

Régularité des bases d'ondelettes et mesures ergodiques

A. Cohen et J.P. Conze

Résumé. Nous reprenons la construction des bases orthonormées d'ondelettes à partir des filtres miroirs en quadrature telle qu'elle apparaît dans [4]. Nous montrons que leur régularité est liée à une mesure invariante pour la transformation $\omega \rightarrow 2\omega \bmod -2\pi$. Cette méthode permet d'obtenir le facteur exact qui relie asymptotiquement la régularité des ondelettes construites dans [4] à la taille de leur support.

Introduction.

Une étape importante de la construction d'analyses multi-échelle basée sur une "fonction d'échelle" ϕ (voir [4],[6],[7]) est l'étude de la régularité de ϕ . Cette fonction ϕ est déterminée par une équation fonctionnelle, et sa régularité est reliée à l'ordre de grandeur d'un produit infini exprimant sa transformée de Fourier.

Nous montrons dans ce travail comment l'étude de ce produit infini peut être interprétée en terme de mesure invariante pour un système dynamique (ici la transformation $\omega \rightarrow 2\omega \bmod -2\pi$). Dans le cas particulier des bases orthonormées d'ondelettes construites dans [4], cette méthode permet d'évaluer exactement le comportement de la transformée de Fourier de ϕ , et par là d'obtenir le facteur qui relie asymp-

totiquement la régularité de ces ondelettes à la taille de leur support.

Les résultats obtenus ici précisent les estimations obtenues dans [2]. D'autres méthodes d'évaluation de la régularité des fonctions d'échelle ont été développées ([5],[3]).

Nous remercions E. Lesigne qui nous a permis de simplifier la démonstration initiale du Théorème 4, grâce à l'utilisation du Lemme 1, et I. Daubechies, Y. Guivarc'h et A. Raugi pour des discussions fructueuses.

1. Rappels sur la construction d'analyses multi-échelle.

Depuis les travaux de Haar, on sait construire des bases orthonormées de $L^2(\mathbb{R})$ de la forme

$$(1) \quad \{\psi_k^j\}_{j,k \in \mathbb{Z}} = \{2^{j/2} \psi(2^j x - k)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$$

engendrées par une fonction "mère" ψ , à laquelle on applique des translations entières et des changements d'échelle. Le système de Haar est engendré par la fonction discontinue

$$(2) \quad \psi(x) = \chi_{]0,1/2]} - \chi_{]1/2,1]}.$$

Au cours des dernières années, la construction de bases plus régulières de cette forme a été systématisée par Y. Meyer [7], S. Mallat [6] et I. Daubechies [4] dans le cadre de la théorie des ondelettes. Dans tous les cas, on part d'une analyse multi-résolution, c'est-à-dire d'une suite d'espaces emboîtés $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ formant une approximation de l'espace $L^2(\mathbb{R})$,

$$(3) \quad \{0\} \rightarrow \dots \subset V_j \subset V_{j+1} \dots \rightarrow L^2(\mathbb{R})$$

telle que l'on ait

$$(4) \quad f(\cdot) \in V_j \iff f(2 \cdot) \in V_{j+1} \iff f(2^{-j} \cdot) \in V_0,$$

et telle que V_0 soit engendré par une famille orthonormée de la forme $\{\phi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, obtenue par translations entières d'une fonction ϕ , appelée fonction d'échelle.

La fonction d'échelle satisfait alors une équation fonctionnelle qui exprime l'inclusion de V_0 dans V_1

$$(5) \quad \phi(x) = 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \phi(2x - n).$$

En définissant

$$(6) \quad \psi(x) = 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n h_{1-n} \phi(2x - n),$$

on obtient une ondelette: la famille $\{\psi(\cdot - k)\}$ est orthonormée et engendre le complément orthogonal W_0 de V_0 dans V_1 . Par translations entières et changement d'échelle, la famille $\{\psi_k^j\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ définie par (1) à partir de ψ fournit une base hilbertienne de l'espace $L^2(\mathbb{R})$ tout entier.

L'équation (5) fait apparaître la suite des coefficients $\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Ceux-ci permettent de construire la fonction d'échelle ϕ en utilisant la série de Fourier m_0 associée à $\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$

$$(7) \quad m_0(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n e^{-in\omega}.$$

On a, en notant $\hat{\phi}$ la transformée de Fourier de ϕ ,

$$(8) \quad \hat{\phi}(2\omega) = m_0(\omega) \hat{\phi}(\omega),$$

et on peut écrire, si m_0 est régulière et égale à 1 en 0,

$$(9) \quad \hat{\phi}(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} m_0(2^{-k}\omega).$$

Dans la pratique, on part de la donnée du filtre discret h , de fonction de transfert m_0 , qui apparaît dans l'algorithme rapide de calcul des coefficients du développement en ondelettes. On engendre par la formule (9) une fonction d'échelle ϕ . Une condition nécessaire d'orthonormalité de la famille $\{\phi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est la relation

$$(10) \quad |m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2 = 1,$$

qui signifie que m_0 est un filtre miroir en quadrature au sens de [1].

Nous allons maintenant chercher à caractériser la régularité de ϕ (celle de ψ s'en déduisant), à partir des propriétés de m_0 .

2. Un critère fréquentiel de régularité.

Définissons, pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$, dans la classe des fonctions intégrables sur \mathbb{R} , trois sous-espaces fonctionnels:

$$\begin{aligned} C^\alpha &= \{ \phi : \text{höldérienne d'exposant } \alpha \}, \\ \mathcal{R}^\alpha &= \{ \phi : (1 + |\omega|^\alpha) |\widehat{\phi}(\omega)| \in L^1(\mathbb{R}) \}, \\ \mathcal{D}^\alpha &= \{ \phi : (1 + |\omega|^\alpha) |\widehat{\phi}(\omega)| \in L^\infty(\mathbb{R}) \}. \end{aligned}$$

On a clairement, pour $\varepsilon > 0$, $\mathcal{D}^{\alpha+1+\varepsilon} \subset \mathcal{R}^\alpha \subset C^\alpha$. D'autre part, si la suite $\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est finie, ϕ est à support compact, et l'on a également l'inclusion $C^\alpha \subset \mathcal{D}^\alpha$.

Si m_0 est une fonction régulière, 2π -périodique, satisfaisant (10) et valant 1 à l'origine, on peut opérer la factorisation

$$(11) \quad m_0(\omega) = \left(\frac{1 + e^{i\omega}}{2} \right)^N p(\omega),$$

où N est le degré d'annulation de m_0 en π . On a alors, d'après (9),

$$(12) \quad \begin{aligned} |\widehat{\phi}(\omega)| &= \left| \prod_{k=1}^{\infty} (\cos(2^{-k-1}\omega))^N p(2^{-k}\omega) \right| \\ &= \left| \frac{2 \sin(\omega/2)}{\omega} \right|^N \prod_{k=1}^{\infty} |p(2^{-k}\omega)|. \end{aligned}$$

Posons $u(\omega) = |p(\omega)|$, et

$$u_n(\omega) = \prod_{k=1}^n u(2^{-k}\omega).$$

Pour contrôler la croissance du deuxième facteur $\prod_1^\infty p(2^{-k}\omega)$ dans (12), introduisons les suites (B_n) et (b_n) définies par

$$(13) \quad B_n = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} u_n(\omega), \quad b_n = \frac{\log B_n}{n \log 2}, \quad n \geq 1.$$

La suite (b_n) converge, par sous-additivité, vers la quantité $b = \inf_{n \geq 1} b_n$ que nous appellerons "exposant critique" du filtre $m_0(\omega)$.

Les deux résultats suivants [2] permettent de préciser la régularité de ϕ à partir de ces données.

Théorème 1. *Si $\alpha < N - b$, alors ϕ est dans \mathcal{D}^α , $\mathcal{R}^{\alpha-1}$ et $C^{\alpha-1}$.*

PREUVE. Il suffit de montrer que ces propriétés sont vérifiées si $\alpha < N - b_n$, pour un n quelconque.

Notons $[x]$ la partie entière d'un réel x . Écrivons le produit $\Pi_1(\omega)$ sous la forme

$$(14) \quad \Pi_1(\omega) = \prod_{k=1}^{[\log_2 \omega]} p(2^{-k}\omega) \prod_{k=[\log_2 \omega]+1}^{\infty} p(2^{-k}\omega).$$

Puisque $p(\omega)$ est régulière et vaut 1 à l'origine, on peut majorer le deuxième facteur par une constante. En divisant le premier facteur en paquets de taille n , on obtient

$$(15) \quad |\Pi_1(\omega)| \leq C (1 + |\omega|)^{b_n}.$$

D'après (12) et (15), ϕ est dans \mathcal{D}^α si α est inférieur à $N - b_n$.

Dans le théorème suivant, nous ferons l'hypothèse

$$(16) \quad |p(\pi)| > |p(0)| = 1,$$

toujours vérifiée dans la pratique. Nous utiliserons également l'orthonormalité de la famille $\{\phi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ qui se traduit par l'identité

$$(17) \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\omega + 2k\pi)|^2 = 1.$$

Théorème 2. *Sous les conditions (16) et (17), si $\alpha > N - b$, alors ϕ n'est pas dans \mathcal{D}^α . En particulier, si ϕ est à support compact, elle n'est pas höldérienne d'ordre α .*

PREUVE. On considère la suite (ω_n) des points tels que

$$u_n(\omega_n) = B_n = \sup_{\omega} \left| \prod_{k=1}^n p(2^{-k}\omega) \right|.$$

L'hypothèse (16) permet de montrer que $2^{-n}|\omega_n|$ reste supérieur à une constante $C_1 > 0$. D'autre part, il est possible de choisir ω_n tel que $|\Pi_1(\omega_n)|$ reste supérieur à une constante $C_2 > 0$. En effet, l'identité (17) permet de supposer $|\widehat{\phi}(\omega_n)| > C_3$, quitte à remplacer ω_n par $\omega_n + 2k\pi$.

On a par conséquent

$$(18) \quad |\Pi_1(2^n \omega_n)| \geq C_4 (1 + |2^n \omega_n|)^{b_n}.$$

La suite $2^n \omega_n$ semble convenir pour montrer que ϕ n'est pas dans \mathcal{D}^α si $\alpha > N - b$. Il convient cependant d'éviter l'annulation du premier facteur, en $\sin \omega$, dans (12). Pour cela, on remarque (en utilisant la convergence de la suite (b_n)), que la dérivée $u'_n(\omega)$ peut être majorée selon: $|u'_n(\omega)| \leq C B_n$. Ceci permet d'affirmer que (18) est vérifiée sur un intervalle de taille constante entourant $2^n \omega_n$. On évite ainsi les zéros de $\sin(\omega/2)$ et le théorème est démontré.

Notons qu'une variante de la démonstration précédente peut être basée sur les résultats de la Section 3, qui permettent de remplacer la suite (ω_n) par un point fixé ω_0 générique pour une mesure invariante par la transformation $T : \omega \rightarrow 2\omega \pmod{2\pi}$; il est alors possible de s'affranchir des conditions (16) et (17). Néanmoins, la méthode précédente couvre le cas d'application que nous avons en vue (Section 4).

Les deux résultats précédents montrent l'intérêt de l'exposant critique b qu'il convient d'estimer aussi précisément que possible. Nous utilisons à cet effet des méthodes de théorie ergodique appliquées à la transformation T .

3. Exposant critique et mesures invariantes.

Dans cette section, nous relierons l'étude d'un produit infini de la forme $\prod_1^\infty u(\omega/2^n)$ à un problème de mesure invariante en théorie ergodique. Reformulons d'abord le problème sous une forme plus générale, d'abord pour une fonction u régulière positive quelconque, puis pour une transformation continue sur un compact.

Soit u une fonction continue périodique, positive ou nulle, de période 2π , lipschitzienne en 0, telle que $u(0) = 1$. Considérons, comme

dans la Section 2, les produits

$$(19) \quad u_n(\omega) = \prod_{k=1}^n u(\omega/2^k),$$

$$(20) \quad w(\omega) = \lim_n u_n(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} u(\omega/2^j).$$

Nous appellerons exposant uniforme du produit w le nombre α_∞ défini par

$$(21) \quad \alpha_\infty = \inf\{\alpha : \text{il existe } M \text{ vérifiant } w(\omega) \leq M(1 + |\omega|)^\alpha\}.$$

Comme précédemment, la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ définie par

$$b_n = \frac{1}{n} \sup_{\omega} \log_2 u_n(\omega)$$

converge vers une limite b égale à $\inf_n b_n$.

Nous allons examiner la relation entre b et l'exposant uniforme défini par (21). On a

$$w(\omega) = w(2^{-n}\omega) u_n(\omega),$$

où $n = n(\omega)$ est tel que $2^{-n}|\omega| \in]\pi/2, \pi]$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, on ait $b_n < b + \varepsilon$. Soit A tel que, pour $|\omega| \geq A$, on ait $n(\omega) \geq n_0$. En majorant w sur le compact $[-A, A]$, on obtient la majoration

$$w(\omega) \leq C'' |\omega|^{b+\varepsilon}.$$

D'où la majoration $\alpha_\infty \leq b$.

La majoration inverse $b \leq \alpha_\infty$ résulte immédiatement de l'inégalité

$$u_n(2^n \omega) w(\omega) \leq M 2^{n\alpha} (1 + |\omega|)^\alpha,$$

dans le cas où la fonction u ne s'annule pas. Dans le cas général, on peut encore conclure en utilisant les résultats de la suite de cette section (Remarque 2).

De cette façon, l'étude de l'exposant uniforme du produit infini w est ramenée à celle de b , et nous devons tenter d'évaluer, pour une fonction u donnée, cette quantité. En tenant compte de la périodicité de u , on se ramène à l'étude d'un "produit ergodique", en observant que

$$\sup_{\omega} u_n(\omega) = \sup_{\omega} u_n(2^n \omega) = \sup_{\omega} \prod_1^n u(2^k \omega).$$

Ceci conduit donc à étudier, dans le cas particulier de la transformation $\omega \rightarrow 2\omega \text{ mod-}2\pi$, le comportement de la borne supérieure d'un produit ergodique. Dans le paragraphe suivant, nous allons montrer, dans le cadre général des transformations, que le comportement asymptotique de la borne supérieure d'un produit ergodique est déterminé par une mesure invariante.

Mesure invariante maximisant l'intégrale d'une fonction.

Considérons la situation générale d'une transformation $T : x \rightarrow Tx$, continue d'un espace métrique compact dans lui-même. Notons \mathcal{I} le convexe compact formé des mesures de probabilité sur X invariante par T . Fixons une fonction g continue sur X . Nous notons $\mu(g)$ l'intégrale $\int g(x) d\mu(x)$. Les exemples discutés dans la Section 2 correspondent à $g = \log_2 |p|$ et $T : x \rightarrow 2x \text{ mod-}2\pi$.

Comme précédemment, la sous-additivité de la suite $(\sup_x \sum_0^{n-1} g(T^k x))_{n \in \mathbb{N}}$ implique la convergence vers une limite, notée $\beta(g)$, de la suite $(\beta_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ définie par

$$\beta_n = \frac{1}{n} \sup_x \sum_0^{n-1} g(T^k x).$$

Théorème 3. *Pour toute mesure $\mu \in \mathcal{I}$, on a $\beta(g) \geq \mu(g)$. La borne supérieure $\beta(g)$ est atteinte pour une mesure invariante ergodique μ_0 et il existe x_0 dans X tel que*

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} g(T^k x_0) = \beta(g) = \mu_0(g).$$

PREUVE. Si μ est une mesure invariante, on a

$$\mu(g) = \int \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} g(T^k x) d\mu(x) \leq \beta_n ,$$

d'où l'inégalité $\mu(g) \leq \beta(g)$.

Soit (x_n) une suite dans X telle que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g(T^k x_n) = \beta_n.$$

Par le procédé diagonal, on peut construire une suite (n_j) telle que, pour toute fonction f continue sur X , la suite

$$\frac{1}{n_j} \sum_{k=0}^{n_j-1} f(T^k x_{n_j})$$

converge vers une limite notée $\mu_0(f)$. La forme linéaire $f \rightarrow \mu_0(f)$ définit une mesure invariante telle que $\mu_0(g) = \beta(g)$. Si μ_0 n'était pas ergodique, les mesures ergodiques intervenant dans sa décomposition vérifieraient encore cette égalité. On peut donc supposer μ_0 ergodique. L'existence d'un point x_0 tel que

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g(T^k x_0) = \beta(g)$$

résulte alors du théorème ergodique de Birkhoff appliqué à μ_0 .

REMARQUES. 1) On note que la mesure μ_0 maximisant l'intégrale de g vérifie la condition

$$\lim_n \left(\int \prod_1^n \exp(g(T^k x)) d\mu_0(x) \right)^{1/n} = \exp(\beta(g)),$$

et on peut penser que cette mesure maximisante, pour une classe convenable de fonctions g et de transformations T , est concentrée sur un très petit sous-ensemble de X .

Nous allons voir que, pour une famille de fonctions $g = \log_2 |p|$ fournies par la construction des ondelettes orthogonales donnée par I. Daubechies [4], μ_0 est une mesure portée par des points périodiques pour la transformation $T : x \rightarrow 2x \text{ mod-}2\pi$. Une question est de savoir

si cette propriété est vérifiée plus généralement pour des transformations dilatantes du type de T et pour une classe assez large de fonctions g .

2) Il est possible d'étendre les résultats précédents au cas d'une fonction g qui est le logarithme d'une fonction u régulière ≥ 0 , u pouvant s'annuler.

4. Etude d'un exemple: les ondelettes orthogonales à support compact.

Nous considérons dans ce qui suit la transformation $T : x \rightarrow 2x \text{ mod-}2\pi$, et montrons que, dans le cas de la famille des ondelettes orthogonales construites par I. Daubechies, on a exactement $\beta(\log_2(|p|)) = \log_2(|p(2\pi/3)|)$.

Le résultat suivant ramène cette démonstration à la preuve d'une inégalité portant sur $\log_2 |p|$. Dans la preuve du Lemme 1, la notation $[a, b[$ désigne l'arc du cercle unité décrit du point a vers le point b suivant le sens trigonométrique.

Lemme 1. *Soit μ une mesure de probabilité invariante par T sur le cercle unité identifié à $[0, 2\pi[$. Si g est une fonction continue telle que, l'on ait*

$$\begin{cases} g(x) + g(2x) \leq 2, & \text{sur } [2\pi/3, 4\pi/3], \\ g(x) \leq 1, & \text{sur } [0, 2\pi/3], \text{ et sur } [4\pi/3, 2\pi] \end{cases}$$

alors, on a $\mu(g) \leq 1$.

PREUVE. Nous avons

$$\begin{aligned} \mu(g) &= \int_{[4\pi/3, 2\pi/3[} g(x) d\mu - \int_{[2\pi/3, 4\pi/3[} g(2x) d\mu \\ &\quad + \int_{[2\pi/3, 4\pi/3[} (g(x) + g(2x)) d\mu. \end{aligned}$$

On a $T^{-1}([4\pi/3, 2\pi/3[) = [5\pi/3, \pi/3[\cup [2\pi/3, 4\pi/3[$. En utilisant l'invariance de la mesure, on peut donc écrire

$$\int_{[4\pi/3, 2\pi/3[} g(x) d\mu = \int_{[5\pi/3, \pi/3[} g(2x) d\mu + \int_{[2\pi/3, 4\pi/3[} g(2x) d\mu.$$

D'où

$$\mu(g) = \int_{[2\pi/3, 4\pi/3[} (g(x) + g(2x)) d\mu + \int_{[5\pi/3, \pi/3[} g(2x) d\mu.$$

Comme $x \in [5\pi/3, \pi/3[$ implique $g(2x) \leq 1$, en utilisant

$$\mu([2\pi/3, 4\pi/3]) = \mu(T^{-1}([2\pi/3, 4\pi/3]) = \mu([\pi/3, 2\pi/3] \cup [4\pi/3, 5\pi/3]),$$

on obtient

$$\begin{aligned} \mu(g) &\leq \mu([2\pi/3, 4\pi/3]) \\ &\quad + \mu([\pi/3, 2\pi/3] \cup [4\pi/3, 5\pi/3]) \\ &\quad + \mu([5\pi/3, \pi/3]) = 1. \end{aligned}$$

Construction explicite des ondelettes régulières à support compact.

Rappelons d'abord la méthode de construction d'ondelettes orthogonales de I. Daubechies [4]. La discussion de la Section 2 a montré que la construction d'une fonction ϕ à support compact engendrant une base d'ondelettes orthogonales s'obtient à partir d'un polynôme trigonométrique m_0 vérifiant la relation (10). Nous avons écrit m_0 sous la forme

$$(22) \quad m_0(\omega) = \left(\frac{1 + e^{i\omega}}{2}\right)^N p(\omega),$$

où N est le degré d'annulation de m_0 en π .

Le polynôme $|p(\omega)|^2$ peut s'écrire comme un polynôme P en $\sin(\omega/2)^2$. En posant $y = \cos(\omega/2)^2$, l'équation (10) devient

$$(23) \quad y^N P(1 - y) + (1 - y)^N P(y) = 1,$$

avec $P \geq 0$ sur $[0, 1]$.

Inversement, à partir d'un polynôme P vérifiant ces conditions, on peut construire un polynôme trigonométrique p et donc une solution m_0 de (10) de la forme (22).

On est ainsi conduit à construire un polynôme P solution de l'équation (23). Un calcul simple montre qu'une solution particulière P_N de (23), de degré $< N$, est donnée par

$$(24) \quad P_N(y) = \sum_{k=0}^{N-1} C_{N-1+k}^k y^k.$$

Avec la condition de degré, la solution est unique, les coefficients du polynôme cherché étant déterminés complètement par une formule de récurrence. On obtient la solution générale de (23) en ajoutant à P_N un polynôme R de degré $\geq N$ de la forme $R(y) = y^N R_1(y)$, où $R_1(1/2 - y)$ est un polynôme impair. Nous nous limiterons à l'étude des polynômes P_N .

Calcul de l'exposant critique pour les polynômes P_N .

Dans les sections précédentes, nous avons ramené l'étude de la régularité de la fonction ϕ à la détermination de l'exposant critique associé au facteur $p(\omega)$, et montré que cet exposant est fourni par $\mu_0(\log_2 |p|)$, où μ_0 est une mesure invariante par la transformation $\omega \rightarrow 2\omega \pmod{2\pi}$, rendant maximum l'intégrale de $\log_2 |p|$. Pour cette famille d'exemples, la mesure μ_0 peut être déterminée explicitement

Théorème 4. *La mesure μ_0 rendant maximum l'intégrale de $\log_2 |p|$ est la mesure portée par les points périodiques $2\pi/3, 4\pi/3$.*

PREUVE. Par le changement de variable $x = \sin(\omega/2)^2$, il revient au même de considérer l'intervalle $[0, 1]$, et de faire opérer la transformation $h : x \rightarrow h(x) = 4x(1-x)$ sur le polynôme P_N . (Cette transformation est un facteur de T dans l'identification des couples de points symétriques par rapport à l'axe des x , et le couple de points périodiques $2\pi/3$ et $4\pi/3$ correspond au point fixe $3/4$ de la transformation h .)

Dans le Lemme 2 suivant, nous établissons l'inégalité

$$(25) \quad P_N(x)P_N(h(x)) \leq P_N(3/4)^2, \quad \text{pour } x \in [3/4, 1].$$

Comme $P_N(y) \leq P_N(3/4)$ sur $[0, 3/4]$, l'inégalité (25) assure que le Lemme 1 peut être appliqué. Pour toute mesure invariante μ , on a donc

$$\int \log_2 |p| \, d\mu \leq \frac{1}{2} \log_2 P_N(3/4),$$

et ce majorant est atteint quand μ est la mesure portée par les points périodiques $2\pi/3$ et $4\pi/3$.

On en déduit que l'exposant critique cherché est égal à $(1/2)\log_2 P_N(3/4)$.

Corollaire. *Soit $\alpha(N)$ l'exposant de Hölder de la fonction ϕ_N associée au polynôme $P_N(y)$. On a l'estimation asymptotique:*

$$(26) \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(N)}{N} = 1 - \frac{1}{2} \log_2 3 \simeq 0.2075.$$

PREUVE. Lorsque N tend vers l'infini, il est clair que $\alpha(N)$ est équivalent à $N - b(N)$, où $b(N)$ est l'exposant critique associé à P_N , c'est à dire $(1/2)\log_2(P_N(3/4))$. Une estimation du terme dominant de (24) conduit alors à la relation

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{b(N)}{N} = \frac{1}{2} \log_2 3.$$

Il reste donc à démontrer le résultat suivant:

Lemme 2. *Les polynômes P_N définis par (24) vérifient l'inégalité*

$$(25) \quad P_N(x)P_N(h(x)) \leq P_N(3/4)^2, \quad \text{pour } x \in [3/4, 1].$$

PREUVE. a) Nous cherchons d'abord des conditions sur un polynome Q à coefficients positifs pour que

$$(26) \quad Q(x)Q(h(x)) \leq Q(3/4)^2, \quad \text{pour } x \in [3/4, 1].$$

Pour établir (25), nous raisonnons par récurrence sur le degré n de Q . Soit $Q(x) = R(x) + a_n x^n$. Il suffit d'établir que chacun des quatre termes du développement

$$Q(x)Q(h(x)) = R(x)R(h(x)) + a_n^2 [xh(x)]^n + a_n h(x)^n R(x) + a_n x^n R(h(x)),$$

est majoré, sur $[3/4, 1]$, par sa valeur en $3/4$.

Cette propriété est vérifiée par hypothèse de récurrence pour le premier facteur et elle résulte d'un calcul élémentaire pour les deuxième et troisième termes. Il reste donc à vérifier l'inégalité

$$(27) \quad x^n R(h(x)) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n R(3/4), \quad \text{sur } [3/4, 1].$$

Cette condition est assurée si les coefficients du polynôme Q croissent assez vite. L'inégalité (27) résulte en effet des conditions suivantes

$$(28) \quad \begin{cases} \frac{a_k}{a_{k-1}} \geq \frac{2n}{3k}, & \text{pour } k = 1, 2, \dots, n-2, \\ \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \geq \frac{4n}{3n-2} \end{cases}$$

b) Soit maintenant P_N donné par (24)

$$P_N(x) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k y^k = \sum_{k=0}^{N-1} C_{N-1+k}^k y^k.$$

Pour $N < 7$ une vérification numérique directe prouve l'inégalité (25). Pour $N \geq 7$, les inégalités (28) sont vérifiées par les coefficients des polynômes $Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$, pour tout n tel que $3 \leq n \leq N-1$.

Enfin, pour initialiser le raisonnement par récurrence du point a), on vérifie directement l'inégalité (25), pour $\sum_{k=0}^2 a_k x^k$, sous la condition $N \geq 7$.

Références.

- [1] Barnwell, Th. P. and Smith, M. J. T., Exact reconstruction techniques for tree structure subband coders. *IEEE Tran. ASSP* **34** (1986), 434-441.
- [2] Cohen, A., Construction de bases d'ondelettes α -höldériennes. *Rev. Mat. Iberoamericana*, **6** (1990), 91-108.
- [3] Conze, J. P., Sur le calcul de la norme de Sobolev des fonctions d'échelles. Preprint, Séminaires de Rennes 1990.
- [4] Daubechies, I., Orthonormal basis of compactly supported wavelets. *Comm. Pure Appl. Math.* **41** (1988), 909-996.

- [5] Daubechies, I. and Lagarias, J., Two scales difference equations I, II, à paraître dans SIAM J. Math. Anal.
- [6] Mallat, S., Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$. *Trans. Amer. Math. Soc.* **315** (1989), 69-88.
- [7] Meyer, Y., *Ondelettes et opérateurs*. Hermann, 1990.

Recibido: 6 de julio de 1.991

Albert Cohen
CEREMADE, Université Paris IX Dauphine
Place de Lattre de Tassigny
75116 Paris Cedex 16, FRANCE

Jean-Pierre Conze
Université de Rennes I,
Campus de Beaulieu,
35042 Rennes Cedex, FRANCE