Revista Matemática Iberoamericana
Vol. 8, n.° 2, 1992

# Conjecture de Kato sur les ouverts de $\mathbb{R}$

**Pascal Auscher and Philippe Tchamitchian**

**Résumé.** On démontre la conjecture de Kato pour les opérateurs différentiels elliptiques du deuxième ordre sur un ouvert en dimension 1 avec conditions aux limites quelconques. Le cas général se réduit à celui de l'opérateur $T = -\frac{d}{dx}a(x)\frac{d}{dx}$ sur un intervalle, où $a(x)$ est une fonction bornée et accrétive. On montre dans ce cas que le domaine de l'opérateur $T$ est engendré par une base de Riesz constituée d'ondelettes dont le caractère oscillant compense l'action de la fonction non-régulière $a(x)$.

**Abstract.** We prove Kato's conjecture for second order elliptic differential operators on an open set in dimension 1 with arbitrary boundary conditions. The general case reduces to studying the operator $T = -\frac{d}{dx}a(x)\frac{d}{dx}$ on an interval, when $a(x)$ is a bounded and accretive function. We show for the latter situation that the domain of $T$ is spanned by an unconditional basis of wavelets with cancellation properties that compensate the action of the non-regular function $a(x)$.

## Introduction.

La conjecture de Kato est l'énoncé suivant : si $T$ est un opérateur accrétif et maximal, de domaine $\mathcal{D}(T)$ dans un espace de Hilbert $H$, défini à partir d'une forme sesquilinéaire $J$, le domaine de la racine carrée de $T$ coïncide avec le domaine de $J$.

Le problème a été abordé dès les années '60 par T. Kato [10], ainsi que par J.-L. Lions [13]. Il est cependant trop général puisque A. McIntosh a fourni des contre-exemples de nature abstraite [19].

C'est pourquoi l'on examine cette conjecture pour des opérateurs différentiels elliptiques (lesquels ont précisément amené Kato à formuler sa conjecture). Pour ceux du deuxième ordre

$$(*)\ T = -\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} b_i(x) + \sum_i c_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + d(x) + s$$

où $a_{ij}$, $b_i(x)$, $c_i(x)$, $d(x) \in L^\infty(\Omega)$, $\Omega \in \mathbb{R}^n$, Re $\sum_{i,j} a_{ij}(x)\xi_i\bar{\xi}_j \geq |\xi|^2$ pour tout $x \in \Omega$ and $\xi \in \mathbb{C}^n$, et $s \geq s_0$ assez grand, la conjecture est toujours ouverte si $n \geq 2$. On peut consulter [20] pour un état des lieux complet sur la question. Nous nous intéressons ici à la dimension 1.

Il a fallu attendre 1981 pour que la conjecture soit démontrée par R. Coifman, A. McIntosh et Y. Meyer [5] lorsque $n = 1$, $T = -\frac{d}{dx}a(x)\frac{d}{dx}$ sur $\mathbb{R}$ et Re $a(x) \geq 1$.

Qu'en est-il cependant de la conjecture pour le «même» opérateur lorsque $\mathbb{R}$ est remplacé par un intervalle $I$ ou plus généralement par un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}$? L'objet de ce travail est l'étude de cette question à ce jour toujours ouverte.

Dans le cas d'un intervalle, par exemple $I = (0, 1)$ pour fixer les idées, $T$ est associé à une forme sesquilinéaire $J$ définie sur un sous-espace fermé V de $H^1(I)$ qui contient $H^1_0(I)$ par

$$J(f,g) = \int_I a(x) f'(x) \overline{g'(x)}\, dx.$$

L'espace $V$ définit les conditions aux limites et, par abus, $-\frac{d}{dx}a(x)\frac{d}{dx}$ désigne encore l'opérateur $T$ associé à $J$.

Lorsque $a(x)$ n'est pas régulière, la méthode employée dans [5] (développement de $T^{1/2}$ en une série d'opérateurs multilinéaires dont le terme général est estimé) utilise l'homogénéité par dilatation du problème sur $\mathbb{R}$ et ne semble pas s'adapter à notre situation inhomogène.

Il fallait donc trouver une approche alternative qui permette de traiter ce problème. Cette approche a été mise en place dans [3] où nous avons donné une nouvelle démonstration du résultat de [5] mentionné précédemment. Cet article en est le prolongement et nous apportons ici une réponse positive à la conjecture de Kato pour l'opérateur $T$ introduit ci-dessus quelles que soient les conditions aux limites, mêlées ou non.

Nous démontrons en fait cette conjecture pour tous les opérateurs elliptiques du second ordre à coefficients non-réguliers de la forme $(*)$ en dimension 1. Les idées développées s'appliquent également à certains opérateurs elliptiques d'ordre supérieur. Notre démarche repose sur la caractérisation explicite du domaine de l'opérateur. La conjecture de Kato en sera une conséquence facile à partir des résultats d'interpolation de J.-L. Lions [13].

Venons-en à la méthode utilisée. La caractérisation du domaine de $T$ est obtenue à l'aide d'une base d'ondelettes spécialement conçues. L'idée sous-jacente à l'utilisation des ondelettes est qu'elles sont des «pseudo-fonctions propres» de certains opérateurs différentiels ordinaires. Par exemple, l'image d'une ondelette par l'opérateur $d/dx$ est une autre ondelette, normalisée en tenant compte du support fréquentiel de l'ondelette utilisée et de l'ordre de la dérivation. En d'autres termes les propriétés génériques des ondelettes sont conservées par dérivation.

Bien sûr, une base d'ondelettes ordinaires ne conviendrait pas à notre opérateur; il faut également compenser l'action de la fonction non-régulière $a(x)$. Cette compensation sera contenue dans le caractère oscillant des ondelettes que nous construisons, qui fait intervenir la mesure $a(x)^{-1}dx$.

C'est pour analyser l'opérateur de Cauchy sur une courbe lipschitzienne que les ondelettes adaptées à $a(x)^{-1}$ sur $\mathbb{R}$ ont été construites dans [21]. La même construction sert donc aussi bien à démontrer la conjecture de Kato pour $-\frac{d}{dx}a(x)\frac{d}{dx}$ [3] et l'on retrouve ainsi les liens étroits qui unissent les deux problèmes [5], [12].

L'opérateur de Cauchy n'apparaît plus lorsque nous travaillons sur un intervalle, mais la méthode des bases adaptées reste un outil efficace pour résoudre notre problème. Les difficultés nouvelles liées aux conditions aux limites seront essentiellement d'ordre technique.

Le plan de l'article est le suivant:

1. Situation et énoncé du résultat.
2. Réductions du problème.
3. Esquisse de la démonstration générale pour $D^*aD$ sur un intervalle.
4. Analyses multirésolution avec données au bord sur un intervalle.
5. Ondelettes adaptées à $1/a(x)$.
6. Mesures de Carleson et estimations quadratiques.
7. Estimations quadratiques pour les ondelettes adaptées.
8. Fin de la démonstration pour chaque donnée au bord.
9. Commentaires et extensions.
10. Appendices.

## 1. Situation et énoncé du résultat.

On se donne un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}$ et $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ et $d(x)$ quatre fonctions mesurables, à valeurs complexes et bornées sur $\Omega$. On dénotera par $a$, $b$, $c$ et $d$ les opérateurs de multiplication ponctuelle associés. On supposera constamment que $a(x)$ est accrétive, ce qui veut dire

$$\text{(1.1)} \qquad \operatorname{Re} a(x) \geq 1 \qquad \text{pour presque tout } x \in \Omega.$$

Soit $V$ un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$ qui contient $H_0^1(\Omega)$. On désigne par $D$ l'opérateur $-i\frac{d}{dx}$ de domaine $V$. Son adjoint est $D^* = -i\frac{d}{dx}$ de domaine $V^*$, un (autre) sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$ (ne pas confondre avec un quelconque dual de $V$).

On définit une forme sesquilinéaire sur $V$ par

$$\text{(1.2)} \qquad J(f,g) = \int_\Omega \{a\, Df\, \overline{Dg} + b\, f\, \overline{Dg} + c\, Df\, \overline{g} + d\, f\, \overline{g}\}\; dx\,.$$

Il existe $r \in \mathbb{R}$ et une constante $C_r$ telles que pour $s \geq r$ et $f \in V$

$$\text{(1.3)} \qquad \operatorname{Re} J(f,f) + s\,\|f\|^2 \geq C_r \left(\|Df\|^2 + \|f\|^2\right)\,.$$

On convient que $\|\cdot\|$ désigne la norme hilbertienne usuelle sur $L^2(\Omega)$, les autres normes figurant avec des indices.

Nous suivons la théorie de Kato [11]. La forme $J+s$ est maximale-accrétive sur $V$. L'espace des fonctions $f \in V$ telles que

$$|J(f,g)| \leq C\,\|g\| \qquad \forall g \in V,$$

est le domaine $\mathcal{D}(T)$ d'un opérateur $T$ tel que

$$J(f,g) = \langle Tf, g\rangle \qquad \forall f \in \mathcal{D}(T), \forall g \in V.$$

$\mathcal{D}(T)$ est un sous-espace dense dans $L^2(\Omega)$ et dans $V$ pour les topologies respectives. Pour $s \geq r$, l'opérateur $T+s$ est maximal-accrétif. On notera, par abus, $T = D^*aD + D^*b + cD + d$.

Pour $\Omega$ et $V$ fixés, on dénotera par $\mathcal{A}$ la classe formée de tous ces opérateurs et par $\mathcal{B}$ la sous-classe constituée des opérateurs $D^*aD$.

Si $T \in \mathcal{A}$, la racine carrée de $T+s$ est donnée par la formule

$$(T+s)^{1/2} f = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} (1+t^2(T+s))^{-1}(T+s) f \, dt$$

qui converge absolument pour $f \in \mathcal{D}(T)$. Le domaine de $(T+s)^{1/2}$ contient celui de $T+s$, il coïncide avec l'image par $(T+s)^{-1/2}$ de $L^2(\Omega)$ et est indépendant de $s$. On a le résultat suivant:

**Théorème 1.** *Soit $T \in \mathcal{A}$ et $s$ assez grand pour que $T+s$ soit maximal-accrétif. Alors $\mathcal{D}((T+s)^{1/2}) = V$.*

Pour $T = D^*aD$, $\Omega = \mathbb{R}$ et $V = H^1(\mathbf{R})$, c'est le théorème de R. Coifman, A. McIntosh et Y. Meyer [5]. La suite de l'article est consacrée à la preuve du Théorème 1.

## 2. Réductions du problème.

Ces réductions consistent à voir qu'il suffit d'établir le Théorème 1 pour les opérateurs de la classe $\mathcal{B}$ sur un intervalle.

Fixons l'ouvert $\Omega$ et l'espace $V$. Commençons par éliminer les termes d'ordre inférieur.

**Proposition 1.** *Le Théorème 1 est vrai pour tout $T \in \mathcal{A}$ s'il est vrai pour tout $T \in \mathcal{B}$.*

Rappelons tout d'abord que l'adjoint d'un opérateur maximal-accrétif est maximal-accrétif. On en tire facilement que $\mathcal{A}$ est une classe autoadjointe d'opérateurs (de même pour $\mathcal{B}$ ).

Soient $T = D^*aD + D^*b + cD + d \in \mathcal{A}$, $T_1 = D^*aD + D^*b \in \mathcal{A}$ et $T_2^* = D^*\bar{a}D \in \mathcal{B}$. On voit facilement que $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T_1)$ et que $\mathcal{D}(T_1^*) = \mathcal{D}(T_2^*)$. Pour $s$ choisi assez grand, $T + s$, $T_1 + s$ et $T_2 + s$ sont tous trois maximaux-accrétifs. On prendra $s = 0$ pour faciliter la notation. L'hypothèse de la proposition dit que $\mathcal{D}(T_2^*) = V$.

On utilise alors deux résultats dûs à J. L. Lions [13].

**Lemme 1.** *Si $T$, un opérateur non-borné de domaine $\mathcal{D}(T)$ dans un espace de Hilbert $H$, est maximal-accrétif alors $\mathcal{D}(T^{1/2})$ est l'espace d'interpolation complexe à mi-chemin entre $H$ et $\mathcal{D}(T)$.*

**Lemme 2.** *Soit $\phi$ une forme sesquilinéaire maximale-accrétive de domaine $\mathcal{D}(\phi)$ dense dans $H$ ($H$ espace de Hilbert). Soit $T$ l'opérateur maximal-accrétif de domaine $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(\phi)$ associé à $\phi$ et $T^*$ son adjoint (qui vérifie $\mathcal{D}(T^*) \subset \mathcal{D}(\phi)$ ). Si $\mathcal{D}((T^*)^{1/2}) = \mathcal{D}(\phi)$ alors $\mathcal{D}(T^{1/2}) = \mathcal{D}(\phi)$.*

Appliquons ces résultats. Puisque $T_1^*$ et $T_2^*$ ont même domaine, il en est de même pour leur racine carrée par le Lemme 1. Celui-ci étant $V$ par hypothèse, le Lemme 2 implique que la racine carrée de $T_1$ a l'espace $V$ pour domaine. Puisque $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T_1)$ une nouvelle application du Lemme 1 montre que ce domaine est également celui de la racine carrée de $T$. Ceci démontre la Proposition 1.

On est donc ramené à la situation plus simple

(2.1a) $J(f,g) = \int_\Omega a\, Df\, \overline{Dg}$ sur $V$,

(2.1b) $\operatorname{Re} J(f,f) \geq \|Df\|^2$ , $f \in V$,

(2.1c) $T = D^*aD$ est maximal-accrétif de domaine $\mathcal{D}(T) \subset V$.

Bien que (1.3) soit remplacée par la version plus faible (2.1$b$), l'opérateur $T$ reste maximal-accrétif [11].

**Proposition 2.** $\mathcal{D}(T) = \{f \in V : \ aDf \in V^*\}$.

D'après la maximalité de $T$, il suffit de montrer l'inclusion dans un sens. Soit $f \in \mathcal{D}(T)$, alors $h = aDf \in L^2(\Omega)$. Par (2.1$a$) et la définition de $\mathcal{D}(T)$, la forme antilinéaire $g \mapsto \langle h, Dg \rangle$ définie sur $V$ est donc continue pour la topologie de $L^2(\Omega)$. Ceci revient à dire que $h \in \mathcal{D}(D^*) = V^*$ et la proposition est démontrée.

Passons maintenant à la réduction d'un ouvert arbitraire à un intervalle. Soit $\Omega$ un ouvert et $V$ un sous-espace de $H^1(\Omega)$ comme précédemment. Soit $I$ une composante connexe de $\Omega$ et $V_I$ la restriction à $I$ des fonctions de $V$. La restriction à $V_I$ de la forme $J$ définie sur $V$ par (2.1$a$) induit un opérateur maximal-accrétif $T_I$ de domaine $\mathcal{D}(T_I) \subset V_I$. Le domaine de $T$ se décompose alors en la somme directe hilbertienne des domaines de chaque $T_I$ et $T$ est la somme hilbertienne de ces opérateurs, $I$ parcourant l'ensemble des composantes connexes de $\Omega$. Il est alors immédiat de constater que le Théorème 1 pour $T$ se déduit du Théorème 1 pour chaque $T_I$. Nous remplaçons désormais l'ouvert $\Omega$ par un intervalle $I$.

Modulo des changements de variables évidents, on peut dresser une liste complète de toutes les situations possibles pour $I$ et $V$. Pour des raisons de démonstration, nous en distinguerons neuf dans l'ordre suivant:

(2.2$a$)
$$I = \mathbb{R}, \qquad V = H^1(\mathbb{R}),$$

(2.2$b$)
$$I = (0, +\infty),\ V = H_0^1(0, +\infty) = \{f \in H^1(0, +\infty) : f(0) = 0\},$$

(2.2$c$)
$$I = (0, +\infty),\ V = H^1(0, +\infty),$$

(2.2$d$)
$$I = (0, 1), \qquad V = H_0^1(0, 1) = \{f \in H^1(0, 1) : f(0) = f(1) = 0\},$$

(2.2$e$)
$$I = (0, 1), \qquad V = \{f \in H^1(0, 1) : f(0) = 0\},$$

(2.2$f$)

$$I=(0,1), \qquad V=H^1(0,1),$$

(2.2$g$)

$$I=(0,1), \qquad V=\{f\in H^1(0,1): f(0)=f(1)\},$$

(2.2$h$)

$$I=(0,1), \qquad V=\{f\in H^1(0,1): f(1)=rf(0)\}, r\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\},$$

(2.2$i$)

$$I=(0,1), \qquad V=\{f\in H^1(0,1): f(1)=zf(0)\}, z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}.$$

Rappelons que le théorème d'injection de Sobolev dit que $H^1(I)\hookrightarrow C^{1/2}(\overline{I})$. Les conditions au bord sont donc bien définies et sont à comprendre comme des limites à gauche ou à droite pour $f\in H^1(I)$.

Pour illustrer les notations du début, l'espace $V^*$ dans la situation (2.2$i$) est $\{f\in H^1(0,1): f(1)=\overline{z}^{-1}f(0)\}$. Il s'agit de la condition aux limites «complémentaire» de celle de $V$. Elle permet d'annuler le terme tout intégré dans l'intégration par parties de $\langle Df,g\rangle$, $f\in V$, $g\in V^*$.

Fixons un couple $(I,V)$ de la liste précédente et considérons l'opérateur $T=D^*aD$ défini par les relations (2.1). La preuve du Théorème 1 repose sur une caractérisation du domaine de $T$ à l'aide d'une base d'ondelettes appropriée.

**Théorème 2.** *Avec les notations précédentes, il existe un ensemble d'indices $\Lambda$, un poids positif $\omega(\lambda)$ défini sur $\Lambda$ et, pour chaque $\lambda\in\Lambda$, une fonction lipschitzienne $\tau_\lambda(x), x\in I$, appartenant à $\mathcal{D}(T)$ et vérifiant les propriétés suivantes:*

(i) *la collection des fonctions $\tau_\lambda$ est une base de Riesz de chacun des espaces $L^2(I)$, $V$ et $\mathcal{D}(T)$ ,*

(ii) *une série $\sum\alpha_\lambda\tau_\lambda(x)$ appartient à $L^2(I)$, $V$ et $\mathcal{D}(T)$ si et seulement si $(\alpha_\lambda)\in\ell^2(\Lambda)$, $(\alpha_\lambda)\in\ell^2(\Lambda,\omega)$ et $(\alpha_\lambda)\in\ell^2(\Lambda,\omega^2)$ respectivement.*

Rappelons que dans un espace de Hilbert $H$, une famille de vecteurs non nuls $(e_k)$ est une base de Riesz (on dit aussi base inconditionnelle), si tout vecteur $v \in H$ est la somme d'une unique série inconditionnellement convergente $\sum a_k e_k$ et si $\|v\|$ et $\left(\sum |a_k|^2 \|e_k\|^2\right)^{1/2}$ définissent deux normes équivalentes. La base est dite normalisée pour $H$ si $0 < A \leq \|e_k\| \leq B < +\infty$ pour tout $k$. Dans notre cas, les bases de Riesz de plusieurs espaces, dont $L^2(I)$, seront toujours normalisées pour $L^2(I)$.

Le Théorème 1 se déduit simplement du Théorème 2 comme suit. Dans la base $(\tau_\lambda)$, $L^2(I)$ est caractérisé par $(\alpha_\lambda) \in \ell^2(\Lambda)$ et $\mathcal{D}(T)$ par $(\alpha_\lambda) \in \ell^2(\Lambda, \omega^2)$. En interpolant d'après le Lemme 1, $\mathcal{D}(T^{1/2})$ est donc caractérisé par $(\alpha_\lambda) \in \ell^2(\Lambda, \omega)$. Par conséquent $\mathcal{D}(T^{1/2}) = V$.

La preuve du Théorème 1 repose donc complètement sur celle du Théorème 2 qui occupera la suite de cet article (excepté la Section 9). Nous mettrons en place les outils nécessaires dans les Sections 4 à 7, l'argument final étant présenté dans la Section 8, séparément pour chacune des neuf situations décrites précédemment. A cause de différences techniques notables, il nous a semblé plus simple de le faire ainsi. Toutefois, ces arguments ont une formulation commune dont nous esquissons maintenant les traits principaux.

## 3. Esquisse de la démonstration du Théorème 2.

Le point de départ est la construction dans $L^2(I)$ d'une base $(\theta_\lambda)$ d'ondelettes dont le caractère oscillant est adapté à la mesure $1/a(x)\,dx$: les intégrales $\int_I \theta_\lambda(x) \frac{dx}{a(x)}$ sont nulles ou bien petites en un sens qu'on précisera.

Les fonctions $\tau_\lambda$ du Théorème 2 sont définies dans $V$ et telles que

$$D\tau_\lambda(x) = c_\lambda \frac{1}{a(x)} \theta_\lambda(x). \tag{3.1}$$

Pour que $\tau_\lambda \in \mathcal{D}(T)$, on voit d'après la Proposition 2 qu'il faut imposer la condition

$$\theta_\lambda \in \mathcal{D}(D^*) = V^*. \tag{3.2}$$

Cela permet de poser

$$c_\lambda \sigma_\lambda(x) = D^* \theta_\lambda(x). \tag{3.3}$$

Il vient alors

$$D^*aD\tau_\lambda(x) = c_\lambda^2\ \sigma_\lambda(x). \tag{3.4}$$

La valeur du facteur $c_\lambda^2$ dépend directement de l'ordre de $T$. C'est ce facteur qui produit le poids $\omega$ du Théorème 2. La caractérisation de $\mathcal{D}(T)$ provient du fait que les deux familles $(\tau_\lambda)$ et $(\sigma_\lambda)$ forment deux bases de Riesz de $L^2(I)$. La caractérisation de l'espace intermédiaire s'obtient grâce à (3.1).

C'est la relation (3.4) qui exprime cette idée de «presque-diagonalisation» quand les $\tau_\lambda$ et les $\sigma_\lambda$ vérifient des propriétés analogues de taille, de régularité et d'oscillation.

La relation (3.1) ne définit $\tau_\lambda$ qu'à une constante près, mais notre choix est limité par le fait que $\tau_\lambda \in V$. C'est donc sur les propriétés de $\theta_\lambda$ qu'il faut s'appuyer pour obtenir les estimations nécessaires sur $\tau_\lambda$. L'existence des $\theta_\lambda$ est, comme on le voit, au centre de l'argument et la condition (3.2) nous impose de les construire à chaque situation nouvelle (remarquons que le système $(\theta_\lambda)$ doit former une base de $L^2(I)$; pour passer d'un problème aux limites à un autre on ne peut donc pas lui enlever ni lui ajouter une ou plusieurs fonctions sans tuer cette propriété). La méthode de construction suit un algorithme déjà utilisé dans [21]. La clef de voute de tout cet échafaudage est l'inégalité quadratique

$$\left\|\sum \alpha_\lambda\, \theta_\lambda\right\| \leq C \left(\sum |\alpha_\lambda|^2\right)^{1/2},$$

dont la démonstration utilise la notion de mesure de Carleson.

## 4. Analyses multirésolution avec données au bord sur un intervalle.

Une analyse multirésolution est un algorithme général pour obtenir des bases d'ondelettes. Il a été mis en place dans [14] et [15] dans le cadre de $L^2(\mathbb{R})$. On trouve dans [16], [9] et [18] des analyses multirésolution qui fonctionnent dans le cadre plus général de $L^2(I)$. Les ondelettes obtenues dans ces trois articles diffèrent dans leurs valeurs au bord: elles sont périodiques dans [16], nulles au bord dans [9] et arbitraires au bord dans [18]. Cela résulte de ce que les données au bord imposées à l'analyse multirésolution sont différentes au départ. Nous présentons ici une tentative d'unification de ces constructions.

On retrouvera donc beaucoup de points communs avec les références mentionnées à l'instant.

Notre propos étant de prouver la conjecture de Kato, nous nous sommes restreints aux analyses multirésolution constituées de fonctions splines linéaires, essentiellement à cause de leur simplicité d'emploi. Des constructions plus générales sont données dans [1].

Faisons quelques rappels sur les splines linéaires. Un spline linéaire est une fonction continue et affine par morceaux. Le spline linéaire fondamental est la fonction triangle $\Delta(x) = \sup\{1-|x|, 0\}$, $x \in \mathbb{R}$. Tout spline linéaire est alors combinaison linéaire des translatés et dilatés de $\Delta(x)$ : $\Delta((x-y)/t)$, $y \in \mathbb{R}$, $t > 0$. On désignera par $\Delta_{jk}(x)$ la fonction $2^{j/2}\Delta(2^j x - k)$, $j,k \in \mathbb{Z}$. Notons que le support de cette fonction est $[(k-1)2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$.

On a l'inégalité

$$\frac{1}{3}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\alpha_k|^2 \le \int_{\mathbb{R}} \Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k\, \Delta(x-k)\Big|^2 dx \le \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\alpha_k|^2 \tag{4.1}$$

pour toute suite complexe $(\alpha_k)$. On en déduit par un calcul élémentaire

$$\frac{1}{6}\sum_{k=m}^{n} |\alpha_k|^2 \le \int_{m}^{n} \Big|\sum_{k=m}^{n} \alpha_k\, \Delta(x-k)\Big|^2 dx \le \sum_{k=m}^{n} |\alpha_k|^2 \tag{4.2}$$

où $m$, $n \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$. La valeur $1/6$ ne joue aucun rôle sauf celui d'être strictement positive.

Précisons maintenant les données géométriques de nos analyses multirésolution.

Rappelons que $I$ désigne l'un des trois intervalles $\mathbb{R}$, $(0, +\infty)$ ou $(0,1)$. $\partial I$ dénote le bord de $I$. Dans toute la suite, $j_0$ est un entier fini à préciser si $I = (0,1)$, $-\infty$ sinon.

Pour $j > j_0$, $\Gamma_j$ est un ensemble formé de nombres dyadiques $k2^{-j}$, $k \in \mathbb{Z}$, avec les propriétés suivantes:

- $\Gamma_j \subset \bar{I} = (I \cup \partial I)$,
- tous les nombres dyadiques $k2^{-j}$ tels que $\text{dist}(k2^{-j}, \partial I) \ge 2^{-j}$ appartiennent à $\Gamma_j$,
- si $b \in \partial I$ ou bien $b \in \Gamma_j$ pour tout $j$ ou bien $b \notin \Gamma_j$ pour tout $j$.

Cela entraîne aussitôt:

- $\Gamma_j \subset \Gamma_{j+1}$ pour $j > j_0$ ,
- la réunion des $\Gamma_j$ est dense dans $\bar{I}$.

Posons $R_j = 2^j \Gamma_j \subset \mathbb{Z}$. Si $I = \mathbb{R}$ alors $R_j = \mathbb{Z}$, si $I = (0, +\infty)$ alors $R_j = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$ pour tout $j$. Enfin, si $I = (0,1)$, $R_j$ contient au moins tous les entiers de 1 à $2^j - 1$. Tous les $R_j$ vérifient la même condition au bord: ils contiennent simultanément 0 ou/et $2^j$ ou non. Dans ce cas, le cardinal de $R_j$ vaut $2^j + \varepsilon$ où $\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}$ et est indépendant de $j$.

Pour $j > j_0$, on pose $\Lambda_j = \Gamma_{j+1} \setminus \Gamma_j$. Les éléments de $\Lambda_j$ sont tous les nombres de la forme $(2k+1)2^{-j-1}$ contenus dans $I$. L'entier $k$ décrit un intervalle d'entiers $S_j$ égal à $\mathbb{Z}$ si $I = \mathbb{R}$, $\mathbb{N}$ si $I = (0, +\infty)$ et $\{0, 1, \ldots 2^j - 1\}$ si $I = (0,1)$. On pose enfin $\Lambda = \cup_{j > j_0} \Lambda_j$.

Passons maintenant à la définition de l'analyse multirésolution. Pour $j > j_0$, on désigne par $V_j$ l'espace des splines linéaires $f(x)$ de carré intégrable et de la forme

$$f(x) = \sum_{k \in R_j} \alpha_k \Delta_{jk}(x), \quad x \in I.$$

$V_j$ hérite de la norme hilbertienne sur $L^2(I)$. On convient que $V_{j_0}$ est nul.

Les fonctions de $V_j$ ont donc leurs nœuds en les points de $\Gamma_j$. Les propriétés géométriques des $\Gamma_j$ se traduisent en les propriétés fonctionnelles suivantes:

- $V_j \subset V_{j+1}$ si $j > j_0$ ,
- la réunion des espaces $V_j$ est dense dans $L^2(I)$ et si $j_0 = -\infty$ leur intersection est nulle.

Enfin, (4.2) implique que la restriction à $I$ des $\Delta_{jk}$, $k \in R_j$, est une base de Riesz normalisée de $V_j$ avec les estimations

$$\frac{1}{6} \sum_{k \in R_j} |\alpha_k|^2 \leq \int_I \Big| \sum_{k \in R_j} \alpha_k \, \Delta_{jk}(x) \Big|^2 dx \leq \sum_{k \in R_j} |\alpha_k|^2.$$

On appellera analyse multirésolution de $L^2(I)$ la suite des espaces $V_j$ . Si $I = (0,1)$ par exemple, alors $V_j$ est de dimension finie égale au cardinal de $R_j$ ($j_0$ dépend alors de la valeur du nombre $\varepsilon$ lié aux données au bord satisfaites par $\Gamma_j$). Les données au bord pour $\Gamma_j$ se traduisent en conditions aux limites pour les fonctions de $V_j$ : celles-ci sont, par exemple, nulles au bord si les extrémités de $I$ n'appartiennent pas à $\Gamma_j$.

Remarquons pour finir cette section que l'espace $V_j$ est contenu dans $H^1(I)$. Cela se vérifie à la main et est laissé au lecteur.

## 5. Bases adaptées à $1/a(x)$.

Dans toute cette section, $(V_j)$ désigne l'une des analyses multirésolution définies ci-dessus. Commençons par faire une remarque évidente. Toute fonction $f \in V_j$ s'écrit

$$f(x) = \sum_{k \in R_j} 2^{-j/2} f(k2^{-j}) \Delta_{jk}(x), \quad x \in I.$$

C'est une conséquence du fait que $\Delta_{jk}(\ell 2^{-j}) = \delta_{k\ell}$ (les fonctions $\Delta_{jk}$ sont parfois appelées des «splines Lagrangiens» ). Les fonctions de $V_j$ sont donc complètement déterminées par leurs valeurs sur $\Gamma_j$. Pour $j > j_0$, on appelle $U_j$ le sous-espace fermé de $V_{j+1}$ constitué des fonctions qui s'annulent sur $\Gamma_j$. On a le lemme évident suivant.

**Lemme 3.**

1. *$V_{j+1}$ est la somme directe de $V_j$ avec $U_j$.*
2. *Les fonctions à valeurs réelles $u_\lambda(x) = \Delta_{j+1,2k+1}(x)$, $\lambda = (2k+1)2^{-j-1} \in \Lambda_j$, forment une base de Riesz normalisée de $U_j$.*

Si $\langle\ ,\ \rangle$ désigne le produit scalaire hilbertien sur $L^2(I)$, pour $j > j_0$ on appelle $W_j$ le supplémentaire orthogonal de $V_j$ dans $V_{j+1}$. Alors

$$L^2(I) = \bigoplus_{j=-\infty}^{+\infty} W_j\,, \quad \text{si } j_0 = -\infty\,,$$

$$L^2(I) = \bigoplus_{j=j_0+1}^{+\infty} W_j \oplus V_{j_0+1}\,, \quad \text{si } j_0 \text{ est fini.}$$

Soit $B$ la forme bilinéaire, symétrique et continue sur $L^2(I)$ :

$$B(f,g) = \int_I f \, \frac{1}{a} \, g.$$

Puisque $|a(x)| \leq M = \|a\|_\infty$ et Re $a(x) \geq 1$, il vient

$$\text{Re } B(f,\bar{f}) \geq \frac{1}{M^2} \|f\|^2, \quad \forall f \in L^2(I).$$

La forme $B$ est donc bornée et accrétive sur $L^2(I)$. La restriction de $B$ à tout sous-espace autoadjoint de $L^2(I)$ (c'est-à-dire invariant pour la conjugaison complexe des fonctions) l'est également. Observons que les espaces $V_j$, $U_j$ et $W_j$ sont autoadjoints (voir l'Appendice 1 pour l'importance de cette remarque).

Pour $j > j_0$, soit $X_j$ le supplémentaire orthogonal de $V_j$ dans $V_{j+1}$ par rapport à $B$, c'est-à-dire

$$X_j = \{f \in V_{j+1} : B(f,v) = 0 \quad \forall v \in V_j\}.$$

A l'intérieur des espaces $V_j$, $W_j$ et $X_j$, on construit des bases de Riesz qui sont décrites dans le théorème suivant.

**Théorème 3.** *Il existe des constantes $C \geq 0$, $\xi > 0$, $\zeta > 0$ et $\gamma > 0$ telles qu'on ait les assertions suivantes:*

1. *Si $j > j_0$, il existe une base de Riesz normalisée $g_{jk}(x)$, $k \in R_j$, de $V_j$ avec*

$$\xi \sum_{k\in R_j} |\alpha_k|^2 \leq \Big\| \sum_{k\in R_j} \alpha_k\, g_{jk}(x)\Big\|^2 \leq \zeta \sum_{k\in R_j} |\alpha_k|^2.$$

*Les fonctions $g_{jk}$ sont à valeurs complexes et sont orthogonales pour $B$*

$$B(g_{jk}, g_{j\ell}) = \delta_{k\ell}, \quad \forall k,\ell \in R_j.$$

*De plus, elles vérifient les estimations*

$$|g_{jk}(x)| \leq C\, 2^{j/2} \exp\{-\gamma|2^j x - k|\} \tag{5.1a}$$

$$|g_{jk}{}'(x)| \leq C\, 2^{3j/2} \exp\{-\gamma|2^j x - k|\} \tag{5.1b}$$

*pour tout $x \in I$ et $k \in R_j$.*

2. *Si $j > j_0$, il existe une base orthonormée $\psi_\lambda(x)$, $\lambda \in \Lambda_j$, de $W_j$. Ces fonctions sont à valeurs réelles et vérifient*

$$|\psi_\lambda(x)| \leq C 2^{j/2} \exp\{-\gamma 2^j |x-\lambda|\} \tag{5.2a}$$

$$|\psi_\lambda{}'(x)| \leq C 2^{3j/2} \exp\{-\gamma 2^j |x-\lambda|\} \tag{5.2b}$$

*pour tout* $x \in I$ *et* $\lambda \in \Lambda_j$. *Enfin si* $\lambda \in \Lambda_j$, $\ell = 0$ *ou* 1 *et* $d = \operatorname{dist}\{\lambda, \partial I\}$

$$(5.3) \qquad \Big| \int_I (x-\lambda)^\ell \psi_\lambda \Big| \le C\, 2^{-j\ell} 2^{-j/2} \exp\{-\gamma\, d\, 2^j\}.$$

3. *Si* $j > j_0$, *il existe une base de Riesz normalisée* $\theta_\lambda(x)$, $\lambda \in \Lambda_j$, *de* $X_j$ *avec*

$$\xi \sum_{\lambda\in\Lambda_j} |\alpha_\lambda|^2 \le \Big\| \sum_{\lambda\in\Lambda_j} \alpha_\lambda\, \theta_\lambda \Big\|^2 \le \zeta \sum_{\lambda\in\Lambda_j} |\alpha_\lambda|^2.$$

*Ces fonctions sont à valeurs complexes, elles sont orthogonales pour B et vérifient les estimations* (5.2). *Pour* $\lambda = (2k+1)2^{-j-1} \in \Lambda_j$, *elles sont données par*

$$(5.4) \qquad \theta_\lambda(x) = \sum_{\mu\in\Lambda_j} \beta(\lambda,\mu) \mathcal{X}_\mu(x)$$

*où si* $\mu = (2\ell+1)2^{-j-1}$

$$(5.5) \qquad |\beta(\lambda,\mu)| \le C \exp\{-\gamma|k-\ell|\}$$

*et*

$$(5.6) \qquad \mathcal{X}_\mu(x) = \psi_\mu(x) - \sum_{k\in R_j} \int_I \psi_\mu \frac{1}{a}\, g_{jk} \quad g_{jk}(x).$$

*Enfin, avec les notations ci-dessus on a*

$$(5.7) \qquad \Big| \int_I \frac{(x-\lambda)^\ell}{a}\, \theta_\lambda \Big| \le C\, 2^{-j\ell} 2^{-j/2} \exp\{-\gamma\, d\, 2^j\}.$$

4. *Les fonctions* $\theta_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, *sont mutuellement orthogonales pour* $B$.

REMARQUES. 1. Les dérivées des fonctions précédentes sont des fonctions en escalier. On convient par simplicité de les supposer continues à gauche en tout point.

2. Nous ne donnons pas ici le détail de ces constructions issues de [21] et [17], et dont les étapes essentielles sont rappelées dans l'Appendice 1.

Les $W_j$ étant mutuellement orthogonaux, il est évident que les $\psi_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, forment une base orthonormée de $L^2(I)$ (en leur adjoignant, si $j_0$ est fini, une base orthonormée de $V_{j_0+1}$). En revanche, la forme $B$ n'étant pas un produit scalaire, le fait que les $\theta_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, forment une base de Riesz requiert un argument spécifique. On a le théorème suivant.

**Théorème 4.**

1. *Supposons $j_0$ infini. Les fonctions $\theta_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, forment une base de Riesz normalisée de $L^2(I)$ avec les estimations*

$$\xi \sum_{\lambda\in\Lambda} |\alpha_\lambda|^2 \leq \Big\| \sum_{\lambda\in\Lambda} \alpha_\lambda \theta_\lambda \Big\|^2 \leq \zeta \sum_{\lambda\in\Lambda} |\alpha_\lambda|^2 \tag{5.8}$$

*pour toute suite $(\alpha_\lambda)$, où $\xi > 0$ et $\zeta > 0$ sont indépendantes du choix de $(\alpha_\lambda)$. Toute fonction $f \in L^2(I)$ est représentée par la série convergente dans $L^2(I)$*

$$f(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \alpha_\lambda \theta_\lambda(x)$$

*où*

$$\alpha_\lambda = \int_I f \frac{1}{a} \theta_\lambda .$$

2. *L'énoncé analogue est vrai dans le cas où $j_0$ est fini, à condition d'adjoindre aux $\theta_\lambda$ la base $g_{j_0+1,k}$, $k \in R_{j_0+1}$, de $V_{j_0+1}$.*

On conviendra d'appeler estimations standard les inégalités (5.1) ou (5.2).

Les inégalités (5.3) et (5.7) seront essentielles par la suite. Elles proviennent du fait que $V_j$ contient approximativement, et en un sens faible, les polynômes de degré 1 restreints à $I$.

La partie difficile du Théorème 4 est l'inégalité de droite dans (5.8). Elle nécessite l'usage des mesures de Carleson. Nous en aurons par la suite fréquemment besoin et leur consacrons la section suivante.

## 6. Mesures de Carleson et estimations quadratiques.

Le but de cette section est de relier les estimations quadratiques du type

$$\left\| \sum \alpha_\lambda m_\lambda \right\|^2 \leq C \sum |\alpha_\lambda|^2$$

aux mesures de Carleson. Les fonctions $m_\lambda$ sont soumises à des estimations standard.

Ce lien a été établi dans [17] lorsque $I = \mathbb{R}$. Nous en présentons l'extension à un intervalle quelconque (on pourrait aussi se placer sur un ouvert en dimension supérieure). Il n'y a aura pas de surprise à savoir que les résultats de [17] se généralisent in extenso.

Rappelons que $I$ est un intervalle et $\partial I$ son bord. $\Lambda$ est un ensemble constitué d'une réunion disjointe d'ensembles $\Lambda_j$ comme précédemment et $\Lambda \subset I$ . Un élément $\lambda = (2k+1)2^{-j-1} \in \Lambda$ est le milieu d'un intervalle dyadique $I(\lambda) = [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}[$. On dira que $\lambda \subset \mu$ lorsque $I(\lambda) \subset I(\mu)$. Enfin, on note $\ell(\lambda)$ la longueur de $I(\lambda)$. Par commodité, on supposera toujours $\operatorname{dist}\{\lambda, \partial I\} \geq C\,\ell(\lambda)$ où $C > 0$ est une constante numérique (cela n'est pas nécessaire pour ce qui suit).

A partir de maintenant et jusqu'à la fin de l'article, $C$ dénote une constante positive et $\gamma$ une constante strictement positive dont les valeurs changent de ligne en ligne mais en restant indépendantes des différents variables et paramètres.

**Définition 1.** *Soit $m_\lambda(x)$ une suite de fonctions définies sur $I$. On dit que $(m_\lambda)$ est une famille de vaguelettes sur $I$ si les $m_\lambda$ vérifient les estimations standard* (5.2) *et*

$$\int_I m_\lambda = 0. \tag{6.1}$$

Remarquons que nous n'aurons pas vraiment besoin de la localisation exponentielle. Une décroissance inversement polynômiale intégrable suffirait.

**Lemme 5.** *Soit $(m_\lambda)$ une famille de vaguelettes sur $I$. Alors*

$$\left\| \sum \alpha_\lambda m_\lambda \right\|^2 \leq C \sum |\alpha_\lambda|^2 \tag{6.2}$$

*pour toute suite* $(\alpha_\lambda)$.

Signalons que par dualité (6.2) est équivalente à

$$\sum |\langle f, m_\lambda \rangle|^2 \leq C \, \|f\|^2 \tag{6.3}$$

pour toute $f \in L^2(I)$.

La preuve du lemme est une adaptation fidèle du cas $I = \mathbb{R}$. Nous n'en décrivons que les grandes lignes.

En développant le membre de gauche dans (6.2) on est amené à montrer que la matrice $M$ formée des coefficients $\langle m_\lambda, m_\mu \rangle$ est bornée sur $\ell^2(\Lambda)$. Soient $\lambda = (2k+1)2^{-j-1}$, $\mu = (2\ell+1)2^{-j'-1} \in \Lambda$. Supposons que $j > j'$ ou, ce qui revient au même, $\ell(\lambda) < \ell(\mu)$. La fonction $m_\lambda$ est essentiellement localisée sur $I(\lambda)$ alors que $m_\mu$ est régulière et plate sur $I(\lambda)$. Grâce à (6.1) on peut écrire

$$\langle m_\lambda, m_\mu \rangle = \int_I m_\lambda \left( \overline{m_\mu - m_\mu(\lambda)} \right).$$

La régularité de $m_\lambda$ n'intervient pas et l'on peut maintenant prolonger $m_\lambda$ par 0 en dehors de $I$. On est alors ramené au cas $I = \mathbb{R}$. Seules les estimations standard sont utilisées et l'on obtient

$$|\langle m_\lambda, m_\mu \rangle| \leq C \, 2^{-|j-j'|(1/2+\delta)} \exp\{-\gamma 2^{\inf\{j,j'\}} |\lambda - \mu|\} \tag{6.4}$$

où $0 < \delta < 1$.

Pour finir ces estimations impliquent que $M$ est bornée sur $\ell^1(\Lambda, p)$ et sur $\ell^\infty(\Lambda, p^{-1})$, donc sur $\ell^2(\Lambda)$ par interpolation, où $p(\lambda) = 2^{-j/2}$ si $\lambda \in \Lambda_j$. Nous omettons les détails et renvoyons à [17].

**Définition 2.** *Soit* $(c_\lambda)$ *une suite de nombres complexes. On dit que* $(c_\lambda)$ *est une suite de Carleson s'il existe* $C \geq 0$ *telle que pour tout* $\lambda \in \Lambda$,

$$\sum_{\mu \in \Lambda, \mu \subset \lambda} |c_\mu|^2 \leq C|\lambda|. \tag{6.5}$$

La raison de cette terminologie est que la mesure

$$\nu(x,t) = \sum_{\mu \in \Lambda} |c_\mu|^2 \delta(x - \mu, t - \ell(\mu))$$

est alors une mesure de Carleson sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$ (voir, par exemple, [22]). La meilleure $\sqrt{C}$ dans (6.5) sera appelée la constante de Carleson de la suite $(c_\lambda)$.

**Théorème 5.** *Soit $h_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, une suite de fonctions vérifiant les estimations standard. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*
(i) $\left\| \sum \alpha_\lambda h_\lambda \right\|^2 \leq C \sum |\alpha_\lambda|^2$,
(ii) $\left(\int_I h_\lambda\right)$ *est une suite de Carleson.*

ESQUISSE DE LA PREUVE. Soit $\varepsilon > 0$ assez petit. Soit $\varphi(x)$ une fonction $C^\infty$ positive, à support dans $(-\varepsilon, \varepsilon)$ et d'intégrale égale à 1. Pour $\lambda = (2k+1)2^{-j-1} \in \Lambda_j$, posons $\varphi^\lambda(x) = 2^j \varphi(2^j(x-\lambda))$. Remarquons alors qu'un choix convenable de $\varepsilon$ garantit que le support de $\varphi^\lambda$ soit contenu dans $I$ pour tout $\lambda$. Posons ensuite $m_\lambda(x) = h_\lambda(x) - \left(\int_I h_\lambda\right) \varphi^\lambda(x)$. Alors $(m_\lambda)$ est une famille de vaguelettes sur $I$ et le Lemme 5 s'applique. En utilisant (6.3) au lieu de (6.2), on en déduit que (i) est équivalent à

$$\text{(iii)} \qquad \sum |c_\lambda|^2 |\langle f, \varphi^\lambda \rangle|^2 \leq C \, \|f\|^2,$$

où on a posé $c_\lambda = \int_I h_\lambda$.

Cette inégalité appliquée à la fonction indicatrice de chaque $I(\mu)$ implique (ii). Réciproquement, elle est une conséquence de la version discrète d'une célèbre inégalité due à L. Carleson:

$$\sum |a_\lambda|^2 q(\lambda)^2 \leq \int_{\mathbb{R}} \sup q(\lambda)^2 \, dx$$

pour toute suite de Carleson $(a_\lambda)$ de constante 1 et toute fonction positive $q(\lambda)$. Pour chaque $x \in \mathbb{R}$ la borne sup est prise sur tous les nombres $\lambda \in \Lambda$ tels que $x \in I(\lambda)$.

Ici, $q(\lambda) = |\langle f, \varphi^\lambda \rangle|$ si bien que cette borne sup est contrôlée par $C(Mf)(x)$, la fonction maximale de Hardy et Littlewood de $f(x)$ (on a posé $f(x) = 0$ si $x \notin I$). On conclut en utilisant la continuité de $M$ sur $L^2(\mathbb{R})$.

Citons un exemple d'une suite de Carleson. Soit $E$ un ensemble fini de points de $\mathbb{R}$. Alors une suite $(c_\lambda)$ telle que

$$\text{(6.6)} \quad |c_\lambda| \leq C \, 2^{-j/2} \exp\{-\gamma \, 2^j \mathrm{dist}\{\lambda, E\}\}, \quad \lambda = (2k+1)2^{-j-1} \in \Lambda,$$

est de Carleson. Cela se vérifie à la main. Un exemple moins immédiat est donné par le

**Théorème 6.** *Soit $(m_\lambda)$ une famille de fonctions définies sur $I$ et vérifiant pour tout $\lambda \in \Lambda$*

$$|m_\lambda(x)| \leq C\, 2^{j/2} \exp\{-\gamma\, 2^j |x-\lambda|\}$$

*et*

$$\left\| \sum \alpha_\lambda m_\lambda \right\|^2 \leq C \sum |\alpha_\lambda|^2 .$$

*Alors pour tout $b(x) \in L^\infty(I)$, $(\langle b, m_\lambda \rangle)$ est une suite de Carleson.*

REMARQUE. Cet énoncé nous suffira par la suite mais n'est bien sûr pas optimal. On pourrait supposer $b \in$ «$\mathrm{BMO}(I)$» à condition de préciser de quel espace BMO sur l'intervalle nous parlons puisqu'il y a plusieurs définitions possibles. Dans ce cas cependant il faudrait rajouter une hypothèse sur la valeur moyenne de chaque $m_\lambda$.

PREUVE. Soit $\lambda \in \Lambda$, $I(\lambda)$ l'intervalle associé et $Q$ l'intervalle de même centre ayant une longueur double. On pose $b(x) = b_1(x) + b_2(x)$ où $b_1(x) = b(x)\chi_Q(x)$. On observe tout d'abord que

$$\sum_{\mu\in\Lambda, \mu\subset\lambda} |\langle b_1, m_\mu\rangle|^2 \leq \sum_{\mu\in\Lambda} |\langle b_1, m_\mu\rangle|^2 \leq C\, \|b_1\|^2 \leq C\, \|b\|_\infty^2\, |\lambda|$$

par la version duale de l'inégalité quadratique dans l'hypothèse du théorème.

Il reste à établir la même estimation pour $b_2$. Remarquons que $b_2(x) = 0$ pour $x \in Q$. Donc, pour $\mu \subset \lambda \subset Q$, $\langle b_2, m_\mu \rangle = \int_{I\cap Q^c} b_2 \overline{m_\mu}$ se majore brutalement grâce aux estimations sur les $m_\mu$ par

$$C\, \|b\|_\infty\, |\mu|^{1/2} \exp\left\{-\gamma \frac{\ell(\lambda)}{\ell(\mu)}\right\} .$$

En remarquant que le nombre d'intervalles $\mu$ de longueur fixée contenus dans $\lambda$ est $|\lambda|/|\mu|$, la somme $\sum |\langle b_2, m_\mu\rangle|^2$ indexée par les $\mu \in \Lambda$ tels que $\mu \subset \lambda$ s'estime finalement par $C\, \|b\|_\infty^2\, |\lambda|$.

## 7. Estimations quadratiques pour les ondelettes adaptées.

Reprenons les $\theta_\lambda$ construites suivant le Théorème 3. Nous démontrons tout d'abord l'inégalité de droite dans (5.8).

Les $\theta_\lambda$ vérifiant des estimations standard il suffit d'après le Théorème 5 de voir que $(\int_I \theta_\lambda)$ est une suite de Carleson. D'après (5.4) et (5.5) il suffit de le montrer pour la suite $(\int_I \mathcal{X}_\lambda)$ en vertu du lemme évident suivant.

**Lemme 6.** *Soient $m(\lambda,\mu)$ des coefficients vérifiant $m(\lambda,\mu) = 0$ si $\lambda \in \Lambda_j$ et $\mu \in \Lambda_{j'}$ avec $j \neq j'$ et $|m(\lambda,\mu)| \leq C\exp\{-\gamma\, 2^j|\lambda-\mu|\}$ si $j = j'$. Soient $(d_\lambda)$ une suite de Carleson de constante 1 et $(c_\lambda)$ la suite définie par*

$$c_\lambda = \sum m(\lambda,\mu)\, d_\mu.$$

*Alors $(c_\lambda)$ est une suite de Carleson dont la constante ne dépend que de $C$ et $\gamma$.*

Pour calculer ces intégrales on utilise (5.6) et il vient

$$\int_I \mathcal{X}_\lambda = \int_I \psi_\lambda - \int_I \frac{1}{a} m_\lambda$$

où $m_\lambda(x) = \psi_\lambda(x) v_j(x)$ avec $v_j(x) = \sum_{k\in R_j} \int_I g_{jk}\ \ g_{jk}(x)$ pour $\lambda \in \Lambda_j$.

Les estimations standard (5.1) entraînent que

$$\|v_j\|_\infty \leq C \qquad \text{et} \qquad \|v_j{}'\|_\infty \leq C\, 2^j\,.$$

L'orthogonalité entre $W_j$ et $V_j$ (rappelons que $V_j$ est autoadjoint!) et le théorème de convergence dominée montrent que $m_\lambda$ est d'intégrale nulle.

Tout ceci implique que $(m_\lambda)$ est une famille de vaguelettes sur $I$. La suite $(\int_I \frac{1}{a} m_\lambda)$ est donc une suite de Carleson en appliquant successivement le Lemme 5 et le Théorème 6.

En ce qui concerne $(\int_I \psi_\lambda)$ les inégalités (5.3) permettent d'appliquer la remarque pour les suites vérifiant (6.6). Ceci achève les vérifications.

Le membre de gauche de (5.8) s'obtient ensuite par dualité à l'aide du résultat classique suivant.

**Lemme 7.** *Soit $H$ un espace de Hilbert séparable. Soient $(e_k)$ et $(f_k)$ deux suites de $H$. Si pour toute suite $(\alpha_k)$*

$$\Big\|\sum \alpha_k e_k\Big\|^2 \leq C_1 \sum |\alpha_k|^2\,,$$
$$\Big\|\sum \alpha_k f_k\Big\|^2 \leq C_2 \sum |\alpha_k|^2$$

*et*

$$\langle e_k, f_\ell \rangle = \delta_{k\ell},$$

*alors*

$$\sum |\alpha_k|^2 \leq C_2 \left\| \sum \alpha_k e_k \right\|^2$$

*et symétriquement pour les* $(f_k)$.

Ce lemme s'applique alors aux deux familles $(\bar{\theta}_\lambda)$ et $(\frac{1}{a}\theta_\lambda)$.

Pour terminer la preuve du Théorème 4, il faut encore établir la complétude de $(\theta_\lambda)$. Puisque les $V_j$ sont denses dans $L^2(I)$ et que chaque $V_j$ se décompose en une somme $X_{j-1} + \ldots + X_N + V_N$, cela revient à démontrer que le projecteur sur $V_N$ dont le noyau est l'espace orthogonal à $V_N$ dans $L^2(I)$ pour $B$ tend fortement vers 0 si $N$ tend vers $-\infty$. Les détails sont laissés au lecteur (si $j_0$ est fini d'ailleurs, il n'y a donc rien à faire).

REMARQUE. Dans [21] et [2] les auteurs avaient fait dépendre l'inégalité de droite dans (5.8) du Théorème $T(1)$ de David et Journé. Ceci marche bien sûr sur $\mathbb{R}$ mais moins bien sur un intervalle avec conditions aux limites où la théorie de David et Journé ne s'applique pas immédiatement. Il s'avère que cette inégalité ne dépend en fait que des mesures de Carleson et l'équivalence du Théorème 5 prouve que c'est une formulation qui a l'avantage de s'adapter à tous les cas de figure.

## 8. Fin de la démonstration pour chaque condition aux limites.

Les situations considérées ici sont (2.2*a*–*i*). Nous les étudions à tour de rôle.

La situation (2.2*a*) est celle de [3]. Nous ne la refaisons donc pas et nous passons directement à (2.2*b*). Ce sera d'ailleurs la situation que nous détaillerons le plus.

*Condition aux limites* (2.2*b*): $I = (0, +\infty)$ et $V = H_0^1(I)$.

1. Les données géométriques et l'analyse multirésolution.

Pour $j \in \mathbb{Z}$, $\Gamma_j = \{k2^{-j} : k \in R_j = \mathbb{N}\}$ donc $0 \in \Gamma_j$. $V_j$ est l'espace des splines linéaires de $L^2(I)$ ayant leurs nœuds sur $\Gamma_j$ : toute $f \in V_j$ s'écrit $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k \Delta_{jk}(x)$ pour tout $x \geq 0$ avec $\sum |a_k|^2 < \infty$. Observons que $V_j \subset H^1(I) = V^*$. On construit la base $(\theta_\lambda)$ en suivant le Théorème 3. Ces fonctions appartiennent à $V^*$.

2. Définition des $\tau_\lambda$ et $\sigma_\lambda$.

Pour $\lambda \in \Lambda_j$ on pose

$$\tau_\lambda(x) = 2^j \int_0^x \frac{1}{a(t)} \theta_\lambda(t)\, dt, \quad x \geq 0,$$
$$\sigma_\lambda(x) = -2^{-j} \frac{d\theta_\lambda}{dx}(x), \quad x \geq 0,$$

avec la convention que $\sigma_\lambda$ est une fonction en escalier continue à gauche en tout point.

Les fonctions $\tau_\lambda$ sont celles annoncées par le Théorème 2.

3. Vérifications.

Nous allons démontrer les propriétés suivantes:

(8.1) $\quad \left\| \sum \alpha_\lambda \tau_\lambda \right\|^2 \leq C \sum |\alpha_\lambda|^2.$

(8.2) $\quad \left\| \sum \alpha_\lambda \sigma_\lambda \right\|^2 \leq C \sum |\alpha_\lambda|^2.$

(8.3) $\quad \displaystyle\int_I \tau_\lambda \sigma_\mu = \delta_{\lambda\mu}, \quad \forall\, \lambda, \mu \in \Lambda.$

(8.4) La famille $(\tau_\lambda)$ est complète dans $L^2(I)$.

(8.5) $\quad \forall\, f \in L^2(I),$

$$f(x) = \sum \alpha_\lambda \tau_\lambda(x) \text{ où } \alpha_\lambda = \int_I f \sigma_\lambda \text{ et } \|f\| \sim (\sum |\alpha_\lambda|^2)^{1/2}\,.$$

(8.6) $\quad \forall\, f \in V,$

$$f(x) = \sum \alpha_\lambda \tau_\lambda(x) \text{avec} \|f\|_1 \sim (\sum |\alpha_\lambda|^2 \omega(\lambda))^{1/2}$$

(8.7) $\quad \forall\, f \in \mathcal{D}(T),$

$$f(x) = \sum \alpha_\lambda \tau_\lambda(x) \text{ avec } \|f\|_2 \sim (\sum |\alpha_\lambda|^2 \omega(\lambda)^2)^{1/2}\,.$$

On a noté $\|\cdot\|_1$ la norme dans $V = H_0^1(I)$, $\|\cdot\|_2$ la norme du graphe dans $\mathcal{D}(T)$ et $\omega(\lambda) \equiv 1 + 2^{2j}$ si $\lambda \in \Lambda_j$.

Pour démontrer (8.1), il suffit d'après le Lemme 5 d'établir que $(\tau_\lambda)$ est une famille de vaguelettes sur $I$. Parmi les estimations standard, (5.2*b*) est immédiate et nous étudions (5.2*a*).

Fixons un $j \geq j_0$ et $\lambda \in \Lambda_j$. On observe que

$$1 = \sum_{k \in \mathbb{N}} 2^{-j/2} \Delta_{jk}(x), \quad \forall x \geq 0. \tag{8.8}$$

La fonction constante 1 est donc une limite ponctuelle de fonctions de $V_j$. En appliquant le théorème de convergence dominée et la définition de l'espace $X_j$ on obtient

$$\int_I \frac{1}{a} \theta_\lambda = 0.$$

(C'est donc une forme plus précise que (5.7) dans cette situation.) On a donc

$$\tau_\lambda(x) = 2^j \int_0^x \frac{1}{a(t)} \theta_\lambda(t)\, dt = -2^j \int_x^{+\infty} \frac{1}{a(t)} \theta_\lambda(t)\, dt\,,$$

ce qui permet d'obtenir facilement (5.2$a$) pour $\tau_\lambda$ à l'aide de (5.2$a$) pour $\theta_\lambda$.

Il reste à calculer l'intégrale de $\tau_\lambda$. Observons que $\tau_\lambda$ est nulle au bord de $I$. En intégrant par parties il vient

$$\int_I \tau_\lambda = -2^j \int_I x \frac{1}{a} \theta_\lambda\,.$$

Cette dernière intégrale est nulle en remarquant comme précédemment que le monôme $x$ est limite de fonctions de $V_j$. Plus précisément

$$x = \sum_{k \in \mathbb{N}} k 2^{-j} \Delta_{jk}(x)\,, \quad \forall x \geq 0\,. \tag{8.9}$$

Démonstration de (8.2): $\sigma_\lambda$ est une fonction en escalier qui vérifie seulement (5.2$a$) et pas (5.2$b$). La relation (6.1) n'est pas non plus satisfaite. On ne peut donc pas appliquer le Lemme 5 aux $\sigma_\lambda$ (c'est le prix à payer pour la simplicité des splines linéaires). On peut cependant procéder comme suit.

Commençons par introduire une famille de fonctions auxiliaires. Posons $s_{j\ell}(x) = -2^{-j-1} \Delta_{j+1,\ell}{}'(x)$ pour $x \geq 0$. On a alors $s_{j\ell}(x) = -2^{(j+1)/2}$ si $x \in [(\ell - 1)2^{-j-1}, \ell 2^{-j-1}[$, $2^{(j+1)/2}$ si $x \in [\ell 2^{-j-1}, (\ell +$

$1)2^{-j-1}[$, 0 ailleurs. Soit $\lambda = (2k+1)2^{-j-1} \in \Lambda_j$, alors $\tau_\lambda \in X_j \subset V_{j+1}$. D'après une remarque antérieure

$$\theta_\lambda(x) = \sum_{\ell \in \mathbb{N}} c_j(k,\ell)\, \Delta_{j+1,\ell}(x)\,, \quad x \geq 0\,,$$

où $c_j(k,\ell) = 2^{(-j-1)/2}\theta_\lambda(\ell\, 2^{-j-1})$, et d'après (5.2$a$) il vient $|c_j(k,\ell)| \leq C \exp\{-\gamma|2k-\ell|\}$. En dérivant l'égalité ci-dessus, on voit que $\sigma_\lambda$ s'écrit comme une combinaison linéaire des $s_{j\ell}$. On en déduit

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_j} \alpha_\lambda \sigma_\lambda(x) = \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \beta(j,\ell)\, s_{j\ell}(x)$$

avec $\beta(j,\ell) = 2\sum c_j(k,\ell)\alpha_\lambda$ où, comme d'habitude, $\lambda = (2k+1)2^{-j-1} \in \Lambda_j$ .

Les estimations sur les $c_j(k,\ell)$ impliquent que la transformation à $j$ fixé : $(\alpha_\lambda) \mapsto (\beta(j,\ell))$, est bornée de $\ell^2(\Lambda_j)$ dans $\ell^2(\mathbb{N})$ avec une norme uniformément majorée par rapport à $j$. On est donc ramené à démontrer

$$\Big\| \sum \beta(j,\ell) s_{j\ell} \Big\|^2 \leq C \sum |\beta(j,\ell)|^2,$$

la somme étant prise sur tous les couples $(j,\ell) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.

Pour ce faire, appelons $a(j,\ell;j',\ell')$ le produit scalaire dans $L^2(I)$ entre $s_{j\ell}$ et $s_{j'\ell'}$. On doit donc montrer que la matrice formée par ces coefficients est bornée sur $\ell^2$.

Des calculs très simples montrent que $a(j,\ell;j',\ell') = 0$ sauf quand $|\ell\, 2^{-j} - \ell'\, 2^{-j'}| = 0$ ou $2^{-\inf\{j,j'\}}$, auquel cas ce coefficient s'estime par $C 2^{-|j-j'|/2}$. On vérifie alors que cette matrice est bornée sur $\ell^1$ et $\ell^\infty$, donc sur $\ell^2$ par interpolation, ce qui termine la démonstration de (8.2).

La vérification de (8.3) est une simple intégration par parties. Soient $\lambda, \mu \in \Lambda$. Puisque $\tau_\lambda(0) = 0$ et que $\tau_\lambda$ et $\theta_\mu$ sont nulles à l'infini, il vient avec des notations évidentes

$$\delta_{\lambda\mu} = \int_0^{+\infty} \theta_\lambda \frac{1}{a}\, \theta_\mu = 2^{j'-j} \int_0^{+\infty} \tau_\lambda\, \sigma_\mu.$$

Preuve de (8.4): Soit $f \in V = H_0^1(I)$, alors $df/dx \in L^2(I)$. Donc d'après le Théorème 4

$$\frac{df}{dx}(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda \theta_\lambda(x) \frac{1}{a(x)} = \sum_{\lambda \in \Lambda} 2^{-j} \alpha_\lambda \frac{d\tau_\lambda}{dx}(x).$$

Les coefficients $\alpha_\lambda$ sont donnés par

$$\alpha_\lambda = \int_0^{+\infty} \frac{df}{dx}\,\theta_\lambda = 2^j \int_0^{+\infty} f\,\sigma_\lambda \equiv 2^j \beta_\lambda$$

puisque $f \in V$ et $\theta_\lambda \in V^*$. Comme $f \in L^2(I)$, l'estimation duale de (8.2) implique que $(\beta_\lambda) \in \ell^2(\Lambda)$. La série $g(x) = \sum \beta_\lambda \tau_\lambda(x)$ appartient donc à $L^2(I)$. Elle appartient aussi à $V$ et $f = g$ par une application du théorème du graphe fermé. Ceci établit la complétude des $\tau_\lambda$.

Preuve de (8.5): C'est une simple conséquence de (8.1–4) en utilisant le lemme 7.

Preuve de (8.6): L'argument de (8.4) montre que pour $f \in V$, $f$ s'écrit sur la base $(\tau_\lambda)$ avec $\|f\|_1^2 \le C \sum |\alpha_\lambda|^2 (1 + 2^{2j})$. L'inégalité en sens inverse provient de l'inégalité réciproque à (8.1) et de l'inégalité de gauche dans (5.8).

Preuve de (8.7): Soit $f \in \mathcal{D}(T)$ où, rappelons-le, $T = D^* a D$. Comme $\mathcal{D}(T) \subset L^2(I)$ on peut appliquer (8.5) : on a $f(x) = \sum \alpha_\lambda \tau_\lambda(x)$ avec $\alpha_\lambda = \int_0^{+\infty} f\,\sigma_\lambda$. Puisque $\|f\| \sim (\sum |\alpha_\lambda|^2)^{1/2}$, il reste à démontrer que $\|Tf\| \sim (\sum |\alpha_\lambda|^2 2^{4j})^{1/2}$.

Posons $\beta_\lambda = \int_0^{+\infty} Tf\,\tau_\lambda$, alors $\|Tf\|^2 \sim \sum |\beta_\lambda|^2$. On intègre ensuite $\beta_\lambda$ deux fois par parties, en vérifiant à chaque étape que les termes tout intégrés s'annulent : puisque $\tau_\lambda \in V$ et $a\,df/dx \in V^*$ (Proposition 2) il vient

$$\begin{aligned} \beta_\lambda &= \int_I a \frac{df}{dx} \frac{d\tau_\lambda}{dx} \\ &= 2^j \int_I \frac{df}{dx}\,\theta_\lambda \,. \end{aligned}$$

Ensuite $f \in V$ et $\theta_\lambda \in V^*$, donc

$$\beta_\lambda = -2^j \int_I f \frac{d\theta_\lambda}{dx} = 2^{2j} \int_I f\,\sigma_\lambda \,.$$

On voit donc que $\beta_\lambda = 2^{2j} \alpha_\lambda$ et l'on obtient l'équivalence désirée. (Remarquer que ces calculs utilisent implicitement le fait que $V$ et $V^*$ sont autoadjoints car nous n'avons pas mis de barre de conjugaison. Cette propriété reste vraie sauf pour le cas de la condition aux limites (2.2$i$) où la conjugaison complique légèrement la situation.)

NOTE. Pour démontrer le Théorème 2 avec des conditions aux limites différentes, on suivra la même démarche, les seules différences se situant lors de la preuve de (8.1), et parfois de (8.4) et (8.5). Afin d'éviter de lourdes répétitions, nous ne nous occuperons plus désormais que de ces points particuliers et laisserons le lecteur compléter le reste par lui-même.

*Condition aux limites* (2.2$c$): $I = (0, +\infty)$ et $V = H^1(I)$.

1. Les données géométriques et l'analyse multirésolution.

Pour $j \in \mathbb{Z}$, $\Gamma_j = \{k2^{-j} : k \in R_j = \mathbb{N}^*\}$ donc $0 \notin \Gamma_j$. $V_j$ est l'espace des splines linéaires avec leurs nœuds sur $\Gamma_j$ : $f \in V_j$ s'écrit $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} a_k \Delta_{jk}(x)$, $x \geq 0$, avec $\sum |a_k|^2 < \infty$. Observons que les fonctions de $V_j$ s'annulent en 0 donc $V_j \subset H_0^1(I) = V^*$. On construit la base $(\theta_\lambda)$ en suivant le Théorème 3. Ces fonctions appartiennent toutes à $V^*$.

2. Définition des $\tau_\lambda$ et $\sigma_\lambda$.

Pour $\lambda \in \Lambda_j$ on pose

$$\tau_\lambda(x) = 2^j \int_x^{+\infty} \frac{1}{a(t)} \theta_\lambda(t)\, dt, \qquad x \geq 0,$$
$$\sigma_\lambda(x) = 2^{-j} \frac{d\theta_\lambda}{dx}(x), \qquad x \geq 0.$$

Les $\tau_\lambda$ forment la base cherchée.

3. Vérifications.

Preuve de (8.1): On montre que les $\tau_\lambda$ sont des vaguelettes sur $I$. L'inégalité (5.2$b$) étant évidente, passons à (5.2$a$).

Fixons $\lambda \in \Lambda_j$. Si $x \geq \lambda$, on majore brutalement l'intégrale qui définit $\tau_\lambda(x)$. Cela donne l'inégalité désirée grâce à (5.2$a$) pour $\theta_\lambda$. Si $0 \leq x \leq \lambda$, on écrit

$$\tau_\lambda(x) = 2^j \int_0^{+\infty} \frac{1}{a(t)}\, \theta_\lambda(t)\, dt - 2^j \int_0^x \frac{1}{a(t)}\, \theta_\lambda(t)\, dt\,.$$

La deuxième intégrale fournit l'estimation souhaitée. Pour majorer la première on utilise (5.7). Ceci nous donne une majoration en

$$C\, 2^{j/2} \exp\left\{-\gamma\, d\, 2^j\right\} \leq C\, 2^{j/2} \exp\{-\gamma\, 2^j\, |x - \lambda|\}$$

puisque $d = \operatorname{dist}\{\lambda, \partial I\} = \lambda \geq |x - \lambda|$ lorsque $0 \leq x \leq \lambda$.

On démontre enfin que l'intégrale de $\tau_\lambda$ est nulle exactement comme précédemment en remarquant que (8.9) reste valide si la sommation est restreinte à $\mathbb{N}^*$.

Les preuves de (8.4) et (8.5) sont analogues à celles du cas précédent.

*Condition aux limites* (2.2$d$): $I = (0,1)$ et $V = H^1_0(I)$.

1. Les données géométriques et l'analyse multirésolution.

On pose $j_0 = -1$. Pour $j \geq 0$, $\Gamma_j = \{k2^{-j} : k \in R_j = \{0, 1, \ldots, 2^j\}\}$ donc 0 et $1 \in \Gamma_j$. $V_j$ est l'espace des splines linéaires de $L^2(I)$ ayant leurs nœuds sur $\Gamma_j$ : toute $f \in V_j$ s'écrit $f(x) = \sum_{k \in R_j} a_k \Delta_{jk}(x)$ pour tout $x \in I$. Notons que $\dim V_j = 2^j + 1$ et que $V_0$ est engendré par les monômes 1 et $x$. Observons aussi que $V_j \subset H^1(I) = V^*$.

On construit les fonctions $\theta_\lambda$ pour $\lambda \in \Lambda_j$ et $j \geq 0$ en suivant le Théorème 3. Ces fonctions appartiennent à $V^*$. D'après le Théorème 4, il faut les compléter par deux fonctions de $V_0$ (de dimension 2), notées $v_0$ et $v_1$. On exige que $v_0$ soit constante et que $v_1(x) = \nu x + \kappa$ sur $I$ de telle façon que $\int_I v_0^2 \frac{1}{a} = \int_I v_1^2 \frac{1}{a} = 1$ et $\int v_1 v_0 \frac{1}{a} = 0$.

Observons enfin que l'orthogonalité entre les $X_j$ et $V_0$ pour la forme $B$ fournit

$$\int_I \frac{1}{a} \theta_\lambda = \int_I x \frac{1}{a} \theta_\lambda = 0. \tag{8.10}$$

2. Définition des $\tau_\lambda$ et $\sigma_\lambda$.

Pour $\lambda \in \Lambda_j$ on pose

$$\tau_\lambda(x) = 2^j \int_0^x \frac{1}{a(t)} \theta_\lambda(t)\, dt, \quad x \in [0,1],$$
$$\sigma_\lambda(x) = -2^{-j} \frac{d\theta_\lambda}{dx}(x), \quad x \in [0,1].$$

On pose également

$$t_1(x) = \int_0^x v_1(t) \frac{1}{a(t)}\, dt \quad \text{et} \quad s_1(x) = -\frac{dv_1}{dx}(x).$$

On ne considère pas l'analogue pour $v_0$ puisque sa dérivée est nulle et ne peut donc pas appartenir au système dual des $\tau_\lambda$. Observons que par (8.10) les $\tau_\lambda$ sont nulles au bord de $I$ et il en est de même de $t_1$. Ces fonctions appartiennent donc à $V$.

La base qui convient pour le Théorème 2 est alors constituée de toutes les $\tau_\lambda$ et de $t_1$.

3. Vérifications.

On montre que les $\tau_\lambda$ sont des vaguelettes sur $I$ en adaptant de façon immédiate de l'argument donné pendant l'étude de (2.2*b*). Cela démontre (8.1).

Faisons une remarque à ce sujet. Pour démontrer des estimations comme (8.1), on peut bien sûr oublier un nombre fini de termes sans modifier le résultat pour la famille entière. Ici, par exemple, $t_1$ n'est pas prise en compte, alors que la base cherchée se compose des $\tau_\lambda$ et de $t_1$.

Passons à l'étude de la complétude (8.4). Soit $f \in L^2(I)$ telle que $\langle t_1, f\rangle = \langle \tau_\lambda, f\rangle = 0$ pour tout $\lambda \in \Lambda$ et soit $F$ une primitive de $f$. On intègre alors par parties les égalités précédentes. Comme les $\tau_\lambda$ et $t_1$ sont nulles au bord, il vient $\langle v_1 /a , F\rangle = \langle \theta_\lambda/a, F\rangle = 0$ pour tout $\lambda$. D'après le Théorème 4, on voit que $F = C\bar{v}_0$. Donc $F$ est constante et $f = 0$.

Terminons en écrivant la formule de représentation qui permet de finir ces vérifications (laissées au lecteur) : pour $f \in L^2(I)$,

$$f(x) = \int_I f\, s_1 \quad t_1(x) + \sum \int_I f\, \sigma_\lambda \quad \tau_\lambda(x).$$

*Condition aux limites* (2.2*e*): $I = (0,1)$ et $V = \{f \in H^1(I) : f(0) = 0\}$.

1. Les données géométriques et l'analyse multirésolution.

Posons $j_0 = -1$. Pour $j \geq 0$, $\Gamma_j = \{k2^{-j} : k \in R_j = \{0, 1, \dots, 2^j - 1\}\}$ donc $0 \in \Gamma_j$ et $1 \notin \Gamma_j$. $V_j$ est l'espace des splines linéaires de $L^2(I)$ ayant leurs nœuds sur $\Gamma_j$ : toute $f \in V_j$ s'écrit $f(x) = \sum_{k\in R_j} a_k \Delta_{jk}(x)$ pour tout $x \in I$. Notons que $\dim V_j = 2^j$ et que $V_0$ est engendré par le polynôme $1 - x$. On appellera $v_0(x) = \eta(1 - x)$ la fonction telle que $\int_I v_0^2 /a = 1$, $\eta$ étant un nombre complexe non nul. Observons aussi que les fonctions de $V_j$ s'annulent toutes en 1, donc $V_j \subset V^*$.

On construit les fonctions $\theta_\lambda$ pour $\lambda \in \Lambda_j$ et $j \geq 0$ en suivant le Théorème 3. La base d'ondelettes adaptées à $1/a$ est constituée de ces fonctions et de $v_0$. Notons que ces fonctions appartiennent toutes à $V^*$.

Remarquons enfin que pour tout $\lambda$

$$\int_I (1 - x)\,\frac{1}{a}\,\theta_\lambda = 0. \tag{8.11}$$

2. Définition des $\tau_\lambda$ et $\sigma_\lambda$.

Pour $\lambda \in \Lambda_j$ on pose

$$\tau_\lambda(x) = 2^j \int_0^x \frac{1}{a(t)}\, \theta_\lambda(t)\, dt, \quad x \in [0,1],$$
$$\sigma_\lambda(x) = -2^{-j} \frac{d\theta_\lambda}{dx}(x), \quad x \in [0,1].$$

On pose également

$$t_0(x) = \int_0^x v_0(t) \frac{1}{a(t)}\, dt \quad \text{et} \quad s_0(x) = -\frac{dv_0}{dx}(x) = \eta.$$

Les fonctions $\tau_\lambda$ et $t_0$ sont nulles en 0 et, à ce titre, appartiennent à $V$. Ces fonctions constituent la base cherchée.

3. Vérifications.

Pour démontrer (8.1), on commence par observer qu'en intégrant (8.11) par parties on trouve l'intégrale de $\tau_\lambda$ qui, par conséquent, est nulle. Il reste à vérifier les estimations standard. Il suffit pour cela de reprendre la démarche utilisée pour le cas (2.2*c*).

Pour démontrer enfin la complétude, on procède comme dans le cas précédent en choisissant cette fois pour $F$ la primitive de $f$ qui s'annule en 1.

*Condition aux limites* (2.2*f*): $I = (0,1)$ et $V = H^1(I)$.

1. Les données géométriques et l'analyse multirésolution.

On pose cette fois $j_0 = 0$. Pour $j \geq 1$, $\Gamma_j = \{k2^{-j} : k \in R_j = \{1, 2, \ldots, 2^j - 1\}\}$ donc $0, 1 \notin \Gamma_j$. $V_j$ est l'espace des splines linéaires de $L^2(I)$ ayant leurs nœuds sur $\Gamma_j$ : toute $f \in V_j$ s'écrit $f(x) = \sum_{k \in R_j} a_k \Delta_{jk}(x)$ pour tout $x \in I$. Toutes les fonctions de $V_j$ s'annulent en 0 et 1 donc $V_j \subset V^*$.

Notons que $\dim V_j = 2^j - 1$ et que $V_1$ est engendré par $\Delta_{1,1}(x) = \sqrt{2}(1 - |2x-1|)$. On choisira la constante $\nu$ afin que $v_1(x) = \nu(1 - |2x-1|)$ vérifie $\int_I v_1^2/a = 1$.

On construit les fonctions $\theta_\lambda$ pour $\lambda \in \Lambda_j$ et $j \geq 1$. Avec la fonction $v_1$, elles constituent la base d'ondelettes adaptées à $1/a$. Notons que ces fonctions s'annulent en 0 et 1 donc elles appartiennent toutes à $V^*$.

2. Définition des $\tau_\lambda$ et $\sigma_\lambda$.

Pour $\lambda \in \Lambda_j$ on pose

$$\tau_\lambda(x) = 2^j \int_{u_\lambda}^x \frac{1}{a(t)}\,\theta_\lambda(t)\,dt, \quad x \in [0,1],$$
$$\sigma_\lambda(x) = -2^{-j}\frac{d\theta_\lambda}{dx}(x), \quad x \in [0,1].$$

On pose également

$$t_1(x) = \int_{1/2}^x v_1(t)\,\frac{1}{a(t)}\,dt \quad \text{et} \quad s_1(x) = -\frac{dv_1}{dx}(x)\,.$$

Le nombre $u_\lambda$ est à choisir dans [0,1] en fonction de la position de $\lambda$ par rapport au bord de $I$. Les fonctions $\tau_\lambda$ et $t_1$ appartiennent à $V$ et ne vérifient aucune condition particulière au bord. Cependant elles ne forment pas la base cherchée : il faut les compléter par la fonction constante 1 pour obtenir la base du Théorème 2.

3. Vérifications.

A la différence avec tous les cas précédents les $\tau_\lambda$ ne sont plus des vaguelettes sur $I$. La preuve de (8.1) requiert donc l'usage du Théorème 5 et du lemme suivant.

**Lemme 8.** *Choisissons $u_\lambda = 1$ si $0 < \lambda \le 1/2$ et $u_\lambda = 0$ si $1/2 < \lambda < 1$. Alors les $\tau_\lambda$ vérifient les estimations standard et $(\int_I \tau_\lambda)$ est une suite de Carleson.*

PREUVE. On supposera constamment $\lambda \in \Lambda_j$ où $j$ est assez grand (voir une remarque antérieure) avec $0 < \lambda \le 1/2$. L'autre cas, $1/2 < \lambda < 1$, se traite de façon symétrique.

Bien sûr l'estimation (5.2$b$) est évidente. Pour voir (5.2$a$), on utilise un argument qui sera très souvent employé par la suite. Voyons-en le détail.

On écrit tout d'abord

$$\tau_\lambda(x) = -2^j \int_I \chi_{[x,1]}(t)\,\frac{1}{a(t)}\,\theta_\lambda(t)\,dt\,.$$

Pour utiliser l'orthogonalité entre $V_j$ et $X_j$, l'idée est d'approcher $\chi_{[x,1]}(t)$ par une fonction de $V_j$. Autrement dit $\chi_{[x,1]}(t) = v_j(t) + r_j(t)$ où $v_j(t) \in V_j$ et l'erreur $r_j(t)$ est bornée (par 1) et est à support dans $[1-2^{-j}, 1]$ (se rappeler que dans ce cas les fonctions de $V_j$ sont nulles au bord), et dans un intervalle de longueur $2^{-j}$ et qui contient $x$. Par orthogonalité la contribution apportée par $v_j(t)$ sous l'intégrale est nulle et il vient

$$\tau_\lambda(x) = -2^j \int_I r_j(t) \frac{1}{a(t)} \theta_\lambda(t)\, dt\,.$$

A ce point, on majore brutalement l'intégrale en tenant compte des conditions de support et en utilisant (5.2$a$) pour $\theta_\lambda(t)$. On obtient une majoration en

$$C\, 2^{j/2} \exp\left\{-\gamma\, 2^j \inf\{|x-\lambda|, |1-\lambda|\}\right\} \leq C\, 2^{j/2} \exp\{-\gamma\, 2^j\, |x-\lambda|\}$$

puisque $|x-\lambda| \leq |1-\lambda|$ pour $0 \leq x \leq 1$ et $0 < \lambda \leq 1/2$. Ceci démontre l'estimation (5.2$a$) pour $\tau_\lambda$.

Passons à l'estimation de sa moyenne. Remarquons que $\tau_\lambda$ s'annule en 1. En intégrant par parties, on obtient alors

$$\int_I \tau_\lambda = -2^j \int_I t \frac{1}{a(t)} \theta_\lambda(t)\, dt.$$

Pour estimer cette intégrale on procède en approchant $t$ par une function de $V_j$ et, cette fois, le terme correctif qui se substitue à $t$ est supporté par $[1-2^{-j}, 1]$ seulement. On obtient donc la majoration

$$\Big|\int_I \tau_\lambda\Big| \leq C\, 2^{j/2} \exp\{-\gamma\, 2^j\, |1-\lambda|\} \leq C\, 2^{j/2} \exp\{-\gamma\, 2^{j-1}\}$$

car $0 < \lambda \leq 1/2$. On voit sans peine qu'une telle estimation est de Carleson (ne pas oublier que le nombre de $\lambda \in \Lambda_j$ est $2^j$). Cela achève la preuve du lemme et la vérification de (8.1).

Preuve de la complétude: Commençons par une remarque. Les fonctions $\theta_\lambda$ et $v_1$ sont nulles au bord de $I$. Par suite, $\sigma_\lambda$ et $s_1$ ont une moyenne nulle sur $I$. Cela veut dire que les constantes sont orthogonales à l'espace vectoriel qu'engendrent ces dernières fonctions. Par dualité, il convient donc d'adjoindre aux fonctions $\tau_\lambda$ et $t_1$ la fonction 1 pour obtenir un système complet. C'est effectivement le cas.

Pour le voir, on prend $f \in L^2(I)$ orthogonale aux constantes, à $t_1$ et aux $\tau_\lambda$. On appelle $F$ la primitive de $f$ qui s'annule en 0. Puisque $f$ est d'intégrale nulle, on a également $F(1) = 0$ et l'on peut intégrer par parties les autres relations d'orthogonalité. Cela implique que $F$ est orthogonale à toutes les $\theta_\lambda\,/a$ et à $v_1\,/a$. Donc $F = 0$ et $f = 0$.

La dernière chose à vérifier est que le système précédent est bien inconditionnel. Une application du Lemme 7 fournit déjà que $(t_1, \tau_\lambda)$ est un système inconditionnel dans $L^2(I)$ engendrant un sous-espace $E$. De plus, on voit aisément que les constantes n'appartiennent pas à $E$. Sinon, on écrit $1 = \alpha_1 t_1 + \sum \alpha_\lambda \tau_\lambda$ et en intégrant contre $s_1$ et les $\sigma_\lambda$ successivement les coefficients $\alpha_1$ et $\alpha_\lambda$ sont nuls, ce qui est absurde. Donc $(1, t_1, \tau_\lambda)$ forme bien un système inconditionnel générateur de $L^2(I)$.

Enfin, par le théorème de représentation de Riesz il existe une fonction $s_0$, orthogonale à $E$, telle que l'on ait la formule de décomposition suivante:

$$f(x) = \int_I f\, s_0 \quad + \int_I f\, s_1 \quad t_1(x) + \sum \int_I f\, \sigma_\lambda \quad \tau_\lambda(x)$$

pour toute $f \in L^2(I)$. Nous laissons le lecteur compléter la suite.

*Condition aux limites* (2.2$g$): $I = (0,1)$ et $V = \{f \in H^1(I) : f(1) = f(0)\}$.

Il s'agit d'un problème périodique et dans ce cas on voit que $V^* = V$. Cela suggère de partir d'une base adaptée sur $\mathbb{R}$ et de la périodiser ensuite.

1. Les données géométriques et l'analyse multirésolution.

Soit $j_0 = -1$. Pour $j \geq 0$, $\Gamma_j = \{k2^{-j} : k \in R_j = \mathbb{Z}\}$. $V_j$ est l'espace des splines linéaires de $L^2(I)$ ayant leurs nœuds sur $\Gamma_j$ : toute $f \in V_j$ s'écrit $f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \Delta_{jk}(x)$ pour tout $x$ avec $\sum |a_k|^2 < \infty$.

On prolonge $a(x)$ de façon périodique en dehors de $I$ par $a(x+k) = a(x)$, $x \in I$ et $k \in \mathbb{Z}$. Cela définit $a(x)$ p.p. sur $\mathbb{R}$ où elle y est bornée et accrétive.

On construit ensuite une base d'ondelettes adaptées à $1/a$ sur $\mathbb{R}$. Cette base est consituée des fonctions $\theta_\lambda$, $\lambda \in \Lambda_j = \{(2k+1)2^{-j-1} : k \in \mathbb{Z}\}$, $j \geq 0$, et des fonctions $g_{0k}$, $k \in \mathbb{Z}$, qui engendrent $V_0$. On considère également la base $g_{jk}$, $k \in \mathbb{Z}$, de $V_j$ construites dans la partie 1 du Théorème 3.

La base adaptée a la structure suivante:

$$\begin{aligned} g_{0k}(x) &= g_{00}(x-k), \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}, \\ \theta_\mu(x) &= \theta_\lambda(x - \mu + \lambda), \quad \forall\, \lambda, \mu \in \Lambda_j \,;\, \lambda - \mu \in \mathbb{Z}\,. \end{aligned}$$

On a aussi pour $j \geq 0$,

$$g_{j,k+n2^j}(x) = g_{jk}(x-n), \quad \forall\, k, n \in \mathbb{Z}\,.$$

Cela provient du fait que dans ce cas de figure les espaces $V_j$ et $X_j$, $j \geq 0$, sont invariants sous l'action des translations entières et que les bases dont on part pour appliquer le Théorème 3 possèdent cette structure, celle-ci étant conservée par les algorithmes de la preuve de ce théorème (voir Appendice 1).

Pour $j \geq 0$, on appelle $V_j^p$ l'espace des splines linéaires périodiques de période 1 ayant leurs nœuds sur $\Gamma_j$. On peut identifier une fonction de cet espace avec sa restriction à $I$, ainsi $V_j^p$ devient-il un sous-espace de $L^2(I)$ de dimension finie $2^j$. Observons que $V_j^p \subset V^*$.

Grâce à la structure invariante ci-dessus, une base de $V_j^p$ est donnée par les fonctions suivantes:

$$g_{jk}^p(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_{j,k+n2^j}(x), \quad k = 0, 1, \ldots, 2^j - 1.$$

Cette base est aussi orthogonale pour la forme $B^p(f, g) = \int_I fg/a$. Cela découle par périodisation des relations d'orthogonalité sur $\mathbb{R}$ pour $B$ (définition similaire à celle de $B^p$ où l'intégrale est prise sur $\mathbb{R}$). On remarquera enfin que $V_0^p$ est l'espace des constantes.

Soit $X_j^p$ l'espace orthogonal à $V_j^p$ dans $V_{j+1}^p$ pour $B^p$. Cet espace est de dimension $2^j$ et l'on voit que les fonctions

$$\theta_\lambda^p(x) = \sum_{\mu \in \Lambda_j, \mu - \lambda \in \mathbb{Z}} \theta_\mu(x), \quad \lambda \in \Lambda_j^p \equiv \Lambda_j \cap I,$$

forment une base de $X_j^p$ orthogonale pour $B^p$. Les espaces $X_j^p$ étant mutuellement orthogonaux pour $B^p$, les fonctions $g_{00}^p(x)$ et $\theta_\lambda^p(x)$, $\lambda \in \Lambda^p = \cup_{j \geq 0} \Lambda_j^p$ forment alors un système orthogonal pour $B^p$, dont on établit facilement qu'il est complet dans $L^2(I)$. En vertu du Lemme 7, il reste à établir

$$\| \sum_{\lambda \in \Lambda^p} \alpha_\lambda \theta_\lambda^p \|^2 \leq C \sum |\alpha_\lambda|^2, \tag{8.12}$$

la norme étant ici celle de $L^2(I)$.

Curieusement, (8.12) n'est pas une conséquence de l'inégalité analogue sur $\mathbb{R}$. L'approche naïve qui consiste à dérouler l'intégrale sur $I$ pour obtenir une intégrale sur $\mathbb{R}$ ne donne rien car les $\theta_\lambda^p$ ne sont pas orthogonales pour le produit scalaire. Pour démontrer (8.12) on utilise plutôt une variante périodique des résultats de la Section 6.

**Proposition 3.** *Soit $h_\lambda$, $\lambda \in \Lambda^p$, une famille de fonctions périodiques de période 1, vérifiant pour tout $\lambda \in \Lambda_j^p$, $j \geq 0$,*

$$(8.13a) \quad |h_\lambda(x)| \leq C\, 2^{j/2} \exp\{-\gamma\, 2^j \mathrm{dist}\{x-\lambda, \mathbb{Z}\}\}, \quad x \in \mathbb{R},$$
$$(8.13b) \quad |h_\lambda{}'(x)| \leq C\, 2^{3j/2} \exp\{-\gamma 2^j \mathrm{dist}\{x-\lambda, \mathbb{Z}\}\}, \quad x \in \mathbb{R},$$

*et telles que $(\int_I h_\lambda)$ soit une suite de Carleson. Alors*

$$\int_I \Big| \sum_{\lambda \in \Lambda^p} \alpha_\lambda\, h_\lambda \Big|^2 \leq C \sum |\alpha_\lambda|^2.$$

Cette proposition s'applique évidemment aux $\theta_\lambda^p$. Les détails sur la preuve de ce résultat sont donnés dans l'Appendice 2.

Pour plus de simplicité nous abandonnerons dorénavant l'exposant $p$ dans la notation.

2. Définition des $\tau_\lambda$ et $\sigma_\lambda$.

Pour $\lambda \in \Lambda_j$ on pose

$$\tau_\lambda(x) = 2^j \int_{\lambda+1/2}^{x} \frac{1}{a(t)} \theta_\lambda(t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R},$$
$$\sigma_\lambda(x) = -2^{-j} \frac{d\theta_\lambda}{dx}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

La fonction $\sigma_\lambda$ est périodique de période 1. Il en est de même pour $\tau_\lambda$ et cela provient de la relation $\int_u^{u+1} \theta_\lambda / a = 0$ pour tout réel $u$. En effet, $\theta_\lambda / a$ est périodique et sa restriction à $I$ est orthogonale aux constantes $(=V_0)$.

Finalement la collection des restrictions à $I$ des fonctions $\tau_\lambda$ forme avec la fonction constante 1 la base que nous cherchons.

3. Vérifications.

Pour démontrer (8.1), nous appliquons la Proposition 3. L'estimation (8.13$b$) est évidente. Pour voir (8.13$a$), il suffit par périodicité de prendre $x \in [\lambda-1/2, \lambda+1/2]$. Sur cet intervalle on a $\mathrm{dist}\{x-\lambda, \mathbb{Z}\} = |x-\lambda|$ et l'on est ramené aux situations précédentes où les estimations n'étaient pas périodisées. On écrit alors que $\chi_{[x,\lambda+1/2]}(t)$ appartient approximativement à $V_j$ lorsque $\lambda \in \Lambda_j$ et l'on termine comme précédemment. Le choix de $\lambda + 1/2$ pour borne de l'intégrale définissant $\tau_\lambda$ intervient dans cette majoration.

L'intégrale de $\tau_\lambda$ sur $I$ se calcule en intégrant par parties. Il vient $\int_I \tau_\lambda = \int_I g\, \theta_\lambda \,/a$ où $g$ est une fonction périodique et bornée que l'on considère approximativement comme une fonction de $V_j$. Le terme d'erreur fournit une majoration de $\int_I \tau_\lambda$ qui est une suite de Carleson. Les détails sont laissés au lecteur.

Passons à la complétude. Du fait que les $\theta_\lambda$ sont périodiques, l'intégrale de $\sigma_\lambda$ est nulle sur $I$. Il faut donc adjoindre la fonction constante 1 aux fonctions $\tau_\lambda$ pour obtenir un système complet. On construit ensuite une fonction $s_0 \in L^2(I)$ et la formule de représentation devient

$$f(x) = \int_I f\, s_0 \quad + \sum \int_I f\, \sigma_\lambda \quad \tau_\lambda(x)$$

pour toute $f \in L^2(I)$. Cela se montre comme dans le cas précédent et nous laissons au lecteur le soin de le vérifier.

*Condition aux limites* (2.2$h$) : $I = (0,1)$ et $V = \{f \in H^1(I) : f(1) = rf(0)\}$, $r \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.

La condition aux limites en 0 reste dépendante de celle en 1, mais plus de façon périodique. Cela affectera les propriétés de localisation des ondelettes adaptées. Chaque $\theta_\lambda$ ne sera plus seulement localisée autour de $\lambda$ mais aussi autour de $1-\lambda$.

1. Les données géométriques et l'analyse multirésolution.

On pose $j_0 = -1$. Pour $j \geq 0$, $\Gamma_j = \{k2^{-j} : k \in R_j = \{1, 2 \ldots, 2^j - 1\}\}$. On place 0 et 1 à part. $V_j$ est l'espace des splines linéaires $f$ de $L^2(I)$ ayant leurs nœuds sur $\Gamma_j$ et tels que $f(1) = f(0)/r$ : toute $f \in V_j$ s'écrit $f(x) = a_0 \varphi_{j0}(x) + \sum_{k \in R_j} a_k \Delta_{jk}(x)$ pour tout $x \in I$ où $\varphi_{j0}(x) = r\Delta_{j0}(x) + \Delta_{j2^j}(x)$. $V_j$ est donc un espace de dimension $2^j$ et $V_j \subset V^*$. L'espace $V_0$ est engendré par le polynôme $r + (1-r)x$. Enfin, on définit $\nu \in \mathbb{C}$ afin que $v_0(x) = \nu(r + (1-r)x)$ vérifie $\int_I v_0^2 \,/a = 1$.

Une adaptation de la preuve du Théorème 3 fournit des ondelettes adaptées $\theta_\lambda$, $\lambda \in \Lambda_j$, $j \geq 0$, vérifiant

$$(8.14a) \qquad |\theta_\lambda(x)| \leq C\, 2^{j/2} \exp\{-\gamma\, 2^j\, \delta(x,\lambda)\}, \quad x \in I,$$

$$(8.14b) \qquad |\theta_\lambda{}'(x)| \leq C\, 2^{3j/2} \exp\{-\gamma\, 2^j\, \delta(x,\lambda)\}, \quad x \in I,$$

où $\delta(x,\lambda) = \inf\{|x-\lambda|, |x-(1-\lambda)|\}$. Ce sont donc des estimations standard à deux bosses placées symétriquement par rapport au milieu de $I$.

L'inégalité quadratique pour les $\theta_\lambda$ se voit en appliquant des variantes des résultats de la Section 6 (voir Appendice 3 pour tout cela).

Finalement, la base adaptée s'obtient en complétant par $v_0$ le système $(\theta_\lambda)$. On observera que les fonctions de cette base appartiennent toutes à $V^*$.

2. Définition des $\tau_\lambda$ et $\sigma_\lambda$.

Pour $\lambda \in \Lambda_j$ on pose

$$\sigma_\lambda(x) = -2^{-j}\frac{d\theta_\lambda}{dx}(x), \quad x \in I,$$

$$s_0(x) = -\frac{dv_0}{dx}(x) = \nu(r-1), \quad x \in I.$$

La restriction des $\sigma_\lambda$ à chacun des intervalles (0,1/2) et (1/2,1) vérifient des estimations standard (5.2$a$). En coupant au point 1/2 les intégrales sur $I$ on montre facilement (8.2) en recopiant l'argument donné plus haut.

L'observation suivante nous indiquera comment définir les $\tau_\lambda$.

**Lemme 9.** *Soient $\lambda \in \Lambda_j$ et $\tau_\lambda$ une primitive de $2^j\theta_\lambda/a$. Alors*

(i) $\quad \tau_\lambda(1) - r\tau_\lambda(0) = (1-r)\int_I \tau_\lambda$ ,

(ii) $\quad \tau_\lambda \in V$ *si et seulement si* $\int_I \tau_\lambda = 0$.

La preuve en est très simple. Pour (i) il suffit d'intégrer par parties la relation $\int_I \theta_\lambda v_0/a = 0$ en utilisant la définition de $v_0$. La condition d'appartenance à $V$ étant précisément que le membre de gauche de (i) soit nul, on en déduit (ii). On pourra noter que l'appartenance de $\tau_\lambda$ à $V$ est aussi équivalente à $\int_I \tau_\lambda s_0 = 0$.

La conséquence de ce lemme est que nous n'avons pas le choix pour définir $\tau_\lambda$. Afin d'obtenir les estimations à deux bosses, nous introduisons une fonction auxiliaire $\tau_\lambda^\sharp$ que nous corrigerons ensuite pour qu'elle soit de moyenne nulle.

Soit $\lambda \in \Lambda_j$ fixé et tel que $0 < \lambda \leq 1/2$ (on procéderait de façon symétrique si $\lambda > 1/2$). On supposera aussi $j$ assez grand. On pose

$$\tau_\lambda^\sharp(x) = 2^j \int_{1/2}^x \frac{1}{a(t)}\theta_\lambda(t)\,dt, \quad \text{si } 0 < \lambda \leq 1/4\,,$$

$$\tau_\lambda^\sharp(x) = 2^j \int_0^x \frac{1}{a(t)}\theta_\lambda(t)\,dt, \quad \text{si } 1/4 < \lambda \leq 1/2.$$

L'estimation (8.14$a$) se vérifie à l'aide de l'argument maintes fois utilisé auparavant d'approximation dans $V_j$ des fonctions caractéristiques d'intervalle. Il est essentiel dans ces calculs que la borne de l'intégrale qui définit $\tau_\lambda^\sharp$ soit «loin» de $\lambda$.

En ce qui concerne la moyenne de $\tau_\lambda^\sharp$ on trouve

$$|\int_I \tau_\lambda^\sharp| \leq C\, 2^{j/2} \exp\{-\gamma\, 2^j\, \delta(1,\lambda)\}$$

si $1/4 < \lambda \leq 1/2$, et

$$\int_I \tau_\lambda^\sharp = 0$$

si $0 < \lambda \leq 1/4$ et $j \geq 1$. Cette intégrale est nulle car en intégrant par parties on voit qu'elle vaut $\int_I v_1\, \theta_\lambda\, /a$ où $v_1(x) = 2^j(1 - |2x-1|) \in V_1$. En ce qui concerne la première intégrale on remarque que sous la condition $1/4 < \lambda \leq 1/2$, $\delta(1,\lambda) = \lambda \geq \delta(x,\lambda)/2$ pour tout $x \in I$. La majoration obtenue est donc meilleure que (8.14$a$).

Cela permet donc de définir la fonction $\tau_\lambda$ par : pour $x \in I$, $\tau_\lambda(x) = \tau_\lambda^\sharp(x)$ si $1/4 < \lambda \leq 1/2$ et $\tau_\lambda(x) = \tau_\lambda^\sharp(x) - \int_I \tau_\lambda^\sharp$ si $0 < \lambda \leq 1/4$.

En faisant de même si $\lambda > 1/2$, on obtient alors une famille de fonctions $\tau_\lambda$ sur $I$, qui, en vertu du Lemme 9, appartiennent toutes à $V$ et vérifient (8.14).

Pour finir, on appelle $t_0$ la primitive de $v_0\,/a$ qui vérifie $1 = \nu(r-1)\int_I t_0 = \int_I s_0\, t_0$. Cette fonction appartient à $V$. En effet, en intégrant par parties la relation $\int_I v_0^2\,/a = 1$ on tombe sur l'égalité $1 = \nu(t_0(1) - rt_0(0)) + 1$, ce qui implique que $t_0(1) - rt_0(0) = 0$.

La famille constituée des $\tau_\lambda$ et de $t_0$ est alors la base cherchée.

3. Vérifications.

Pour démontrer (8.1) on utilise une autre variante du Théorème 5.

**Proposition 4.** *Soit $h_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, une famille de fonctions définies sur $I$ et vérifiant les estimations standard à deux bosses* (8.14). *On suppose de plus que* $(\int_0^{1/2} h_\lambda)$ *et* $(\int_{1/2}^1 h_\lambda)$ *sont deux suites de Carleson. Alors*

$$\int_I |\sum \alpha_\lambda\, h_\lambda|^2 \leq C \sum |\alpha_\lambda|^2.$$

La preuve de ce résultat repose sur l'observation que la restriction à (0,1/2) (respectivement (1/2,1)) des $h_\lambda$ vérifient les estimations standard. On peut par conséquent appliquer le Théorème 5 aux familles de fonctions formées par ces restrictions. (On notera que pour $\lambda \in \Lambda_j$, $j > 0$, $\text{dist}\{\lambda, 1/2\} \geq C\ell(\lambda)$ ce qui permet d'utiliser directement la preuve de ce théorème. Voir Section 6.)

Pour terminer, examinons la complétude. Soit $f \in L^2(I)$ orthogonale à $t_0$ et aux $\tau_\lambda$. Posons $\kappa = (1-r)^{-1} r \int_I f$. Si $F$ est la primitive de $f$ qui vaut $\kappa$ en 0 alors $F(1) = r^{-1}F(0)$. On peut donc intégrer par parties les relations d'orthogonalité. Ainsi $F$ est orthogonale à $v_0$ et aux $\theta_\lambda$. Donc $F = 0$ et par suite $f = 0$.

*Condition aux limites* (2.2*i*): $I = (0,1)$ et $V = \{f \in H^1(I) : f(1) = zf(0)\}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

On commence comme dans le cas précédent avec la même analyse multirésolution où $r$ est remplacé par $\overline{z}$. Une fonction de $V_j$ vérifie donc $f(1) = \overline{z}^{-1} f(0)$ qui est la condition d'appartenance à $V^*$. Cette condition n'étant pas invariante pour la conjugaison, $V_j$ n'est pas autoadjoint. On ne peut donc plus appliquer le Théorème 3 et obtenir une base adaptée, orthogonale pour $B$.

Qu'à cela ne tienne, on peut cependant construire deux bases adaptées bi-orthogonales, non plus pour $B$ mais pour $\beta(f,g) = \int_I f\,\overline{g}/a$ (comme cela est fait dans [2]). Nous en rappelons quelques détails dans l'Appendice 4.

Voici en quelques mots l'application à notre problème. Appelons $(\theta_\lambda)$ et $(\theta^\star_\lambda)$ les deux bases ainsi construites (il faut les compléter de manière appropriée mais nous ignorons ici ce détail). Elles appartiennent à $V^*$, vérifient les estimations à deux bosses et

$$\int_I \theta_\lambda \frac{1}{a} \overline{\theta^\star_\mu} = \delta_{\lambda\mu} \tag{8.15}$$

pour tout $\lambda, \mu$.

On définit ensuite $\tau_\lambda$ de la même façon que précédemment et $\tau^\star_\lambda$ comme la primitive de $2^j \theta^\star_\lambda / \overline{a}$ ayant une moyenne nulle sur $I$. Ces fonctions appartiennent alors à $V$. On définit aussi $\sigma_\lambda$ et $\sigma^\star_\lambda$ comme les dérivées correctement renormalisées de $\theta_\lambda$ et $\theta^\star_\lambda$ respectivement.

En intégrant (8.15) par parties de deux façons différentes on obtient

$$\int_I \tau_\lambda \overline{\sigma^\star_\mu} = \delta_{\lambda\mu} = \int_I \tau^\star_\lambda \overline{\sigma_\mu}\,.$$

Le système bi-orthogonal de $(\tau_\lambda)$ est donc $(\sigma_\lambda^*)$. De plus, on voit que $\tau_\lambda \in \mathcal{D}(T)$ et que $T\tau_\lambda = D^*aD\tau_\lambda = 2^{2j}\sigma_\lambda$. Le système $(\sigma_\lambda)$, quant à lui, a pour bi-orthogonal $(\tau_\lambda^*)$. Ces observations permettront au lecteur de compléter les détails.

## 9. Commentaires et extensions.

1. Résultats d'interpolation. J.-L. Lions montre dans [13] que si $T^\rho$ dénote la puissance fractionnaire d'ordre $\rho \in (0,1)$ d'un opérateur accrétif $T$, alors $\mathcal{D}(T^\rho)$ coïncide avec l'espace d'interpolation complexe $[H, \mathcal{D}(T)]_\rho$.

En utilisant notre base d'ondelette $(\tau_\lambda)$ pour $T = D^*aD$ on voit donc que dans cette base $\mathcal{D}(T^\rho)$ est caractérisé par $\sum |\alpha_\lambda|^2 \omega(\lambda)^{2\rho} < +\infty$. Si $\rho < 1/2$, il s'agit aussi de l'espace $[L^2(I), V]_{2\rho}$.

Si $\rho > 1/2$ en revanche on a $\mathcal{D}(T^\rho) \subset V$, et si $f \in \mathcal{D}(T^\rho)$ alors $aDf$ est caractérisé dans la base des $\theta_\lambda$ par $\sum |\beta_\lambda|^2 \omega(\lambda)^{2\rho-1} < +\infty$. Or par interpolation cette condition caractérise l'espace $[L^2(I), V^*]_{2\rho-1}$ que l'on appelle $V_{2\rho-1}^*$. Donc pour $\rho > 1/2$, $\mathcal{D}(T^\rho) \subset \{f \in V : aDf \in V_{2\rho-1}^*\}$ et l'on établit facilement l'inclusion inverse.

Dans le cas où $I = \mathbb{R}$, ces résultats d'interpolation équivalent au fait que les espaces $a^{-1}H^s$ pour $1 \geq s \geq 0$ et $H^s$ pour $-1 \leq s \leq 0$ forment une famille d'espaces d'interpolation complexe. On a dénoté par $H^s$ l'espace de Sobolev d'ordre $s$. Ce résultat avait été démontré dans [6] et on le retrouve plus aisément ici. Les limitations sur le paramètre $s$ sont seulement liées au fait que les ondelettes adaptées que nous avons choisies sont lipschitziennes. On lève cette limitation en considérant des ondelettes adaptées plus régulières, ce qui est possible mais que nous ne discuterons pas ici. Toutes ces remarques sont valides sur un intervalle et nous laissons le lecteur imaginer les résultats d'interpolation obtenus.

2. Notre démonstration utilisant l'interpolation complexe abstraite ne fournit aucune information sur la nature de l'opérateur $(D^*aD)^{1/2}$ autre que celle d'être continu de $V$ dans $L^2$. Nous publierons ultérieurement une description plus fine de cet opérateur [4].

3. Considérons le problème $D^*aDu = f$ sur (0,1) avec données de Dirichlet $u(0) = u(1) = 0$ et $f \in L^2$. On peut adapter la discussion qui suit à d'autres conditions aux limites. La collection $(t_1, \tau_\lambda)$ construite pour (2.2*d*) fournit une base de Riesz de $\mathcal{D}(D^*aD)$. Or la solution $u$ de ce problème appartient à cet espace. On peut alors

obtenir cette solution par $u(x) = \alpha_1 t_1(x) + \sum \alpha_\lambda 2^{-2j}\tau_\lambda(x)$ dès que $f(x) = \alpha_1 s_1(x) + \sum \alpha_\lambda \sigma_\lambda(x)$. En d'autres termes, on a décomposé le noyau de Green de $D^*aD$ avec donnée de Dirichlet en une série $t_1(x)t_1(y) + \sum 2^{-2j}\tau_\lambda(x)\tau_\lambda(y)$.

4. Conjecture de Kato pour des opérateurs elliptiques d'ordre supérieur. Exemple: $T = d_x^2 a(x) d_x^2$ où $d_x = \frac{d}{dx}$. La fonction $a(x)$ est supposée accrétive et bornée. La conjecture de Kato est vraie par exemple pour les données de Dirichlet au bord ou celle de Neumann (nous ne prétendons pas avoir examiné toutes les conditions aux limites possibles).
Considérons par exemple le problème de Dirichlet pour $T$ sur $(0, +\infty)$. Le domaine de cet opérateur est contenu dans $H_0^2 = \{f \in H^2 : f(0) = f'(0) = 0\}$. Les données au bord tiennent également compte des valeurs de la dérivée. Il convient alors de remplacer les splines linéaires par des fonctions qui fournissent une interpolation d'après les valeurs de $f$ et $f'$. En s'inspirant d'une construction de [8] ou de [7], on peut travailler avec des fonctions dites d'interpolation de Hermite.

On part de l'observation qu'il existe un unique polynôme $P$ de degré 3 sur [0,1] avec des valeurs assignées pour $P$ et $P'$ en 0 et 1. Il existe alors un unique couple de fonctions $(\varphi_0, \varphi_1)$ à support dans $[-1, 1]$ de classe $\mathcal{C}^1$ (en fait lipschitziennes d'ordre 2) et polynomiales de degré 3 sur $[-1, 0]$ et $[0, 1]$ telles que $\varphi_0(0) = 1$, $\varphi_0'(0) = 0$, $\varphi_1(0) = 0$ et $\varphi_1'(1) = 1$. Les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et polynomiales de degré 3 sur chaque intervalle $[k, k+1]$, $k \in \mathbb{Z}$, s'écrivent donc $f(x) = \sum f(k)\varphi_0(x - k) + \sum f'(k)\varphi_1(x - k)$. Le couple $(\varphi_0, \varphi_1)$ remplace donc la fonction $\Delta$. On obtient facilement les inégalités analogues à (4.1) et (4.2) pour ce couple (voir [1] pour plus de détails).

Il suffit ensuite de réécrire *mutatis mutandis* la construction de l'analyse multirésolution, des bases adaptées ... Nous laissons au lecteur le soin de le faire.

## 10. Appendices.

### Appendice 1 : Bases orthogonales.

Nous rappelons ici l'algorithme de construction de bases orthogonales dans un espace de Hilbert. Cet algorithme est dû à P. G. Lemarié et Y. Meyer et nous renvoyons à [21] et [17] pour une démonstration détaillée.

Pour plus de simplicité nous nous plaçons dans le cadre concret de $L^2(I) = L^2$, muni de sa structure hilbertienne complexe canonique

$\langle f,g\rangle = \int_I f\,\overline{g}$. Dans tout cet appendice, on désigne par $B$ une forme bilinéaire, continue sur $L^2$ et accrétive:

$$\mathrm{Re}\, B(f,\overline{f}) \geq \|f\|^2, \quad \forall f \in L^2.$$

Nous dirons qu'un sous-espace de $L^2$ est autoadjoint s'il est invariant pour la conjugaison des fonctions.

**Lemme A1.** *Soit $E$ un sous-espace fermé et autoadjoint de $L^2$. On suppose que $E$ est engendré par une base de Riesz normalisée $e_k(x)$, $k \in K$ ($K$ étant un sous-ensemble quelconque de $\mathbb{Z}$), de fonctions à valeurs réelles. Il existe alors une base de Riesz normalisée, $e_k^\star(x)$, $k \in K$, de $E$ de fonctions à valeurs complexes et orthogonales pour $B$:*

$$B(e_k^\star, e_\ell^\star) = \delta_{k\ell}, \quad k,\ell \in K.$$

*Ces fonctions sont données pour tout $k \in K$ par*

$$e_k^\star(x) = \sum_{\ell \in K} \gamma(k,\ell)\, e_\ell(x),$$

*où les $\gamma(k,\ell)$ sont les coefficients de la matrice $G^{-1/2}$ lorsque $G$ est la matrice $\big((B(e_k, e_\ell))\big)$.*

REMARQUE. Grâce aux hypothèses sur les fonctions $e_k$ et au fait que $E$ soit autoadjoint, la matrice $G$ est bornée et accrétive sur $\ell^2(K)$. La matrice $G^{-1/2}$ est alors définie par le calcul fonctionnel de Kato.

Une deuxième remarque est que le lemme s'applique à la forme bilinéaire particulière $B_0(f,g) = \langle f, \overline{g}\rangle$. On obtient alors une base orthonormée de $E$ et ces fonctions sont à valeurs réelles.

On se donne désormais $U$, $V$ et $H$ trois sous-espaces fermés de $L^2$ avec les propriétés suivantes:

- $U$, $V$ et $H$ sont autoadjoints,
- $H = U + V$ et la somme est directe,
- il existe des fonctions $v_k(x)$, $k \in K$, à valeurs réelles et formant une base de Riesz de $V$,
- il existe des fonctions $u_k(x)$, $k \in K'$, à valeurs réelles et formant une base de Riesz de $U$.

On introduit $W$ le supplémentaire orthogonal de $V$ dans $H$ et l'on désigne par $\Pi$ le projecteur orthogonal de $H$ sur $V$.

**Lemme A2.** *Soit $\varphi_k(x)$, $k \in K$, la base orthonormée de $V$ obtenue en appliquant le Lemme* A1 *à $V$ et à $(v_k)$ pour la forme $B_0$. Ces fonctions sont à valeurs réelles et l'on a*

1.
$$\Pi(h)(x) = \sum_{\ell \in K} \langle h, \varphi_\ell \rangle \varphi_\ell(x), \qquad h \in H.$$

2. *$I - \Pi$ réalise un isomorphisme de $U$ sur $W$ et la suite de fonctions à valeurs réelles $w_k$ définies par*

$$w_k(x) = u_k(x) - \Pi(u_k)(x), \qquad \forall\, k \in K',$$

*est une base de Riesz normalisée de $W$.*

3. *En appliquant le Lemme* A1 *aux fonctions $w_k$ dans l'espace $W$ pour la forme $B_0$, on obtient une base orthonormée $\psi_k(x)$, $k \in K'$, de $W$ composée de fonctions à valeurs réelles.*

Pour une forme accrétive $B$ quelconque on a l'énoncé suivant:

**Lemme A3.**

1. *Soit $X$ le sous-espace fermé et non autoadjoint de $H$ défini par*

$$X = \{\theta \in H \,:\, B(\theta, v) = 0 \quad \forall\, v \in V\}.$$

*Alors*
$$H = V + X$$

*où la somme est directe. On appelle $P$ le projecteur sur $V$ de noyau $X$ associé à cette somme directe.*

2. *Soit $g_k(x)$, $k \in K$, la base de Riesz obtenue en appliquant le Lemme* A1 *aux fonctions $v_k(x)$ dans $V$ pour la forme $B$. On a*

$$P(h)(x) = \sum_{k \in K} B(h, g_k) g_k(x), \qquad \forall\, h \in H.$$

3. *$I - P$ est un isomorphisme de $W$ sur $X$. La suite de fonctions définies par*
$$\mathcal{X}_k(x) = \psi_k(x) - P(\psi_k)(x), \qquad k \in K',$$

*est une base de Riesz normalisée de $X$.*

4. *Soit* $M = \big((B(\mathcal{X}_k, \mathcal{X}_\ell))\big)$. *Alors* $M$ *est bornée et accrétive sur* $\ell^2(K')$. *Si* $\gamma(k,\ell)$ *sont les coefficients de la matrice* $M^{-1/2}$ *alors les fonctions définies par*

$$\theta_k(x) = \sum_{\ell \in K'} \gamma(k,\ell)\mathcal{X}_\ell(x), \quad k \in K',$$

*forment une base de Riesz normalisée de* $X$ *et orthogonale pour* $B$.

Seul le dernier point appelle une remarque. L'espace $X$ n'étant pas autoadjoint et les fonctions $\mathcal{X}_k$ n'étant pas à valeurs réelles, le point 4 n'est donc pas immédiat. C'est là qu'on utilise le fait que les $\psi_k$ sont à valeurs réelles et que $V$ est autoadjoint. En effet, grâce aux formules des points 2 et 3 on voit que $\mathcal{X}_k(x) - \overline{\mathcal{X}_k(x)} \in V$. Par définition de $X$ on en tire la relation $B(\mathcal{X}_k, \mathcal{X}_\ell) = B(\mathcal{X}_k, \overline{\mathcal{X}_\ell})$ qui permet d'utiliser l'accrétivité de $B$.

Une autre remarque est que le détour par $W$ pour «passer» de $U$ à $X$ est rendu nécessaire pour établir les inégalités quadratiques de la Section 7.

Pour terminer ce premier appendice, le lemme suivant s'applique à toutes les matrices utilisées ici et fournit les estimations standard du Théorème 3.

**Lemme A4** ([9]). *Pour* $\gamma > 0$ *soit* $\mathcal{M}_\gamma$ *l'espace vectoriel des matrices à coefficients complexes* $M = \big((m(k,\ell))\big)$, $k, \ell \in K$ *(sous-ensemble quelconque de* $\mathbb{Z}$*), telles que*

$$\|M\|_\gamma \equiv \sup\{|m(k,\ell)| \exp\{\gamma|k-\ell|\} : k, \ell \in K\} < +\infty .$$

*Pour* $\gamma > 0$ *on pose*

$\mathcal{M}^\gamma = \cup_{0<\delta<\gamma} \mathcal{M}_\delta$. *Alors*

1. $\mathcal{M}^\gamma$ *est une sous-algèbre d'opérateurs bornés sur* $\ell^2(K)$.
2. *Si* $M \in \mathcal{M}^\gamma$ *est inversible sur* $\ell^2(K)$ *alors* $M^{-1} \in \mathcal{M}^\gamma$. *Si, de plus,* $M$ *est accrétive alors* $M^{-1/2} \in \mathcal{M}^\gamma$.

Tous ces lemmes s'appliquent à chaque triplet $(U,\ V,\ H) = (U_j,\ V_j,\ V_{j+1})$. On obtient ainsi une preuve du Théorème 3.

**Appendice 2: Preuve de la Proposition 3.**

On reprend les notations de la Proposition 3. Nous allons montrer comment nous ramener aux arguments de la Section 6.

Le premier cas est celui où

$$\int_I h_\lambda = 0$$

pour tout $\lambda \in \Lambda^p$. Rappelons que les fonctions $h_\lambda$ sont périodiques de période 1 donc l'intégrale est prise sur n'importe quel intervalle de longueur 1. Pour démontrer

$$\int_I \Big| \sum_{\lambda\in\Lambda^p} \alpha_\lambda h_\lambda \Big|^2 \leq C \sum |\alpha_\lambda|^2,$$

on commence par estimer les coefficients $\langle h_\lambda, h_\mu\rangle$. Soient $\lambda = (2k + 1)2^{-j-1} \in \Lambda_j^p$, $\mu = (2k'+1)2^{-j'-1} \in \Lambda_{j'}^p$ avec $j > j'$. Grâce à la périodicité et à l'hypothèse ci-dessus, on peut écrire

$$\langle h_\lambda, h_\mu\rangle = \int_{\lambda-1/2}^{\lambda+1/2} h_\lambda \overline{h_\mu} = \int_{\lambda-1/2}^{\lambda+1/2} h_\lambda \big(\overline{h_\mu - h_\mu(\lambda)}\big).$$

On remarquera que pour $x \in (\lambda - 1/2, \lambda + 1/2)$ il vient $\operatorname{dist}\{x - \lambda, \mathbb{Z}\} = |x-\lambda|$. On peut donc remplacer (8.13a) par (5.2a) pour $h_\lambda$ une fois prolongée par 0 en dehors de $(\lambda - 1/2, \lambda + 1/2)$.

Ensuite l'intégrale précédente se décompose en la somme de deux intégrales $\mathrm{I}_1$ et $\mathrm{I}_2$ en découpant le domaine d'intégration suivant que $|x-\mu_1| = \operatorname{dist}\{x-\mu, \mathbb{Z}\}$ ou que $|x-\mu_2| = \operatorname{dist}\{x-\mu,\mathbb{Z}\}$. On a désigné par $\mu_1$ et $\mu_2$ deux points de $\Lambda_{j'}$ à distance entière de $\mu \in \Lambda_{j'}^p$ avec $|\lambda-\mu_1| \leq 1/2 \leq |\lambda - \mu_2| \leq 1$. (On a d'ailleurs soit $\mu = \mu_1$ soit $\mu = \mu_2$.)

Pour estimer $\mathrm{I}_1$ on remplace alors $h_\mu - h_\mu(\lambda)$ par $h_{\mu_1} - h_{\mu_1}(\lambda)$ où $h_{\mu_1}$ est une fonction vérifiant (5.2) pour $\mu_1$ et qui coïncide avec $h_\mu$ sur la zone d'intégration. On est donc ramené à la majoration du Lemme 5 et l'on obtient $|\mathrm{I}_1| \leq C 2^{-|j-j'|(1/2+\delta)} \exp\{-\gamma\, 2^{\inf\{j,j'\}} |\lambda - \mu_1|\} \leq C 2^{-|j-j'|(1/2+\delta)} \exp\{-\gamma\, 2^{\inf\{j,j'\}} \operatorname{dist}\{\lambda-\mu, \mathbb{Z}\}\}$ où $0 < \delta < 1$. On procède de même pour $\mathrm{I}_2$.

On conclut alors comme dans le Lemme 5 en montrant que la matrice formée par les coefficients $\langle h_\lambda, h_\mu\rangle$ est bornée sur $\ell^2(\Lambda)$ par interpolation.

Le deuxième cas est celui où la suite $(\int_I h_\lambda)$ est de Carleson. Il n'y a rien à changer à l'argument du Théorème 5 qu'il suffit de recopier mot à mot.

## Appendice 3: Estimations pour les ondelettes à deux bosses.

Nous nous proposons de vérifier que la construction de la base des ondelettes adaptées avec estimations à deux bosses reste valide dans le cas de la condition aux limites (2.2$h$).

Tout d'abord les Lemmes A1–3 de l'Appendice 1 sont de nature purement hilbertienne et s'appliquent sans aucun changement à chaque triplet $(U_j, V_j, V_{j+1})$.

On observe ensuite que la fonction $\varphi_{j_0}$ est localisée autour de 0 et de 1. Au cours des différentes étapes d'orthogonalisation et de projection cette double localisation va se propager à toutes les fonctions des différents systèmes obtenus. Cette propagation est contrôlée en vertu de l'extension ci-dessous du Lemme A4.

Introduisons auparavant les notations suivantes: soit $K$ un sous-ensemble symétrique ($k \in K$ implique $-k \in K$) de $\mathbb{Z}$. Posons $\delta(k,\ell) = \inf\{|k-\ell|, |k+\ell|\}$, $k$, $\ell \in K$. Pour $\gamma > 0$ on appelle $\mathcal{M}^\sharp_\gamma$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients complexes $M = \big((m(k,\ell))\big)$, $k$, $\ell \in K$, telles que

$$\|M\|^\sharp_\gamma \equiv \sup\{|m(k,\ell)|\exp\{\gamma\delta(k,\ell)\} \ : \ k,\ell \in K\} < +\infty\,.$$

On appelle enfin $\mathcal{M}^{\gamma\sharp} = \cup_{0<\delta<\gamma}\mathcal{M}^\sharp_\delta$.

**Lemme A5.**

1. *$\mathcal{M}^{\gamma\sharp}$ est une sous-algèbre d'opérateurs bornés sur $\ell^2(K)$.*
2. *Si $M \in \mathcal{M}^{\gamma\sharp}$ est inversible sur $\ell^2(K)$ alors $M^{-1} \in \mathcal{M}^{\gamma\sharp}$. Si, de plus, $M$ est accrétive alors $M^{-1/2} \in \mathcal{M}^{\gamma\sharp}$.*

La preuve consiste à observer que pour démontrer le Lemme A4 il n'est pas nécessaire que $\delta$ soit une distance. Tout ce dont on a besoin est que $\delta$ satisfasse l'inégalité triangulaire, la condition exponentielle suivante: pour tout $\gamma > 0$, il existe $C = C(\gamma) < \infty$ telle que

$$\sup_k \sum_\ell \exp\{-\gamma\delta(k,\ell)\} \le C\,,$$

et la condition où les rôles de $k$ et $\ell$ sont échangés.

En revenant aux $\theta_\lambda$, on obtient grâce au Lemme A5 les estimations à deux bosses pour ces fonctions. Il faut encore démontrer l'inégalité quadratique. Celle-ci découle de la Proposition 4 et des formules de représentation (5.4–6) en suivant l'argument de la Section 7. La seule chose à modifier est l'estimation (5.5) qui devient l'estimation à deux bosses

$$|\beta(\lambda,\mu)| \leq C \exp\{-\gamma \inf\{|k-\ell|, |k+\ell-2^j|\}\},$$

pour tous $\lambda = (2k+1)2^{-j-1} \in \Lambda_j$ et $\mu = (2\ell+1)2^{-j-1} \in \Lambda_j$.

## Appendice 4: Bases bi-orthogonales dans le cas non-autoadjoint.

Cet appendice résume une construction de [2]. Lorsque l'analyse multirésolution $(V_j)$ n'est plus autoadjointe on ne peut plus utiliser la restriction à chaque $V_j$ d'une forme bilinéaire. Il faut donc partir d'une forme *sesquilinéaire* $\beta(f,g)$ continue sur $L^2$ et accrétive:

$$\text{Re } \beta(f,f) \geq \|f\|^2, \quad \forall f \in L^2.$$

Si maintenant l'on essaie de reprendre le Lemme A1 où $B$ est remplacée par $\beta$, on s'aperçoit que cela n'est pas possible à cause de la sesquilinéarité de $\beta$. Il faut donc être moins exigeant et construire des bases bi-orthogonales. Enonçons par exemple une variante des lemmes A1–3.

Considérons un triplet $(U, V, H)$ vérifiant les conditions de l'appendice 1. On n'impose plus cependant que ces espaces soient autoadjoints ni que les fonctions génératrices de $U$ et de $V$ soient à valeurs réelles. On appellera $W$ le supplémentaire orthogonal pour le produit scalaire de $V$ dans $H$ et $X$ le supplémentaire orthogonal pour $\beta$ de $V$ dans $H$:

$$X = \{\theta \in H \,:\, \beta(\theta, v) = 0 \quad \forall v \in V\}. \tag{A4}$$

**Lemme A6.**

1. *Il existe une base orthonormée de $V$ composée de fonctions $\varphi_k(x)$, $k \in K$, donnée par*

$$\varphi_k(x) = \sum_{\ell \in K} \gamma(k,\ell) v_\ell(x),$$

*où les $\gamma(k,\ell)$ sont les coefficients de la matrice $M^{-1/2}$ lorsque $M$ est la matrice définie positive $\left(\left(\langle v_k, v_\ell\rangle\right)\right)$.*

2. *Il existe une base de Riesz normalisée, $v_k^\star(x)$, $k \in K$, de $V$, bi-orthogonale de la base $(v_k)$ pour $\beta$:*

$$\beta(v_k^\star, v_\ell) = \delta_{k\ell}, \quad k, \ell \in K.$$

*Ces fonctions sont données pour tout $k \in K$ par*

$$v_k^\star(x) = \sum_{\ell \in K} \eta(k, \ell) v_\ell(x),$$

*où les $\eta(k, \ell)$ sont les coefficients de la matrice $G^{-1}$ lorsque*

$$G = \left( \left( \beta(v_k, v_\ell) \right) \right).$$

3. *La projection orthogonale sur $W$ de la base $u_k$, $k \in K'$, de $U$ est une base de Riesz normalisée de $W$. Cette dernière est orthonormalisée, en suivant l'algorithme du point* 1.

4. *$H = V + X$ où la somme est directe.*

5. *La projection sur $X$ parallèlement à $V$ de la base $(\psi_k)$ de $W$ construite en* 3 *est une base de Riesz normalisée $(\mathcal{X}_k)$ de $X$.*

On peut compléter ce lemme en écrivant les formules de représentation similaires à celles des lemmes A1–3.

En ce qui concerne le point 4 du Lemme A3, on ne doit pas l'utiliser de la même façon. Voyons pourquoi en tentant de l'appliquer directement à la construction des bases adaptées.

Partons d'une analyse multirésolution $(V_j)$ sur $L^2$. Soit $\beta(f, g) = \int_I f \overline{g}/a$ et pour tout $j$, $X_j$ l'orthogonal pour $\beta$ de $V_j$ dans $V_{j+1}$. Soit $\theta \in X_j$, $\theta' \in X_{j'}$ et supposons que $j \neq j'$. Si $j > j'$, alors $X_{j'} \subset V_{j'+1}$ et donc $\beta(\theta, \theta') = 0$. En revanche il n'y a aucune raison pour que cette égalité ait lieu si $j < j'$.

Pour remédier à cela, on introduit une nouvelle famille d'espaces $(X_j^\star)$, où $X_j^\star$ est l'orthogonal de $V_j$ dans $V_{j+1}$ pour la forme duale de $\beta$ définie par : $\beta^\star(f, g) = \overline{\beta(g, f)}$. C'est-à-dire

$$X_j^\star = \{\theta^\star \in V_{j+1} \ : \ \beta^\star(\theta^\star, v) = 0 \quad \forall v \in V_j\}$$

. Si maintenant $\theta \in X_j$ et $\theta^\star \in X_{j'}^\star$ avec $j \neq j'$, on voit que $\beta(\theta, \theta^\star) = 0$.

Si donc $(\theta_\lambda)$ est une base de $X_j$ ($j$ fixé) on doit construire une famille qui lui est orthogonale dans $X_j^\star$. Ainsi d'après les remarques précédentes on obtient en collectant toutes ces familles deux systèmes bi-orthogonaux pour $\beta$ dans $L^2$.

Revenons au cadre plus abstrait ci-dessus. $X$ est défini par (A4) et $X^\star$ par (A4) où l'on a remplacé $\beta$ par sa forme duale $\beta^\star$. Il faut donc considérer la restriction de $\beta$ à $X \times X^\star$. Le problème est qu'on perd ainsi l'accrétivité de $\beta$. On garde cependant une propriété plus faible mais suffisante pour notre propos.

**Lemme A7.**

1. *Il existe une constante $\delta > 0$ telle que*

$$\sup_{\theta^\star \in X^\star,\, \|\theta^\star\| \leq 1} |\beta(\theta, \theta^\star)| \geq \delta\, \|\theta\| \qquad \forall\, \theta \in X$$

$$\sup_{\theta \in X,\, \|\theta\| \leq 1} |\beta(\theta, \theta^\star)| \geq \delta\, \|\theta^\star\| \qquad \forall\, \theta^\star \in X^\star$$

2. *Soient $(\mathcal{X}_k)$ et $(\mathcal{X}_k^\star)$ des bases de Riesz de $X$ et $X^\star$ respectivement (construites en appliquant par exemple le Lemme* A6). *Alors la matrice $G = \big((\beta(\mathcal{X}_k, \mathcal{X}_\ell^\star))\big)$ est inversible sur $\ell^2(K')$.*

3. *Les fonctions $\theta_k(x)$ définies pour $k \in K'$ par*

$$\theta_k(x) = \sum_{\ell \in K'} \gamma(k, \ell) \mathcal{X}_\ell(x)\,,$$

*où $\gamma(k, \ell)$ sont les coefficients de $G^{-1}$, forment une base de Riesz normalisée de $X$ telle que*

$$\beta(\theta_k, \mathcal{X}_\ell^\star) = \delta_{k\ell}, \quad \forall\, k, \ell \in K'.$$

Une preuve se trouve dans [2] (Il y a dans les notations une légère différence avec cette référence).

Pour finir, on construit à l'aide de ces lemmes deux bases d'ondelettes adaptées pour la condition aux limites ($2.2i$). Noter que l'une sera adaptée à $1/a(x)$ et l'autre à $\overline{1/a(x)}$. On vérifie les estimations à deux bosses pour chacune de ces bases en suivant l'Appendice 3. Les détails sont laissés au lecteur.

## Références.


[1] Auscher, P., Wavelets with boundary conditions on the interval, *Wavelets - A Tutorial in Theory and Applications*, C. Chui ed., Academic press, 1992.

[2] Auscher, P. et Tchamitchian, Ph., Bases d'ondelettes sur les courbes corde-arc, noyau de Cauchy et espaces de Hardy associés, *Revista Mat. Iberoamericana* **5** (1989) 139–170.

[3] —, Ondelettes et conjecture de Kato, *C. R. Acad. Sci. Paris* **313** (1991) 63–66.

[4] —, Inversion des opérateurs de Calderón-Zygmund et application à la conjecture de Kato, en préparation.

[5] Coifman, R., McIntosh, A. et Meyer, Y., L'intégrale de Cauchy définit un opérateur borné sur $L^2(R)$ pour les courbes lipschitziennes, *Ann. Math.* **116** (1982) 361–387.

[6] David, G., Journé, J.-L., et Semmes, S., Opérateurs de Calderón-Zygmund, fonctions para-accretives et interpolation, *Revista Mat. Iberoamericana* **1** (1985) 1–56.

[7] Goodman, T.N.T., Lee, S.L. and Tang, W.S., Wavelets in wandering subspaces, preprint.

[8] Hervé, L., Thèse, Université de Rennes I, 1991.

[9] Jaffard, S., et Meyer, Y., Bases d'ondelettes dans des ouverts de $R^n$, *J. Math. Pures et Appl.* **68** (1989) 73–94.

[10] Kato, T., Fractional powers of dissipative operators, *J. Math. Soc. Japan* **13** (1961) 246–274.

[11] —, *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, 1966.

[12] Kenig, C. et Meyer, Y., The Cauchy integral on Lipschitz curves and the square root of second order accretive operators are the same, in *Recent progress in Fourier Analysis, Math. Studies* **111** (1985), 123–145.

[13] Lions, J.-L., Espaces d'interpolation et domaine de puissances fractionnaires, *J. Math. Soc. Japan* **14** (1962) 233–241.

[14] Mallat, S., Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(BbbR)$, *Trans. Amer. Math. Soc.* **315** (1989) 69–87.

[15] Meyer, Y., Ondelettes et fonctions splines, Séminaire E.D.P., Ecole Polytechnique, Paris, 1986.

[16] —, Wavelets and operators, Proc. Special Year in Modern Analysis, Urbana 1986/87, E. Berkson *et al.* eds, Cambridge Univ. Press., 1989.

[17] —, *Ondelettes et opérateurs*, Tomes I & II, Hermann, 1990.

[18] —, Ondelettes sur l'intervalle, *Revista Mat. Iberoamericana*, **7** (1991), 157–182.

[19] McIntosh, A., On the comparibility of $A^{1/2}$ et $A^{*1/2}$, *Proc. Amer. Math. Soc.* **32** (1972) 430–434.

[20] —, The square root problem for elliptic operators, in Functional analytic methods for Partial Differential Equations, *Lect. Notes in Math.*, **1450** (1990) 122–140.

[21] Tchamitchian, Ph., Ondelettes et intégrale de Cauchy sur les courbes lipschitziennes, *Ann. Math.* **129** (1989) 641–649.

[22] Torchinski, A., *Real-variable methods in harmonic analysis*, Academic Press, 1986.


*Recibido:* 22 de octubre de 1991.


Pascal AUSCHER*
IRMAR
Université de Rennes I
Campus de Beaulieu
35042 RENNES Cedex
FRANCE

Philippe TCHAMITCHIAN
Centre de Physique Théorique
CNRS-Luminy Case 907
13288 MARSEILLE Cedex 9
et
Faculté des Sciences et Techniques de Saint Jérôme
13397 MARSEILLE Cedex 13
FRANCE


* Ce travail a commencé alors que l'auteur était visiteur à Washington University, Department of Math., Saint Louis, Mo 63130 USA.