Revista Matemática Iberoamericana
Vol. 6, n.^{os} 3 y 4, 1990

Continuité-Sobolev de Certains Opérateurs Paradifférentiels

Abdellah Youssfi

Introduction

L'objet de ce travail est l'étude de la continuité des opérateurs d'intégrales singulières (au sens de Calderón-Zygmund) sur les espaces de Sobolev $\dot{H}^s$. Il complète le travail fondamental de David-Journé [6], concernant le cas $s = 0$, et ceux de P. G. Lemarié [10] et M. Meyer [11] concernant le cas $0 < s < 1$.

Dans ces travaux antérieurs le critère de continuité porte sur la fonction $T(1)$, image de la fonction identiquement égale à 1 par l'opérateur T. Lorsque $s \geqslant 1$ (et c'est le cas que nous étudions) il convient de généraliser l'objet $b = T(1)$; c'est ce que nous ferons dans les lignes qui suivent en définissant un ensemble fini de fonctions b_α.

Un autre progrès est une meilleure compréhension, grâce à l'usage des capacités de Riesz, de l'espace fonctionnel qui intervient déjà dans les travaux de M. Meyer et qui est noté $\mathrm{BMO}_2^{s,2}$ (cette notation est suggérée par David-Journé où le critère est $T(1) \in \mathrm{BMO}$, $T^*(1) \in \mathrm{BMO}$). Finalement nous arrivons à énoncer une condition nécessaire et suffisante maniable.

Il convient maintenant de préciser nos apports dans le sujet. Soit T un opérateur linéaire continu de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$; on dit que T est un opérateur d'intégrale singulière (à gauche) d'ordre $m \in \mathbb{N}^*$ (en abrégé $T \in \mathrm{SIO}(m)$) si son noyau-distribution est, hors de la diagonale $x = y$, une fonction de classe C^m par rapport à la première variable et vérifiant les estimations

$$|\partial_x^\alpha K(x,y)| \leqslant C|x-y|^{-n-|\alpha|} \quad \text{pour} \quad x \neq y \quad \text{et} \quad |\alpha| \leqslant m.$$

Désignons par R_α l'opérateur de multiplication par la fonction polynôme $x \to x^\alpha$, en particulier R_{e_i} est l'opérateur de multiplication par x_i ; on note par $\Gamma^{e_i}(T)$ le commutateur $[T, R_{e_i}]$ et par récurrence $\Gamma^{\alpha+e_i}(T) = [\Gamma^\alpha(T), R_{e_i}]$. Si l'opérateur T est faiblement borné (au sens de David-Journé) nous avons montré [14] que, pour $|\alpha| \leqslant m-1$, $b_\alpha = \Gamma^\alpha(T)(1)$ est une distribution définie modulo les polynômes de degré $|\alpha|$ et appartenant à l'espace de Besov $\dot{B}_\infty^{|\alpha|,\infty}$. De plus, la continuité de T sur l'espace de Sobolev homogène $\dot{H}^s$ $(0 < s < m)$ est caractérisée par le contrôle des b_α pour $|\alpha| \leqslant [s]$ ($[s]$ = partie entière de s), de la façon suivante.

Soit $\psi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ une fonction portée par la couronne $1/2 \leqslant |\xi| \leqslant 2$, telle que

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi(2^j\xi) = 1 \quad \text{pour} \quad \xi \neq 0.$$

La fonction φ définie par

$$\varphi(\xi) = 1 - \sum_{j\geq 1} \psi(2^{-j}\xi)$$

est de classe C^∞ portée par la boule $|\xi| \leqslant 2$ et $\varphi(\xi) = 1$ pour $|\xi| \leqslant 1$. Par la suite, on notera par Δ_j et S_j les opérateurs de convolution de symboles respectifs $\psi(2^{-j}\xi)$ et $\varphi(2^{-j}\xi)$.

Si $b \in \dot{B}_\infty^{|\alpha|,\infty}$ $(\alpha \in \mathbb{N}^n)$, l'opérateur de para-produit de J. M. Bony π_b^α (ou paradifférentiel) est défini par

$$\pi_b^\alpha(f) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_j(b) S_{j-3}(\partial^\alpha f);$$

c'est un opérateur faiblement borné appartenant à SIO (m) (pour tout $m \in \mathbb{N}$). De plus,

$$\Gamma^\alpha(\pi_b^\alpha)(1) = (\alpha!)b \quad \textit{et} \quad \Gamma^\beta(\pi_b^\alpha)(1) = 0 \quad \text{pour} \quad |\beta| < |\alpha|.$$

Avec ces notations, on obtient le théorème suivant [14].

Théorème 1. *Soient $m \in \mathbb{N}^*$, $T \in$ SIO (m) et $0 < s < m$. Alors T est continu sur $\dot{H}^s$ si et seulement si*

(i) *T est faiblement borné.*
(ii) *L'opérateur*

$$T_0 = \sum_{|\alpha| \leq [s]} \frac{1}{\alpha!} \pi_{b_\alpha}^\alpha$$

est continu sur $\dot{H}^s$ où

$$b_\alpha = \Gamma^\alpha(T)(1).$$

Le Théorème 1 permet le passage d'un opérateur d'intégrale singulière à un opérateur paradifférentiel; par contre son exploitation apparaît assez compliquée. Notre but dans ce qui suit, est donc d'expliciter ce critère; plus précisement, nous allons montrer que les opérateurs $\pi_{b_\alpha}^{\alpha}$ ($\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $b_\alpha \in B_{\infty}^{|\alpha|,\infty}$) forment une famille indépendante pour la continuité-$\dot{H}^s$, autrement dit, la continuité de l'opérateur T_0 entraîne celle de chaque $\pi_{b_\alpha}^{\alpha}$.

En abordant cette étude, on montrera au passage les deux résultats suivants.

(*a*) Classiquement l'espace $\mathrm{BMO}_2^{s,2}$ est caractérisé à l'aide des capacités de Riesz [12], ou par l'opérateur de para-produit [11]; nous allons alors caractériser cet espace à l'aide d'une condition de Carleson généralisée, prolongeant d'une façon très naturelle celle de l'espace BMO.

(*b*) Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et pour tout $b \in \dot{B}_{\infty}^{|\alpha|,\infty}$ avec $|\alpha| \leqslant [s]$; l'opérateur π_b^{α} est continu sur $\dot{H}^s$ si et seulement si pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\beta| = |\alpha|$, $\partial^{\beta} b \in \mathrm{BMO}_2^{s-|\alpha|,2}$. En particulier, lorsque $|\alpha| = s$ ($s \in \mathbb{N}$) et π_b^{α} est continu sur $\dot{H}^s$, alors b appartient à l'espace BMO-Sobolev $\dot{H}_{\infty}^s$($\dot{H}_{\infty}^s$ est une généralisation à «la Sobolev» de l'espace BMO, et sera donnée par la définition 2).

La rédaction de cet article a bénéficié de nombreuses suggestions de G. Bourdaud et de Y. Meyer, je souhaite vivement leur exprimer mes remerciements pour l'intérêt qu'ils ont apporté à ce travail.

1. La presque-orthogonalité

Pour $s \in \mathbb{R}$, l'espace de Sobolev homogène $\dot{H}^s$ est l'espace des distributions modulo les polynômes, défini par

$$\|f\|_{\dot{H}^s} = \Big[\sum_{j\in\mathbb{Z}} 4^{sj}\|\Delta_j(f)\|_2^2\Big]^{1/2} < +\infty.$$

Dans ce paragraphe, nous allons travailler dans un cadre un peu plus général qui est celui des espaces de Besov homogènes. Pour $s \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant p, q \leqslant +\infty$, l'espace de Besov $\dot{B}_p^{s,q}$ est défini par

$$\|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}} = \Big[\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{sjq}\|\Delta_j(f)\|_p^q\Big]^{1/q} < +\infty \quad \text{si} \quad q < +\infty,$$

et

$$\|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}} = \operatorname*{Sup}_{j\in\mathbb{Z}} 2^{sj}\|\Delta_j(f)\|_p < +\infty \quad \text{si} \quad q = +\infty.$$

Soit $m \in \mathbb{N}$, pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on désigne par $F_m(f)$ la fonction en deux variables définie par

$$F_m(f)(x,y) = f(y) - \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{1}{\alpha!}(y-x)^\alpha (\partial^\alpha f)(x);$$

alors on a la proposition suivante.

Proposition 1. *Soient* $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $m \in \mathbb{N}$; *alors pour tout* $s < m+1$ *et pour tout* $p < +\infty$, *il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$\left[\sum 2^{sjq}\left(\iint 2^{nj}|h(2^j(x-y))|\,|F_m(S_jf)(x,y)|^p\,dx\,dy\right)^{q/p}\right]^{1/q} \leqslant C\|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}},$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Considérons une fonction $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; à l'aide de la formule de Taylor, on a

$$|F_m(g)(x,x+z)| \leqslant C|z|^{m+1}\left[\sum_{|\alpha|=m+1}\int_0^1 (1-t)^m |(\partial^\alpha g)(x+tz)|^p\,dt\right]^{1/p};$$

d'où

$$\int |F_m(g)(x,x+z)|^p\,dx \leqslant C|z|^{(m+1)p}\sum_{|\alpha|=m+1}\|(\partial^\alpha g)\|_p^p.$$

En posant $g = S_jf$, on obtient

$$\int |h(2^jz)|\,|F_m(S_jf)(x,x+z)|^p\,dx\,dz \leqslant C2^{-j(m+1)}\sum_{|\alpha|=m+1}\|\partial^\alpha(S_jf)\|_p^p.$$

Or,

$$\|\partial^\alpha(S_jf)\|_p^p \leqslant C\sum_{k\leq j}\|\partial^\alpha(\Delta_kf)\|_p;$$

en utilisant l'inégalité de Bernstein, on a alors

$$\left[\int |h(2^jz)|\,|F_m(S_jf)(x,x+z)|^p\,dx\,dz\right]^{1/p}$$

est majorée par

$$C2^{-j(m+1)}\sum_{k\leq j}2^{k(m+1)}\|\Delta_kf\|_p.$$

Comme $s < m+1$, l'inégalité de Young dans $l^q(\mathbb{Z})$ fait l'affaire. □

Proposition 2. *Soient* $m \in \mathbb{N}$ *et* $b_\alpha \in \dot{B}_\infty^{|\alpha|,\infty}$ *où* $|\alpha| \leqslant m$. *Si* $s \in \mathbb{R}$ *avec* $m \leqslant s < m+1$ *et si l'opérateur*

$$T = \sum_{|\alpha|\leq m}\pi_{b_\alpha}^\alpha$$

est continu sur $\dot{B}_p^{s,q}$; *alors pour toute fonction* $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *à spectre dans la couronne* $1/2 \leqslant |\xi| \leqslant 2$, *il existe* $C > 0$ *tel que*

$$\left[\sum 2^{sjq}\left\| \sum_{|\alpha| \leq m} R_j(b_\alpha)S_{j-3}(\partial^\alpha f)\right\|_p^q\right]^{1/q} \leqslant C\|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}}$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *et où* R_j *est l'opérateur de convolution avec* $2^{nj}h(2^jx)$.

La preuve de la proposition repose, entre autres, sur la Proposition 1 en utilisant une récurrence sur m.

Cas 1. $m = 0$.
Dans ce cas, on a $0 \leqslant s < 1$; on pose alors

$$X_j(f) = R_j(b_0)S_{j-3}(f) \quad \text{et} \quad Y_j(f) = R_j(Tf).$$

Puisque T est continu sur $\dot{B}_p^{s,q}$, il existe $C > 0$ tel que

$$\left[\sum 2^{sjq}\|Y_j(f)\|_p^q\right]^{1/q} \leqslant C\|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}}.$$

Il suffit donc de montrer

$$\left[\sum 2^{sjq}\|Y_j(f) - X_j(f)\|_p^q\right]^{1/q} \leqslant C\|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}}.$$

Or, $Y_j(f) - X_j(f) = A_j(f) + B_j(f)$ où

$$A_j(f) = \sum_{\nu=-2}^{2} R_j[\Delta_{j+\nu}(b_0)S_{j+\nu-3}(f)] - R_j[\Delta_{j+\nu}(b_0)]S_{j+\nu-3}(f)$$

et

$$B_j(f) = \sum_{\nu=-2}^{2} R_j[\Delta_{j+\nu}(b_0)][S_{j+\nu-3}(f) - S_{j-3}(f)].$$

Mais,

$$\sum_{\nu=-2}^{2} \|S_{j+\nu-3}(f) - S_{j-3}(f)\|_p \leqslant C\sum_{\nu=-4}^{1} \|\Delta_{k+\nu}f\|_p;$$

l'hypothèse $b_0 \in \dot{B}_\infty^{0,\infty}$ entraîne

$$\left[\sum 2^{sjq}\|B_j(f)\|_p^q\right]^{1/q} \leqslant C\|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}}.$$

Pour estimer $A_j(f)$, on pose

$$b_j = \Delta_{j+\nu}(b_0), \qquad f_j = S_{j+\nu-3}(f)$$

et on néglige ν. On a

$$\begin{aligned} A_j(f) &= 2^{nj}\int h(2^j(x-y))b_j(y)(f_j(y)-f_j(x))\,dy \\ &= 2^{nj}\int h(2^j(x-y))b_j(y)F_0(f_j)(x,y)\,dy; \end{aligned}$$

alors

$$\|A_j(f)\|_p \leqslant C\Big[2^{nj}\int |h(2^j(x-y))|\,|F_0(f_j)(x,y)|^p\,dx\,dy\Big]^{1/p},$$

la Proposition 1 fait donc le nécessaire.

Cas 2. On suppose que $m \geqslant 1$ et que la proposition soit vraie pour tout entier $m' \leqslant m-1$. Posons

$$X_j(f) = \sum_{|\alpha|\leq m} R_j(b_\alpha)S_{j-3}(\partial^\alpha f) \quad \text{et} \quad Y_j(f) = R_j(Tf);$$

on a

$$Y_j(f) - X_j(f) = C_j(f) + D_j(f)$$

où

$$C_j(f) = \sum_{\nu=-2}^{2}\sum_{|\alpha|\leq m} R_j[(\Delta_{j+\nu}b_\alpha)S_{j+\nu-3}(\partial^\alpha f)] - R_j[(\Delta_{j+\nu}b_\alpha)]S_{j+\nu-3}(\partial^\alpha f)$$

et

$$D_j(f) = \sum_{\nu=-2}^{2}\sum_{|\alpha|\leq m} R_j(\Delta_{j+\nu}b_\alpha)[S_{j+\nu-3}(\partial^\alpha f) - S_{j-3}(\partial^\alpha f)].$$

De la même façon que le cas $m = 0$, on a

$$\Big[\sum 2^{sjq}\|D_j(f)\|_p^q\Big]^{1/q} \leqslant C\|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}}.$$

D'autre part, en négligeant ν et en posant

$$b_{j,\alpha} = \Delta_{j+\nu}(b_\alpha) \quad \text{et} \quad f_j = S_{j+\nu-3}(\partial^\alpha f);$$

$C_j(f)$ s'écrit

$$C_j(f)(x) = E_j(f)(x) + E'_j(f)(x)$$

où

$$E_j(f)(x) = \sum_{|\alpha|\leq m} 2^{nj}\int h(2^j(x-y))b_{j,\alpha}(y)F_{m-|\alpha|}(\partial^\alpha f_j)(x,y)\,dy;$$

et

$$E_j'(f)(x) = \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ 0 < |\beta| \leq m - |\alpha|}} \frac{1}{\beta!} \left[2^{nj} \int h(2^j(x-y)) b_{j,\alpha}(y)(y-x)^\beta \, dy \right] [\partial^{\alpha-\beta} f_j(x)].$$

Or, $|E_j(f)(x)|$ est majorée par

$$C \sum_{|\alpha| \leq m} 2^{-j|\alpha|} \left[\int 2^{nj} |h(2^j(x-y))| \, |F_{m-|\alpha|}(\partial^\alpha f_j)(x,y)|^p \, dy \right]^{1/p};$$

d'où

$$\|E_j(f)\|_p \leqslant C \sum_{|\alpha| \leq m} 2^{-j|\alpha|} \left[\iint 2^{nj} |h(2^j(x-y))| \, |F_{m-|\alpha|}(\partial^\alpha f_j)(x,y)|^p \, dx\, dy \right]^{1/p}.$$

Comme $s - |\alpha| < m - |\alpha| + 1$, la Proposition 1 nous montre que

$$\begin{aligned} \left[\sum 2^{sjq} \|E_j(f)\|_p^q \right] &\leqslant C \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|_{\dot{B}_p^{s-|\alpha|, q}} \\ &\leqslant C \|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}}. \end{aligned}$$

Pour estimer $E_j'(f)$, on pose

$$R_{j,\beta}(b)(x) = 2^{j(n+|\beta|)} \int h(2^j(x-y))(y-x)^\beta \Delta_j(b)(y) \, dy$$

et

$$T_\beta(f) = \sum_{|\alpha| \leq m - |\beta|} \pi_{b_\alpha}^\alpha(f).$$

Par interpolation, la continuité de T montre que T_β est continu sur $\dot{B}_p^{s-|\beta|, q}$, alors, l'hypothèse de récurrence prouve que, pour $|\beta| \neq 0$, on a

$$\left[\sum 2^{(s-|\beta|)jq} \left\| \sum_{|\alpha| \leq m - |\beta|} R_{j,\beta}(b_\alpha) S_{j-3}(\partial^\alpha g) \right\|_p^q \right]^{1/q} \leqslant C \|g\|_{\dot{B}_p^{s-|\beta|, q}}$$

pour toute fonction $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Mais,

$$E_j'(f) = \sum_{0 < |\beta| \leq m} \frac{1}{\beta!} 2^{-j|\beta|} \sum_{|\alpha| \leq m - |\beta|} R_{j,\beta}(b_\alpha) S_{j-3}(\partial^{\alpha+\beta} f);$$

donc

$$\left[\sum 2^{sjq} \|E_j'(f)\|_p^q \right]^{1/q} \leqslant C \|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}}. \quad \square$$

Pour conclure cette partie, rappelons un lemme de presque-orthogonalité classique (voir par exemple [3]).

Lemme. *Pour tout $t > 1$ et toute suite de fonctions $(f_j)_j$ à spectres respectifs dans les couronnes $t^{-1}2^j \leqslant |\xi| \leqslant t2^j$, on a*

$$\left\|\sum f_j\right\|_{\dot{B}_p^{s,q}} \leqslant C\left[\sum 2^{sjq}\|f_j\|_p^q\right]^{1/q}.$$

D'autre part, remarquons que pour $|\alpha| < s$ et $b_\alpha \in \dot{B}_\infty^{|\alpha|,\infty}$, on a

$$\left[\sum 2^{sjq}\|\Delta_j(b_\alpha)(\partial^\alpha f - S_{j-3}(\partial^\alpha f))\|_p^q\right]^{1/q} \leqslant C\|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}}. \tag{1}$$

En effet,

$$\|\Delta_j(b_\alpha)(\partial^\alpha f - S_{j-3}(\partial^\alpha f))\|_p \leqslant C2^{-j|\alpha|} \sum_{k \geq j-2} 2^{k|\alpha|}\|\Delta_k f\|_p;$$

comme $|\alpha| < s$, l'inégalité de Young montre (1).

De la Proposition 2 et du lemme de presque-orthogonalité, on tire le

Théorème 2. *Soient $s \in \mathbb{R}$, $m = [s]$ et $b_\alpha \in \dot{B}_\infty^{|\alpha|,\infty}$ pour $|\alpha| \leqslant m$; alors il y a équivalence entre les propriétés:*

1. *L'opérateur*

$$T = \sum_{|\alpha| \leq m} \pi_{b_\alpha}^\alpha$$

est continu sur $\dot{B}_p^{s,q}$.

2. *Il existe $C > 0$ tel que pour toute fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on ait:*

(*a*) *si $s \notin \mathbb{N}$,*

$$\left[2^{sjq}\left\|\sum_{|\alpha| \leq m} \Delta_j(b_\alpha)(\partial^\alpha f)\right\|_p^q\right]^{1/q} \leqslant C\|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}}; \tag{2}$$

(*b*) *si $s \in \mathbb{N}$,*

$$\left[\sum 2^{sjq}\left\|\sum_{|\alpha| \leq m-1} \Delta_j(b_\alpha)(\partial^\alpha f) + \sum_{|\alpha| = m} \Delta_j(b_\alpha)S_{j-3}(\partial^\alpha f)\right\|_p^q\right]^{1/q} \leqslant C\|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}}. \tag{3}$$

2. Mesures de Carleson et continuité-Sobolev

Par la suite, les capacités de Riesz n'interviennent, peut-être, que comme artifice technique; cependant elles s'avèrent un outil assez fort pour montrer de nombreux théorèmes d'analyse; les travaux de D. R. Adams [2] et Coifman-Murai [5] en furent des exemples.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $s > 0$; la capacité de Riesz de Ω est définie par

$$\mathrm{Cap}_s(\Omega) = \inf\{\|f\|_{\dot{H}^s}^2 : f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), f \geqslant 1 \text{ sur } \Omega\}.$$

Les premières définitions des capacités ont été données à l'aide du potentiel de Riesz, ce qui oblige une restriction sur s; par contre, elles se confondent avec notre définition dès que $0 < s < n/2$. Nous utiliserons notamment la propriété suivante.

Proposition 3 ([2]). *Pour $0 < s < n/2$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on ait*

$$\int_0^{+\infty} \lambda \operatorname{Cap}_s \{x : f^*(x) > \lambda\}\, d\lambda \leqslant C \|f\|^2_{\dot{H}^s}$$

où f^* désigne la fonction maximale de Hardy-Littlewood.

Passons maintenant aux mesures de Carleson; la définition que nous allons utiliser est celle de [9], dans sa version discrète.

Définition 1. *Soient $r \in \mathbb{R}$ et $(\mu_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ une suite de mesures positives sur $\mathbb{R}^n$; on dit que $(\mu_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ est une r-mesure de Carleson sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}$ s'il existe $C > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et toute boule B de rayon 2^{-k}, on ait*

$$\sum_{j\geq k} \mu_j(B) \leqslant C|B|^r$$

où $|B|$ désigne la mesure de B par rapport à la mesure de Lebesgue.

Lorsque $r = 1$, on dit que $(\mu_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ est une mesure de Carleson sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}$.

Définition 2. *Pour $s \in \mathbb{R}$, l'espace de* BMO*-Sobolev $\dot{H}^s_\infty$ est l'ensemble des distributions b telles que $(4^{sj}|\Delta_j(b)(x)|^2\, dx)_j$ soit une mesure de Carleson sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}$.*

Proposition 4. *Soient $s \geqslant 0$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ avec $0 \leqslant s - |\alpha| < n/2$ et $b_\alpha \in \dot{B}^{|\alpha|,\infty}_\infty$; alors il y a équivalence entre les assertions:*

1. *L'opérateur $\pi^\alpha_{b_\alpha}$ est continu sur $\dot{H}^s$.*
2. *La suite $(4^{sj}|\Delta_j(b_\alpha)(x)|^2\, dx)_j$ est une r-mesure de Carleson sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}$ où $r = 1 - 2(s - |\alpha|)/n$.*

Nous commençons par montrer le cas $|\alpha| \neq s$; pour $|\alpha| = s$, la preuve est de nature un peu différente et sera exposée à part.

Cas (a): $|\alpha| \neq s$. Supposons que $\pi^\alpha_{b_\alpha}$ soit continu sur $\dot{H}^s$ et soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ une fonction telle que $f(x) = x^\alpha/\alpha!$ pour $|x| \leqslant 1$; pour $k \in \mathbb{Z}$ et B une boule de centre x_0 et de rayon 2^{-k}, on pose $g_k(x) = f(2^k(x - x_0))$.

Puisque $|\alpha| \leqslant [s]$, le Théorème 2 entraîne

$$\sum_j 4^{sj} \| \Delta_j(b_\alpha) \partial^\alpha g_k \|_2^2 \leqslant C \| g_k \|_{\dot{H}^s}^2 ;$$

l'invariance par translations-dilatations de $\dot{H}^s$ prouve que

$$\begin{aligned} \sum_j 4^{sj} \int_B |\Delta_j(b_\alpha)(x)|^2 \, dx &\leqslant C 4^{-k|\alpha|} \| g_k \|_{\dot{H}^s}^2 \\ &\leqslant C |B|^r. \end{aligned}$$

Inversement, supposons que $(4^{sj} |\Delta_j(b_\alpha)(x)|^2 \, dx)_j$ soit une r-mesure de Carleson et soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, nous allons montrer que

$$\sum_j 4^{sj} \int_\Omega |\Delta_j(b_\alpha)(x)|^2 \, dx \leqslant C \operatorname{Cap}_{s-|\alpha|}(\Omega). \tag{4}$$

Pour cela, commençons par montrer (4) pour une boule $B = B(x_0, r)$. On remarque que $\operatorname{Cap}_{s-|\alpha|}(B) \approx |B|^r$; de plus si $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2^{-k-1} \leqslant r < 2^{-k}$, alors

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq k} 4^{sj} \int_B |\Delta_j(b_\alpha)(x)|^2 \, dx &\leqslant C \operatorname{Cap}_{s-|\alpha|}(B(x_0, 2^{-k})) \\ &\leqslant C \operatorname{Cap}_{s-|\alpha|}(B). \end{aligned}$$

Or, $\sum_{j \leq k} 4^{sj} \int_B |\Delta_j(b_\alpha)(x)|^2 \, dx$ est majorée par $C|B| \, \| b_\alpha \|_{\dot{B}_\infty^{|\alpha|, \infty}} \sum_{j \leq k} 4^{j(s-|\alpha|)}$, donc par $|B|^r$.

Considérons, maintenant un ouvert Ω borné de $\mathbb{R}^n$; d'après le lemme de recouvrement ([3] p. 109), il existe une suite de boules $B_j = B(x_j, r_j)$ deux à deux disjointes, contenues dans Ω et telles que $\Omega \subset \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} (B(x_j, 5r_j))$.

En utilisant les résultats de [1], on peut vérifier facilement que

$$\sum_j \operatorname{Cap}_{s-|\alpha|}(B(x_j, r_j/2)) \leqslant C \operatorname{Cap}_{s-|\alpha|}(\Omega);$$

donc

$$\begin{aligned} \sum_j 4^{sj} \int_\Omega |\Delta_j(b_\alpha)(x)|^2 \, dx &\leqslant \sum_k \sum_j 4^{sj} \int_{B(x_k, 5r_k)} |\Delta_j(b_\alpha)(x)|^2 \, dx \\ &\leqslant C \sum_k \operatorname{Cap}_{s-|\alpha|}(B(x_k, 5r_k)) \\ &\leqslant C \operatorname{Cap}_{s-|\alpha|}(\Omega). \end{aligned}$$

Revenons à la continuité de $\pi^{\alpha}_{b_\alpha}$; pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\sum_j 4^{sj} \| \Delta_j(b_\alpha) S_{j-3}(\partial^\alpha f) \|_2^2 \, dx \leqslant C \int_0^{+\infty} \lambda \left(\sum_j 4^{sj} \int_{\Omega_{\lambda,j}} |\Delta_j(b_\alpha)(x)|^2 \, dx \right) d\lambda$$

où

$$\Omega_{\lambda,j} = \{x : |S_{j-3}(\partial^\alpha f)| > \lambda\}.$$

Or, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $\Omega_{\lambda,j} \subset \Omega_\lambda = \{x : (\partial^\alpha f)^*(x) > \lambda\}$ (voir [3] p. 157-158); donc

$$\sum_j 4^{sj} \| \Delta_j(b_\alpha)(x) S_{j-3}(\partial^\alpha f) \|_p^2 \, dx \leqslant C \int_0^{+\infty} \lambda \operatorname{Cap}_{s-|\alpha|}(\Omega_\lambda) \, d\lambda;$$

la Proposition 3 nous donne alors la propriété souhaitée.

Cas (*b*): $|\alpha| = s$. Supposons que $(4^{sj}|\Delta_j(b_\alpha)(x)|^2 \, dx)_j$ soit une mesure de Carleson sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}$; alors $b \in \dot{H}^s_\infty$ et

$$b' = \sum_j 4^{sj} \Delta_j(b_\alpha)$$

appartient à l'espace BMO (voir [7]), b' n'est définie qu'aux constantes près. Or, on sait classiquement (voir [6]) que $\pi_{b'_\alpha} = \pi^0_{b'_\alpha}$ est continu sur $L^2(\mathbb{R}^n)$; en appliquant la Proposition 2, on obtient

$$\sum_j 4^{sj} \| \Delta_j(b_\alpha)(x) S_{j-3}(g) \|_2^2 \leqslant C \| g \|_2^2;$$

d'où

$$\begin{aligned} \sum_j 4^{sj} \| \Delta_j(b_\alpha)(x) S_{j-3}(\partial^\alpha f) \|_2^2 &\leqslant C \| \partial^\alpha f \|_2^2 \\ &\leqslant C \| f \|_{\dot{H}^s}^2. \end{aligned}$$

Dans le cas où $\pi^{\alpha}_{b_\alpha}$ est continu sur $\dot{H}^s$, alors il existe $C > 0$ tel que pour toute $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on ait

$$\sum_j 4^{sj} \| \Delta_j(b_\alpha)(x) S_{j-3}(\partial^\alpha f) \|_2^2 \leqslant C \| f \|_{\dot{H}^s}^2.$$

Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $f(x) = x^\alpha/\alpha!$ pour $|x| \leqslant 2$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|S_j(\partial^\alpha f)| \geqslant 1/2$ sur la boule $B(0, 1)$ pour $j \geqslant N$; ce qui montre

$$\sum_{j \geq N-3} 4^{sj} \int_{B(0,1)} |\Delta_j(b_\alpha)(x)|^2 \, dx \leqslant C \| f \|_{\dot{H}^s}^2.$$

Comme $b \in \dot{B}_\infty^{|\alpha|,\infty}$, on a alors

$$\sum_{j \geq 0} 4^{sj} \int_{B(0,1)} |\Delta_j(b_\alpha)(x)|^2 \, dx < +\infty.$$

Finalement, par translations et dilatations, on obtient la condition désirée. □

Proposition 5. *Soient $s > 0$, $b_\alpha \in \dot{B}_\infty^{|\alpha|,\infty}$ pour $|\alpha| \leqslant [s] = m$ et on suppose que l'opérateur*

$$T = \sum_{|\alpha| \leq m} \pi_{b_\alpha}^\alpha$$

soit continu sur $\dot{H}^s$. Alors pour tout α, $(4^{sj}|\Delta_j(b_\alpha)(x)|^2 \, dx)_{j \in \mathbb{Z}}$ est une r_α-mesure de Carleson sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}$ où $r_\alpha = 1 - 2(s - |\alpha|)/n$.

Remarquons d'abord que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, l'opérateur

$$T' = \sum_{|\alpha| \leq m} \pi_{b'_\alpha}^\alpha$$

est continu sur $\dot{H}^s$ où $b'_\alpha(x) = b_\alpha(2^{-k}(x - x_0))$; cette propriété vient du fait que $\dot{H}^s$, $\dot{B}_\infty^{|\alpha|,\infty}$ sont invariants par translations et dilatations.

Compte-tenu de cette propriété, il nous suffit de montrer la condition de Carleson pour la boule unité. Pour cela, notre preuve repose sur une récurrence sur α; de plus, via le Théorème 2, on utilise la propriété suivante:

$$\left[\sum 4^{sj} \left\| \sum_{|\alpha| \leq m-1} (\Delta_j b_\alpha)(\partial^\alpha f) + \sum_{|\alpha| = m} \Delta_j(b_\alpha) S_{j-3}(\partial^\alpha f) \right\|_2^2 \right]^{1/2} \leqslant C \|f\|_{\dot{H}^s}.$$

Cas (a): $\alpha = 0$. Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $f(x) = 1$ pour $|x| \leqslant 3/2$, alors

$$\sum_{j \geq 0} 4^{sj} \int_{B(0,1)} |\Delta_j(b_0)(x)|^2 \, dx$$

est majorée par $C(A_1 + A_2)^{1/2}$ où

$$A_1 = \left[\sum 4^{sj} \left\| \sum_{|\beta| \leq m-1} (\Delta_j b_\beta)(\partial^\beta f) + \sum_{|\alpha| = m} \Delta_j(b_\beta) S_{j-3}(\partial^\beta f) \right\|_2^2 \right]^{1/2},$$

et

$$A_2 = \sum_{|\beta| = m} \left[\sum 4^{sj} \left| \int_B |\Delta_j b_\beta(x) \partial^\beta f(x)|^2 \, dx \right. \right]^{1/2}.$$

Pour $m = 0$, on se trouve dans le cas de la Proposition 4; on suppose alors que $m \neq 0$. Dans ce cas pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\beta| = m$, $\partial^\beta f$ s'annule sur la boule $B = B(0, 1)$; on peut vérifier facilement que $|S_j(\partial^\beta f)(x)| \leqslant C2^{-j}$ pour tout $x \in B$. De ce fait, on obtient

$$A_2 \leqslant C \sum_{|\beta| = m} \Big[\sum 4^{(s-1)j} \|\Delta_j b_\beta\|_\infty^2 \Big]^{1/2}.$$

Comme $\|\Delta_j b_\beta\|_\infty \leqslant C2^{-jm}$ et $s - m - 1 < 0$, on trouve que A_2 est finie.

Pour terminer, remarquons que $A_1 \leqslant C\|f\|_{\dot H^s}$.

Cas (*b*). Supposons que la proposition soit vraie jusqu'a l'ordre $p \leqslant m - 1$ et soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| = p + 1$. Considérons une fonction $g \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $g(x) = x^\alpha/\alpha!$ sur $B(0, 3/2)$; on a

$$\sum_{j \geq 0} 4^{sj} \int_B |\Delta_j b_\alpha(x) \partial^\alpha f(x)|^2 \, dx$$

est majorée par $C(A'_1 + A'_2 + A'_3)^2$ où

$$A'_1 = \Big[\sum 4^{sj} \Big\| \sum_{|\beta| \leq m-1} \Delta_j(b_\beta)(\partial^\beta g) + \sum_{|\beta| = m} \Delta_j(b_\beta) S_{j-3}(\partial^\beta g) \Big\|_2^2 \Big]^{1/2},$$

$$A'_2 = \sum_{|\beta| = m} \Big[\sum_{j \geq 0} 4^{sj} \int_B |\Delta_j b_\beta(x) S_{j-3}(\partial^\beta g)(x)|^2 \, dx \Big]^{1/2} \quad \text{et}$$

$$A'_3 = \sum_{|\beta| < |\alpha|} \Big[\sum_{j \geq 0} 4^{sj} \int_B |\Delta_j b_\beta(x)(\partial^\beta g)(x)|^2 \, dx \Big]^{1/2}.$$

Or, $A'_1 \leqslant C\|g\|_{\dot H^s}$; de plus, le même raisonnement que (*a*) montre que A'_2 est finie. Finalement l'hypothèse de récurrence nous montre que A'_3 est aussi finie.

Cas (*c*): $|\alpha| = m$. On considère la même fonction $g(x) = x^\alpha/\alpha!$ sur la boule $B(0, 3/2)$; alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|S_{j-3}(\partial^\alpha g)(x)| > 1/2$ sur la boule $B(0, 1)$; donc

$$\sum_{j \geq 0} 4^{sj} \int_B |\Delta_j b_\alpha(x)|^2 \, dx$$

est majorée par $C(E_1 + E_2 + E_3)^{1/2}$ où

$$E_1 = \Big[\sum 4^{sj} \Big\| \sum_{|\beta| \leq m-1} \Delta_j(b_\beta)(\partial^\beta g) + \sum_{|\beta| = m} \Delta_j(b_\beta) S_{j-3}(\partial^\beta g) \Big\|_2^2 \Big]^{1/2}$$

$$E_2 = \sum_{|\beta| < m} \Big[\sum_{j \geq 0} 4^{sj} \int_B |\Delta_j b_\beta(x)(\partial^\beta g)(x)|^2 \, dx \Big]^{1/2}$$

$$E_3 = \sum_{|\beta| = m, \beta \neq \alpha} \Big[\sum_{j \geq 0} 4^{sj} \int_B |\Delta_j b_\beta(x) S_{j-3}(\partial^\beta g)(x)|^2 \, dx \Big]^{1/2}.$$

En utilisant le même raisonnement que (*b*), on peut voir facilement que $E_1 + E_2 + E_3$ est finie. $\square$

Proposition 6. *Sous les hypothèses de la Proposition* 5, *pour tout* α *tel que* $|\alpha| \leqslant [s - n/2]$, *on a* $b_\alpha = 0$.

Le cas où $|\alpha| < [s - n/2]$ est une conséquence immédiate de la Proposition 5; pour les autres cas, c'est à dire $|\alpha| = s - n/2$, on revient à la définition de $\Gamma^\alpha(T)(1)$. Comme $T(x^\beta) = 0$ pour $|\beta| < |\alpha|$, on a donc $\Gamma^\alpha(T)(1) = T(x^\alpha)$; nous allons expliquer le cas $s = n/2$, le cas général est de même nature.

L'opérateur T étant continu sur $\dot{H}^s = \dot{H}^{n/2}$, alors le transposé ${}^tT$ de T est continu sur $\dot{H}^{-n/2}$ et sur L^2, donc de l'espace de Hardy H^1 dans L^1. Soit $h \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\int h(x)\,dx = 0,$$

alors $h \in H^{-n/2}$, donc ${}^tT(h) \in \dot{H}^{-n/2}$; de plus ${}^tT(h) \in L^1$; ce qui montre que

$$\int {}^tT(h)(x)\,dx = 0$$

(voir [4]).

Considérons une fonction $\theta \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\theta = 1$ sur $B(0, 1)$; on sait que $\langle T(1), h\rangle = \lim_{j\to+\infty} \langle \theta_j, {}^tT(h)\rangle$ où $\theta_j(x) = \theta(2^{-j}x)$.

Comme $\lim_{j\to+\infty} \langle \theta_j, {}^tT(h)\rangle$ n'est rien d'autre que $\int {}^tT(h)(x)\,dx$, on obtient alors $\langle T(1), h\rangle = 0$; ce qui explique que $b_0 = 0$. $\square$

Définition 3. *Pour* $s \geqslant 0$, *on désigne par* $\mathrm{BMO}_2^{s,2}$ *l'espace des distributions* $b \in \dot{B}_\infty^{0,\infty}$ *telles que l'opérateur* $\pi_b = \pi_b^0$ *soit continu sur* $\dot{H}^s$.

L'espace $\mathrm{BMO}_2^{s,2}$ a été introduit pour la première fois par Stegenga [12] et pour caractériser les multiplicateurs des espaces de Dirichlet; un peu plus tard M. Meyer [11] a montré la liaison entre ces espaces et les opérateurs intégraux singuliers, et on trouve une autre définition à l'aide du para-produit. Comme conséquence de la Proposition 6, on a $\mathrm{BMO}_2^{s,2} = \{0\}$ pour $s \geqslant n/2$; dans le cas $0 \leqslant s < n/2$, on a la caractérisation suivante:

Corollaire. *Pour* $0 \leqslant s < n/2$, *il y a équivalence entre les propriétés*:

1. $b \in \mathrm{BMO}_2^{s,2}$;
2. *La suite* $(4^{sj}|\Delta_j(b_\alpha)(x)|^2\,dx)_j$ *est une r-mesure de Carleson sur* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}$ *où* $r = 1 - 2s/n$.

Remarques.

1. Comme cas particulier du corollaire, on a $\mathrm{BMO}_2^{0,2} = \mathrm{BMO}$.
2. Désignons par $M(\dot{H}^s)$ l'espace des multiplicateurs ponctuels de $\dot{H}^s$; alors $b \in M(\dot{H}^s)$ si et seulement si $b \in L^\infty$ et $b \in \mathrm{BMO}_2^{s,2}$.
3. Dans le cas $s \geqslant n/2$, on a $M(\dot{H}^s) = \{0\}$; ce fait vient du choix de la réalisation de $\dot{H}^s$ qui est définie modulo les polynômes de degré $[s - n/2]$. Cette difficulté peut être contournée en utilisant la réalisation de $\dot{H}^s$ dans $\mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ (voir [4] ou [13]).

Revenons aux opérateurs paradifférentiels. En utilisant les propositions 4, 5 et 6, on obtient le théorème suivant.

Théorème 3. *Soient $s \geqslant 0$ et $b_\alpha \in \dot{B}_\infty^{|\alpha|,\infty}$ pour $|\alpha| \leqslant [s]$; alors il y a équivalence entre les propriétés*:

1. *L'opérateur*
$$T = \sum_{|\alpha| \leq [s]} \pi_{b_\alpha}^\alpha$$
est continu sur $\dot{H}^s$;
2. *Pour tout α, $\pi_{b_\alpha}^\alpha$ est continu sur $\dot{H}^s$*;
3. *Pour tout α et pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| = |\beta|$, on a $\partial^\beta b_\alpha \in \mathrm{BMO}_2^{s-|\alpha|,2}$.*

4. Conclusions

(*a*) Nous devons généraliser les résultats exposés aux espaces de Sobolev $\dot{H}_p^s$ ou au moins l'équivalence entre (1) et (2) du Théorème 3. Les principales techniques peuvent se baser, d'une part, sur les travaux de Frazier-Torres-Weiss [8], et sur les capacités-$\dot{H}_p^s$ d'autre part.

(*b*) Le cas des espaces de Besov paraît plus délicat; à notre avis, il faut d'abord utiliser la localisation de $\dot{B}_p^{s,p}$ pour $0 \leqslant s < n/p$ (voir [13]), et ensuite procéder par les capacités-$B_p^{s,p}$ où $B_p^{s,p}$ désigne l'espace de Besov inhomogène.

Bibliographie

[1] Adams, D. R. Quasi-additivity and sets of finite L^p-capacity. *Pac. J. Math.* **79**(1978), 283-291.

[2] Adams, D. R. Lecture on L^p-potential theory. *Univ. of Umeä*, **2**(1981).

[3] Bourdaud, G. Analyse fonctionnelle dans l'espace euclidien. *Pub. Math. Paris*, **23**(1987).

[4] Bourdaud, G. Localisation et multiplicateurs des espaces de Sobolev homogènes. *Manuscripta Math.* **60**(1988), 93-130.
[5] Coifman, R., and Murai, T. Commutators on the potential-theoretic energy spaces. *Tôhoku Math. J.* **40**(1988), 397-407.
[6] David, G. and Journé, J. L. A boundedness criterion for generalized Calderón-Zygmund operators. *Annals. of Math.* **120**(1984), 371-389.
[7] Frazier, M. and Jawerth, B. A discrete transform and decomposition of distribution spaces. To appear.
[8] Frazier, M., Torres, R. and Weiss, G. The boundedness of Calderón-Zygmund operators on the spaces $F_p^{\alpha,q}$. *Revista Mat. Iberoamericana*, **4**(1988), 41-72.
[9] Johnson, R. Application of Carleson measures to P.D.E. and Fourier multiplier problems. *Lecture Notes Math.* **992**(1983).
[10] Lemarié, P. G. Continuité sur les espaces de Besov des opérateurs définis par des intégrales singulières. *Ann. Inst. Fourier Grenobre* **4**(1985).
[11] Meyer, M. *Arkiv. for Math.* (à paraître).
[12] Stegenga, D. A. Multiplier of the Dirichlet spaces. *Illinois J. Math.*, **24**(1980), 113-119.
[13] Youssfi, A. Localisation des espaces de Besov homogènes. *Indiana Univ. Math. J.* **3**(1988), 565-587.
[14] Youssfi, A. Continuité-Besov des opérateurs définis par des intégrales singulières. *Manuscripta Math.* **65**(1989), 289-310.

Recibido: 10 de octubre de 1989.

Abdellah Youssfi
Université de Paris, VII
U.F.R. de Mathématiques, Tour 45-55
2, place Jussieu
75005 Paris
FRANCE