

Ondelettes sur l'intervalle

Yves Meyer

1. Introduction

En 1873 Dubois-Reymond construisit une fonction continue de la variable réelle x et 2π -périodique dont la série de Fourier diverge en un point donné. Ce contre-exemple amena A. Haar à se poser, puis à résoudre le problème de l'existence d'une base orthonormée $h_0(x), h_1(x), \dots, h_m(x), \dots$ de $L^2[0, 1]$ ayant la propriété que, pour toute fonction continue $f(x)$, la série $\sum_0^\infty \langle f, h_m \rangle h_m(x)$ converge uniformément vers $f(x)$. A Haar choisit $h_0(x) = 1$, $h_1(x) = h(x)$ où $h(x) = 1$ sur $[0, 1/2[$, $h(x) = -1$ sur $[1/2, 1[$ et $h(x) = 0$ ailleurs. Enfin, pour $m = 2^j + k$, $0 \leq k < 2^j$, $j \geq 0$, il pose $h_m(x) = 2^{j/2} h(2^j x - k)$.

Les sommes partielles $\langle f, h_0 \rangle h_0(x) + \dots + \langle f, h_m \rangle h_m(x) = S_m(f)(x)$ sont des approximations de $f(x)$ par des fonctions en escalier. Mais si, pour un certain exposant $s \in]0, 1[$, $f(x)$ vérifiait en outre,

$$(1.1) \quad f(x+h) - f(x) = o(h^s)$$

uniformément en $x \in \mathbb{R}$, les sommes partielles $S_m(f)$ ne pourraient converger vers $f(x)$ pour la norme de l'espace de Banach C_0^s défini par (1.1).

Peut-on modifier la construction du système de Haar et obtenir une base orthonormée de $L^2[0, 1]$ convenant à l'analyse et à la synthèse des espaces de Hölder C^s définis par (1.1)?

Ce problème a été étudié depuis le travail de pionnier de Haar. G. Faber puis J. Schauder ont commencé par remplacer les fonctions $h_m(x)$ du système de Haar par leurs primitives $\Delta_m(x)$. En changeant la normalisation, il vient $\Delta_m(x) = \Delta(2^j x - k)$ où $m = 2^j + k$, $0 \leq k < 2^j$, et où $\Delta(x) = 2x$ si $0 \leq x \leq 1/2$, $2 - 2x$ si $1/2 \leq x \leq 1$ et 0 hors de l'intervalle $[0, 1]$.

L'approximation d'une fonction continue sur $[0, 1]$ par les sommes partielles de la série $a + bx + \sum_1^\infty \alpha_m \Delta_m(x)$ revient à approcher le graphe de $f(x)$ par des lignes polygonales inscrites et constitue donc une amélioration de l'approximation à l'aide des fonctions en escalier. Si $f(x)$ appartient à $C_0^s[0, 1]$, on a $\alpha_m = o(m^{-s})$ et réciproquement, si cette condition est vérifiée, la série $a + bx + \sum_1^\infty \alpha_m \Delta_m(x)$ converge vers $f(x)$ en norme $C^s[0, 1]$. En ce sens, le système de Schauder $\Delta_m(x)$, $m \geq 1$ (complété par 1 et x) est une base *inconditionnelle* de l'espace $C_0^s[0, 1]$.

En revanche, le système de Schauder ne peut plus servir à l'analyse de l'espace $L^2[0, 1]$. Une façon de le voir est d'observer que les coefficients α_m se calculent par

$$(1.2) \quad \alpha_m = f\left(\left(\frac{k+1}{2}\right)2^{-j}\right) - \frac{1}{2} [f(k2^{-j}) + f((k+1)2^{-j})]$$

et que cette formule n'a plus aucun sens si $f(x)$ appartient à $L^2[0, 1]$.

Pour corriger ce défaut de la base de Schauder, Ph. Franklin a eu l'idée d'orthogonaliser la suite $1, x, \Delta_1(x), \dots, \Delta_m(x), \dots$ en utilisant le procédé de Gram-Schmidt. On obtient alors une suite $f_m(x)$, $m \geq -1$, où $f_{-1}(x) = 1$, $f_0(x) = 2\sqrt{3}(x - 1/2)$, etc... Le système de Franklin est un peu tombé dans l'oubli parce que les fonctions $f_m(x)$ ne sont pas fournies par un algorithme aussi simple que celui des fonctions $h_m(x)$ du système de Haar. Cependant en 1963, Ciesielski démontra que tout se passe comme si l'on avait $f_m(x) = 2^{j/2}\psi(2^jx - k)$ lorsque $m = 2^j + k$. Il prouve en effet que $|f_m(x)| \leq C2^{j/2} \exp(-\gamma|2^j - k|)$ pour un certain exposant $\gamma > 0$. Cette estimation, jointe à

$$\int_0^1 f_m(x) dx = \int_0^1 x f_m(x) dx = 0,$$

fournit la caractérisation attendue des espaces $C^s[0, 1]$ par $\alpha_m = O(m^{-1/2-s})$. La différence avec la base de Schauder vient de ce que les normalisations sont différentes.

Nous nous proposons de corriger le défaut du système de Franklin. Plus précisément, pour tout entier $N \geq 1$, nous allons construire une base orthonormée $f_m^{(N)}$ de $L^2[0, 1]$ ayant une structure algorithmique aussi simple que celle du système de Haar. En outre, pour une constante absolue $\gamma > 0$ qui est estimée dans [1], les espaces $C^s[0, 1]$ seront caractérisés par $\alpha_m = O(m^{-1/2-s})$ lorsque $0 < s < \gamma(N - 1)$.

Pour l'essentiel notre nouvelle base a exactement la structure du système de Haar puisqu'elle contient toutes les fonctions $2^{j/2}\psi(2^jx - k)$, $j \geq 0$, $k \geq 0$, dont le support est inclus dans $[0, 1]$. Ici $\psi(x)$ désigne «l'ondelette de Daubechies» dont le support est l'intervalle $[0, 2N - 1]$.

Malheureusement les fonctions précédentes engendrent un sous-espace de $L^2[0, 1]$ de codimension infinie. Ceci est dû aux *effets de bord* produits par 0 et

1. Pour tenir compte de ces effets de bord, il nous faudra adjoindre aux fonctions précédentes (les $2^{j/2}\psi(2^jx - k)$) les fonctions $2^{j/2}\psi_1^\#(2^jx), \dots, 2^{j/2}\psi_{N-1}^\#(2^jx)$, «affectées à 0» et les fonctions $2^{j/2}\psi_1^b(2^j(1-x)), \dots, 2^{j/2}\psi_{N-1}^b(2^j(1-x))$ «affectées à 1». Nous apprendrons à construire les $2N - 2$ fonctions $\psi_l^\#$ et ψ_l^b , $1 \leq l \leq N - 1$. Il manquera alors un ensemble fini explicite pour constituer la base orthonormée cherchée de $L^2[0, 1]$.

2. Rappels sur les ondelettes d'Ingrid Daubechies et sur les filtres associés

On part d'un entier $N \geq 1$ et de $2N$ coefficients $h_0, h_1, \dots, h_{2N-1}$ tels que le polynôme trigonométrique

$$m_0(\xi) = h_0 + h_1 e^{i\xi} + \dots + h_{2N-1} e^{i(2N-1)\xi}$$

vérifie les trois conditions suivantes

$$(2.1) \quad |m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 = 1$$

$$(2.2) \quad m_0(0) = 1$$

$$(2.3) \quad m_0(\xi) \neq 0 \quad \text{si} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \xi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Ces trois conditions assurent l'existence d'une suite orthonormée $\varphi(x - k)$, $k \in \mathbb{Z}$, de fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ telle que l'on ait

$$(2.4) \quad \frac{1}{2} \varphi(x) = h_0 \varphi(2x) + \dots + h_k \varphi(2x - k) + \dots + h_{2N-1} \varphi(2x - (2N - 1))$$

et

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1.$$

On construit $\varphi(x)$ à l'aide de

$$(2.5) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \varphi(x) dx = m_0(\xi/2) m_0(\xi/4) \dots$$

et le support de φ est inclus dans $[0, 2N - 1]$.

Nous ferons dans tout ce qui suit le choix particulier suivant. On part de la fonction $c(\sin t)^{2N-1}$ où $c = c(N) > 0$ est la constante définie par

$$c \int_0^\pi (\sin t)^{2N-1} dt = 1.$$

On désigne par $g(t)$ la primitive de $c(\sin t)^{2N-1}$ qui est nulle en π . On a alors $g(-t) = g(t)$, $g(t) \geq 0$ pour tout t et $g(t) + g(t + \pi) = 1$. Le lemme de F. Riesz permet alors de choisir

$$m_0(t) = h_0 + h_1 e^{it} + \dots + h_{2N-1} e^{i(2N-1)t}$$

de sorte que

$$|m_0(t)|^2 = g(t).$$

Notons que

$$|m(t)|^2 = h_0 \bar{h}_{2N-1} e^{-i(2N-1)t} + \dots + \bar{h}_0 h_{2N-1} e^{i(2N-1)t}$$

et que $h_0 h_{2N-1} \neq 0$.

Ces choix de $m_0(\xi)$ conduisent à des ondelettes de régularité $C^{\gamma(N-1)}$ où $\gamma > 0$ est une constante universelle et où l'on suppose $N \geq 2$. Le cas $N = 1$ correspond au système de Haar.

On définit ensuite l'ondelette $\psi(x)$ en introduisant

$$\begin{aligned} m_1(\xi) &= e^{i(2N-1)\xi} \overline{m_0(\xi + \pi)} \\ &= g_0 + g_1 e^{i\xi} + \dots + g_{2N-1} e^{i(2N-1)\xi} \end{aligned}$$

et en posant

$$(2.6) \quad \frac{1}{2} \psi(x) = g_0 \varphi(2x) + g_1 \varphi(2x - 1) + \dots + g_{2N-1} \varphi(2x - 2N + 1).$$

Les identités (2.4) et (2.6) conduisent à

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \varphi(2x) &= \bar{h}_0 \varphi(x) + \bar{h}_2 \varphi(x + 1) + \dots + \bar{h}_{2N-2} \varphi(x + N - 1) \\ &\quad + \bar{g}_0 \psi(x) + \bar{g}_2 \psi(x + 1) + \dots + \bar{g}_{2N-2} \psi(x + N - 1) \end{aligned}$$

et à

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \varphi(2x - 1) &= \bar{h}_1 \varphi(x) + \bar{h}_3 \varphi(x + 1) + \dots + \bar{h}_{2N-1} \varphi(x + N - 1) \\ &\quad + \bar{g}_1 \psi(x) + \bar{g}_3 \psi(x + 1) + \dots + \bar{g}_{2N-1} \psi(x + N - 1). \end{aligned}$$

Voici l'interprétation géométrique de ces identités. Les fonctions $\varphi(x - k)$, $k \in \mathbb{Z}$, sont une base orthonormée d'un espace que l'on note V_0 . On définit V_j , $j \in \mathbb{Z}$, par

$$(2.9) \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}), \quad f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(2^j x) \in V_j$$

et les fonctions $\psi(x - k)$, $k \in \mathbb{Z}$, forment une base orthonormée du complément orthogonal W_0 de V_0 dans V_1 . En particulier $\varphi(2x)$ appartient à V_1 et

(2.7) fournit sa décomposition $u + v$ où $u \in V_0$ et $v \in W_0$. Il en est de même pour $\varphi(2x - 1)$ qui est décomposé grâce à (2.8). Finalement toutes les fonctions $\varphi(x - k)$, $k \in \mathbb{Z}$, se décomposent, si k est pair, grâce à (2.7) et si k est impair, grâce à (2.8). Cela signifie que (2.7) et (2.8) sont les formules de changement de base permettant de passer de la base orthonormée $\sqrt{2}\varphi(2x - k)$, $k \in \mathbb{Z}$, de V_1 à la nouvelle base orthonormée que l'on obtient en réunissant les bases $\varphi(x - k)$, $k \in \mathbb{Z}$, de V_0 et $\psi(x - k)$, $k \in \mathbb{Z}$, de W_0 .

3. L'analyse multirésolution $V_j^{[0,1]}$ de $L^2[0, 1]$

On part de la suite emboîtée V_j , $-\infty < j < \infty$, de sous-espaces fermés de $L^2(\mathbb{R})$, définis par

(3.1) $\varphi(x - k)$, $k \in \mathbb{Z}$, est une base orthonormée de V_0

(3.2) $f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(2^j x) \in V_j$, pour toute $f \in L^2(\mathbb{R})$.

et l'on désigne, pour tout $j \in \mathbb{N}$, par $V_j^{[0,1]}$ l'espace des restrictions à $[0, 1]$ des fonctions de V_j . Puisque $\varphi(x)$ est une fonction à support compact, il est évident que $V_j^{[0,1]}$ est de dimension finie. En fait, on a un résultat beaucoup plus précis.

Désignons par $S(j)$ l'intervalle d'entiers k définis par $-2N + 2 \leq k \leq 2^j - 1$ ou, ce qui est équivalent, par la condition que le support de la fonction $\varphi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\varphi(2^j x - k)$ rencontre l'intervalle $]0, 1[$. Alors on a

Théorème 1. *Pour tout entier $j \geq 0$, les fonctions $\varphi_{j,k}$, $k \in S(j)$ constituent une base de l'espace $V_j^{[0,1]}$ des restrictions à $[0, 1]$ des fonctions de V_j .*

Cet énoncé peut se formuler de façon équivalente et cette seconde formulation nous sera utile, par la suite.

Corollaire. *Soit*

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k \varphi(2^j x - k)$$

une fonction arbitraire de V_j . Supposons $j \geq 0$ et $f(x) = 0$ si $0 \leq x \leq 1$. Alors $f(x)$ est formellement nulle sur $[0, 1]$, c'est-à-dire que $c_k = 0$ pour tout $k \in S(j)$.

Nous établirons le théorème par une récurrence descendante sur j . Nous commencerons par traiter le cas facile où $2^j \geq 4N - 4$ en utilisant le lemme suivant

Lemme 1. *Si*

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k \varphi(x - k)$$

est nulle sur $] -\infty, 0]$, alors $f(x)$ est formellement nulle sur $] -\infty, 0]$, c'est-à-dire $f(x) = c_0 \varphi(x) + c_1 \varphi(x - 1) + \dots$

Pour le montrer, on commence par observer que

$$c_k = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\varphi(x - k)} dx = 0 \quad \text{si } k \leq -2N + 1.$$

On désigne alors par l le plus petit des entiers k tels que $c_k \neq 0$. Si $l \geq 0$, il n'y a rien à démontrer et si $l < 0$, il suffit d'observer que $f(x)$, restreinte à $[l, l + 1]$ est nulle, par hypothèse, mais est aussi égale à $c_l \varphi(x - l)$. Puisque le support de φ est exactement $[0, 2N - 1]$, on aboutit à une contradiction.

Pour démontrer le Théorème 1, nous définissons j_0 comme le plus petit entier j tel que $2^j \geq 4N - 4$. Nous commençons par établir le Théorème 1 quand $j \geq j_0$. Dans ce cas l'ensemble $S(j)$ des entiers k tels que le support de $\varphi_{j,k}$ rencontre $]0, 1[$ se divise en trois ensembles disjoints $S_1(j)$, $S_2(j)$ et $S_3(j)$ selon que l'intérieur du support de $\varphi_{j,k}$ contient 0, que le support de $\varphi_{j,k}$ est inclus dans $[0, 1]$ ou que l'intérieur du support de $\varphi_{j,k}$ contient 1. Lorsque $j \geq j_0$ et que $k \in S_1(j)$, le support de $\varphi_{j,k}$ est inclus dans $] -\infty, 1/2]$ et lorsque $j \geq j_0$ et $k \in S_3(j)$, ce support est inclus dans $[1/2, \infty[$. Si $j \geq j_0$ et si

$$f(x) = \sum_{k \in S(j)} c_k \varphi_{j,k}(x)$$

est nulle sur $[0, 1]$, alors

$$c_k = \int f(x) \overline{\varphi_{j,k}(x)} dx = 0 \quad \text{si } k \in S_2(j).$$

Ensuite

$$f_1(x) = \sum_{k \in S_1(j)} c_k \varphi_{j,k}(x)$$

est nulle sur $[1/2, \infty[$,

$$f_3(x) = \sum_{k \in S_3(j)} c_k \varphi_{j,k}(x)$$

l'est sur $] -\infty, 1/2]$ et $f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) = f(x)$ l'est sur $[0, 1]$. Il en résulte que $f_1(x)$ est nulle sur $[0, \infty[$. Le Lemme 1 s'applique et $c_k = 0$ si $k \in S_1(j)$. On en déduit, de même, que $c_k = 0$ si $k \in S_3(j)$.

Nous désignerons par P_j la propriété: les fonctions $\varphi_{j,k}(x)$, $k \in S(j)$, forment une base de $V_j^{[0,1]}$. Nous nous proposons maintenant de démontrer que P_j implique P_{j-1} . Pour cela, on utilise le lemme suivant

Lemme 2. *Si les h_0, \dots, h_{2N-1} sont les coefficients utilisés pour construire $m_0(\xi)$, alors toute suite u_0, \dots, u_{2N-3} vérifiant, pour $0 \leq k \leq N-2$, les relations*

$$h_0 u_k + h_2 u_{k+1} + \dots + h_{2N-2} u_{k+N-1} = 0$$

et

$$h_1 u_k + h_3 u_{k+1} + \dots + h_{2N-1} u_{k+N-1} = 0$$

est nécessairement la suite nulle.

On pose, en effet,

$$\begin{aligned} U(z) &= h_0 + h_2 z + \dots + h_{2N-2} z^{N-1} \quad \text{et} \\ V(z) &= h_1 + h_3 z + \dots + h_{2N-1} z^{N-1} \end{aligned}$$

et l'on a

$$m_0(\xi) = U(e^{2i\xi}) + e^{i\xi} V(e^{2i\xi}).$$

Puisque

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 = 1,$$

il vient

$$|U(e^{i\xi})|^2 + |V(e^{i\xi})|^2 = \frac{1}{2}.$$

Puisque les coefficients h_k sont réels, il en découle que

$$U(z)U(z^{-1}) + V(z)V(z^{-1}) = \frac{1}{2}$$

pour tout $z \neq 0$. Donc $U(z)$ et $V(z)$ n'ont aucun zéro commun $z \neq 0$ et, puisque $h_0 \neq 0$, $U(z)$ et $V(z)$ n'ont aucun zéro commun.

Désignons par z_1, \dots, z_{N-1} les zéros, supposés simples, de $U(z)$ et par $\zeta_1, \dots, \zeta_{N-1}$ ceux de $V(z)$, que l'on supposera également simples dans un premier temps. On a alors

$$u_k = c_1 z_1^k + \dots + c_{N-1} z_{N-1}^k \quad \text{pour } 0 \leq k \leq 2N-3$$

et, de même,

$$u_k = \gamma_1 \zeta_1^k + \cdots + \gamma_{N-1} \zeta_{N-1}^k \quad \text{pour } 0 \leq k \leq 2N-3.$$

Il en découle que

$$c_1 z_1^k + \cdots + c_{N-1} z_{N-1}^k - \gamma_1 \zeta_1^k - \cdots - \gamma_{N-1} \zeta_{N-1}^k = 0$$

pour $0 \leq k \leq 2N-3$. Or ces relations de liaison entraînent la nullité du déterminant de Van der Monde

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & \cdots & \zeta_{N-1} \\ z_1^{2N-3} & \cdots & \zeta_{N-1}^{2N-3} \end{vmatrix}$$

ce qui est absurde, puisque

$$\{z_1, \dots, z_{N-1}\} \cap \{\zeta_1, \dots, \zeta_{N-1}\} = \emptyset.$$

Ce raisonnement s'adapte immédiatement au cas de racines multiples de $U(z)$ ou de $V(z)$.

Revenons à la preuve du Théorème 1 et montrons que P_{j+1} implique P_j , pour tout $j \geq 0$.

Supposons donc que

$$\sum_{k \in S(j)} x_k \varphi(2^j x - k) = 0$$

sur $[0, 1]$. On écrit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \varphi(2^j x - k) &= h_0 \varphi(2^{j+1} x - 2k) + h_1 \varphi(2^{j+1} x - 2k - 1) + \cdots \\ &\quad + h_{2N-1} \varphi(2^{j+1} x - 2k - 2N + 1). \end{aligned}$$

On a donc, si $0 \leq x \leq 1$,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k \in S(j)} x_k \varphi(2^j x - k) \\ &= \sum_0^{2N-1} \sum_k x_k h_l \varphi(2^{j+1} x - 2k - l). \end{aligned}$$

La propriété P_{j+1} nous apprend que toute somme $\sum_{-\infty}^{\infty} y_k \varphi(2^{j+1} x - k)$ qui est *identiquement* nulle sur $[0, 1]$ est, en fait, *formellement* nulle sur $[0, 1]$: chaque terme qui la compose est nul sur $[0, 1]$. On a donc les $2^{j+1} + 2N - 2$ relations

$$\begin{aligned}
y_{-2N+2} &= x_{-N+1}h_0 + x_{-N}h_2 + \cdots + x_{-2N+2}h_{2N-2} = 0 \\
y_{-2N+3} &= x_{-N+1}h_1 + x_{-N}h_3 + \cdots + x_{-2N+2}h_{2N-1} = 0 \\
y_{-2N+4} &= x_{-N+2}h_0 + x_{-N+1}h_2 + \cdots + x_{-2N+3}h_{2N-2} = 0 \\
y_{-2N+5} &= x_{-N+2}h_1 + x_{-N+1}h_3 + \cdots + x_{-2N+3}h_{2N-1} = 0 \\
&\dots\dots \\
y_{2j+1-2} &= x_{2j-1}h_0 + \cdots + x_{2j-N}h_{2N-2} = 0 \\
y_{2j+1-1} &= x_{2j-1}h_1 + \cdots + x_{2j-N}h_{2N-1} = 0.
\end{aligned}$$

On utilise alors le Lemme 2 et il vient $x_{-2N+2} = \cdots = x_{2j-1} = 0$, comme annoncé.

Nous pouvons compléter le Théorème 1 par l'énoncé quantitatif correspondant. A savoir l'existence de deux constantes $C_2 > C_1 > 0$, indépendantes de $j \geq 0$, telles que l'on ait pour toute suite $\alpha_{j,k}$, $k \in S(j)$, de coefficients

$$\begin{aligned}
C_1 \left(\sum_{k \in S(j)} |\alpha_{j,k}|^2 \right)^{1/2} &\leq \left\| \sum_{k \in S(j)} \alpha_{j,k} \varphi_{j,k}(x) \right\|_{L^2(0,1)} \\
&\leq C_2 \left(\sum_{k \in S(j)} |\alpha_{j,k}|^2 \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Si $0 \leq j < j_0$, il n'y a rien à démontrer et (3.3) paraphrase le Théorème 1. Si $j \geq j_0$, on pose

$$f(x) = \sum_{k \in S(j)} \alpha_{j,k} \varphi_{j,k}(x)$$

puis

$$f_1(x) = \sum_{k \in S_1(j)} (\cdots), \quad f_2(x) = \sum_{k \in S_2(j)} (\cdots) \quad \text{et} \quad f_3(x) = \sum_{k \in S_3(j)} (\cdots),$$

L'inégalité de Bessel fournit, tout d'abord,

$$\sum_{k \in S_2(j)} |\alpha_{j,k}|^2 \leq \int_0^1 |f(x)|^2 dx.$$

Il en découle que

$$\|f_1 + f_3\|_{L^2[0,1]} \leq 2\|f\|_{L^2[0,1]}.$$

Mais les supports de f_1 et de f_3 sont disjoints puisque $j \geq j_0$. Il en résulte que $\|f_1\|_2 + \|f_3\|_2 \leq 2\sqrt{2}\|f\|_2$. Les normes de $f_1(x)$ et de $f_3(x)$ s'évaluent enfin par simple changement d'échelle et les estimations ne dépendent pas de j .

L'inégalité de droite de (3.3) est encore plus facile, en utilisant la décomposition $f = f_1 + f_2 + f_3$.

Avant de passer à la construction des ondelettes, nous allons déduire du Théorème 1 la construction d'une base orthonormée de $V_j^{[0,1]}$. Nous nous limiterons au cas où $j \geq j_0$. Alors les fonctions $\varphi_{j,k}$, $k \in S_1(j)$, $k \in S_2(j)$ ou $k \in S_3(j)$ forment une base (non orthogonale) de $V_j^{[0,1]}$. Il importe de remarquer que, pour le produit scalaire de $L^2[0, 1]$, les fonctions $\varphi_{j,k}$, $k \in S_1(j)$ sont orthogonales aux fonctions $\varphi_{j,k}$, $k \in S_2(j)$. Cette orthogonalité tient à ce que l'on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \bar{\varphi}(x - k) dx = 0 \quad \text{si } k \in \mathbb{Z}, \quad k \neq 0.$$

Ensuite les fonctions $\varphi_{j,k}$, $k \in S_1(j)$ sont orthogonales aux fonctions $\varphi_{j,k}$, $k \in S_3(j)$ parce que leurs supports sont disjoints.

Pour transformer en une base orthonormée la base des $\varphi_{j,k}$, $k \in S(j)$, il suffit donc de rendre orthogonales entre elles les fonctions du paquet $\varphi_{j,k}$, $k \in S_1(j)$ et, de même, de rendre orthogonales entre elles les fonctions du paquet $\varphi_{j,k}$, $k \in S_3(j)$. Dans chaque cas, il s'agit de $N - 1$ fonctions et les calculs à faire sont invariants par dilatation. On obtient donc, à la place des $N - 1$ fonctions $\varphi_{j,k}(x)$, $k \in S_1(j)$, $N - 1$ nouvelles fonctions

$$2^{j/2} \varphi_1^{\#}(2^j x), \dots, 2^{j/2} \varphi_{N-1}^{\#}(2^j x)$$

et de même, à la place des $N - 1$ fonctions $\varphi_{j,k}$, $k \in S_3(j)$, $N - 1$ nouvelles fonctions

$$2^{j/2} \varphi_1^b(2^j(1 - x)), \dots, 2^{j/2} \varphi_{N-1}^b(2^j(1 - x)).$$

Nous pouvons conclure en énonçant le résultat suivant

Proposition 1. *Pour $j \geq j_0$, la collection des fonctions*

$$2^{j/2} \varphi_1^{\#}(2^j x), \dots, 2^{j/2} \varphi_{N-1}^{\#}(2^j x), 2^{j/2} \varphi(2^j x - k), \quad 0 \leq k \leq 2^j - 2N + 1$$

et, finalement

$$2^{j/2} \varphi_1^b(2^j(1 - x)), \dots, 2^{j/2} \varphi_{N-1}^b(2^j(1 - x))$$

est une base orthonormée de $V_j^{[0,1]}$.

Une dernière remarque nous sera utile dans ce qui suit

Lemme 3. *L'espace vectoriel $V_0^{[0,1]}$ (de dimension $2N - 1$) contient l'espace vectoriel (de dimension N) des restrictions à $[0, 1]$ des polynômes de degré $\leq N - 1$.*

Pour le voir, on commence par observer que

$$\sum_{-\infty}^{\infty} (x - k)^m \varphi(x - k) = c_m \quad \text{pour } 0 \leq m \leq N - 1,$$

on le montre en appliquant la formule sommatoire de Poisson et en observant que

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^m \varphi(x) = 0 \quad \text{si } x = 2k\pi, \quad k \neq 0, \quad \text{et } 0 \leq m \leq N - 1.$$

Il en découle que

$$\sum_{-\infty}^{\infty} k^m \varphi(x - k) = P_m(x)$$

où $P_m(x)$ est un polynôme de degré m .

En restreignant cette identité à $[0, 1]$, on obtient le Lemme 3.

La construction des ondelettes sur l'intervalle $[0, 1]$ débute par l'orthonormalisation de la base de $V_0^{[0, 1]}$ constituée des fonctions $\varphi(x + 2N - 2)$, $\varphi(x + 2N - 3)$, \dots , $\varphi(x)$. Compte tenu du Lemme 3, nous commencerons par substituer à cette base celle composée des monômes $1, x, \dots, x^{N-1}$ puis de $N - 1$ fonctions $g_1(x), \dots, g_{N-1}(x)$ de $V_0^{[0, 1]}$. L'orthonormalisation de cette nouvelle base fournit donc N polynômes orthogonaux suivis de $N - 1$ fonctions de $V_0^{[0, 1]}$ dont les moments d'ordre $\leq N - 1$ sont tous nuls. Ces fonctions seront donc des ondelettes et il en sera de même de celles que nous allons maintenant construire.

4. La construction des ondelettes sur l'intervalle

Cette construction repose sur l'énoncé suivant qui permet de compléter la base $\varphi_{j,k}$, $k \in S(j)$, en une base de $V_{j+1}^{[0, 1]}$.

Théorème 2. *Pour tout $j \geq 0$, une base de $V_{j+1}^{[0, 1]}$ est constituée de la réunion de la base $\varphi_{j,k}$ de $V_j^{[0, 1]}$ et des fonctions $\psi_{j,k}$ telles que $-N + 1 \leq k \leq 2^j - N$.*

Pour établir ce résultat, on commence par démontrer le résultat suivant

Lemme 4. *Les fonctions $\psi(2^j x - k)$, $-2N + 2 \leq k \leq -N$, une fois restreintes à $[0, 1]$, appartiennent à $V_j^{[0, 1]}$.*

Nous poserons $2^j x = t$ et définirons $V_0^{[0, \infty[}$ comme l'espace des restrictions à $[0, \infty[$ des fonctions de $V_0 = V_0(\mathbb{R})$. Le Lemme 4 résultera du résultat plus précis suivant

Lemme 5. *Les fonctions $\psi(x - k)$, $-2N + 2 \leq k \leq -N$, une fois restreintes à $[0, \infty[$, appartiennent à $V_0^{[0, \infty[}$.*

Cela signifie que si plus la moitié du support de $\psi(x - k)$ tombe à l'extérieur de $[0, \infty[$, la restriction à $[0, \infty[$ de $\psi(x - k)$ appartient à V_0 mais, en revanche, que les $N - 1$ fonctions $\psi(x + N - 1), \dots, \psi(x + 1)$, une fois restreintes à $[0, \infty[$, sont linéairement indépendantes modulo V_0 .

Revenons au Lemme 5. Pour l'établir, on retourne à (2.7) où l'on remplace successivement x par $x + 2N - 2$, puis par $x + 2N - 3, \dots$ et, enfin, x par $x + N$. Puisque $\varphi(2x + 2N - 1) = 0$ si $x \geq 0$, il vient successivement, pour $x \geq 0$,

$$\bar{g}_0 \psi(x + 2N - 2) + \bar{h}_0 \varphi(x + 2N - 2) = 0$$

puis

$$\begin{aligned} \bar{g}_0 \psi(x + 2N - 3) + \bar{g}_2 \psi(x + 2N - 2) + \bar{h}_0 \psi(x + 2N - 3) \\ + \bar{h}_2 \varphi(x + 2N - 2) = 0 \end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned} \bar{g}_0 \psi(x + N) + \dots + \bar{g}_{2N-4} \psi(x + 2N - 2) + \bar{h}_0 \varphi(x + N) \\ + \dots + \bar{h}_{2N-4} \varphi(x + 2N - 2) = 0. \end{aligned}$$

A l'aide de ces relations, on démontre successivement que $\psi(x + 2N - 2)$, restreint à $[0, \infty[$, appartient à $V_0^{[0, \infty[}$ puis qu'il en est de même pour $\psi(x + 2N - 3)$ et, de proche en proche, pour tous les $\psi(x + k)$, $2N - 2 \geq k \geq N$.

Le Lemme 4 résulte du Lemme 5 par simple changement d'échelle.

Pour démontrer le Théorème 2, on observe d'abord que le nombre de fonctions proposées est exactement la dimension $(2^{j+1} + 2N - 2)$ de $V_{j+1}^{[0, 1]}$. Pour établir le théorème, il suffit d'établir que ces fonctions constituent un système générateur.

On part donc d'une fonction arbitraire f de V_{j+1} et l'on veut montrer que la restriction de f à $[0, 1]$ s'écrit $g + h$ où $g \in V_j^{[0, 1]}$ et

$$(4.1) \quad h(x) = \sum_{-N+1}^{2^j - N} \alpha(j, k) \psi_{j, k}(x).$$

En fait, $f = u + v$ où $u \in V_j$ et $v \in W_j$. À ce titre, $v(x) = \sum_k \beta(j, k) \psi_{j, k}(x)$. Dans cette série, on peut distinguer sept ensembles de valeurs de k . Si $k \leq -2N + 1$, la restriction de $\psi_{j, k}$ à $[0, 1]$ est nulle et on n'a pas à considérer les termes correspondants. Si $-2N + 2 \leq k \leq -N$, la restriction de $\psi_{j, k}$ à $[0, 1]$

appartient à $V_j^{[0,1]}$ (Lemme 4) et contribue à la fonction $g(x)$. Les termes tels que $-N+1 \leq k \leq 2^j - N$ sont ceux qui nous intéressent.

Si $2^j - N + 1 \leq k \leq 2^j - 1$, la restriction de $\psi_{j,k}$ à $[0, 1]$ appartient à $V_j^{[0,1]}$. On le démontre par un raisonnement identique à celui qui a conduit au Lemme 4. Enfin si $k \geq 2^j$, la restriction de $\psi_{j,k}$ à $[0, 1]$ est nulle.

Le Théorème 2 est donc démontré.

La construction de la base orthonormée d'ondelettes sur l'intervalle $[0, 1]$ suit désormais le schéma classique des analyses multirésolutions.

On dispose d'une suite emboîtée de sous-espaces $V_j^{[0,1]}$ de $L^2[0, 1]$, $j \geq 0$. La réunion des $V_j^{[0,1]}$ est dense dans $L^2[0, 1]$ puisque la réunion des V_j est dense dans $L^2(\mathbb{R})$. On désigne alors par $W_j^{[0,1]}$ le complément orthogonal de $V_j^{[0,1]}$ dans $V_{j+1}^{[0,1]}$. On observera que $W_j^{[0,1]}$ n'est pas l'espace des restrictions à $[0, 1]$ des fonctions de W_j . En effet le Lemme 4 nous apprend que la restriction à $[0, 1]$ de $\psi(2^j x - k)$ appartient à $V_j^{[0,1]}$ si $-2N + 2 \leq k \leq -N$ ou si $2^j - N + 1 \leq k \leq 2^j - 1$. Lorsque $-N + 1 \leq k \leq -1$ ou $2^j - 2N + 2 \leq k \leq 2^j - N$, les restrictions des fonctions $\psi(2^j x - k)$ n'appartiennent certes pas à $V_j^{[0,1]}$ mais ne sont pas pour autant orthogonales à $V_j^{[0,1]}$.

En tout état de cause, on a

$$L^2[0, 1] = V_0^{[0,1]} \oplus W_0^{[0,1]} \oplus W_1^{[0,1]} \oplus \dots \oplus W_j^{[0,1]} \oplus \dots$$

Nous disposons déjà d'une base orthonormée de $V_0^{[0,1]}$. Nous nous proposons de construire une base orthonormée de $W_j^{[0,1]}$ pour chaque $j \geq 0$. À cet effet, on utilise le Théorème 2, en distinguant les cas $0 \leq j < j_0$ et $j \geq j_0$ ($2^{j_0} \geq 4N - 4$).

Dans le premier cas, il suffit de projeter orthogonalement sur W_j les fonctions $\psi_{j,k}$ telles que $-N + 1 \leq k \leq 2^j - N$. Puisque nous disposons déjà d'une base orthonormée de V_j , l'opérateur de projection orthogonale sur V_j est explicite. Une fois projetés sur W_j , les $\psi_{j,k}$ deviennent des fonctions $h_{j,k}$ qu'il convient ensuite d'orthonormaliser entre elles pour $-N + 1 \leq k \leq 2^j - N$.

Lorsque $j \geq j_0$, tout se clarifie. En effet les $\psi_{j,k}$ telles que $0 \leq k \leq 2^j - 2N + 1$ appartiennent de «plein droit» à $W_j^{[0,1]}$. Pour obtenir la base orthonormée de $W_j^{[0,1]}$, il suffit d'adjoindre à ces $2^j - 2N + 2$ fonctions les $2N - 2$ ondelettes manquantes (la dimension de $W_j^{[0,1]}$ est 2^j). Ces $2N - 2$ ondelettes manquantes se composent de $N - 1$ ondelettes «affectées à 0» et de $N - 1$ ondelettes «affectées à 1».

Pour construire les premières, on part des $N - 1$ fonctions $\psi_{j,k}$ telles que $-N + 1 \leq k \leq -1$. Elles sont orthogonales aux $\varphi_{j,k}$ lorsque $k \geq 0$ tout comme elles le sont aux $\psi_{j,k}$ pour $k \geq 0$. Ce qui manque à ces fonctions $\psi_{j,k}$ est l'orthogonalité aux $N - 1$ fonctions $2^{j/2} \varphi_1^\#(2^j x), \dots, 2^{j/2} \varphi_{N-1}^\#(2^j x)$. Ces $N - 1$ fonc-

tions formant une suite orthogonale, les corrections rendant les $\psi_{j,k}$ ($-N+1 \leq k \leq -1$) orthogonales à $V_j^{[0,1]}$ sont évidentes. On obtient alors $N-1$ fonctions $2^{j/2}h_1(2^jx), \dots, 2^{j/2}h_{N-1}(2^jx)$ où h_1, \dots, h_{N-1} ne dépendent pas de j . Il suffit enfin d'orthonormaliser ces $N-1$ fonctions pour obtenir les $N-1$ ondelettes «affectées à 0», à savoir $2^{j/2}\psi_1^\#(2^jx), \dots, 2^{j/2}\psi_{N-1}^\#(2^jx)$.

La construction des $N-1$ ondelettes «affectées à 1», à savoir $2^{j/2}\psi_1^b(2^j(1-x)), \dots, 2^{j/2}\psi_{N-1}^b(2^j(1-x))$ est semblable.

Il est plus commode d'indexer les fonctions que nous venons de construire par l'ensemble $\mathcal{I} \cup E$ où \mathcal{I} est la collection de tous les intervalles dyadiques inclus dans $[0, 1]$ et E est un ensemble de cardinalité $2N-1$. On commencera par examiner les intervalles $I = [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}[$ où $j \geq j_0, 0 \leq k < 2^j$. On distingue trois cas. Désignons systématiquement par $(2N-1)I = \tilde{I}$ l'intervalle ayant le même centre que I et pour longueur $2N-1$ fois celle (notée $|I|$) de I . Le premier cas est celui où ni 0 ni 1 n'appartiennent à l'intérieur de \tilde{I} . Alors \tilde{I} est inclus dans $[0, 1]$ et l'on pose

$$(4.5) \quad \psi_I(x) = 2^{j/2}\psi(2^jx - k + N - 1).$$

On observera que le support est exactement \tilde{I} . Si 0 appartient à l'intérieur de \tilde{I} , on a $0 \leq k \leq N-2$ et l'on pose

$$(4.6) \quad \psi_I(x) = 2^{j/2}\psi_{k+1}^\#(2^jx).$$

Si enfin 1 appartient à l'intérieur de \tilde{I} , on a $2^j - (N-1) \leq k \leq 2^j - 1$ et l'on pose $l = 2^j - k$ et

$$(4.7) \quad \psi_I(x) = 2^{j/2}\psi_l^b(2^j(1-x)).$$

Finalement il reste à indexer les $2^{j_0} + 2N - 2$ fonctions manquantes. Nous disposons pour cela de $1 + 2 + \dots + 2^{j_0-1}$ intervalles dyadiques $I \subset [0, 1]$ qui n'ont pas encore servi. Désignons par j_0 le plus petit entier j tel que $2^j \geq 2N-1$; si $j_0 \leq j < j_0 - 1$, on incorpore dans la base orthonormée de W_j les fonctions $2^{j/2}\psi(2^jx - k), 0 \leq k \leq 2^j - 2N + 1$, dont le support est inclus dans $[0, 1]$. On complète ces fonctions (que l'on notera bien évidemment ψ_I en revenant à (4.5)) en une base orthonormée de W_j que l'on indexe arbitrairement à l'aide des intervalles I de longueur 2^{-j} non encore utilisés.

Nous venons, pour chaque $j \geq 0$, de former une base orthonormée de W_j qui se compose des ondelettes ψ_I, I intervalle dyadique de longueur 2^{-j} inclus dans $[0, 1]$; l'ensemble de ces intervalles dyadiques sera noté E_j . Enfin ψ_I est donné par (4.5) chaque fois que $(2N-1)I = \tilde{I}$ est inclus dans $[0, 1]$.

Pour obtenir une base orthonormée de $L^2[0, 1]$, il nous reste à former une base orthonormée $\varphi_0(x), \dots, \varphi_{2N-2}(x)$ de V_0 . Remarquons tout d'abord que $1, x, \dots, x^{N-1}$ appartiennent à V_0 et $\varphi_0, \dots, \varphi_{N-1}$ ne sont autres que ces monômes orthogonalisés par le procédé de Gram-Schmidt. On complète ces polynômes orthogonaux en une base orthonormée de V_0 .

Nous venons d'établir le résultat suivant

Théorème 3. *L'ensemble des fonctions $\psi_I(x)$, $I \in \mathcal{I}$, et des $2N - 1$ fonctions $\varphi_0(x), \dots, \varphi_{2N-2}(x)$ constitue une base orthonormée de $L^2[0, 1]$.*

5. Analyse des espaces de Hölder $C^s[0, 1]$, $s > 0$, dans la base précédente

Rappelons que $C^s[0, 1]$, $s > 0$, désigne l'espace des restrictions à l'intervalle $[0, 1]$ des fonctions de $C^s(\mathbb{R})$. Nous désignerons par $C_0^s(\mathbb{R})$ la fermeture, pour la norme de l'espace de Banach C^s , des fonctions de la classe $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ de Schwartz. Si $s = 1$, convenons que C^1 ne désignera pas l'espace usuel mais la classe de Zygmund Λ_* définie par la condition

$$(5.1) \quad |f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)| \leq C|h|.$$

Si $1 < s \leq 2$, on écrira $s = 1 + r$ et $f \in C^s(\mathbb{R})$ signifie que $f'(x)$, la dérivée de f , appartient à C^r etc...

Alors il vient, pour toute fonction $f(x) \in L^2[0, 1]$,

Proposition 2. *Si $0 < s < N$ et si $f(x)$ appartient à $C^s[0, 1]$, alors on a*

$$(5.2) \quad \int_0^1 f(x)\psi_I(x) dx = O(|I|^{1/2+s}).$$

Réciproquement si $0 < s < \gamma(N - 1)$, cette condition caractérise l'espace $C^s[0, 1]$.

Rappelons que $\gamma(N - 1)$ mesure la régularité de l'ondelette $\psi(x)$ et de la fonction $\varphi(x)$ qui lui est associée. La preuve de ce résultat est semblable à celle que le lecteur pourra trouver dans [2].

On a des résultats analogues en ce qui concerne l'espace $H^s[0, 1]$, $s \geq 0$, des restrictions à $[0, 1]$ des fonctions $f(x) \in H^s(\mathbb{R})$.

Un cas remarquable est celui de l'espace BMO de John et Nirenberg dont nous rappelons la définition.

Définition 1. *Une fonction $f(x)$, appartenant à $L^2[0, 1]$, appartient en outre, à BMO $[0, 1]$ s'il existe une constante $C \geq 0$ telle que pour tout intervalle $I \subset [0, 1]$, on puisse trouver une constante $\gamma(I)$ de sorte que l'on ait*

$$(5.3) \quad \left(\frac{1}{|I|} \int_I |f(x) - \gamma(I)|^2 dx \right)^{1/2} \leq C.$$

La borne inférieure de ces constantes C est la norme BMO de f . Mais on peut souhaiter éviter (ce que nous ferons) que les constantes aient pour norme 0. Alors on ajoute $\left| \int_0^1 f(x) dx \right|$ à la norme précédente.

L'espace BMO $[0, 1]$ se compose des restrictions à $[0, 1]$ des fonctions de BMO (\mathbb{R}) . Pour le montrer, il suffit de construire l'opérateur de prolongement d'une fonction $f \in \text{BMO} [0, 1]$ en une fonction $g \in \text{BMO} (\mathbb{R})$. Ce prolongement s'effectue en imposant à $g(x)$ d'être paire et périodique de période 2.

L'espace BMO $[0, 1]$ est le dual E^* d'un espace de Banach E ; E est le sous-espace de l'espace de Hardy $H^1(\mathbb{R})$ composé de toutes les fonctions de $H^1(\mathbb{R})$ dont le support est inclus dans $[0, 1]$.

On suppose $N \geq 2$ et l'on a alors (avec les notations du Théorème 3)

Proposition 3. *Une fonction $f(x)$ de carré sommable sur $[0, 1]$ appartient à BMO $[0, 1]$ si et seulement si l'on a, pour une certaine constante C ,*

$$(5.4) \quad \sum_{J \subset I} |\langle f, \psi_J \rangle|^2 \leq C|I|$$

où I est un intervalle dyadique arbitraire inclus dans $[0, 1]$ et où la somme porte sur tous les sous-intervalles dyadiques $J \subset I$.

Pour conclure cette section, observons que l'analyse en ondelettes des espaces $C^s[0, 1]$ ou BMO $[0, 1]$ fournit automatiquement des opérateurs de prolongement à \mathbb{R} tout entier. Explicitons ce point dans le cas de BMO $[0, 1]$. Les ondelettes permettant de reconstituer f sont soit de la forme $2^{j/2}\psi(2^jx - k)$ et leur support est alors inclus dans $[0, 1]$, soit de la forme $2^{j/2}\psi_1^\#(2^jx), \dots, 2^{j/2}\psi_{N-1}^\#(2^jx)$, soit de la forme $2^{j/2}\psi_1^b(2^j(1-x)), \dots, 2^{j/2}\psi_{N-1}^b(2^j(1-x))$, soit enfin l'une des fonctions $\varphi_0, \dots, \varphi_{2N-2}$. Si bien que $f \in \text{BMO} [0, 1]$ s'écrit canoniquement $f = f_1 + f_2 + f_3 + f_4$ où f_1 est une fonction de BMO (\mathbb{R}) dont le support est inclus dans $[0, 1]$,

$$f_2(x) = \sum_{j \geq j_0} \sum_1^{N-1} \alpha(j, m) \psi_m^\#(2^jx) \quad \text{et} \quad \sup_{j \geq j_0} |\alpha(j, m)| < \infty$$

$$f_3(x) = \sum_{j \geq j_0} \sum_1^{N-1} \beta(j, m) \psi_m^\#(2^j(1-x)) \quad \text{et} \quad \sup_{j \geq j_0} |\beta(j, m)| < \infty$$

et finalement

$$f_4(x) = \gamma_0 \varphi_0(x) + \dots + \gamma_{2N-2} \varphi_{2N-2}(x).$$

Le prolongement des fonctions $\psi_m^\#(x)$ et $\psi_m^b(x)$ à \mathbb{R} tout entier est fourni par construction. Naturellement ces fonctions, une fois prolongées, perdent leur caractère oscillant. On a

$$\int_0^\infty x^k \psi_m^\#(x) dx = 0$$

si $0 \leq k \leq N-1$, $1 \leq m \leq N-1$ mais l'intégrale correspondante sur $] -\infty, \infty[$ n'est pas nulle. Néanmoins $f_2(x)$ et $f_3(x)$ appartiennent à $\text{BMO}(\mathbb{R})$ car seule la régularité et le support compact des fonctions $\psi_m^\#$ et ψ_m^b importent.

6. Opérateurs de Calderón-Zygmund sur l'intervalle

Commençons par étendre au carré unité $[0, 1] \times [0, 1] = Q_0$ la base orthonormée de $L^2[0, 1]$ que nous venons de construire. On procède comme dans [2] et l'on observe que la réunion des sous-espaces $V_j^{[0,1]} \otimes V_j^{[0,1]}$ de $L^2(Q_0)$ est dense dans $L^2(Q_0)$. On a donc

$$(6.1) \quad L^2(Q_0) = (V_0 \otimes V_0) \oplus (W_0 \otimes V_0) \oplus (V_0 \otimes W_0) \oplus (W_0 \otimes W_0) \oplus \dots$$

Une base orthonormée de $V_0 \otimes V_0$ se compose des fonctions $\varphi_l(x)\varphi_m(y)$, $0 \leq l \leq 2N-2$, $0 \leq m \leq 2N-2$, déjà utilisées. Nous utiliserons de même une base orthonormée φ_I de $V_j = V_j^{[0,1]}$, construite de la façon suivante. La base φ_j est indexée par l'ensemble F_j des intervalles dyadiques de longueur 2^{-j} inclus dans $[-(2N-2)2^{-j}, 1 + (2N-2)2^{-j}]$. Si $\tilde{I} = (2N-1)I$ est inclus dans $[0, 1]$, alors $\varphi_I(x) = 2^{j/2}\varphi(2^j x - k + N - 1)$ et si 0 ou 1 appartiennent à l'intérieur de \tilde{I} , la construction de φ_I est calquée sur celle que nous avons donnée pour ψ_I .

Une base orthonormée de $W_j \otimes V_j$ est donc composée des fonctions $\psi_I(x)\varphi_J(y)$ où $I \in E_j$ (ensemble des intervalles dyadiques I inclus dans $[0, 1]$ et de longueur 2^{-j}) et $J \in F_j$. De même une base orthonormée de $V_j \otimes W_j$ est composée de fonctions $\varphi_I(x)\psi_J(y)$, $I \in F_j$, $J \in E_j$. Enfin une base orthonormée de $W_j \otimes W_j$ est composée des fonctions $\psi_I(x)\psi_J(y)$, $I \in E_j$, $J \in E_j$.

Tout ce que nous dit dans le cas de l'intervalle $[0, 1]$ convient au cas de $[0, 1] \times [0, 1]$. C'est-à-dire que la décomposition dans cette base fournit un prolongement canonique des objets que l'on analyse.

Nous allons vérifier cette assertion en analysant, dans la base que nous venons de construire, les noyaux distributions $S(x, y)$ des opérateurs de Calderón-Zygmund opérant sur $L^2[0, 1]$.

Commençons par une forme bilinéaire $J: C^1[0, 1] \times C^1[0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ définie par la distribution correspondante $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ dont le support est inclus dans $[0, 1]^2$.

Nous supposons que la restriction à $y \neq x$ de $S(x, y)$ est une fonction $K(x, y)$ vérifiant les conditions

$$(6.2) \quad |K(x, y)| \leq C_0|x-y|^{-1}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad y \neq x,$$

(6.3) il existe un exposant $\gamma \in]0, 1[$ tel que l'on ait

$$|K(x', y) - K(x, y)| \leq C_0 |x' - x|^\gamma |x - y|^{-1-\gamma}$$

chaque fois que

$$|x' - x| \leq \frac{1}{2} |x - y|, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq x' \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad y \neq x,$$

on a de même,

$$(6.4) \quad |K(x, y') - K(x, y)| \leq C_0 |y' - y|^\gamma |x - y|^{-1-\gamma}$$

chaque fois que

$$|y' - y| \leq \frac{1}{2} |x - y|, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y' \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad x \neq y.$$

Définissons maintenant la continuité faible. A cet effet, pour tout intervalle fermé $I \subset [0, 1]$ et toute fonction $f \in C^1[0, 1]$ à support dans I , nous posons

$$N_I(f) = |I|^{1/2} \sup_I |f(x)| + |I|^{3/2} \sup_I |f'(x)|;$$

si $I = [0, a]$, $a < 1$, nous ne demandons pas que f ou f' s'annulent en 0 et de même si $I = [b, 1]$.

Nous dirons que J a la propriété de continuité faible s'il existe une constante C telle que, pour tout intervalle fermé $I \subset [0, 1]$ et tout couple de deux fonctions f et g de $C^1[0, 1]$ à supports dans I , on ait

$$(6.5) \quad |J(f, g)| \leq CN_I(f)N_I(g).$$

Désignons enfin par T l'opérateur défini par la forme J et par

$$\langle T(f), g \rangle = J(f, g).$$

Le problème que nous posons est de savoir si un opérateur T vérifiant (6.2), (6.3), (6.4) et (6.5) se prolonge en un opérateur continu sur $L^2[0, 1]$. A cet effet, analysons $S(x, y)$ dans la base d'ondelettes du carré. On obtient, grâce à la continuité faible et aux propriétés (6.2), (6.3) et (6.4)

$$(6.6) \quad |J(\varphi_I, \psi_J)| \leq C_1(1 + |k - l|)^{-1-\gamma}$$

$$(6.7) \quad |J(\psi_I, \varphi_J)| \leq C_1(1 + |k - l|)^{-1-\gamma}$$

$$(6.8) \quad |J(\psi_I, \psi_J)| \leq C_1(1 + |k - l|)^{-1-\gamma}$$

lorsque $I = [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}[$ et $J = [l2^{-j}, (l+1)2^{-j}[$. Inversement ces propriétés caractérisent les distributions S vérifiant (6.2), (6.3), (6.4) et la propriété de continuité faible.

Désignons par G_j l'ensemble des intervalles dyadiques I de longueur 2^{-j} tels que $(2N-1)I = \tilde{I} \subset [0, 1]$. On part de la décomposition de la distribution $S(x, y)$ dans la base d'ondelettes de $L^2(Q_0)$. On regroupe tous les termes $\alpha(I, J)\varphi_I(x)\psi_J(y) + \beta(I, J)\psi_I(x)\varphi_J(y) + \gamma(I, J)\psi_I(x)\psi_J(y)$ tels que $I \in G_j$ et $J \in G_j$ et leur somme est notée $\tilde{S}(x, y)$. Alors \tilde{S} appartient automatiquement à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ et la restriction $\tilde{K}(x, y)$ de \tilde{S} à $y \neq x$ vérifie (6.2), (6.3) et (6.4) dans \mathbb{R}^2 tout entier. En outre $\tilde{K}(x, y) = 0$ hors de Q_0 .

La différence $R(x, y) = S(x, y) - \tilde{S}(x, y)$ vérifie

$$(6.9) \quad |R(x, y)| \leq \frac{C_2}{|x| + |y|} + \frac{C_2}{|x-1| + |y-1|}$$

et l'opérateur associé est automatiquement borné sur $L^2[0, 1]$. En outre le prolongement canonique de $R(x, y)$ hors de Q_0 est un noyau à support dans $(2N-1)Q_0$ qui vérifie (6.2), (6.3) et (6.4) dans tout \mathbb{R}^2 .

Il est alors immédiat de conclure. Si T se prolonge en un opérateur linéaire continu sur $L^2[0, 1]$, alors l'opérateur \tilde{T} est continu de $L^2(\mathbb{R})$ dans lui-même. Le noyau-distribution $\tilde{S}(x, y)$ de \tilde{T} , une fois restreint à $y \neq x$, vérifie (6.2), (6.3) et (6.4). Le théorème de David et Journé s'applique donc et la continuité en question équivaut à $\tilde{T}(1) \in \text{BMO}$ et ${}^t\tilde{T}(1) \in \text{BMO}$. Finalement il faut comparer $\tilde{T}(1)$ à $T(1)$ d'une part, ${}^t\tilde{T}(1)$ à ${}^tT(1)$ d'autre part. En revenant aux décompositions des noyaux $S(x, y)$ et $\tilde{S}(x, y)$, on voit que $\tilde{T}(1)$ et $T(1)$ ne diffèrent que par deux fonctions de BMO que nous avons appelées $f_2(x)$ et $f_3(x)$ dans la Section 5.

Ainsi la continuité de l'opérateur T équivaut à $T(1) \in \text{BMO}[0, 1]$ et ${}^tT(1) \in \text{BMO}[0, 1]$.

References

- [1] Daubechies, I. Orthonormal basis of compactly supported wavelets, *Comm. Pure Appl. Math.*, **41**(1988), 909-996.
- [2] Meyer, Y. *Ondelettes*, Hermann (1990).

Recibido: 27 de junio de 1990.

Yves Meyer
CEREMADE
Université Paris IX-Dauphine
Place de Lattre de Tassigny
75775 Paris Cedex 16
FRANCE