Revista Matemática Iberoamericana
Vol. 8, n.° 2, 1992

Analyses multi-résolutions non orthogonales, commutation entre projecteurs et derivation et ondelettes vecteurs à divergence nulle

Pierre Gilles Lemarie-Rieusset

Résumé. La compatibilité de la notion d'analyse multi-résolution non orthogonale avec la dérivation (exprimée par la formule de commutation) permet de construire une analyse multi-résolution de $L^2(\mathbb{R}^n)^n$ adaptée à l'étude des fonctions vecteurs à divergence nulle. Cela permet en particulier la construction de bases inconditionnelles d'ondelettes vecteurs à divergence nulle et à support compact.

Abstract. The notion of non-orthogonal multi-resolution analysis and its compatibility with differentiation (as expressed by the commutation formula) lead us to the construction of a multi-resolution analysis of $L^2(\mathbb{R}^n)^n$ which is well adapted to the approximation of divergence-free vector functions. Thus, we obtain unconditional bases of compactly supported divergence-free vector wavelets.

Introduction.

G. Battle a récemment annoncé [1], [2] la construction de bases orthonormées d'ondelettes vectorielles à divergence nulle et P. Federbush a montré comment ùtiliser ces bases dans l'étude des solutions de l'équation de Navier-Stokes [9]. Cependant, si ces bases s'avèrent utiles théoriquement, elles ne sont guère pratiques d'un point de vue numérique en l'absence de transformations rapides associées.

Nous nous proposons ici d'aborder la représentation des fonctions vectorielles à divergence nulle sous une autre approche. Nous introduirons une analyse multi-résolution non-orthogonale de $L^2(\mathbb{R}^n)^n$ tout entier, de sorte que les projecteurs obliques associés $\vec{P}_j$ permettront l'approximation des fonctions vectorielles quelconques (localement dans $L^2(\mathbb{R}^n)^n$) et leur transformation rapide en ondelettes (obliques); cependant le choix spécifique de notre analyse multi-résolution assurera que si $\vec{\nabla}\cdot\vec{f}=0$ alors $\vec{\nabla}\cdot\vec{P}_j(\vec{f})=0$, de sorte que le processus d'approximation $\vec{f}\to(\vec{P}_j(\vec{f}))_{j\in\mathbb{Z}}$ sera un processus interne pour l'espace des fonctions à divergence nulle. Cela se traduira par l'existence de bases inconditionnelles d'ondelettes vecteurs à divergence nulle (à support compact).

Notations: Pour une fonction g définie sur $\mathbb{R}^n$ on notera

$$(1) \qquad \hat{g}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n} g(x)e^{-ix\xi}dx \quad \textit{(transformée de Fourier)},$$

$$(2) \qquad g_{j,k}(x)=2^{jn/2}g(2^jx-k) \quad \textit{(translatée-dilatée dyadique)}.$$

1. Analyse multi-résolution en une dimension.

Nous rappelons ici les propriétés principales des analyses multi-résolutions que nous utiliserons par la suite. La notion d'analyse multi-résolution a été introduite en 1986 par S. Mallat [14] et est décrite de manière approfondie dans le livre d'Y. Meyer [15].

Definition 1. *Une analyse multi-résolution de* $L^2(\mathbb{R})$ *est une suite de sous-espaces fermés* $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ *de* $L^2(\mathbb{R})$ *telle que*

$$(3.1) \qquad V_j\subset V_{j+1},\quad \bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j=\{0\},\quad \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j \quad \textit{est dense dans} \quad L^2(\mathbb{R}),$$

(3.2) $\quad f(x) \in V_j$ *si et seulement si* $f(2x) \in V_{j+1}$, *et*

(3.3) $\quad V_0$ *a une base de Riesz de la forme* $g(x-k),\ k \in \mathbb{Z}$.

L'étude des fonctions g qui engendrent des analyses multi-résolutions a été faite par de nombreux auteurs, en particulier I. Daubechies et J. Lagarias [7] ou A. Cohen [4]. La notion suivante nous sera particulièrement utile:

Definition 2. *Une "fonction de pré-échelle" sur* $\mathbb{R}$ *sera une fonction* $g \in L^2(\mathbb{R})$ *à support compact et à valeurs réelles telle que, pour une suite finie* $(a_k)_{N_1 \leq k \leq N_2}$ *de réels et une fonction* $h \in L^2(\mathbb{R})$ *à support compact, on ait*

$$g(\frac{x}{2}) = \sum_k a_k g(x-k) \text{ p. p. } (\textit{équation à deux échelles}) \tag{4.1}$$

$$\int g(x)h(x-k)dx = \delta_{0,k} \quad \textit{pour} \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{4.2}$$

Une fonction de pré-échelle g vérifie alors l'estimation de stabilité suivante: pour deux constantes A, B strictement positives on a

(4.3) $\quad \forall (\lambda_k) \in \ell^2(\mathbb{Z})$,

$$A \sum |\lambda_k|^2 \leq \| \sum \lambda_k g(x-k) \|_2^2 \leq B \sum |\lambda_k|^2 .$$

Cela revient à dire que les fonctions $g(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$, forment une base de Riesz d'un sous-espace fermé V_0 de L^2. Le lien entre les fonctions de pré-échelle et les analyses multi-résolutions est décrite par la proposition suivante (démontrée dans [12]).

Proposition 1.
(i) *Si* g *est une fonction de pré-échelle, alors les* $g(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$, *forment une base de Riesz de l'espace* V_0 *d'une analyse multi-résolution* $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ *de* $L^2(\mathbb{R})$.

(ii) *Inversement, si* (V_j) *est une analyse multi-résolution telle que* V_0 *admet une base de Riesz à valeurs réelles et contient des fonctions à support compact non nulles, alors il existe une fonction de pré-échelle* g *telle que les* $g(x-k)$ *soient une base de* V_0. *De plus, si* G *est une autre fonction de pré-échelle de* V_0, *alors* $G(x) = \lambda g(x-k)$ *pour un* $\lambda \in \mathbb{R}^*$ *et un* $k \in \mathbb{Z}$.

Les fonctions de pré-échelle ont en outre de nombreuses propriétés (étudiées dans [12]) que nous rappelons ici :

Proposition 2. *Soit* g *une fonction de pré-échelle. On pose* $m_0(\xi) = \frac{1}{2}\sum_{N_1}^{N_2} a_k e^{-ik\xi}$, *où les* a_k *sont donnés par* (4.1). *Alors*

(i) *Les fonctions* m_0 *et* $\hat{g}$ *vérifient*

(5.1) $m_0(0) = 1$ *et* $m_0(\pi) = 0$,

(5.2) $\hat{g}(0) \neq 0$ *et* $\hat{g}(2k\pi) = 0$ *pour* $k \in \mathbb{Z}^*$,

(5.3) $\hat{g}(\xi) = \hat{g}(0)\prod_{j=1}^{\infty} m_0\left(\xi/2^j\right)$.

(ii) *Si* $g \in H^1$ (*c'est-à-dire si* $g' \in L^2$) *alors il existe une fonction de pré-échelle* G_1 *telle que*

(6.1) $$g'(x) = G_1(x) - G_1(x-1) \quad (\textit{formule de dérivation})$$

et le polynôme trigonométrique M_1 *associé à* G_1 *vérifie*

(6.2) $$M_1(\xi) = \frac{2}{1+e^{-i\xi}} m_0(\xi).$$

En particulier si $g \in H^p$ *alors* $\hat{g}^{(\ell)}(2k\pi) = 0$ *pour* $k \in \mathbb{Z}^*$ *et* $0 \leq \ell \leq p$ *et* $m_0^{(\ell)}(\pi) = 0$ *pour* $0 \leq \ell \leq p$.

(iii) *Il existe de même une fonction de pré-échelle* G_2 *telle que*

(7.1) $$g(x) - g(x-1) = G_2'(x) \quad (\textit{formule d' intégration})$$

et le polynôme trigonométrique M_2 *associé à* G_2 *vérifie*

(7.2) $$M_2(\xi) = \frac{1+e^{-i\xi}}{2} m_0(\xi).$$

(On pourra remarquer que (6.2) et (7.2) correspondent à la formule bien connue : $\sin x / x = \prod_{j=1}^{\infty} \cos(x/2^j)$).

Enfin, nous terminerons cette section en rappelant quelques exemples fondamentaux de fonctions de pré-échelle:

i) les fonctions ${}_N\varphi$ d'I. Daubechies [6] : ${}_N\varphi$ satisfait une équation à deux échelles ${}_N\varphi(x/2) = \sum_{k=0}^{2N-1} a_k\, {}_N\varphi(x-k)$ et les ${}_N\varphi(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$, forment une famille orthonormée; de plus les ${}_N\varphi$ sont règulières (de classe $C^{\alpha N}$ où α est une constante positive). Ces fonctions permettent la construction de bases d'ondelettes régulières à support compact.

ii) Les B-splines $B_k(x)$ définis par $B_1(x) = \chi_{[0,1]}(x)$ et $B_{k+1}(x) = B_k * B_1$. B_k est polynomiale par morceaux de degré $k-1$, de classe C^{k-2} et à support dans $[0,k]$.

iii) Le formalisme des analyses multi-résolution non-orthogonales de J. C. Feauveau [8] fournit également toute une classe de fonctions de pré-échelle et est décrit dans la section ci-après.

2. Analyse multi-résolution non orthogonale.

Pour définir une analyse multi-résolution non orthogonale, nous commencerons par introduire la définition suivante:

Definition 3. *Nous appellerons "fonctions d'échelle conjuguées" de* $L^2(\mathbb{R})$ *deux fonctions* g *et* g^* *de* $L^2(\mathbb{R})$ *à valeurs réelles telles que*

(8.1) $< g(x-k) \mid g^*(x-\ell) > = \delta_{k,\ell}$ *pour* $k, \ell \in \mathbb{Z}$.
(8.2) g *et* g^* *sont* C^ϵ *pour un* $\epsilon > 0$ *et à support compact.*
(8.3) $g(x/2)$ *est combinaison linéaire des* $g(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$.
(8.4) $g^*(x/2)$ *est combinaison linéaire des* $g^*(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$.
(8.5) $\hat{g}(0) = \hat{g}^*(0) = 1$.

Il est clair que (8.1) à (8.4) entraînent que g et g^* sont des fonctions de pré-échelle; en particulier, la formule sommatoire de Poisson appliquée à (8.1) et la propriété (5.2) entraînent que $\hat{g}(0)\hat{g}^*(0) = 1$ de sorte que (8.5) est une simple normalisation.

On sait que g et g^* engendrent deux analyses multi-résolution V_j

et V_j^* (Proposition 1). À l'analyse multi-résolution V_j on peut associer un processus d'approximations successives des fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ à l'aide de projecteurs P_j. Dans le formalisme de S. Mallat [14], P_j est le projecteur orthogonal sur V_j et le processus conduit à la décomposition des fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ sur des bases orthonormées d'ondelettes. Dans le formalisme de J. C. Feauveau [8] que nous adopterons ici, P_j est le projecteur oblique défini par

$$P_j f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} < f \mid g_{j,k}^* > g_{j,k} \ , \tag{9}$$

c'est le projecteur de L^2 sur V_j parallèlement à $(V_j^*)^\perp$. On parle alors d'analyse multi-résolution non orthogonale; le processus conduit à la décomposition de f sur une base bi-orthogonale d'ondelettes [5].

Proposition 3. *Soient g et g^* deux fonctions d'échelle conjuguées et (V_j) et (V_j^*) les analyses multi-résolution associées. Alors:*

(i) *Il existe deux polynômes trigonométriques (2π-périodiques) α et α^* tels que*

$$\hat{g}(2\xi) = \alpha(\xi)\hat{g}(\xi) \quad et \quad \hat{g}^*(2\xi) = \alpha^*(\xi)\hat{g}^*(\xi) \tag{10.1}$$

et on a alors

$$\hat{g}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} \alpha\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \quad et \quad \hat{g}^*(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} \alpha^*\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \tag{10.2}$$

$$\alpha(\xi)\bar{\alpha}^*(\xi) + \alpha(\xi+\pi)\bar{\alpha}^*(\xi+\pi) = 1. \tag{10.3}$$

(ii) *$X_0 = V_1 \cap (V_0^*)^\perp$ a une base de Riesz $\gamma(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$, et $X_0^* = V_1^* \cap (V_0)^\perp$ a une base de Riesz $\gamma^*(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$, où γ et γ^* vérifient:*

$$\hat{\gamma}(2\xi) = e^{-i\xi}\bar{\alpha}^*(\xi+\pi)\hat{g}(\xi) \quad et \quad \hat{\gamma}^*(2\xi) = e^{-i\xi}\bar{\alpha}(\xi+\pi)\hat{g}^*(\xi). \tag{11}$$

(iii) *Les $\gamma_{j,k}$ et les $\gamma_{j,k}^*$ forment un système bi-orthogonal ($j,k \in \mathbb{Z}$) et les $\gamma_{j,k}$ forment une base inconditionnelle de $L^2(\mathbb{R})$*

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}), \quad f = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} < f \mid \gamma_{j,k}^* > \gamma_{j,k} \tag{12.1}$$

$$\frac{1}{C} \| f \|_2 \leq \left\{ \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |< f \mid \gamma^*_{j,k} >|^2 \right\}^{1/2} \leq C \| f \|_2 \tag{12.2}$$

où C est une constante positive.

Les fonctions γ et γ^* seront appelées *ondelettes obliques* associées à (g, g^*) (on remarquera que $\int \gamma \, dx = \int \gamma^* dx = 0$). L'opérateur $Q_j = P_{j+1} - P_j$ est alors le projecteur de L^2 sur $X_j = V_{j+1} \cap (V_j^*)^\perp$ parallèlement à $(X_j^*)^\perp$ (où $X_j^* = V_{j+1}^* \cap V_j^\perp$) et se calcule par

$$Q_j f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} < f \mid \gamma^*_{j,k} > \gamma_{j,k} \, . \tag{13}$$

DÉMONSTRATION. Excepté (12.2), la proposition est élémentaire. (10.1) et (10.2) sont déjà connus (Proposition 2) et (10.3) provient directement de (8.1): la formule sommatoire de Poisson transforme (8.1) en :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{g}(\xi + 2k\pi)\bar{\hat{g}}^*(\xi + 2k\pi) = 1 \, ,$$

d'où (10.3) en considérant l'égalité en 2ξ, ξ et $\xi + \pi$.

Pour établir le point ii), on remarquera que l'appartenance des $\gamma(x - k)$ à X_0 est immédiate: X_0 est stable par translation entière (puisque V_1 et V_0^* le sont), $\gamma \in V_1$ et enfin $\gamma \in (V_0^*)^\perp$ car si $u \in V_1$, $\hat{u} = U(\xi/2)\hat{g}(\xi/2)$, et si $u^* \in V_1^*$, $\hat{u}^* = U^*(\xi/2)\hat{g}^*(\xi/2)$, alors

$$< u \mid u^* > = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (U(\xi)\bar{U}^*(\xi) + U(\xi + \pi)\bar{U}^*(\xi + \pi))d\xi.$$

Pour $u = \gamma$ et $u^* \in V_0^*$ on a $U(\xi) = e^{-i\xi}\bar{\alpha}^*(\xi + \pi)$ et $U^*(\xi) = \alpha(\xi + \pi)V(2\xi)$ où V est 2π-périodique, et donc $U(\xi)\bar{U}^*(\xi) + U(\xi + \pi)\bar{U}^*(\xi + \pi) = 0$. Un calcul analogue donne $\gamma^*(x - k) \in X_0^*$ et $< \gamma(x - k) \mid \gamma^*(x - \ell) > = \delta_{k,\ell}$. On note Q_0 le projecteur défini par (13) ; si $f \in V_1$ on a $\hat{f}(\xi) = V(\xi/2)\hat{g}(\xi/2)$ avec V 2π-périodique et un calcul élémentaire donne

$$\widehat{P_0 f}(\xi) = \left\{ V(\frac{\xi}{2})\, \bar{\alpha}^*(\frac{\xi}{2}) + V(\frac{\xi}{2} + \pi)\, \bar{\alpha}^*(\frac{\xi}{2} + \pi) \right\} \alpha(\frac{\xi}{2})\, \hat{g}(\frac{\xi}{2})$$

et

$$\widehat{Q_0 f}(\xi) = \left\{ V(\frac{\xi}{2})\,\alpha(\frac{\xi}{2}+\pi) - V(\frac{\xi}{2}+\pi)\,\alpha(\frac{\xi}{2}) \right\} \bar{\alpha}^*(\frac{\xi}{2}+\pi)\,\hat{g}(\frac{\xi}{2})$$

(par la formule sommatoire de Poisson) et donc que $f = P_0 f + Q_0 f$; si $f \in L^2$ on a $f = f - P_1 f + P_1 f$ avec $f - P_1 f \in (V_1^*)^\perp$ d'où $P_0(f - P_1 f) = Q_0(f - P_1 f) = 0$ de sorte que $P_0 P_1 = P_0$, $Q_0 P_1 = Q_0$ et $P_1 = P_0 + Q_0$. Comme $\mathrm{Im}(P_1 - P_0) = X_0$, les $\gamma(x-k)$ forment bien une base de Riesz de X_0, et de même $\mathrm{Ker}(P_1 - P_0) = (X_0^*)^\perp$ de sorte que les $\gamma^*(x-k)$ forment une base de Riesz de X_0^*. (Pour vérifier que $\mathrm{Ker}(P_1 - P_0) = (X_0^*)^\perp$, il suffit d'écrire $f = f - P_1 f + P_0 f + Q_0 f$ et donc $\mathrm{Ker}\,(P_1 - P_0) = (V_1^*)^\perp \oplus V_0$). Enfin si $(j,k) \neq (j',k')$ alors $< \gamma_{j,k} \mid \gamma^*_{j',k'} > = 0$: si $j = j'$ cela a déjà été vu, si $j > j'$ alors $\gamma^*_{j',k'} \in X^*_{j'} \subset V^*_{j'+1} \subset V_j^*$ et $\gamma_{j,k} \in X_j \subset (V_j^*)^\perp$. (12.1) est alors immédiat: la convergence de la série double dans L^2 est assurée par le fait que $\lim_{j\to+\infty} \| f - P_j f \|_2 = 0$ et que $\lim_{j\to-\infty} \| P_j f \|_2 = 0$ (ces limites étant immédiates par équicontinuité des P_j et densité de $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ et de $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} (V_j^*)^\perp$). L'inégalité (12.2) découlera du lemme suivant.

Lemme. *Si $\theta \in L^2$ est à support compact, de classe C^ϵ pour un $\epsilon > 0$, et si $\int \theta dx = 0$ alors il existe une constante $C(\theta)$ telle que*

$$\forall (\lambda_{j,k}) \in \ell^2(\mathbb{Z}^2), \quad \| \sum_{j,k} \lambda_{j,k}\theta_{j,k} \|_2 \leq C(\theta) \left(\sum_{j,k} |\lambda_{j,k}|^2 \right)^{1/2} .$$

Du lemme on déduit immédiatement que

$$\frac{1}{C(\gamma^*)} \left(\sum |\lambda_{j,k}|^2 \right)^{1/2} \leq \| \sum_{j,k} \lambda_{j,k}\gamma_{j,k} \|_2 \leq C(\gamma) \left(\sum_{j,k} |\lambda_{j,k}|^2 \right)^{1/2} .$$

Enfin pour démontrer le lemme il suffit de remarquer que

$$\sup_{j,\,k} \sum_{j',k'} |< \theta_{j,k} \mid \theta_{j',k'} >| \, 2^{(j-j')/2} < +\infty \ ;$$

en effet les hypothèses entraînent $|< \theta_{j,k} \mid \theta_{j',k'} >| \leq 2^{-|j-j'|(1/2+\epsilon)}$ et $< \theta_{j,k} \mid \theta_{j',k'} > = 0$ à j,k,j' fixés sauf pour un nombre fini d'indices

k' ($\leq M$ pour $j' \leq j$ et $\leq M2^{j'-j}$ pour $j' \geq j$ où M est une constante indépendante de j, j' et k). On a alors :

$$\| \sum_{j,k} \lambda_{j,k}\theta_{j,k} \|_2^2 \leq \left(\sum_{j,k} \sum_{j',k'} | \lambda_{j,k} |^2 | < \theta_{j,k} \mid \theta_{j',k'} > | \, 2^{(j-j')/2} \right)^{1/2}$$
$$\cdot \left(\sum_{j,k} \sum_{j',k'} | \lambda_{j',k'} |^2 | < \theta_{j,k} \mid \theta_{j',k'} > | \, 2^{(j'-j)/2} \right)^{1/2}$$

et le lemme est démontré.

3. La formule de commutation.

Les formules de dérivation (6.1) et d'intégration (7.1) sont particulièrement adaptées à l'analyse multi-résolution non orthogonale. En effet, on a le résultat suivant:

Proposition 4. *Soient g et g^* deux fonctions d'échelle conjuguées telles que g soit $C^{1+\epsilon}$ pour un $\epsilon > 0$. Alors il existe deux fonctions d'échelle conjuguées $\tilde{g}$ et $\tilde{g}^*$ telles que*

$$g'(x) = \tilde{g}(x) - \tilde{g}(x-1) \quad et \quad g^*(x+1) - g^*(x) = \tilde{g}^{*\prime}(x). \tag{14.1}$$

De plus les polynômes trigonométriques $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\alpha}^*$, les ondelettes obliques $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{\gamma}^*$, et les projecteurs obliques $\tilde{P}_j$ et $\tilde{Q}_j$ associés à $\tilde{g}$ et $\tilde{g}^*$ vérifient

$$\tilde{\alpha}(\xi) = \frac{2}{1+e^{-i\xi}}\,\alpha(\xi) \quad et \quad \tilde{\alpha}^*(\xi) = \frac{1+e^{i\xi}}{2}\,\alpha^*(\xi) \tag{14.2}$$

$$\tilde{\gamma}(x) = \frac{1}{4}\,\gamma'(x) \quad et \quad \tilde{\gamma}^{*\prime}(x) = -4\,\gamma^*(x) \tag{14.3}$$

$$\frac{d}{dx} \circ P_j = \tilde{P}_j \circ \frac{d}{dx} \quad (formule\ de\ commutation) \tag{14.4}$$

$$\frac{d}{dx} \circ Q_j = \tilde{Q}_j \circ \frac{d}{dx}\,. \tag{14.5}$$

La Proposition 4 est une conséquence directe des formules de dérivation et d'intégration. Démontrons par exemple (14.4):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(P_j f) &= \frac{d}{dx}\left(\sum_k < f \mid g^*_{j,k} > g_{j,k}\right) \\
&= \sum_k < f \mid g^*_{j,k} > 2^j(\tilde{g}_{j,k} - \tilde{g}_{j,k+1}) \\
&= \sum_k < f \mid 2^j(g^*_{j,k} - g^*_{j,k-1}) > \tilde{g}_{j,k} \\
&= \sum_k < f \mid -\frac{d}{dx}(\tilde{g}^*_{j,k}) > \tilde{g}_{j,k} \\
&= \sum_k < \frac{df}{dx} \mid \tilde{g}^*_{j,k} > \tilde{g}_{j,k} = \tilde{P}_j(\frac{df}{dx})\,.
\end{aligned}$$

Cette formule de commutation exprime qu'il est équivalent de dériver l'approximation ou d'approximer la dérivée, tandis que la formule de dérivation exprime que pour dériver l'approximation il suffit de faire une différence finie. Ces deux formules sont donc importantes numérique ment.

REMARQUE. Le fait que g' (dans la formule (14.1)) s'exprime comme une différence finie $\tilde{g}(x)-\tilde{g}(x-1)$ est "classique" : c'est une conséquence des conditions de Fix et Strang [10]. Par contre, que $\tilde{g}$ soit dans ce cas précis fonction d'échelle d'une analyse multi-résolution est une observation récente de G. Malgouyres [13] et la formule de commutation est originale. Sur les rapports entre dérivation et différence finie dans les analyses multi-résolution, le lecteur pourra consulter également les travaux de Micchelli [3].

4. Analyse multi-résolution de $L^2(\mathbb{R}^n)^n$ et fonctions vectorielles à divergence nulle.

Commençons par définir les analyses multi-résolution de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Il suffit de remplacer dans la Définition 1 $\mathbb{R}$ par $\mathbb{R}^n$ et $k \in \mathbb{Z}$ par $k \in \mathbb{Z}^n$. Une façon simple d'obtenir une analyse multi-résolution de $L^2(\mathbb{R}^n)$ est de partir de n analyses multi-résolution de $L^2(\mathbb{R})$ $(V_j^{(\epsilon)})_{j\in\mathbb{Z}}$, $1 \le \epsilon \le n$, et de définir V_j comme le complété dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ de $V_j^{(1)} \otimes \cdots \otimes V_j^{(n)}$. Si les $V_j^{(\epsilon)}$ sont associés à des fonctions d'échelle conjuguées $(g_\epsilon, g_\epsilon^*)$ alors on dispose d'un projecteur oblique P_j sur V_j défini par

$$(15.1) \qquad P_j f = (P_j^{(1)} \otimes \cdots \otimes P_j^{(n)}) f = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} < f \mid g_{j,k}^* > g_{j,k} \ ,$$

$$(15.2) \qquad g^* = g_1^* \otimes \cdots \otimes g_n^* \quad \text{et} \quad g = g_1 \otimes \cdots \otimes g_n \ .$$

De même on dispose d'un système bi-orthogonal d'ondelettes obliques. Plus précisément, on note $\Omega_n = \{0,1\}^n$ et $\Omega_n^* = \Omega_n \backslash \{(0,\cdots,0)\}$. Alors la décomposition $P_{j+1}^{(\epsilon)} = P_j^{(\epsilon)} + Q_j^{(\epsilon)}$ fournit la décomposition $P_{j+1} = P_j + \sum_{\omega\in\Omega_n^*} Q_{j,\omega}$ avec $Q_{j,\omega} = A_{j,\omega_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes A_{j,\omega_n}^{(n)}$ où $A_{j,0}^{(\epsilon)} = P_j^{(\epsilon)}$ et $A_{j,1}^{(\epsilon)} = Q_j^{(\epsilon)}$. On a alors

$$(16.1) \qquad Q_{j,\omega} f = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} < f \mid \gamma_{\omega,j,k}^* > \gamma_{\omega,j,k} \ ,$$

$$(16.2) \qquad \gamma_\omega^* = \theta_{1,\omega_1}^* \otimes \cdots \otimes \theta_{n,\omega_n}^* \quad \text{où} \quad \theta_{\epsilon,0}^* = g_\epsilon^* \quad \text{et} \quad \theta_{\epsilon,1}^* = \gamma_\epsilon^* \ ,$$

$$(16.3) \qquad \gamma_\omega = \theta_{1,\omega_1} \otimes \cdots \otimes \theta_{n,\omega_n} \quad \text{où} \quad \theta_{\epsilon,0} = g_\epsilon \quad \text{et} \quad \theta_{\epsilon,1} = \gamma_\epsilon \ .$$

Les $\gamma_{\omega,j,k}$, $\omega \in \Omega_n^*$, $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}^n$, forment alors une base inconditionnelle de $L^2(\mathbb{R}^n)$. A ces ondelettes obliques sont associées des transformations en ondelettes rapides (au sens de S. Mallat) dans la mesure où les filtres associés sont de réponse impulsionnelle finie (support compact des ondelettes) et séparables (construction de V_j par produit tensoriel).

Nous allons maintenant définir une analyse multi-résolution $(\vec{V}_j)$ de $L^2(\mathbb{R}^n)^n$ par le procédé suivant.

(i) (g_1, g_1^*) désignera un couple de fonctions d'échelle conjuguées dans $L^2(\mathbb{R})$ et on notera $V_j^{(1)}$ l'analyse multi-résolution, $P_j^{(1)}$ et $Q_j^{(1)}$ les projecteurs obliques, α_1 et α_1^* les polynômes trigonométriques et γ_1 et γ_1^* les ondelettes obliques associés.

(ii) On supposera g_1 de classe $C^{1+\epsilon}$. On notera (g_0, g_0^*) le couple de fonctions d'échelle conjuguées associé à (g_1, g_1^*) par la dérivation de g_1 et $V_j^{(0)}$, $P_j^{(0)}$, $Q_j^{(0)}$, α_0, α_0^*, γ_0, γ_0^* les espaces, projecteurs et fonctions associés.

(iii) Pour $\omega \in \Omega_n$ on notera $V_j^{(\omega)}$ l'analyse multi-résolution de $L^2(\mathbb{R}^n)$ définie par le produit tensoriel $V_j^{(\omega_1)} \otimes \cdots \otimes V_j^{(\omega_n)}$. En particulier on notera $V_j^{((0))}$ pour $V_j^{(\omega)}$ avec $\omega = (0, \cdots, 0)$ et $V_j^{((i))}$ pour $V_j^{(\omega)}$ avec $\omega = (\delta_{1,i}, \cdots, \delta_{n,i}) = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$, $(1 \leq i \leq n)$. Enfin $P_j^{((i))}$ sera la projecteur oblique sur $V_j^{((i))}$ $(0 \leq i \leq n)$.

(iv) L'analyse multi-résolution $\vec{V}_j$ est alors définie comme $\vec{V}_j = V_j^{((1))} \times \cdots \times V_j^{((n))}$. On dispose d'un projecteur oblique $\vec{P}_j$ sur $\vec{V}_j$ défini par

$$\vec{P}_j(\vec{f}) = (P_j^{((1))} f_1, \cdots, P_j^{((n))} f_n). \tag{17}$$

On a alors la propriété fondamentale suivante

Proposition 5. *Les analyses multi-résolutions $(\vec{V}_j)$ de $L^2(\mathbb{R}^n)^n$ et $(V_j^{((0))})$ de $L^2(\mathbb{R}^n)$ vérifient*

$$\vec{\nabla}(\vec{P}_j \vec{f}) = P_j^{((0))}(\vec{\nabla} \vec{f}) \quad (\textit{deuxième formule de commutation}). \tag{18}$$

La Proposition 5 est immédiate. Elle indique en particulier que les projecteurs $\vec{P}_j$ conservent la propriété de divergence nulle, c'est-à-dire que si $\vec{H} = \{\vec{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)^n) : \vec{\nabla} \cdot \vec{f} = 0\}$ alors les espaces fermés $\vec{V}_j \cap \vec{H}$ et $\vec{P}_j(\vec{H})$ coïncident.

On introduit alors les projecteurs $\vec{Q}_{j,\omega}$ définis pour $\omega \in \Omega_n^*$ par

$$\vec{Q}_{j,\omega}(\vec{f}) = (Q_{j,\omega}^{((1))} f_1, \cdots, Q_{j,\omega}^{((n))} f_n) \tag{19}$$

de sorte que $\vec{P}_{j+1} = \vec{P}_j + \sum_{\omega \in \Omega_n^*} \vec{Q}_{j,\omega}$. On a encore

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{Q}_{j,\omega}(\vec{f}) = Q_{j,\omega}^{((0))}(\vec{\nabla} \cdot \vec{f}) \tag{20}$$

de sorte que $\vec{H}$ se décompose sur les espaces $\vec{Q}_{j,\omega}(\vec{H})$, $j \in \mathbb{Z}$, $\omega \in \Omega_n^*$.

Nous avons donc défini un processus d'approximation sur $L^2(\mathbb{R}^n)^n$ tout entier $(\vec{P}_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ à l'aide d'ondelettes obliques $\vec{\gamma}_{\omega,i}$ ($\omega \in \Omega_n^*$, $1 \leq i \leq n$) et $\vec{\gamma}^*_{\omega,i}$ où

$$\vec{\gamma}_{\omega,i} = (0,\cdots,0,\gamma_\omega^{((i))},0,\cdots,0), \quad \vec{\gamma}^*_{\omega,i} = (0,\cdots,0,\gamma_\omega^{*((i))},0,\cdots,0)$$

et

$$\vec{Q}_{j,\omega}(\vec{f}) = \sum_{1\leq i\leq n}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} < \vec{f} \mid \vec{\gamma}^*_{\omega,i,j,k} > \vec{\gamma}_{\omega,i,j,k}\ .$$

En particulier, si $\vec{f} \in \vec{H}$, $\vec{P}_j(\vec{f})$ approxime $\vec{f}$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)^n$ quand $j \to +\infty$. Mais cette approximation se révèle interne à $\vec{H}$ grâce à la Proposition 5. Cette propriété peut également se décrire en termes d'ondelettes vecteurs à divergence nulle.

Théorème 1.

(i) *Il existe* $(n-1)(2^n-1)$ *fonctions vectorielles* $\vec{\Gamma}_{\omega,i} \in \vec{H}$ ($\omega \in \Omega_n^*$, $1 \leq i \leq n-1$) *à support compact telles que*

$$\text{(21)}\qquad \begin{cases} \vec{\Gamma}_{\omega,i} \in \vec{Q}_{0,\omega}(\vec{H}) \text{ et les } \vec{\Gamma}_{\omega,i}(x-k),\ 1 \leq i \leq n-1,\ k \in \mathbb{Z}^n, \\ \text{forment une base de Riesz de } \vec{Q}_{0,\omega}(\vec{H}). \end{cases}$$

(ii) *De plus, toute fonction vectorielle* $\vec{f} \in \vec{H}$ *se décompose de manière unique en*

$$\text{(22.1)}\qquad \vec{f} = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{\omega\in\Omega_n^*}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} C_{\omega,i,j,k}(\vec{f})\,\vec{\Gamma}_{\omega,i,j,k}$$

et on a pour une constante $C > 0$ *indépendante de* $\vec{f}$,

(22.2)

$$\frac{1}{C}\parallel \vec{f} \parallel_{\vec{H}} \leq \left\{ \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{\omega\in\Omega_n^*}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \mid C_{\omega,i,j,k}(\vec{f}) \mid^2 \right\}^{1/2} \leq C \parallel \vec{f} \parallel_{\vec{H}}\ .$$

(iii) *Il existe* $(n-1)(2^n-1)$ *fonctions* $\vec{\theta}_{\omega,i} \in (L^2(\mathbb{R}^n))^n$ ($\omega \in \Omega_n^*$, $1 \leq i \leq n-1$) *à support compact telles que*

$$\text{(23)}\qquad \forall \vec{f} \in \vec{H},\ \forall j,\ \forall k,\quad C_{\omega,i,j,k}(\vec{f}) = < \vec{f} \mid \vec{\theta}_{\omega,i,j,k} >\ .$$

(iv) *Enfin si* g_1 *est de classe* $C^{p+1+\epsilon}$ *pour* $p \in \mathbb{N}$ *alors :*

$$\vec{f} \in \vec{H} \cap (H^p(\mathbb{R}^n))^n \qquad \textit{si et seulement si}$$

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{\omega\in\Omega_n^*} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} (1+4^{jp}) \mid C_{\omega,i,j,k}(\vec{f}) \mid^2 < +\infty . \tag{24}$$

DÉMONSTRATION. Il est immédiat que toute fonction de $L^2(\mathbb{R}^n)^n$ se décompose en $\vec{f} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{\omega\in\Omega_n^*} \vec{Q}_{j,\omega}(\vec{f})$ et que

$$\| \vec{f} \|_{L^2(\mathbb{R}^n)^n} \approx \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{\omega\in\Omega_n^*} \| \vec{Q}_{j,\omega}(\vec{f}) \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)^n} \right)^{1/2}$$

tandis que

$$\| \vec{f} \|_{H^p(\mathbb{R}^n)^n} \approx \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{\omega\in\Omega_n^*} (1+4^{jp}) \| \vec{Q}_{j,\omega}\vec{f} \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)^n} \right)^{1/2} .$$

Cela se vérifie composante par composante; il s'agit alors pour l'estimation de la norme L^2 de $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ en fonction des normes L^2 des $Q_{j,\omega}^{((i))} f$ (i fixé) d'une simple généralisation de la Proposition 3. Pour la norme H^p, remarquons que $P_j^{((i))}$ est défini par produit tensoriel de projecteurs non-dimensionnels; la formule de commutation (14.4) et l'estimation (12.2) nous assure que, pour une certaine analyse multi-résolution $V_j^{i,p,\ell}$, on a

$$\frac{\partial^p}{\partial^p x_\ell} Q_{j,\omega}^{((i))} f = Q_{j,\omega}^{i,p,\ell}(\frac{\partial^p}{\partial x_\ell} f)$$

et donc

$$\| \frac{\partial^p}{\partial^p x_\ell} f \|_{L^2} \approx \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{\omega\in\Omega_n^*} \| \frac{\partial^p}{\partial^p x_\ell} Q_{j,\omega}^{((i))} f \|_2^2 \right)^{1/2} .$$

Mais il est clair que

$$\| \frac{\partial^p}{\partial^p x_\ell} Q_{j,\omega}^{((i))} f \|_2^2 \leq C 4^{jp} \| Q_{j,\omega}^{((i))} f \|_2^2$$

d'une part et que d'autre part, d'après (14.3), si $\omega_\ell = 1$, alors

$$\| Q_{j,\omega}^{((i))} f \|_2^2 \approx 4^{jp} \| \frac{\partial^p}{\partial^p x_\ell} Q_{j,\omega}^{((i))} f \|_2^2,$$

d'où le contrôle de $\| \vec{f} \|_{H^p(\mathbb{R}^n)^n}$.

Pour démontrer le théorème, il suffit donc d'établir (21) (et (23)). Puisque $\omega \neq (0, \cdots, 0)$ il existe un indice i_0 tel que $\omega_{i_0} = 1$. Alors on a pour $i \neq i_0$:

$$Q_{0,\omega}^{((i))} f_i = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} < f_i \mid \gamma_{\omega,0,k}^{*((i))} > \gamma_{\omega,0,k}^{((i))},$$

où $\gamma_\omega^{((i))} = \theta_{\delta_{1,i},\omega_1} \otimes \cdots \otimes \theta_{\delta_{n,i},\omega_n}$. En particulier $\theta_{\delta_{i_0,i},\omega_{i_0}} = \theta_{0,1} = \gamma_0$. Or par construction $\gamma_0 = \frac{d}{dx}(\frac{1}{4}\gamma_1)$. On définit alors $\vec{\Gamma}_{\omega,i}$ pour $i \neq i_0$ par:

$$\vec{\Gamma}_{\omega,i} = (\Gamma_{\omega,i,1}, \cdots, \Gamma_{\omega,i,n})$$

où $\Gamma_{\omega,i,j} = 0$ si $j \notin \{i, i_0\}$, $\Gamma_{\omega,i,i} = \gamma_\omega^{((i))}$ et $\Gamma_{\omega,i,i_0} = \eta_1 \otimes \cdots \otimes \eta_n$ avec $\eta_j = \theta_{\delta_{j,i},\omega_j}$ si $j \notin \{i, i_0\}$, $\eta_{i_0} = -1/4\gamma_1$ et $\eta_i = -\frac{d}{dx}(\theta_{1,\omega_i})$ (et donc $\eta_i = g_0(x-1) - g_0(x)$ si $\omega_i = 0$ et $\eta_i = -4\gamma_0$ si $\omega_i = 1$) et on pose $\vec{\theta}_{\omega,i} = \vec{\gamma}_\omega^{*((i))}$.

Il est clair que par construction $\vec{\nabla}\vec{\Gamma}_{\omega,i} = 0$ et que $\vec{\Gamma}_{\omega,i} \in \vec{Q}_{0,\omega}\vec{H}$. De plus

$$\vec{Q}_{0,\omega}\vec{f} = \sum_{i \neq i_0} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} < \vec{f} \mid \vec{\theta}_{\omega,i,0,k} > \vec{\Gamma}_{\omega,i,0,k} + \vec{R}_\omega(\vec{f}).$$

$\vec{R}_\omega(\vec{f})$ a toutes ses composantes sauf la i_0-ème nulles ; de plus si $\vec{f} \in \vec{H}$ alors $\vec{R}_\omega(\vec{f}) \in \vec{H}$ mais cela entraîne $\vec{R}_\omega(\vec{f}) = \vec{0}$. Enfin les $\vec{\Gamma}_{\omega,i,0,k}$ forment une base de Riesz de $\vec{Q}_{0,\omega}\vec{H}$ de manière évidente puisqu'on dispose d'un système bi-orthogonal à support compact. Le théorème est donc démontré.

5. Etude locale des fonctions à divergence nulle.

Notre construction peut s'adapter à l'étude locale de fonctions à divergence nulle. Pour cela, nous pouvons construire une analyse multi-résolution sur le cube $[0,1]^n$ qui vérifie "la propriété de commutation", ce qui nous autorise à étudier les fonctions vectorielles à divergence nulle sur le cube.

La construction sera précisée dans [11] car elle est assez technique. On part d'une analyse multi-résolution d'I. Daubechies (avec une base orthonormale ${}_N\varphi(x-k)$ de V_0) $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$. Suivant Y. Meyer, on note $V_j([0,1])$ la restriction à $[0,1]$ des fonctions de V_j [16]. De même on note $V_j^{(d)}([0,1])$ l'espace des restrictions à $[0,1]$ des dérivées d-ièmes des fonctions de V_j et $V_j^{(-d)}([0,1])$ celui de leurs primitives d-ièmes. Alors le produit scalaire de $L^2([0,1])$ introduit un crochet de dualité entre $V_j^{(d)}([0,1])$ et $V_j^{(-d)}([0,1]) \cap H_0^d([0,1])$ et on obtient alors un projecteur oblique $P_j^{(d)}$ de $L^2([0,1])$ sur $V_j^{(d)}([0,1])$ parallèlement à $\left\{V_j^{(-d)}([0,1]) \cap H_0^d([0,1])\right\}^{\perp}$. La propriété principale de $P_j^{(d)}$ est la formule suivante

$$(25) \quad \frac{d}{dx} \circ P_j^{(d)} = P_j^{(d+1)} \circ \frac{d}{dx} \quad (\textit{troisième formule de commutation}),$$

la dérivation ayant lieu dans $]0,1[$. Les bases orthonormées d'ondelettes sur l'intervalle de Y. Meyer deviennent alors des bases d'ondelettes obliques. Celles-ci peuvent être décrites assez précisément et une construction analogue à celle décrite en IV permet alors de décrire les fonctions à divergence nulle dans $]0,1[^n$.

Bibliographie.

[1] Battle, G., Federbush P. A note on divergence-free vector wavelets. Preprint, 1991.

[2] Battle, G., Federbush P. Divergence-free vector wavelets, Preprint 1991.

[3] Cavaretta, A., Dahmen, W., and Micchelli C. Stationary subdivision, à paraître aux *Memoirs Amer. Math. Soc.*

[4] Cohen, A. Thèse, Paris IX, 1990.

[5] Cohen, A, Daubechies, I., and Feauveau, J.C. Bi-orthogonal bases of compactly supported wavelets. Preprint, 1990.

[6] Daubechies, I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure Appl. Math.* **46** (1988), 909-996.

[7] Daubechies, I., Lagarias, J. Two-scale difference equations. A paraître au *SIAM J. Math. Analysis.*

[8] Feauveau, J.C. Thèse, Paris XI, 1990.

[9] Federbush, P. Local strong solution of the Navier-Stokes equations in terms of local estimates. Preprint, 1991.

[10] Fix, G. and Strang, G. Fourier analysis of the finite element method in Ritz-Galerkin theory. *Studies Appl. Math.* **48** (1969), 265-273.

[11] Jouini, A. and Lemarie-Rieusset, P.G. Analyses multi-résolution bi-orthogonales sur l'intervalle et applications, 1991. Soumis aux *Ann. Inst. H. Poincaré, Analyse non linéaire.*

[12] Lemarie-Rieusset, P.G. Fonctions à support compact dans les analyses multi-résolutions. *Revista Mat. Iberoamericana* **7** (1991), 157-182.

[13] Malgouyres, G. Communication personnelle.

[14] Mallat, A. A theory for multi-resolution signal decomposition: the wavelet representation. *IEEE PAMI* **11** (1989), 674-693.

[15] Meyer, Y. *Ondelettes et opérateurs,* Tome I. Paris, Hermann, 1990.

[16] Meyer, Y. Ondelettes sur l'intervalle. *Revista Matematica Iberoamericana* **7** (1991), 115-134.

Recibido: 21 de junio de 1991

Pierre Gilles Lemarie-Rieusset
CNRS UA D 0757
Université de Paris-Sud
Mathématiques - Bâtiment 425
91405 ORSAY Cedex
FRANCE