}^{i_1, \ldots, i_r} E_{i_1} \otimes \cdots \otimes E_{i_r} \otimes E^{j_1} \otimes \cdots \otimes E^{j_s}.$$

Nous définissons donc

$$F(K)(E_1, \ldots, E_n) = (K^{i_1, \ldots, i_r}_{j_1, \ldots, j_s}) \in [\mathbb{R}^n]^{(s+r)} = T^r_s(\mathbb{R}^n).$$

Établissons maintenant les relations entre les flots X^i, les fonctions $F(K)$ et la dérivée covariante.

Proposition 4. *Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$ fixé. Alors*

$$X^i(F(K))(E_1, \ldots, E_n) = F(\nabla_{E_i} K)(E_1, \ldots, E_n),$$

pour tous

$$(E_1, \ldots, E_n) \in O(M), \qquad K \in T^r_s(M).$$

En particulier, le tenseur K est parallèle (c'est-à-dire que $\nabla K = 0$) si et seulement si $F(K)$ est invariante par le i-ème flot géodésique généralisé.

PREUVE. Fixons $(E_1, \ldots, E_n)$ et K. Soit $(E_1(t), \ldots, E_n(t)) = \varphi^i_t(E_1, \ldots, E_n)$ et $(E^1(t), \ldots, E^n(t))$ son repère dual. Le tenseur K sur la géodésique $\gamma_{E_i}(t)$ s'écrit

$$K(\gamma_{E_i}(t)) = K^{i_1, \ldots, i_r}_{j_1, \ldots, j_s}(t) E_{i_1}(t) \otimes \cdots \otimes E_{i_r}(t) \otimes E^{j_1}(t) \otimes \cdots \otimes E^{j_s}(t).$$

En conséquence

$$F(K)(E_1(t), \ldots, E_n(t)) = (K^{i_1, \ldots, i_r}_{j_1, \ldots, j_s}(t))$$

et

$$X^i(F(K))(E_1(t), \ldots, E_n(t)) = \left(\frac{d}{dt} K^{i_1, \ldots, i_r}_{j_1, \ldots, j_s}(t)\right).$$

Étant donné que $\nabla_{E_i(t)} E_j(t) = 0$ pour tout $j = 1, \ldots, n$ il en résulte que $\nabla_{E_i(t)} E^j(t) = 0$. Alors on a

$$\nabla_{E_i(t)} K = \left[\frac{d}{dt} K^{i_1, \ldots, i_r}_{j_1, \ldots, j_s}(t)\right] E_{i_1}(t) \otimes \cdots \otimes E_{i_r}(t) \otimes E^{j_1}(t) \otimes \cdots \otimes E^{j_s}(t)$$

et la Proposition en découle.

Remarque. Comme les champs $X^1, \ldots, X^n$ engendrent les espaces horizontaux, nous pouvons écrire la proposition 4 de la façon suivante:

(10) Si $C(t)$ est une courbe horizontale et $c(t) = \pi \circ C(t)$, on a:

$$C'(t)(F(K)) = F(\nabla_{c'(t)} K).$$

Corollaire 2. *Soit $K \in T^r_s(M)$, désignons par $\nabla\nabla K \in T^r_{s+2}(M)$ le tenseur dérivée covariante seconde de K. Alors*

$$X^i X^i(F(K))(E_1, \ldots, E_n) = F(\nabla_{E_i}\nabla_{E_i}K)(E_1, \ldots, E_n).$$

PREUVE. Dans les notations ci-dessus, observons que le tenseur r-contravariant et s-covariant $\nabla_{E_i(t)}K$ est défini sur $\gamma_{E_i}(t)$; on peut considérer alors $\nabla_{E_i(t)}(\nabla_{E_i(t)}K)$.

D'après [9] (p. 125) on a

$$\nabla_{E_i(t)}\nabla_{E_i(t)}K = \nabla_{E_i(t)}(\nabla_{E_i(t)}K) - \nabla_{(\nabla_{E_i(t)}(E_i(t)))}K = \nabla_{E_i(t)}(\nabla_{E_i(t)}K), \tag{11}$$

car $\nabla_{E_i(t)}E_i(t) \equiv 0$.

La Proposition 4 implique

$$X^i(F(K))(E_1(t), \ldots, E_n(t)) = F(\nabla_{E_i(t)}K)(E_1(t), \ldots, E_n(t)).$$

En conséquence

$$\begin{aligned} X^i X^i(F(K))(E_1(t), \ldots, E_n(t)) &= X^i F(\nabla_{E_i(t)}K)(E_1(t), \ldots, E_n(t)) \\ &= F(\nabla_{E_i(t)}(\nabla_{E_i(t)}K))(E_1(t), \ldots, E_n(t)), \end{aligned}$$

où l'on a appliqué la Proposition 4 au tenseur $\nabla_{E_i(t)}K$. Le corollaire découle donc de (11).

La Proposition 4 permet aussi de retrouver le résultat de [11], p. 4:

Corollaire 3. *Si M est compacte, la nullité d'une dérivée covariante d'ordre quelconque d'un tenseur entraîne la nullité de la dérivée première de ce tenseur.*

PREUVE. D'après le corollaire antérieur, $\nabla\nabla K = 0$ équivant à $X^i X^i(F(K)) = 0$, ce qui s'écrit, sur l'orbite $(E_1(t), \ldots, E_n(t)) = \varphi^i_t(E_1, \ldots, E_n)$,

$$F(K)(E_1(t), \ldots, E_n(t)) = At + B \quad \text{où} \quad A, B \in [\mathbb{R}^n]^{(s+r)}.$$

Or, la compacité de M implique celle de $O(M)$, donc $A = 0$ et $F(K)$ est constante sur les trajectoires de X^i, la Proposition 4 implique alors que $\nabla K = 0$.

Un tenseur K est dit récurrent s'il existe une 1-forme α telle que $\nabla K = K \otimes \alpha$; c'est-à-dire que $\nabla_Z K = \alpha(Z)K$ cour tout champ Z sur M. Dans le cadre général des variétés munies de connexion lineáire, Wong [13] a caractérisé les tenseurs récurrents en termes des propriétés de la fonction $F(K)$ (voir aussi [9], p. 304). Nous nous intéressons aux relations entre les tenseurs récurrents et les tenseurs parallèles dans le cadre riemannien:

Proposition 5. *Soit K un tenseur récurrent sur la variété riemannienne M. Alors il existe un tenseur parallèle P et une fonction positive $\lambda: M \to \mathbb{R}$ vérifiant λP (réciproquement, tout tenseur de la forme λP est récurrent).*

PREUVE. Fixons une composante connexe de M, que nous désignerons aussi par M.

Si $K \equiv 0$, la proposition est triviale. Soit $p_0 \in M$ tel que $K(p_0) \neq 0$ et fixons $u_0 \in \pi^{-1}(p_0)$. Le fibré d'holonomie de u_0 est l'ensemble

$$O(M)(u_0) = \{u \in O(M)\text{: il existe } C\text{: } [0,1] \to O(M)\text{, horizontal, tel que } C(0) = u_0 \text{ et } C(1) = u\}.$$

Soit C une courbe horizontale avec $C(0) = u_0$ et désignons par c sa projection sur M, $\pi \circ C$. Comme K est récurrent, on a $\nabla_{c'(t)}K = \alpha(c'(t))K$. Alors $F(\nabla_{c'(t)}K) = \alpha(c'(t))F(K)$ et, d'après (10)

$$C'(t)[F(K)] = \alpha(c'(t))F(K).$$

En conséquence,

(12) $$F(K)(C(t)) = F(K)(u_0)e^{\int_0^t \alpha(c'(s))\,ds} \quad \text{pour tout} \quad t.$$

Cela implique la propirété suivante

(13) Si K est un tenseur récurrent et il existe u_0 tel que

$$F(K)|_{O(M)(u_0)} = F(K)(u_0) \neq 0,$$

alors K est parallèle.

(En effet, il en résulte de (12) que $\alpha(c'(s)) = 0$, alors $\alpha \equiv 0$, car $c'(s)$ est arbitraire, et $\nabla K = K \otimes \alpha = 0$.)

La propriété (12) montre aussi qu'il existe une fonction positive φ: $O(M) \to \mathbb{R}$ telle que $F(K)(u) = F(K)(u_0)\varphi(u)$, pout tout $u \in O(M)(u_0)$.

Nous allons voir que φ est constante sur $O(M)(u_0) \cap \pi^{-1}(p)$, pour tout $p \in M$. En effet: soient u, $\bar{u} \in \pi^{-1}(p) \cap O(M)(u_0)$; si $u = (E_1, \ldots, E_n)$ et $\bar{u} = (\bar{E}_1, \ldots, \bar{E}_n)$ on a $\bar{E}_i = a_i^j E_j$ et $\bar{E}^i = b_j^i E^j$ où les matrices $A = (a_\alpha^\beta)$ et $B = (b_\alpha^\beta) = A^{-1}$ sont orthogonales, c'est-à-dire que

(14) $$\sum_i a_i^\alpha a_i^\beta = \delta_{\alpha\beta} \quad \text{et} \quad \sum_i b_\alpha^i b_\beta^i = \delta_{\alpha\beta}.$$

Soient maintenant

$$F(K)(u) = (K_{j_1,\ldots,j_s}^{i_1,\ldots,i_r}) \quad \text{et} \quad F(K)(\bar{u}) = (\bar{K}_{j_1,\ldots,j_s}^{i_1,\ldots,i_r}).$$

Alors

$$\bar{K}^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s} = K^{l_1,\ldots,l_r}_{m_1,\ldots,m_s} b^{i_1}_{l_1}, \ldots, b^{i_r}_{l_r} a^{m_1}_{j_1}, \ldots, a^{m_s}_{j_s},$$

et (14) implique

$$\sum_{\substack{i_1,\ldots,i_r\\ j_1,\ldots,j_s}} (\bar{K}^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s})^2 = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_r\\ j_1,\ldots,j_s}} (K^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s})^2. \tag{15}$$

Étant donné que

$$F(K)(u) = F(K)(u_0)\varphi(u) \quad \text{et} \quad F(K)(\bar{u}) = F(K)(u_0)\varphi(\bar{u})$$

on a (pour tous $i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_s$):

$$(K^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s})^2 = \varphi(u)^2 (T^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s})^2 \quad \text{et} \quad (\bar{K}^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s})^2 = \varphi(\bar{u})^2 (T^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s})^2,$$

où l'on a noté

$$F(K)(u_0) = (T^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s}).$$

En résumé, (15) s'écrit

$$\varphi(\bar{u})^2 \Big[\sum (T^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s})^2\Big] = \varphi(u)^2 \Big[\sum (T^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s})^2\Big]$$

et comme $F(K)(u_0) \neq 0$ et φ est positive, on a $\varphi(\bar{u}) = \varphi(u)$.

Définissons alors la fonction $\lambda: M \to \mathbb{R}$ par $\lambda(p) = \varphi|_{O(M)(u_0) \cap \pi^{-1}(p)}$. Comme K est récurrent, il en est de même pour $(1/\lambda)K$ et, d'après la définition de λ, $F((1/\lambda)K)$ est constante ($\neq 0$) sur $O(M)(u_0)$. Alors la propriété (13) implique que $(1/\lambda)K$ est parallèle et la proposition est prouvée.

3.1. Implications de la transitivité topologique de X^t

Supposons maintenant que M est orientée et désignons par $O^+(M)$ le fibré des repères orthonormes positivement orientés de M; $O^+(M)$ est une fibre principal sur M dont la fibre est le groupe de Lie $SO(n) = \{a \in O(n): \det a = 1\}$.

Si $K \in T^r_s(M)$ nous avons, comme dans la section précédente, une fonction $F(K): O^+(M) \to T^r_s(\mathbb{R}^n)$.

Rappelons que, si $u = (E_1, \ldots, E_n) \in O^+(M)$ et $a = (a^\beta_\alpha) \in SO(n)$, l'action à droite de $SO(n)$ sur $O^+(M)$ est définie par

$$\begin{array}{ccc} O^+(M) \times SO(n) & \longrightarrow & O^+(M) \\ (u, a) & \longrightarrow & ua \end{array}$$

où $ua = (\bar{E}_1, \ldots, \bar{E}_n)$ et $\bar{E}_i = a^k_i E_k$.

De même, si $T = T^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s} e_{i_1} \times \cdots \times e_{i_r} \times e^{j_1} \times \cdots \times e^{j_s} \in T^r_s(\mathbb{R}^n)$ et $a = (a^\beta_\alpha) \in SO(n)$, l'action à gauche de $SO(n)$ sur $T^r_s(\mathbb{R}^n)$ est donnée par

$$\begin{aligned} SO(n) \times T^r_s(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow T^r_s(\mathbb{R}^n) \\ (a, T) &\longrightarrow aT \end{aligned}$$

où $aT = \bar{T}$ est le tenseur de composantes

$$\bar{T}^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s} = T^{l_1,\ldots,l_r}_{m_1,\ldots,m_s} a^{i_1}_{l_1}, \ldots, a^{i_r}_{l_r} b^{m_1}_{j_1}, \ldots, b^{m_s}_{j_s}$$

(ici $(b^\beta_\alpha) \equiv b = a^{-1}$).

Dans ces notations, il en résulte que

$$(16) \qquad F(K)(ua) = a^{-1}[F(K)(u)] \quad \text{pour tous} \quad u \in O^+(M), \quad a \in SO(n).$$

Si le flot X^i est topologiquement transitif sur $O^+(M)$ et le tenseur K est parallèle, la Proposition 4 implique que

$$(17) \qquad F(K)|_{O^+(M)} \equiv T \in T^r_s(\mathbb{R}^n).$$

Et, d'après (16), le tenseur T vérifie

$$(18) \qquad T = F(K)(ua) = a^{-1}F(K)(u) = a^{-1}T, \quad \text{pour tout} \quad a \in SO(n)$$

(on dit dans ce cas que T est invariant par l'action de $SO(n)$; voir [12] pour une classification de ces tenseurs).

Remarquons que les tenseurs $T \in T^r_s(\mathbb{R}^n)$ invariants par l'action de $SO(n)$ induisent d'une façon canonique des tenseurs parallèles sur la variété orientée M. Les résultats antérieurs impliquent que, si X^i est topologiquement transitif, alors ces tenseurs sont les seuls tenseurs parallèles sur M. La Proposition 5 donne alors la forme des tenseurs récurrents.

D'autre part, observons que si le tenseur de courbure de M vérifie (17) (donc (18)), alors M est à courbure sectionnelle constante.

Les résultats de L. W. Green [6] impliquent que X^i est topologiquement transitif sur $O^+(M)$ si M est compacte et à courbure sectionnelle négative 1/4-pincée (c'est-à-dire qu'il existe une constante $c > 0$ telle que les courbures sectionnelles de M sont bornées par $-c$ et $-1/4\,c$). Nous pouvons donc, énoncer le théorème suivant:

Théorème 4. *Soient M une variété riemannienne orientée et X^i le i-ème flot géodésique sur $O^+(M)$. Si X^i est topologiquement transitif (ce qui est vrai si M est compacte à courbure sectionnelle négative 1/4-pincée) alors un tenseur $K \in T^r_s(M)$ est parallèle si et seulement si $F(K)|_{O^+(M)} = T \in T^r_s(\mathbb{R}^n)$ et T est invariant par $SO(n)$.*

En particulier, si M est à tenseur de courbure parallèle, alors M est à courbure sectionnelle constante.

4. Le flot de p-repères

Considérons maintenant $\Omega_p(M)$ le fibré de p-repères orthonormés de la variété riemannienne M. Ici $1 \leqslant p \leqslant n-1$ où $n = \dim M$. C'est-à-dire que pour chaque $x \in M$ nous considérons tous les p-repères orthonormés $(E_1, \ldots, E_p)$ de T_xM.

Si $\pi: \Omega_p(M) \to T_1M$ est la projection $\pi(E_1, \ldots, E_p) = E_1$, on peut voir $\Omega_p(M)$ comme un fibré sur T_1M dont la fibre $\pi^{-1}(E_1)$ est la variété de Stiefel $O(n-1)/O(n-1-(p-1))$.

Etant donné $(E_1, \ldots, E_p)$, soit γ_{E_1} la géodésique déterminée par E_1; désignons par $\phi_t^p(E_1, \ldots, E_p)$ le p-repère en $\gamma_{E_1}(t)$ obtenu par transport parallèle de $(E_1, \ldots, E_p)$ sur γ_{E_1}. Le flot ϕ_t^p ainsi défini sur $\Omega_p(M)$ est appelé le flot de p-repères et X_p notera son champ.

Si $(E_1, \ldots, E_p)$ est un p-repère en T_xM, soit $[E_1, \ldots, E_p]$ le sous-espace de T_xM qu'il engendre et désignons par E^i le covecteur dual de E_i pour la métrique g de M ($E^i = g(E_i, \bullet)$). Alors, étant donné $K \in T_s^r(M)$, la restriction de $K(x)$ à $[E_1, \ldots, E_p]$ s'écrira

$$K(x)|_{[E_1, \ldots, E_p]} = K_{j_1, \ldots, j_s}^{i_1, \ldots, i_r} E_{i_1} \otimes \cdots \otimes E_{i_r} \otimes E^{j_1} \otimes \cdots \otimes E^{j_s}$$

où $1 \leqslant i_\alpha \leqslant p$, $1 \leqslant j_\beta \leqslant p$. Nous définissons la fonction $F(K): \Omega_p(M) \to T_s^r(\mathbb{R}^p)$ par $F(K)\,(E_1, \ldots, E_p) = (K_{j_1, \ldots, j_s}^{i_1, \ldots, i_r})$.

Il est aisé de montrer suivant la preuve de la Proposition 4 que

$$(19) \qquad X_p F(K)(E_1, \ldots, E_p) = F(\nabla_{E_1} K)(E_1, \ldots, E_p).$$

En particulier, si K est parallèle alors $F(K)$ est invariante par X_p. Comme $p < n$ nous ne pouvons pas affirmer la réciproque.

Néanmois, si le tenseur K a des propriétés supplémentaires, la fonction $F(K): \Omega_p(M) \to T_s^r(\mathbb{R}^p)$ peut garder toute l'information sur le tenseur (ce qui est toujours le cas pour $F(K): O(M) \to T_s^r(\mathbb{R}^n)$) même si p est petit.

Par exemple, si l'on prend le tenseur de courbure riemannienne $R \in T_4^0(M)$, il suffit de considérer $F(R): \Omega_2(M) \to T_4^0(\mathbb{R}^2)$. En particulier

(20) Si $F(R)|_{\Omega_2(M)} \equiv T \in T_4^0(\mathbb{R}^2)$, alors M est à courbure sectionnelle constante.

Il est bien connu (voir [1]) que si M est compacte, à courbure sectionnelle négative et de dimension impaire, alors le flot de 2-repères sur $\Omega_2(M)$ est ergodique. En conséquence (19) et (20) nous permettent d'énoncer le théorème suivant

Théorème 5. *Soit M une variété riemannienne compacte, de dimension impaire, à courbure sectionnelle négative.*

Si le tenseur de courbure est parallèle, alors M est à courbure sectionnelle constante.

References bibliographiques

[1] Brin, M. et Gromov, M. On the ergodicity of frame flows. *Invent. Math.* **60** (1980), 1-8.

[2] Eberlein, P. Geodesic flow in certain manifolds without conjugate points. *Trans. Amer. Math. Soc.* **167**(1972), 151-170.

[3] Eberlein, P. et O'Neil, B. Visibility manifolds. *Pacific J. Math.* **46**(1973), 45-109.

[4] Eisenhart, L. P. *Riemannian Geometry*. Princeton University Press, 1949.

[5] Gray, A. Einstein-Like manifolds which are not Einstein. *Geometriae Dedicata*, **7**(1978), 259-280.

[6] Green, L. W. The generalized geodesic flow, *Duke Math. J.* **41**(1974), 115-126.

[7] Gulliver, R. D. H. On the variety of manifolds without conjugate points. *Trans. Amer. Math. Soc.* **210**(1975), 185-201.

[8] Klingenberg, W. Riemannian manifolds with geodesic of Anosov type. *Ann. of Math.* **99**(1974), 1-13.

[9] Kobayashi, S. & Nomizu, K. *Foundations of Differential Geometry*, vol. 1, John Wiley, New York, 1961.

[10] Levi-Civita, T. Sulle transformazioni delle equazioni dinamiche. *Annali di Matematica*, ser. II, **24**(1896), 255-300.

[11] Lichnerowicz, A. *Géométrie des groupes de transformations.* Dunod, Paris, 1958.

[12] Weyl, H. *The classical groups.* Princeton University Press, 1946.

[13] Wong, Y. C. Recurrent tensors on a linearly connected differentiable manifold. *Trans. Amer. Math. Soc.* **99**(1961), 325-341.

Recibido: 21 de junio de 1990.

Ángel J. Montesinos
Université de Paris-Sud
Mathématique-Bât-425
91405-Orsay
FRANCE