

Fonctions à support compact dans les analyses multi-résolutions

Pierre Gilles Lemarié

Résumé

Nous nous intéressons aux fonctions à support compact dans une analyse multi-résolution, en particulier à celles de support minimum. Nous montrons que ces classes de fonctions sont stables par dérivation et primitivation et indiquons une méthode pour de nombreux calculs numériques.

Abstract

The main topic of this paper is the study of compactly supported functions in a multi-resolution analysis and especially of the minimally supported ones. We will show that this class of functions is stable under differentiation and integration and how to compute basic quantities with them.

1. Propriétés de base des analyses multi-résolutions

Nous rappelons dans cette section les propriétés des analyses multi-résolutions dont nous aurons besoin par la suite. La notion d'analyse multi-résolution a été introduite en 1986 par S. Mallat [10] et la plupart des propriétés que nous

utiliserons sont démontrées dans le livre d'Y. Meyer [11] et la thèse d'A. Cohen [4].

Une *analyse multi-résolution* est une suite de sous-espaces fermés $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$ qui vérifie les propriétés suivantes:

- (1.1) $V_j \subset V_{j+1}$, $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$ et $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$,
- (1.2) $f(x) \in V_j$ si et seulement si $f(2x) \in V_{j+1}$,
- (1.3) V_0 a une base de Riesz de la forme $g(x - k)$, $k \in \mathbb{Z}$, avec g à valeurs réelles. Le plus souvent on impose à g d'être à décroissance rapide à l'infini,
- (1.4) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x^k g \in L^2$.

À quelles conditions une fonction g vérifiant (1.4) engendre-t-elle une analyse multi-résolution? La réponse est fournie par le théorème suivant, essentiellement dû à A. Cohen [4].

Proposition 1. *Soit $g \in L^2(\mathbb{R})$ à valeurs réelles. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*

- (i) g vérifie (1.3) et (1.4) pour une analyse multi-résolution $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$;
- (ii) la transformée de Fourier de g

$$\hat{g}(\xi) = \int g(x) e^{-ix\xi} dx,$$

s'écrit

$$\hat{g}(\xi) = \hat{g}(0) \prod_{j=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right)$$

où $\hat{g}(0) \neq 0$, m_0 est C^∞ , 2π -périodique et vérifie

$$(2.1) \quad m_0(0) = 1,$$

$$(2.2) \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \prod_{j=1}^n m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \right\|_\infty < +\infty,$$

(2.3) il existe un compact K réunion finie d'intervalles disjoints tel que

$$(j) \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} \chi_K(\xi + 2k\pi) = 1 \quad p.p.$$

$$(jj) \quad \text{pour tout } \xi \in K \text{ et } j \in \mathbb{N}^*, m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \neq 0.$$

DÉMONSTRATION. La démonstration repose sur le lemme suivant:

Lemme 1. Si α et $\beta \in L^2(\mathbb{R})$ vérifient (1.4) alors la série

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\alpha}(\xi + 2k\pi) \times \bar{\hat{\beta}}(\xi + 2k\pi)$$

converge en tout point vers une fonction C^∞ .

Le lemme est immédiat, puisque d'après la formule sommatoire de Poisson on a

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha(x - k) e^{i(k-x)\xi} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\alpha}(\xi + 2k\pi) e^{2ik\pi x}$$

et donc

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\alpha}(\xi + 2k\pi) \bar{\hat{\beta}}(\xi + 2k\pi) = \int_0^1 \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha(x - k) e^{ik\xi} \right\} \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{\beta}(x - k) e^{-ik\xi} \right\} dx.$$

(1.4) implique la convergence pour tout N de

$$\int_0^1 \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} |k|^N |\alpha(x - k)| \right\}^2 dx,$$

d'où la convergence et la régularité de la série étudiée.

Si g vérifie (1.3) et (1.4), alors l'hypothèse que les $g(x - k)$ forment une base de Riesz implique l'existence d'une constante $A \geq 1$ telle que

$$\text{pour tout } \xi \in \mathbb{R} \quad \frac{1}{A} \leq \sum |\hat{g}(\xi + 2k\pi)|^2 \leq A.$$

De plus, puisque $g\left(\frac{x}{2}\right) \in V_{-1} \subset V_0$, on a $g\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k g(x - k)$ avec $(a_k) \in l^2(\mathbb{Z})$. D'où $\hat{g}(2\xi) = m_0(\xi) \hat{g}(\xi)$ avec

$$m_0(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{-ik\xi}$$

2π périodique et localement de carré intégrable. En particulier, on a

$$m_0(\xi) \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\xi + 2k\pi)|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{g}(2\xi + 4k\pi) \bar{\hat{g}}(\xi + 2k\pi)$$

et donc, puisque $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\xi + 2k\pi)|^2$ ne s'annule pas, m_0 est C^∞ . De plus

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(4k\pi)|^2 = |m_0(0)|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(2k\pi)|^2$$

et donc $|m_0(0)| \leq 1$; d'où

$$|\hat{g}(\xi)|^2 = \prod_{j=1}^N \left| m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \right|^2 \left| \hat{g}\left(\frac{\xi}{2^N}\right) \right|^2 = |\hat{g}(0)|^2 \prod_{j=1}^{\infty} \left| m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \right|^2,$$

et donc nécessairement $\hat{g}(0) \neq 0$ et $m_0(0) = 1$.

Comme $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\xi + 2k\pi)|^2$ ne s'annule jamais, il existe autour de tout point ξ de $[-\pi, \pi]$ un intervalle ouvert I_ξ et un nombre entier $k(\xi)$ tels que \hat{g} ne s'annule pas sur $I_\xi + 2k(\xi)\pi$. Par compacité de $[-\pi, \pi]$, on peut extraire de ces I_ξ un recouvrement fini de $[-\pi, \pi]$. La construction de K est alors immédiate. De plus, sur K , $\inf_{\xi \in K} |\hat{g}(\xi)|$ est positif, d'où

$$\prod_{j=0}^{N-1} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right) = \frac{\hat{g}(2^N \xi)}{\hat{g}(\xi)}$$

est borné indépendamment de N sur K d'où sur \mathbb{R} tout entier.

Réciproquement supposons que $g \in L^2$ et

$$\hat{g}(\xi) = \hat{g}(0) \prod_{j=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right)$$

où m_0 vérifie (2.1) à (2.3). Alors \hat{g} est C^∞ et toutes ses dérivées appartiennent à L^2 : on a en effet

$$\hat{g}^{(N+1)}(\xi) = \sum_{\alpha=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{j-1} m_0\left(\frac{\xi}{2^k}\right) \frac{1}{2^{j\alpha}} m_0^{(\alpha)}\left(\frac{\xi}{2^j}\right) C_{N+1}^\alpha \frac{1}{2^{j(N+1-\alpha)}} \hat{g}^{(N+1-\alpha)}\left(\frac{\xi}{2^j}\right)$$

d'où

$$\|\hat{g}^{(N+1)}\|_2 \leq C_N \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{j(N+1/2)}} \right) \left(\sum_{\alpha=1}^{N+1} \|\hat{g}^{(N+1-\alpha)}\|_2 \right).$$

On en conclut que g vérifie (1.4); en particulier $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\xi + 2k\pi)|^2$ est borné. De plus, $\sum |\hat{g}(\xi + 2k\pi)|^2$ ne s'annule pas, car sur K $|\hat{g}(\xi)|$ est minoré par un nombre positif. Les $g(x - k)$ sont alors une base de Riesz d'un sous-espace fermé V_0 de $L^2(\mathbb{R})$. On définit V_j par

$$f(x) \in V_j \quad \text{si et seulement si} \quad f\left(\frac{x}{2^j}\right) \in V_0.$$

Puisque $\hat{g}(2\xi) = m_0(\xi)\hat{g}(\xi)$, on a facilement que $V_j \subset V_{j+1}$. De plus la série $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\xi + 2k\pi)|^2$ converge uniformément sur tout compact (série de fonctions positives continues et de somme continue) et donc il existe $A > 0$ tel que

$$\text{pour tout } f \in V_0, \quad \int_{|\xi| > A} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi < \frac{1}{2} \|f\|_2^2.$$

Si $f \in \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ alors

$$\text{pour tout } j \in \mathbb{Z}, \quad \int_{|\xi| > A2^j} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi < \frac{1}{2} \|f\|_2^2$$

d'où $f = 0$ (en faisant tendre j vers $-\infty$). Par ailleurs si $\hat{f} \in L^2$ est à support compact, alors

$$\hat{f} = \lim_{j \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\xi + 2^j 2k\pi) \right) \hat{g}\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \hat{g}(0)^{-1}$$

dans L^2 et donc $\bigcup_j V_j$ est dense dans L^2 : en effet $\hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi/2^j) \hat{g}(0)^{-1}$ tend vers $\hat{f}(\xi)$ et, pour j assez grand,

$$\left\| \left(\sum_{k \neq 0} \hat{f}(\xi + 2^j 2k\pi) \right) \hat{g}\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \right\|_2^2 = \int |\hat{f}(\xi)|^2 \sum_{k \neq 0} \left| \hat{g}\left(\frac{\xi}{2^j} + 2k\pi\right) \right|^2 d\xi,$$

ce qui tend vers

$$\left(\int |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right) \left(\sum_{k \neq 0} |\hat{g}(2k\pi)|^2 \right).$$

Or on a nécessairement pour $k \neq 0$

$$\hat{g}(2k\pi) = \hat{g}(2^N 2k\pi) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \hat{g}(2^N 2k\pi) = 0.$$

La proposition est donc démontrée.

Corollaire 1. *Si g vérifie (1.3) et (1.4) pour une analyse multi-résolution, alors*

$$(3.1) \quad \hat{g}(0) \neq 0 \text{ et } \hat{g}(2k\pi) = 0 \text{ pour } k \in \mathbb{Z}^*,$$

$$(3.2) \quad m_0(0) = 1 \text{ et } m_0(\pi) = 0,$$

$$(3.3) \quad \sum g(x - k) = \hat{g}(0).$$

Il reste à vérifier que $m_0(\pi) = 0$. Or, d'après (3.1), on a

$$0 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(2\pi + 4k\pi)|^2 = |m_0(\pi)|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\pi + 2k\pi)|^2;$$

comme $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\xi + 2k\pi)|^2$ ne s'annule jamais, $m_0(\pi) = 0$. Quant à (3.3) cela vient de la formule sommatoire de Poisson

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x - k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{g}(2k\pi) e^{2ik\pi x}.$$

Remarques.

- (i) Il est clair que dans (2.3) on peut supposer que $0 \in \text{Int } K$, puisque $m_0(0) = 1$ et que donc m_0 ne s'annule pas sur un voisinage de 0. De plus, si m_0 vérifie (2.1) à (2.3) avec 0 intérieur à K , le produit infini

$$\hat{g}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right)$$

est dans L^2 si et seulement si on a

$$\sup_N \left\| \prod_{j=1}^N m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \chi_K\left(\frac{\xi}{2^N}\right) \right\|_2 < \infty;$$

cela est immédiat puisque

$$\prod_{j=1}^N m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \chi_K\left(\frac{\xi}{2^N}\right) = \chi_K\left(\frac{\xi}{2^N}\right) \frac{\hat{g}(\xi)}{\hat{g}(\xi/2^N)}.$$

De plus on a alors

$$\prod_{j=1}^N m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \chi_K\left(\frac{\xi}{2^N}\right) \rightarrow \hat{g} \quad \text{dans } L^2.$$

- (ii) Si m_0 vérifie (2.1), (2.3) et

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 = 1,$$

alors si

$$\hat{g}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right),$$

g est automatiquement dans L^2 et les $g(x - k)$ sont orthonormées. (Il suffit de vérifier que les $\theta_N(x - k)$ sont orthonormées, où

$$\hat{\theta}_N(\xi) = \prod_{j=1}^N m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \chi_K\left(\frac{\xi}{2^N}\right).$$

2. Produits infinis de polynômes trigonométriques

Si m_0 est un polynôme trigonométrique tel que

$$m_0(0) = 1 \quad \text{et si} \quad \hat{g}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right),$$

alors g est une distribution à support compact. Si de plus m_0 vérifie (2.3), et $g \in L^2$, alors (2.2) est immédiat, puisque \hat{g} est bornée (g est intégrable) et que $|\hat{g}|$ est minorée sur K .

Dans le cas d'un polynôme trigonométrique, la condition (2.3) s'exprime plus algébriquement de la manière suivante:

Proposition 2. *Si m_0 est un polynôme trigonométrique tel que $m_0(0) = 1$ alors la condition (2.3) est équivalente à:*

- (i) pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 > 0$,
- (ii) il n'existe pas de $\xi_0 \in]0, 2\pi[$ tel que:

$$\text{pour tout } N \in \mathbb{N}, \quad m_0(2^N \xi_0 + \pi) = 0.$$

DÉMONSTRATION. Le sens direct est immédiat. (2.3) signifie que si on note

$$\hat{g}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right)$$

alors pour $\xi \in \mathbb{R}$, il existe $k \in \mathbb{Z}$, $\hat{g}(\xi + 2k\pi) \neq 0$. Si on avait

$$m_0(\xi_1) = m_0(\xi_1 + \pi) = 0$$

pour un $\xi_1 \in \mathbb{R}$ alors on aurait $\hat{g}(2\xi_1 + 2k\pi) = 0$ quel que soit k . De même supposons que (ii) ne soit pas vérifié; comme m_0 n'a qu'un nombre fini de zéros modulo 2π , on doit avoir pour deux entiers N et M : $2^N \xi_0 - 2^M \xi_0 \in 2\pi\mathbb{Z}$; on ne peut avoir $2^M \xi_0 \in 2\pi\mathbb{Z}$ (sinon pour un $M' \geq 0$ on aurait $2^{M'} \xi_0 \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$ et $m_0(2^{M'} \xi_0 + \pi) = 1$; quitte à changer ξ_0 en $2^M \xi_0 \bmod (2\pi)$, on peut supposer $M = 0$). On va montrer que $\hat{g}(\xi_0 + 2k\pi) = 0$ pour tout k . Il revient au même de considérer $\hat{g}(2^N \xi_0 + 2k\pi)$. Or

$$\hat{g}(2^N \xi_0 + 2k\pi) = \hat{g}\left(\xi_0 + \frac{2k\pi}{2^N}\right) \prod_{j=1}^N m_0\left(\frac{2^N \xi_0 + 2k\pi}{2^j}\right);$$

si k n'est pas divisible par 2^N on obtient 0; si $k = 2^N k'$, alors on a $\xi_0 = 2^N \xi_0 - 2k_0\pi$ où $1 \leq k_0 \leq 2^N - 2$, et on est ramené à étudier $\hat{g}(2^N \xi_0 + 2(k' - k_0)\pi)$; si $k' = 0$, $k' - k_0$ n'est pas divisible par 2^N et $\hat{g}(2^N \xi_0 + 2(k' - k_0)\pi) = 0$; si $k' \neq 0$, alors $|k' - k_0| \leq |k'| + 2^N - 2 < 2^N |k'| = |k|$ et ce cas ne peut donc indéfiniment se reproduire. (2.3) entraîne donc bien (i) et (ii).

Réciproquement supposons que (2.3) ne soit pas vérifié et que (i) soit vrai; on va montrer que (ii) est faux. On peut supposer que

$$\hat{g}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right)$$

est dans L^2 , quitte à remplacer m_0 par $\left(\frac{1+e^{ik}}{2}\right)^M m_0$ avec M suffisamment grand (en effet $\prod_{j=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right)$ est borné sur $[-\pi, \pi]$ par continuité sur un compact et on en déduit facilement que $|\hat{g}(\xi)| \leq C(1+|\xi|)^\alpha$ avec

$$\alpha = \frac{\log \|m_0\|_\infty}{\log 2};$$

il suffit de prendre $M > \alpha + 1$ car on a

$$\prod_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1+e^{ik/2^j}}{2}\right)^M m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right) = \left(\frac{e^{ik}-1}{i\xi}\right)^M \hat{g}(\xi):$$

cette substitution n'affecte ni (i) ni (ii). Si (2.3) n'est pas vérifié, alors

$$Q(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\xi + 2k\pi)|^2$$

a au moins un zéro ξ_1 ; de plus

$$Q(\xi_1) = Q\left(\frac{\xi_1}{2}\right) m_0\left(\frac{\xi_1}{2}\right) + Q\left(\frac{\xi_1}{2} + \pi\right) m_0\left(\frac{\xi_1}{2} + \pi\right);$$

quitte à changer ξ_1 en $\xi_1 + 2\pi$ on peut supposer $m_0\left(\frac{\xi_1}{2}\right) \neq 0$ et donc $Q\left(\frac{\xi_1}{2}\right) = 0$. On trouve de même $Q\left(\frac{\xi_1}{4}\right) = 0$ quitte à changer ξ_1 en $\xi_1 + 4\pi$, et ainsi de suite. Or g est à support compact et donc

$$Q(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int g(x) \bar{g}(x-k) dx \right) e^{-ik\xi}$$

est un polynôme trigonométrique et donc n'a qu'un nombre fini de racines modulo 2π . De sorte qu'on a

$$Q(\xi_1) = Q\left(\frac{\xi_1}{2}\right) = \dots = Q\left(\frac{\xi_1}{2^N}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\xi_1}{2^N} - \xi_1 \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Par ailleurs $Q\left(\frac{\xi_1}{2} + \pi\right), \dots, Q\left(\frac{\xi_1}{2^N} + \pi\right)$ sont tous non nuls; en effet supposons que

$$Q\left(\frac{\xi_1}{2^j} + \pi\right) = 0$$

et posons

$$Z = e^{-i(\xi_1/2^j + \pi)},$$

le même raisonnement que ci-dessus nous fournit $Z^{2^M} = Z$ pour un $M \geq 1$ tandis que $(-Z)^{2^N} = -Z$ d'où $Z^{2^{M+N}} = Z^{2^N} = -Z$ et $Z^{2^{M+N}} = (-Z)^{2^M} = Z$, ce qui est absurde. On peut donc écrire $Q(\xi) = |A(\xi)|^2 R(\xi)$ avec

$$A(\xi) = \prod_{j=1}^N (e^{-i\xi} - e^{-i\xi_1/2^j})$$

(où N est choisi comme le plus petit entier ≥ 1 tel que $\xi_1/2^N - \xi_1 \in 2\pi\mathbb{Z}$) et $R(\xi)$ est un polynôme trigonométrique tel que $R(\xi_1/2^j + \pi) \neq 0$ pour $1 \leq j \leq N$. On pose alors

$$\hat{\gamma}(\xi) = \frac{\hat{g}(\xi)}{A(\xi)}$$

et nous allons voir que $\gamma \in L^2$ et est à support compact. Notons $P(\xi)$ le polynôme trigonométrique

$$P(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2} \int \gamma\left(\frac{x}{2}\right) \bar{\gamma}(x - k) dx e^{-ik\xi} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\gamma}(2\xi + 4k\pi) \bar{\hat{\gamma}}(\xi + 2k\pi).$$

On a alors

$$\begin{aligned} A(2\xi)P(\xi) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{g}(2\xi + 4k\pi) \bar{\hat{\gamma}}(\xi + 2k\pi) \\ &= m_0(\xi)A(\xi)R(\xi). \end{aligned}$$

Or $A(2\xi) = A(\xi)A(\xi + \pi)$ et les zéros de $A(\xi + \pi)$ ne sont pas des zéros de $R(\xi)$. D'où

$$m_0\left(\frac{\xi_1}{2} + \pi\right) = \dots = m_0\left(\frac{\xi_1}{2^N} + \pi\right) = 0,$$

et on obtient

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N}, \quad m_0(2^k \xi_1 + \pi) = 0,$$

tandis que $\xi_1 \notin 2\pi\mathbb{Z}$ puisque $Q(0) \geq |\hat{g}(0)|^2 = 1$. La Proposition 2 est donc démontrée, pourvu que γ soit bien dans L^2 et à support compact. C'est l'objet du lemme suivant.

Lemme 2. *Si $g \in L^2$ est à support compact et si*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\xi_0 + 2k\pi)|^2 = 0$$

alors γ définie par

$$\hat{\gamma}(\xi) = \frac{\hat{g}(\xi)}{e^{-i\xi} - e^{-i\xi_0}}$$

est dans L^2 et à support compact.

Le lemme est classique. D'abord $\hat{\gamma} \in L^2$ puisque, en notant à nouveau

$$Q(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\xi + 2k\pi)|^2,$$

on a

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\gamma}(\xi + 2k\pi)|^2 = \frac{Q(\xi)}{|e^{-i\xi} - e^{-i\xi_0}|^2};$$

comme Q est ≥ 0 , ξ_0 est zéro au moins double et $Q(\xi)/|e^{-i\xi} - e^{-i\xi_0}|^2$ est un polynôme trigonométrique.

Ensuite la formule sommatoire de Poisson nous donne:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x - k) e^{i(k-x)\xi_0} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{g}(\xi_0 + 2k\pi) e^{2ik\pi x} = 0,$$

d'où la fonction

$$\alpha(x) = \sum_{k=-\infty}^{-1} g(x - k) e^{i(k-1)\xi_0} = - \sum_{k=0}^{\infty} g(x - k) e^{i(k-1)\xi_0}$$

est à support compact et dans L^2 , or $\alpha(x) = g(x + 1) + \alpha(x + 1) e^{-i\xi_0}$ d'où $\hat{\alpha}(\xi) = \hat{g}(\xi) e^{i\xi} + \hat{\alpha}(\xi) e^{i\xi - i\xi_0}$ et donc $\alpha = \gamma$. Le lemme est donc démontré.

Corollaire 2. Si m_0 est un polynôme trigonométrique à coefficients réels tel que

$$m_0(0) = 1 \quad \text{et} \quad \hat{g}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right)$$

soit dans L^2 , alors il existe une et une seule analyse multi-résolution (V_j) de $L^2(\mathbb{R})$ telle que $g \in V_0$.

En effet, supposons que $m_0(\xi)$ et $m_0(\xi + \pi)$ ait une racine commune ξ_0 ; alors $-\xi_0$ est racine puisque m_0 est à coefficients réels et on a $m_0(\xi) = (\cos 2\xi - \cos 2\xi_0)M(\xi)$ avec M polynôme trigonométrique. De plus, si

$$Q(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\xi + 2k\pi)|^2,$$

alors il est clair que $Q(2\xi_0) = Q(-2\xi_0) = 0$ et donc, d'après le lemme précédent, si

$$\hat{\gamma}(\xi) = \hat{g}(\xi) \frac{1 - \cos 2\xi_0}{\cos \xi - \cos 2\xi_0}$$

alors γ est dans L^2 et à support compact. De plus

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}(2\xi) &= \frac{1}{\cos 2\xi - \cos 2\xi_0} (\cos \xi - \cos 2\xi_0) m_0(\xi) \hat{\gamma}(\xi) \\ &= M(\xi) (\cos \xi - \cos 2\xi_0) \hat{\gamma}(\xi); \end{aligned}$$

d'où

$$\hat{\gamma}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_1\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \quad \text{avec} \quad m_1(\xi) = M(\xi) (\cos \xi - \cos 2\xi_0).$$

Si on appelle degré d'un polynôme trigonométrique $\sum_{k \neq N_1}^{N_2} a_k e^{-ik\xi}$ avec $a_{N_1} \neq 0, a_{N_2} \neq 0$ le nombre $N_2 - N_1$, alors il est clair que $\deg m_1 = \deg m_0 - 2$. Au bout d'un nombre fini d'opérations, on peut supposer que m_0 et $m_0(\xi + \pi)$ n'ont pas de racines communes.

Si maintenant (ii) n'est pas vérifié, on a vu que $m_0(\xi)$ admettait un facteur

$$\prod_{j=0}^{N-1} (e^{-i\xi} + e^{-i\xi_0 2^j})$$

avec $2^N \xi_0 - \xi_0 \in 2\pi\mathbb{Z}$ et $\xi_0 \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Il admet également le facteur

$$\prod_{j=0}^{N-1} (e^{-i\xi} + e^{i\xi_0 2^j})$$

qui est soit confondu soit premier avec le premier facteur. De plus, on a vu que si $Q(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\xi + 2k\pi)|^2$ alors $Q(\xi_0) = 0$ et il en va de même pour $2^j \xi_0, 1 \leq j \leq N-1$. On pose alors

$$\hat{\gamma}(\xi) = \frac{A(0)}{A(\xi)} \hat{g}(\xi)$$

où

$$A(\xi) = \prod_{j=0}^{N-1} (e^{-i\xi} - e^{-i\xi_0 2^j})$$

où

$$\prod_{j=0}^{N-1} (e^{-i\xi} - e^{-i\xi_0 2^j}) \prod_{j=0}^{N-1} (e^{-i\xi} - e^{i\xi_0 2^j})$$

suivant que les deux facteurs sont égaux ou distincts; d'après le lemme, $\hat{\gamma}$ est dans L^2 et à support compact; de plus on a

$$\hat{\gamma}(2\xi) = \frac{A(\xi)m_0(\xi)}{A(2\xi)} \hat{\gamma}(\xi) = \frac{m_0(\xi)}{A(\xi + \pi)} \hat{\gamma}(\xi)$$

où m_1 est le polynôme trigonométrique à coefficients réels $m_0(\xi)/A(\xi + \pi)$. A nouveau $\deg m_1 < \deg m_0$.

Au bout d'un nombre fini d'opérations, on obtient alors que

$$\hat{g}(\xi) = P(\xi) \prod_{j=1}^{\infty} M\left(\frac{\xi}{2^j}\right)$$

où P et M sont deux polynômes trigonométriques à coefficients réels,

$$\prod_{j=1}^{\infty} M\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \in L^2,$$

$M(0) = 1$ et M vérifie les points (i) et (ii) de la Proposition 2. La fonction g est donc dans l'espace V_0 de l'analyse multi-résolution engendrée par la fonction γ définie par

$$\hat{\gamma}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} M\left(\frac{\xi}{2^j}\right).$$

L'existence de l'analyse multi-résolution a été démontrée. Pour l'unicité, il suffit de remarquer que si $g \in V_0$ pour une analyse multi-résolution alors la fonction γ obtenue à la fin est encore dans V_0 et que les $\gamma(x - k)$ forment alors une base de Riesz de V_0 .

Lemme 3. *Si $g \in V_0$ (où V_0 correspond à une analyse multi-résolution) est à support compact et si*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\xi_0 + 2k\pi)|^2 = 0$$

alors la fonction γ définie par

$$\hat{\gamma}(\xi) = \frac{\hat{g}(\xi)}{e^{-i\xi} - e^{i\xi_0}}$$

est encore dans V_0 .

En effet, on a vu que

$$\gamma = \sum_{k=-\infty}^{-1} g(x - k) e^{i(k-1)\xi_0}$$

et il est clair que si $\alpha \in L^2$ est à support compact

$$\langle \gamma | \alpha \rangle = \sum_{k=-\infty}^{-1} e^{i(k-1)\xi_0} \langle g(x-k) | \alpha \rangle.$$

De plus

$$\left\| \sum_{k=-N}^{-1} g(x-k) e^{i(k-1)\xi_0} \right\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\| \frac{\hat{g}(\xi)}{1 - e^{-i(\xi_0 - \xi)}} (1 - e^{-iN(\xi_0 - \xi)}) \right\|_2 \leq 2 \|\gamma\|_2.$$

On en conclut que la série converge vers γ faiblement dans L^2 et donc que γ appartient à l'adhérence faible de V_0 et donc à V_0 .

Lemme 4. Si $g \in V_0$ est à support compact et si $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\xi + 2k\pi)|^2$ ne s'anule pas alors les $g(x-k)$ forment une base de Riesz de V_0 .

Si les $h(x-k)$ forment une base de Riesz de V_0 , alors $\hat{g}(\xi) = M(\xi)\hat{h}(\xi)$ avec $M \in L^2_{loc}$ 2π -périodique; d'où

$$|M(\xi)|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{h}(\xi + 2k\pi)|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\xi + 2k\pi)|^2$$

et donc M et $1/M$ sont essentiellement bornées. Le lemme est alors immédiat.

3. Fonctions de V_0 à support compact

Théorème 1. Soit $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ une analyse multi-résolution de $L^2(\mathbb{R})$. Si V_0 contient des fonctions à support compact non nulles, alors il existe une fonction $\gamma \in V_0$ à support compact et à valeurs réelles telle que

- (4.1) Les fonctions $\gamma(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$, forment une base de Riesz de V_0 ,
- (4.2) Toute fonction de V_0 à support compact s'écrit comme combinaison linéaire finie des $\gamma(x-k)$.

DÉMONSTRATION. Si h est dans L^2 et à support compact, on sait que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{h}(\xi + 2k\pi)|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int h(x)\bar{h}(x-k) dx e^{-ik\xi}$$

est un polynôme trigonométrique. Nous l'appellerons le *polynôme d'auto-corrélation* de h et le noterons P_h . Si h est à valeurs réelles, P_h est un polynôme en $\cos \xi$ à coefficients réels. On choisit $\gamma \in V_0$ à valeurs réelles et à support compact de sorte que P_γ soit de degré minimal.

Alors $P_\gamma(\xi)$ ne s'annule pas. Si on avait $P_\gamma(\xi_0) = 0$, on poserait

$$\hat{g}(\xi) = \frac{\hat{\gamma}(\xi)}{e^{-i\xi} - e^{-i\xi_0}}$$

si $\xi_0 \in \pi\mathbb{Z}$ et

$$\hat{g}(\xi) = \frac{\hat{\gamma}(\xi)}{\cos \xi - \cos \xi_0}$$

sinon. D'après les Lemmes 2 et 3, g serait dans V_0 , à valeurs réelles et de support compact et $\deg P_g$ serait strictement inférieur à P_γ . On en conclut que P_γ ne s'annule pas et donc que les $\gamma(x - k)$ forment une base de Riesz de V_0 (d'après le Lemme 4).

Considérons maintenant $h \in V_0$ à support compact. On peut supposer h à valeurs réelles, quitte à raisonner sur $\operatorname{Re} h$ et $\operatorname{Im} h$. On sait que h s'exprime en fonction des $\gamma(x - h)$ par: $\hat{h}(\xi) = U(\xi)\hat{\gamma}(\xi)$ avec U 2π -périodique et dans L^2_{loc} . En fait $U(\xi)$ est une fraction rationnelle en $e^{-i\xi}$ puisque

$$\sum \hat{h}(\xi + 2k\pi)\hat{\gamma}(\xi + 2k\pi) = U(\xi)P_\gamma(\xi),$$

d'où

$$U(\xi) = \frac{C(\xi)}{P_\gamma(\xi)}$$

où C est un polynôme trigonométrique à coefficients réels. De plus on a:

$$\sum |\hat{h}(\xi + 2k\pi)|^2 = |C(\xi)|^2 \frac{1}{P_\gamma(\xi)}$$

d'où

$$|C(\xi)|^2 = P_\gamma(\xi) \sum |\hat{h}(\xi + 2k\pi)|^2.$$

Le théorème de Riesz nous permet de trouver deux polynômes $A, B \in \mathbb{R}[X]$ avec $A(0) \neq 0$, $B(0) \neq 0$, $C(\xi) = e^{-ip\xi}A(e^{-i\xi})B(e^{-i\xi})$ pour un $p \in \mathbb{Z}$ et $P_\gamma(\xi) = |A(e^{-i\xi})|^2$. On a alors

$$\hat{h} = e^{-ip\xi} \frac{B(e^{-i\xi})}{A(e^{-i\xi})} \hat{\gamma}.$$

On divise B en $B = AQ + R$. Alors si $\hat{k} = \hat{h} - e^{-ip\xi}Q(e^{-i\xi})\hat{\gamma}$, $k \in V_0$ est à support compact et à valeurs réelles; de plus on a:

$$\begin{aligned} P_k(\xi) &= P_k(\xi) + |Q(e^{-i\xi})|^2 P_\gamma(\xi) - 2 \operatorname{Re} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \hat{h}(\xi + 2l\pi) \overline{\hat{\gamma}(\xi + 2l\pi)} e^{ip\xi} \overline{Q(e^{-i\xi})} \\ &= |B(e^{-i\xi})|^2 + |Q(e^{-i\xi})A(e^{-i\xi})|^2 - 2 \operatorname{Re} B(e^{-i\xi}) \overline{A(e^{-i\xi})} \overline{Q(e^{-i\xi})} \\ &= |R(e^{-i\xi})|^2. \end{aligned}$$

Comme P_γ est de degré minimal, nécessairement $k = 0$ et donc h s'écrit comme une combinaison linéaire finie des $\gamma(x - k)$.

Corollaire 3.

- (i) On a $\hat{\gamma}(2\xi) = m_0(\xi)\hat{\gamma}(\xi)$ pour m_0 un polynôme trigonométrique à coefficients réels tel que $m_0(0) = 1$.
- (ii) γ est de support minimal.
- (iii) Si $h \in V_0$ est de support compact, les bornes inférieure et supérieure de son support sont entières.
- (iv) Si on impose que $\hat{\gamma}(0) = 1$ et que la borne inférieure du support de γ soit 0, alors γ est unique.

DÉMONSTRATION. Comme $\gamma(x/2) \in V_{-1} \subset V_0$ et que $\gamma(x/2)$ est à support compact, $\gamma(x/2)$ s'exprime comme une combinaison linéaire finie des $\gamma(x - k)$. Le point (i) est donc démontré. Si on a

$$\gamma\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{k=N_1}^{N_2} b_k \gamma(x - k)$$

alors nécessairement la borne inférieure du support de γ est N_1 et la borne supérieure est N_2 . De même si

$$h(x) = \sum_{k=M_1}^{M_2} h_k \gamma(x - k)$$

alors la borne inférieure de son support est $M_1 + N_1$ et la borne supérieure $M_2 + N_2$; en particulier la longueur de l'enveloppe convexe de ce support est $N_2 - N_1 + M_2 - M_1$ et donc supérieure à celle du support de γ (avec égalité pour les seules fonctions multiples d'un $\gamma(x - k)$). Les points (ii), (iii), (iv) sont alors démontrés.

Corollaire 4. Il existe une fonction $\theta \in W_0$ (où W_0 est le complémentaire orthogonal de V_0 dans V_1) à support compact et à valeurs réelles telle que

- (5.1) Les fonctions $\theta(x - k)$, $k \in \mathbb{Z}$ forment une base de Riesz de W_0 ;
- (5.2) Toute fonction de W_0 à support compact s'écrit comme une combinaison linéaire finie des $\theta(x - k)$.
 θ est alors de support minimum dans W_0 .

DÉMONSTRATION. Si $h \in W_0$ est à support compact, alors h peut s'écrire comme $\hat{h}(\xi) = e^{-ip\xi}R(e^{-i\xi/2})\hat{\gamma}(\xi/2)$ pour un polynôme $R(z)$ et un entier $p \in \mathbb{Z}$, puisque $W_0 \subset V_1$. Notons Q le polynôme de degré minimum tel que $Q(e^{-i\xi/2})\hat{\gamma}(\xi/2)$ soit la transformée de Fourier d'un élément (normal) de W_0 . On peut suppo-

ser Q à coefficients réels (car si $\hat{w} = Q(e^{-i\xi/2})\hat{\gamma}(\xi/2)$ alors $\text{Re } w$ et $\text{Im } w$ sont dans w_0). De même, on supposera h à valeurs réelles (et donc $R \in \mathbb{R}[X]$).

On remarque d'abord que $Q(z)$ et $Q(-z)$ sont premiers entre eux, car si $Q(z) \wedge Q(-z) = A(z^2)$ alors $[Q(e^{-i\xi/2})/A(e^{-i\xi})][\hat{\gamma}(\xi/2)]$ est encore la transformée de Fourier d'un élément de W_0 , ce qui contredit la minimalité de Q . On a alors, en posant $\hat{\theta} = Q(e^{-i\xi/2})\hat{\gamma}(\xi/2)$.

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\theta}(\xi + 2k\pi)|^2 = |Q(e^{-i\xi/2})P_\gamma(\xi/2)|^2 + |Q(-e^{-i\xi/2})P_\gamma\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)|^2 > 0$$

ce qui entraîne que les $\theta(x - k)$ forment une base de Riesz de W_0 (car on sait que W_0 a une base de Riesz de la forme $w(x - k)$, $k \in \mathbb{Z}$).

Maintenant si $\hat{h} = e^{-ip\xi}R(e^{-i\xi/2})\hat{\gamma}(\xi/2)$ est la transformée de Fourier de $h \in V_1$, alors $h \in W_0$ si et seulement si on a

$$R(e^{-i\xi})\overline{m_0(\xi)}P_\gamma(\xi) + R(e^{-i(\xi+\pi)})\overline{m_0(\xi+\pi)}P_\gamma(\xi+\pi) = 0.$$

d'où si $\overline{m_0(\xi)}P_\gamma(\xi) = e^{-2iq\xi}A(e^{-i\xi})$, $R(z)A(z) + R(-z)A(-z) = 0$. En particulier $\deg R + \deg A$ est impair. On en conclut que $\deg R$ et $\deg Q$ ont la même parité. De proche en proche, on obtient que $R(z) = B(z^2)Q(z) + C(z)$ avec $\deg C < \deg Q$, d'où $R(z) = B(z^2)Q(z)$. On a alors $\hat{h} = e^{-ip\xi}B(e^{-i\xi})\hat{\theta}(\xi)$.

Remarque. La fonction θ décrite par le Corollaire 4 a été d'abord étudiée par C. K. Chui et J. Z. Wang [3]. Cependant les propriétés décrites dans ce corollaire sont nouvelles, ces deux auteurs n'ayant pas démontré (4.2) et donc pas (5.2) ni la minimalité du support de θ . Par contre, ils donnent le calcul de Q : si $A(z) \wedge A(-z) = B(z^2)$ et si $A(z) = B(z^2)C(z)$ (où $A(e^{-i\xi}) = e^{2iq\xi}\overline{m_0(\xi)}P_\gamma(\xi)$) alors $Q(z) = zC(-z)$.

4. La fonction de V_0 de support minimal

Théorème 2. Soit $G \in V_0$ non nulle, à support compact et à valeurs réelles. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:

- (6.1) G est de support minimal.
- (6.2) Le polynôme d'auto-corrélation de G est de degré minimum.
- (6.3) Tout élément de V_0 à support compact s'écrit comme une combinaison linéaire finie des $G(x - k)$.
- (6.4) Il existe $H \in L^2$ de support compact telle que $\langle H | G(x - k) \rangle = \delta_k$.
- (6.5) \hat{G} se décompose en

$$\hat{G}(\xi) = \hat{G}(0) \prod_{j=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right)$$

où m_0 est un polynôme trigonométrique $m_0(\xi) = e^{-ip\xi}P(e^{-i\xi})$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $P \in \mathbb{R}(X)$ où P vérifie:

- (i) $P(1) = 1$.
- (ii) $P(z)$ et $P(-z)$ sont premiers entre eux.
- (iii) $P(z)$ n'a pas de facteurs de la forme

$$\prod_{k=1}^{N-1} (z + z_0^{2^k}) \quad \text{avec} \quad z_0^{2^N} = z_0 \quad \text{et} \quad z_0 \neq 1.$$

(6.6) Les restrictions à $[0, 1]$ des fonctions

$$G(x + k), \quad \inf \text{Supp } G \leq k < \sup \text{Supp } G,$$

sont linéairement indépendantes.

DÉMONSTRATION. Le Théorème 1 donne l'équivalence de (6.1), (6.2) et (6.3).

(6.1) \Rightarrow (6.5). On sait d'après le Corollaire 3 que $\hat{G}(2\xi) = m_0(\xi)\hat{G}(\xi)$ avec m_0 un polynôme trigonométrique. De plus $\hat{G}(0) \neq 0$ d'après (3.1) et donc $m_0(0) = 1$. On peut donc écrire $m_0(\xi) = e^{-ip\xi}P(e^{-i\xi})$ avec $P(1) = 1$ et $P(0) \neq 0$. D'après la Proposition 2, $P(z)$ et $P(-z)$ n'ont pas de racines communes sur le cercle unité et $P(z)$ n'a pas de facteurs

$$\prod_{k=1}^{N-1} (z + z_0^{2^k}) \quad \text{avec} \quad z_0 \neq 1, \quad z_0^{2^N} = z_0.$$

Il ne reste donc à prouver que $P(z) \wedge P(-z) = 1$. Si $P(z) \wedge P(-z) = R(z^2)$, on pose

$$\hat{h}(\xi) = \frac{\hat{G}(\xi)}{R(e^{-i\xi})},$$

alors

$$\hat{h}(2\xi) = e^{-ip\xi} \frac{P(e^{-i\xi})}{R(e^{-2i\xi})} R(e^{-i\xi}) \hat{h}(\xi)$$

et on a $\sup \text{Supp } h - \inf \text{Supp } h = \deg P - \deg R \leq \sup \text{Supp } G - \inf \text{Supp } G$ avec égalité si et seulement si $P(z) \wedge P(-z) = 1$. Puisque G est de support minimal, on a bien $P(z) \wedge P(-z) = 1$.

(6.5) \Rightarrow (6.1). Quitte à translater G et γ (où γ est décrite par le Théorème 1), on peut supposer $\inf \text{Supp } G = \inf \text{Supp } \gamma = 0$. On a alors $\hat{G}(2\xi) = P(e^{-i\xi})\hat{G}(\xi)$, $\hat{\gamma}(2\xi) = P_0(e^{-i\xi})\hat{\gamma}(\xi)$ et enfin, par (4.2), $\hat{G}(\xi) = Q(e^{-i\xi})\hat{\gamma}(\xi)$. Remarquons que $Q(0) \neq 0$ (puisque $\inf \text{Supp } G = \inf \text{Supp } \gamma$) et que Q n'a pas de racines sur le cercle unité (puisque $P_G(\xi) = |Q(e^{-i\xi})|^2 P_\gamma(\xi)$ et que P_G ne s'annule pas,

d'après la Proposition 2). De plus, on a: $P(z)Q(z) = Q(z^2)P_0(z)$ et donc $\deg P = \deg P_0 + \deg Q$; comme $P(z) \wedge P(-z) = 1$, il est nécessaire que P_0 divise P , d'où il existe A tel que: $Q(z^2) = Q(z)A(z)$. Si z est une racine de Q , il en va de même pour z^2 , et donc z^4, z^8, \dots . Comme ni 0 ni les complexes de module 1 ne sont racines de Q et que Q doit avoir un nombre fini de zéros, alors on trouve que Q est une constante et donc $G = C^{te}\gamma$.

(6.1) \Rightarrow (6.6). Il suffit de reproduire la démonstration du théorème d'Yves Meyer [12] sur la restriction à $[0, 1]$ des bases d'I. Daubechies. On va donc montrer que, pour $j \geq 0$, la dimension de l'espace des restrictions à $[0, 1]$ des fonctions de V_j est exactement $2^j + \sup \text{Supp } G - \inf \text{Supp } G - 1$.

Quitte à traduire G on peut supposer $\inf \text{Supp } G = 0$; on pose $\sup \text{Supp } G = N$. Commençons par remarquer que si

$$\sum_{k=-M}^{N-1} \alpha_k G(x+k)$$

est nulle sur $[0, M+1]$ et si $M+1 \geq 2(\sup \text{Supp } \theta - \inf \text{Supp } \theta)$ (où θ est la fonction décrite par le Corollaire 4) alors les α_k sont nuls; en effet

$$f(x) = \sum \alpha_k G(x+k)$$

est portée par $[-N+1, 0] \cap [M+1, M+N]$; dire que $f \in V_0$ revient à dire que f est orthogonale à toutes les fonctions $\theta(2^j x - k)$, $j \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$ (car $V_0^\perp = \bigoplus_{j \geq 0} W_j$), mais cela est alors vrai de $f|_{(-N+1, 0)}$ et de $f|_{(M+1, M+N)}$ puisque $\theta(2^j x - k)$ est portée par un intervalle de longueur 2^{-j} ($\sup \text{Supp } \theta - \inf \text{Supp } \theta$). Puisque G est de support minimal dans V_0 , on obtient $f = 0$. Par dilatation, cela donne que la dimension des restrictions à $[0, 1]$ des fonctions de V_j est exactement $2^j + N - 1$ pour j assez grand ($2^j \geq 2(\sup \text{Supp } \theta - \inf \text{Supp } \theta)$). Pour passer de j à $j-1$, on suit la démonstration de Y. Meyer, basée sur la seule propriété que $P(z) \wedge P(-z) = 1$.

(6.6) \Rightarrow (6.4). On peut supposer $\inf \text{Supp } G = 0$. Comme $G|_{[0, 1]}$ est indépendante des $G(x+k)|_{[0, 1]}$ ($k \neq 0$), il existe $H \in L^2([0, 1])$ avec $\langle H | G \rangle = 1$ et $\langle H | G(x+k) \rangle = 0$ pour $k \neq 0$.

(6.4) \Rightarrow (6.1). Comme H et G sont à support compact, on en déduit immédiatement que les $G(x-k)$ sont une base de Riesz de V_0 et que tout élément de V_0 se représente comme

$$h = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle h | H(x-k) \rangle G(x-k).$$

(6.3) (et donc (6.1)) est alors immédiat.

5. Calculs fondamentaux dans une analyse multi-résolution

Nous considérons une analyse multi-résolution $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ où V_0 admet une base de Riesz $\gamma(x - k)$ avec γ à valeurs réelles et de support compact. La fonction γ est choisie de manière à ce que son support soit minimal, que $\inf \text{Supp } \gamma = 0$ et que $\hat{\gamma}(0) = 1$. On appellera γ la *base normalisée* de V_0 .

On a

$$\hat{\gamma}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} P_0(e^{-i\xi/2^j})$$

avec $P_0 \in \mathbb{R}[X]$, $P_0(1) = 1$ et $P_0(0) \neq 0$. Si $\hat{\gamma}(\xi) \in L^1$, alors

$$\prod_{j=1}^N P_0(e^{-i\xi/2^j}) \chi_K\left(\frac{\xi}{2^N}\right)$$

tend vers $\hat{\gamma}$ en norme L^1 (où K est décrit dans la Proposition 1). On a alors le procédé d'approximation suivant [5]:

Proposition 3. *On pose*

$$h_0(x) = \chi_{[-1/2, 1/2]}(x) \quad \text{et} \quad h_{k+1}(x) = \sum_{l=0}^N \alpha_l h_k(2x - l)$$

(où

$$P_0(z) = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^N \alpha_l z^l).$$

Si $\hat{\gamma} \in L^1$, alors $h_k \rightarrow \gamma$ en norme L^∞ , pour $k \rightarrow +\infty$.

En effet h_k est constante par morceaux sur des intervalles de longueur $1/2^k$. De plus sur les points de $1/2^k \mathbb{Z}$, h_k coïncide avec θ_k où

$$\hat{\theta}_k = \prod_{j=1}^k P_0(e^{-i\xi/2^j}) \chi_K\left(\frac{\xi}{2^k}\right)$$

(par récurrence sur k). Enfin γ est uniformément continue puisque continue et à support compact. Comme $\|\theta_k - \gamma_k\|_\infty \rightarrow 0$, on a bien $\|h_k - \gamma_k\|_\infty \rightarrow 0$.

Néanmoins la convergence n'est pas rapide. Prenons l'exemple d'un spline cubique:

$$\hat{\gamma}(\xi) = \left(\frac{1 - e^{-i\xi}}{-i\xi} \right)^4.$$

On pose

$$\hat{G}(\xi) = \frac{\hat{\gamma}(\xi)}{P_\gamma(\xi)}$$

de sorte que $\langle G(x) | \gamma(x - k) \rangle = \delta_k$. Alors il est facile de voir que

$$h_k\left(\frac{p}{2^k}\right) = \left\langle \gamma\left(\frac{x}{2^k}\right) \middle| G(x - p) \right\rangle.$$

En particulier, on a

$$h_k(p) = \left\langle \gamma\left(\frac{x}{2^k} + p\right) \middle| G(x) \right\rangle = \gamma(p) + \frac{1}{2^k} \gamma'(p) \int xG(x) dx + O\left(\frac{1}{4^k}\right).$$

Or

$$\int xG(x) dx = 2 \quad \text{et} \quad \gamma'(1) = \frac{1}{2},$$

d'où

$$|h_k(1) - \gamma(1)| \sim \frac{1}{2^k}.$$

L'erreur n'est divisée que par 2 à chaque itération. Si l'on veut calculer γ aux points entiers, on utilisera plutôt la remarque suivante.

Proposition 4. On note M la transformation linéaire définie sur \mathbb{R}^{N-1} par

$$M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad y_j = \sum_{l=0}^N \alpha_l x_{2j-l}$$

(en prolongeant x_j par 0 en dehors de $\{1, \dots, N-1\}$) où

$$P_0(z) = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^N \alpha_l z^l.$$

Si $\hat{\gamma}(\xi) \in L^1$, alors $\text{Ker}(M - \text{Id})$ est de dimension 1 et

$$\begin{pmatrix} \gamma(1) \\ \vdots \\ \gamma(N-1) \end{pmatrix}$$

est déterminé uniquement par

$$M \begin{pmatrix} \gamma(1) \\ \vdots \\ \gamma(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(1) \\ \vdots \\ \gamma(N-1) \end{pmatrix}$$

et

$$\sum_{j=1}^{N-1} \gamma(j) = 1.$$

DÉMONSTRATION. Soit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix}$$

une solution de $MX = X$. On pose

$$h_0(x) = \sum_{j=1}^{N-1} x_j \theta_0(x-j)$$

où $\hat{\theta}_0(\xi) = \chi_K(\xi)$ et

$$h_{k+1}(x) = \sum_{l=0}^N \alpha_l h_k(2x-l).$$

Alors

$$\widehat{h_{k+1}}(\xi) = P_0(e^{-i\xi/2}) \widehat{h_k}\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

et donc, en posant

$$Q(\xi) = \sum_{j=1}^{N-1} x_j e^{-ij\xi},$$

on a

$$\widehat{h_k}(\xi) = \prod_{j=1}^k P_0(e^{-i\xi/2^j}) \chi_K\left(\frac{\xi}{2^k}\right) Q\left(\frac{\xi}{2^k}\right),$$

ce qui tend en norme L^1 vers $\hat{\gamma}(\xi)Q(0)$. En particulier $h_k(p)$ tend vers $Q(0)\gamma(p)$; or $h_k(p) = x_p$ (par récurrence sur k) et donc

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix} = \left(\sum_{j=1}^{N-1} x_j \right) \begin{pmatrix} \gamma(1) \\ \vdots \\ \gamma(N-1) \end{pmatrix}.$$

Proposition 6. *Les intégrales*

$$\int x^k \gamma(x) dx, \quad k \in \mathbb{N},$$

se calculent récursivement par les formules:

- $\int x^k \gamma(x) dx = i^k \hat{\gamma}^{(k)}(0).$
- $\hat{\gamma}(0) = 1.$
- $(2^{k+1} - 1) \hat{\gamma}^{(k+1)}(0) = \sum_{\alpha=0}^k C_k^\alpha \hat{\gamma}^{(\alpha)}(0) m_0^{(k+1-\alpha)}(0).$

Il s'agit juste d'appliquer la formule de Leibnitz à $\hat{\gamma}(2\xi) = m_0(\xi) \hat{\gamma}(\xi)$ avec $m_0(\xi) = P_0(e^{-i\xi})$.

Proposition 7.

- (i) *Si $\gamma \in H^1$ (c'est-à-dire si $\gamma' \in L^2$) alors il existe une analyse multi-résolution V'_j de $L^2(\mathbb{R})$ de base normalisée M_1 telle que*

$$\gamma'(x) = M_1(x) - M_1(x-1).$$

- (ii) *Il existe de même une analyse multi-résolution V''_j de $L^2(\mathbb{R})$ de base normalisée M_2 telle que $\gamma(x) - \gamma(x-1) = M'_2(x)$.*

La Proposition 7 permet donc de dériver les fonctions de V_0 et d'intégrer les fonctions de V_0 d'intégrales nulles. Le fait que la dérivation dans V_0 revient à appliquer un opérateur de différence finie dans un autre espace V'_0 m'a été signalé par G. Malgouyres [9].

DÉMONSTRATION.

- (i) Comme γ' est à support compact et que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma'(x-k) = 0$$

(puisque $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma(x-k) = \hat{\gamma}(0)$), on a

$$\gamma'(x) = M_1(x) - M_1(x-1) \quad \text{où} \quad M_1(x) = \sum_{k=-\infty}^{-1} \gamma'(x-k)$$

est dans L^2 et à support compact. De plus, on a

$$\widehat{M}_1(\xi) = \frac{i\xi}{1 - e^{-i\xi}} \widehat{\gamma}(\xi) \quad \text{d'où} \quad \widehat{M}_1(2\xi) = \frac{2}{1 + e^{-i\xi}} P_0(e^{-i\xi}) \widehat{M}_1(\xi).$$

Comme

$$P_0(-1) = 0, \quad P_1(z) = \frac{2}{1+z} P_0(z)$$

est un polynôme avec $P_1(1) = 1$ d'où

$$\widehat{M}_1(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} P_1(e^{i\xi/2^j}).$$

Il est clair que P_1 vérifie les conditions de la Proposition 2 et donc que les $M_1(x - k)$, $k \in \mathbb{Z}$, forment une base de Riesz d'un espace V'_0 pour une analyse multi-résolution $(V'_j)_{j \in \mathbb{Z}}$. De plus, il est clair également que P_1 vérifie (6.5) et donc M_1 est la base normalisée de V'_0 .

(ii) Il suffit de poser

$$\widehat{M}_2(\xi) = \frac{1 - e^{-i\xi}}{i\xi} \widehat{\gamma}(\xi);$$

alors il est clair que $M_2 \in L^2$ et que

$$M'_2(x) = \gamma(x) - \gamma(x - 1)$$

et donc M_2 est à support compact. De plus on a

$$\widehat{M}_2(2\xi) = \frac{1 + e^{-i\xi}}{2} P_0(e^{-i\xi}) \widehat{M}_2(\xi) \quad \text{d'où} \quad \widehat{M}_2(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} P_2(e^{-i\xi/2^j})$$

où

$$P_2(z) = \frac{1+z}{2} P_0(z),$$

et la conclusion (voir à nouveau la Proposition 2 et (6.5)) est immédiate.

Corollaire 5. Si $\gamma \in H^k$ (c'est-à-dire si pour $j \in \{0, \dots, k\}$, $\gamma^{(j)} \in L^2$) alors $\widehat{\gamma}^{(j)}(2l\pi) = 0$ pour $l \neq 0$ et $0 \leq j \leq k$. En particulier, tout polynôme de degré $\leq k$ se représente comme

$$Q(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} R(l) \gamma(x - l)$$

où R est également un polynôme de degré $\leq k$.

En effet, si $\gamma \in H^k$ alors $\gamma'(x) = M_1(x) - M_1(x-1)$ où $M_1 \in H^{k-1}$. De plus si

$$\hat{\gamma}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} P_0(e^{-i\xi/2^j}) \quad \text{alors} \quad \widehat{M}_1(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} P_1(e^{-i\xi/2^j})$$

où

$$P_1(z) = \frac{2}{1+z} P_0(z).$$

D'où si $\gamma \in H^k$ alors $(2/(1+z))^k P_0(z)$ est un polynôme qui vérifie de plus que sa valeur en -1 est nulle (d'après (3.2)). On a donc

$$P_0(z) = \left(\frac{1+z}{2}\right)^{k+1} Q_0(z);$$

comme

$$\hat{\gamma}(2k\pi + \xi) = P_0(e^{-i\xi/2 - i\pi}) \hat{\gamma}\left(l\pi + \frac{\xi}{2}\right),$$

on montre que $\hat{\gamma}^{(j)}(2l\pi) = 0$ par récurrence sur M tel que $l/2^M \in 2\mathbb{Z} + 1$.

De plus, si on note M_j la base normalisée de l'analyse multi-résolution où se trouve $\gamma^{(j)}$, alors on a:

$$\begin{aligned} \left(\sum a_l \gamma(x-l)\right)' &= \sum a_l (M_1(x-l) - M_1(x-1-l)) \\ &= \sum (a_l - a_{l-1}) M_1(x-l) \end{aligned}$$

d'où

$$\left(\sum a_l \gamma(x-l)\right)^{(k)} = \sum \Delta^k a_l M_k(x-l) \quad \text{où} \quad \Delta(a_l) = (a_l - a_{l-1}).$$

Si $a_l = R(P)$ avec $\deg R \leq k$ alors $\Delta^k a_l$ est constante et

$$\left(\sum a_l \gamma(x-l)\right)^{(k)} = c^{te} \widehat{M}_k(0).$$

On obtient que $R \rightarrow \sum R(l)\gamma(x-l)$ envoie $\mathbb{C}_k[X]$ dans $\mathbb{C}_k[X]$; de plus cette transformation est injective donc surjective.

Proposition 8. *Si V_j et V'_j sont deux analyses multi-résolutions de bases normalisées α et β , alors $\alpha * (\beta(-x))$ est dans un espace V'_0 d'une analyse multi-résolution, et on peut donc calculer $\int \alpha(x)\beta(x-k) dx$ à l'aide de la Proposition 4.*

En effet, si

$$\gamma(x) = \int \alpha(y)\beta(y-x) dy,$$

alors on a

$$\hat{\gamma}(\xi) = \hat{\alpha}(\xi)\overline{\hat{\beta}(\xi)} \quad \text{d'où} \quad \hat{\gamma}(2\xi) = P_0(e^{-i\xi})\overline{P_1(e^{-i\xi})}\hat{\gamma}(\xi)$$

(où $\hat{\alpha}(2\xi) = P_0(e^{-i\xi})\hat{\alpha}(\xi)$ et $\hat{\beta}(2\xi) = P_1(e^{-i\xi})\hat{\beta}(\xi)$). Le Corollaire 2 permet alors de conclure. (Il se peut que les $\gamma(x - k)$ ne forment toutefois pas une base de Riesz de V_0'' .)

En combinant les Propositions (7) et (8), on voit qu'on peut calculer pour un opérateur différentiel $\sum a_\alpha \left(\frac{d}{dx}\right)^\alpha$ à coefficients constant les quantités $\left\langle \sum a_\alpha \left(\frac{d}{dx}\right)^\alpha \psi_{j,k}^{(\epsilon)} \mid \psi_{j,k}^{(\eta)} \right\rangle$ où $\epsilon, \eta \in \{0, 1\}$, $\psi^{(0)} = \varphi$ et $\psi^{(1)} = \psi$, φ et ψ étant les père et mère des ondelettes orthonormées d'I. Daubechies. Or ces calculs interviennent dans l'analyse de l'opérateur $\sum a_\alpha \left(\frac{d}{dx}\right)^\alpha$ par l'algorithme de Beylkin-Coifman-Rokhlin [2]. Ce genre de calculs est actuellement développé par M. Lahzami [7] pour la programmation numérique.

6. Exemples

- (i) *Les fonctions splines.* L'analyse multi-résolution des splines de degré k est engendrée par l'espace V_0 des splines de degré k à noeuds dans \mathbb{Z} et de carré intégrable (c'est-à-dire que $f \in V_0$ si et seulement si $f \in L^2 \cap C^{k-1}$ et pour tout $l \in \mathbb{Z}$, $f|_{[l, l+1]}$ est polynomiale de degré $\leq k$). La base normalisée de V_0 est la fonction $\gamma = \chi_{[0,1]} * \dots * \chi_{[0,1]} = \chi_{[0,1]}^{(*)k+1}$.

L'échelle des fonctions splines est évidemment stable par dérivation et primitivation et la Proposition 7 ne nous apprend rien.

Remarquons que la Proposition 7(ii) est un cas particulier de la Proposition 8, puis-qu'en fait $M_2 = \chi_{[0,1]} * \gamma$.

L'existence d'ondelettes splines à support compact (cf. Corollaire 2) a été signalée par Lemarié en 1987 [8] et systématiquement étudiée dans la thèse de P. Auscher [1].

- (ii) *Les bases d'I. Daubechies.* I. Daubechies a construit des fonctions ${}_N\varphi$ telles que: $\text{Supp}_N \varphi \subset [0, 2N - 1]$, les ${}_N\varphi(x - k)$ sont orthonormées quand k décrit \mathbb{Z} et ${}_N\varphi$ est de classe $C^{\lambda N}$ pour un $\lambda > 0$ [5]. Il est clair que ${}_N\varphi$ est la base normalisée de l'espace V_0 associé (puisque (6.3) est immédiat). Par contre l'échelle de ces fonctions ${}_N\varphi$ n'est stable ni par primitivation ni par dérivation et les calculs comme ceux développés à la suite de la Proposition 8 font intervenir d'autres analyses multi-résolution.
- (iii) *Les analyses multi-résolution non orthogonales de J. C. Fauveau.* Pour construire des analyses multi-échelle à analyse et synthèse rapides et à fil-

tre à phase linéaire, J. C. Fauveau a été amené à introduire la notion d'analyse multi-résolution non orthogonale [6]. Sa construction repose sur deux fonctions γ_1 et γ_2 à support compact telles que:

$$\hat{\gamma}_1(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} P_1(e^{-i\xi/2^j}), \quad \hat{\gamma}_2(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} P_2(e^{-i\xi/2^j}),$$

$$P_1(z)P_2(z) + P_1(-z)P_2(-z) = 1$$

et les $\gamma_i(x - k)$ sont la base de Riesz d'un espace $V_{0,i}$ lié à une analyse multi-résolution. Il est alors clair que γ_i est la base normalisée de $V_{0,i}$ (d'après (6.5)).

Références

- [1] Auscher, P. Ondelettes fractales et applications, Thèse, Université Paris IX, 1989.
- [2] Beylkin, G., Coifman, R. and Rokhlin, V. Fast wavelet transforms and numerical algorithms, Research report, Yale Univ., 1989.
- [3] Chui, C. K. and Wang, J. Z. A general framework of compactly supported splines and wavelets, à paraître, 1990.
- [4] Cohen, A. Ondelettes, analyses multi-résolutions et traitement numérique du signal, Thèse, Université Paris IX, 1990.
- [5] Daubechies, I. Orthonormal basis of compactly supported wavelets, *Comm. Pure Appl. Math.* **41**(1988), 909-996.
- [6] Fauveau, J. C. Analyse multirésolution par ondelettes non orthogonales et banc de filtres numériques, Thèse, Université Paris XI, 1990.
- [7] Lahzami, M. Thèse en cours, Université Paris XI.
- [8] Lemarie, P. G. Constructions d'ondelettes splines, 1987, non publié.
- [9] Malgouyres, G. Communication personnelle.
- [10] Mallat, S. Multiresolution approximations and wavelet bases of $L^2(\mathbb{R})$, *Trans. Amer. Math. Soc.* **315**(1989), 69-87.
- [11] Meyer, Y. *Ondelettes et opérateurs*, tome 1, Hermann, 1990.
- [12] Meyer, Y. Ondelettes sur l'intervalle, *Revista Mat. Iberoamericana*, à paraître.

Recibido: 8 de marzo de 1991.

Pierre Gilles Lemarié
CNRS UA 757
Université de Paris-Sud
Mathématiques-Bât. 425
91405 Orsay Cedex. FRANCE