Revista Matemática Iberoamericana
Vol. 8, N.° 3, 1992

Sur la géometrie symplectique de l'espace des géodésiques d'une variété à courbure négative

Jean-Pierre Otal

Introduction.

Soit N une variété complète, munie d'une métrique à courbure sectionnelle négative de volume fini. On définit le *spectre marqué des longueurs* de la métrique m de la façon suivante. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des classes de conjugaison du groupe fondamental de N: le spectre marqué $\mathcal{L}(m)$ de la métrique m est l'élément $(l_m(\gamma))_{\gamma\in\mathcal{C}}$ du produit direct $\mathbb{R}^{\mathcal{C}}$, où $l_m(\gamma)$ désigne la longueur de la géodésique de la métrique m représentant l'élément γ.

Il est conjecturé dans [BK] que cette application $\mathcal{L}$, définie sur l'espace des métriques à courbure négative à isotopie près, est injective (nous dirons que deux métriques sont *isotopes* si elles sont isométriques par un difféomorphisme homotope à l'identité). On montre dans [O1] que c'est bien le cas lorsque la dimension de la variété est 2 (voir aussi [C],[F] et [M]).

Ce problème est à rapprocher du problème suivant. Soit D le disque compact de dimension n. Si D est muni d'une métrique riemannienne de courbure sectionnelle négative m, on peut considérer la fonction distance associée à cette métrique et aussi la restriction de cette fonction distance au bord ∂D, restriction que nous noterons d_m. Par analogie avec le problème précédent sur l'injectivité de l'application $\mathcal{L}$, on conjecture que l'application $m \to d_m$ est injective.

Nous allons considérer dans cet article ces deux problèmes du point de vue de la géométrie symplectique, le résultat principal étant que la donnée de l'application $\mathcal{L}$ détermine dans un certain sens la structure symplectique sur l'espace des géodésiques de la métrique m.

Dans la première section, on définit à partir de la structure symplectique canonique sur l'espace des géodésiques d'un disque D muni d'une métrique à courbure négative un *birapport* pour les quadruplets sur le bord ∂D.

Dans la section suivante, on généralise cette définition au cas des variétés de courbure négative, et simplement connexes. Dans le cas où une telle variété est le revêtement universel d'une variété compacte munie d'une métrique m de courbure négative, nous montrerons que la donnée de ce birapport est équivalente à la donnée du spectre marqué $\mathcal{L}(m)$.

Nous analyserons ensuite la topologie des ensembles de niveau de certaines fonctions définies à partir de ce birapport (Section 3), les liens entre ce birapport et la structure quasiconforme sur la sphère à l'infini (Section 4).

1. La mesure symplectique sur l'espace des géodésiques d'une boule compacte.

Soit m une métrique C^∞ sans points conjugués sur la boule compacte B de dimension n et supposons pour simplifier que le bord de cette boule est strictement convexe pour cette métrique. *L'espace des géodésiques orientées* de cette métrique dans l'intérieur de la boule B, que nous noterons $\mathcal{G}_m$ s'identifie au complémentaire de la diagonale Δ dans le produit $\partial B \times \partial B$. L'identification est définie par l'application qui à une géodésique associe ses deux points d'intersection (le point passé et le point futur) avec le bord ∂B. Cette identification est différentiable.

Le fibré tangent unitaire de cette boule porte une 2-forme fermée canonique , la forme de Liouville que nous noterons ω et qui est définie par le Wronskien de deux champs de Jacobi (*cf.* [K, Section 3]). Cette forme est non-dégénérée sur les sous-variétés transverses au flot. La forme induite sur ces sous-variétés est une forme symplectique, invariante par le flot géodésique: c'est donc une forme symplectique sur *l'espace des géodésiques.*

Comment s'exprime la forme symplectique ω lorsqu'on paramètre les géodésiques par $\partial B \times \partial B - \Delta$? Soient x et y deux points distincts de la sphère ∂B. Soient (x_i) (respectivement (y_i)) un système de coordonnées différentiables sur ∂B au point x (respectivement, au point y). Notons finalement $\tau(a,b)$ la distance riemannienne, pour la métrique de la boule B entre les points a et b de ∂B. On a alors

Proposition 1.1. *Dans les coordonnées ci-dessus, la forme symplectique ω est donnée par la formule suivante*

$$\omega = \sum \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_i \partial y_j} dx_i \wedge dy_j \ .$$

PREUVE. Rappelons d'abord la définition de la forme ω. Soit $t \to \gamma(t)$ une géodésique de B, d'extrémités $x = \gamma(0)$ et $y = \gamma(l)$. Alors, l'espace tangent à $\mathcal{G}_m$ au point γ s'identifie aux champs de Jacobi J le long de γ tels que $J(0)$ et $J(l)$ sont orthogonaux à la géodésique au point x et au point y (puisque la métrique m est sans points conjugués, ceci détermine bien un espace de champs de Jacobi le long de γ de dimension $2(n-1)$). Alors, si J_1 et J_2 sont deux tels champs de Jacobi, la forme ω évaluée sur (J_1, J_2) vaut: $\langle J_1(0), J_2'(0)\rangle - \langle J_2(0), J_1'(0)\rangle$ (pour ceci, *cf.* [K, Section 3]).

Remarquons maintenant que les deux formes considérées ont chacune comme sous-espaces lagrangiens, les espaces de géodésiques qui passent respectivement par le point x ou par le point y: ces sous-espaces sont caractérisés, en termes de champs de Jacobi, comme ceux dont la valeur en x ou en y est nulle. Donc, il suffit de vérifier que les deux formes considérées sont égales, lorsqu'on les évalue sur un couple de deux vecteurs respectivement contenus dans l'un de ces sous-espaces.

Si le point x reste fixe et si le point $y(s')$ décrit une courbe passant par y avec un vecteur vitesse w, le champ de Jacobi $J(w)$ associé à la variation correspondante de géodésiques $xy(s')$ est nul au point $\gamma(0) = x$ et vaut $\bar{w}$ au point $\gamma(l) = y$, où $\bar{w}$ est la composante du vecteur w sur l'orthogonal du vecteur vitesse à la géodésique xy au point y. Considérons une variation analogue de la géodésique $x(s)y$, lorsque le point $x(s)$ décrit une courbe passant par le point x avec vitesse v. Le champ de Jacobi $J(v)$ correspondant a pour valeur $\bar{v}$ en 0 et s'annulle en l. Alors, un calcul basé sur la formule de la variation première donne

$$\frac{\partial^2 \tau(x(s), y(s'))}{\partial s \partial s'} = \langle w, J'(v)(l) \rangle \,.$$

Mais le dernier terme est aussi égal à $\omega(J(w), J(v))$, puisque la dérivée $J'(v)(l)$ est orthogonale au vecteur vitesse de la géodésique xy au point y. Ceci démontre la proposition.

Ainsi, la fonction distance sur la boule détermine la structure symplectique sur l'espace des géodésiques (orientées) $\mathcal{G}_m$.

Notons maintenant I et J deux intervalles disjoints plongés différentiablement dans le bord ∂D. On peut considérer la famille de géodésiques de $\mathcal{G}_m$ dont la première extrémité est dans I et dont la seconde extrémité est dans J. C'est un carré différentiablement plongé dans $\mathcal{G}_m$ sur lequel on pourra intégrer la forme ω, une fois que les intervalles I et J sont orientés, disons I de a vers b et J de c vers d. Ces intervalles peuvent être inclus dans des axes de coordonnées (x_i) et (y_j) respectifs. Le calcul de l'intégrale $\omega(I \times J)$ donne immédiatement

$$\omega(I \times J) = \tau(b, d) + \tau(a, c) - \tau(b, c) - \tau(a, d) \,.$$

On notera que cette valeur ne dépend que des extrémités et de l'orientation des intervalles considérés: ceci traduit le caractère *fermé* de la forme ω ainsi que le caractère *lagrangien* des sous-variétés $x \times (\partial B - x)$.

D'autre part, en dimension 2, la formule ci-dessus coïncide avec la formule qui exprimait, en dimension 2, la mesure de Liouville à partir de la fonction distance (*cf.* [O2]). Ceci n'est pas étonnant puisqu'en dimension 2, la mesure de Liouville sur l'espace des géodésiques n'est autre que la valeur absolue de la forme symplectique.

Définition. *Nous appelerons le birapport $\mathcal{B}(a, b, c, d)$ des quatre points (a, b, c, d) pour la métrique m la mesure pour la forme symplectique ω d'un carré $I \times J$, où I et J sont des intervalles comme ci-dessus joignant respectivement a b et c d.*

Donc le birapport est un nombre réel. Cette définition qui peut sembler abusive sera justifiée dans la section suivante par un calcul dans l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$. Notons toutefois les propriétés de symétrie communes suivantes

$$\mathcal{B}(a, b, c, d) = -\mathcal{B}(b, a, c, d) \,,$$

$$\mathcal{B}(a,b,c,d) = \mathcal{B}(c,d,a,b)\,,$$
$$\mathcal{B}(a,b,c,d) + \mathcal{B}(a,b,d,e) = \mathcal{B}(a,b,c,e)\,.$$

Remarquons aussi finalement que la donnée du birapport de la métrique m permet de reconstruire la fonction distance τ sur le bord, de la façon suivante

$$2\,\tau(a,c) = -\lim_{(b,d)\to(a,c)} \mathcal{B}(b,d,a,c)\,.$$

2. Le birapport symplectique sur la sphère à l'infini d'une variété de courbure négative.

Dans cette section, nous allons appliquer le calcul précédent dans une situation non-compacte, celle d'une variété complète, simplement connexe; mais une hypothèse portant uniquement sur l'absence de points conjugués sera insuffisante pour compenser la non-compacité et nous considèrerons uniquement des variétés de courbure sectionnelle négative.

Soit M une variété simplement connexe munie d'une métrique m, C^∞, complète et de courbure sectionnelle strictement négative. Notons $\bar{M} = M \cup \partial M$, la variété M compactifiée par sa sphère à l'infini ∂M.

L'espace des géodésiques de M est une variété C^∞, qui est *homéomorphe* au complémentaire de la diagonale dans $\partial M \times \partial M$.

La métrique m définit une forme symplectique sur cet espace. Soient a, b, c, d quatre points deux à deux distincts de ∂M; soient γ et γ' les géodésiques joignant respectivement les points a b et les points c d. Considérons finalement l'ensemble des géodésiques de ∂M dont une extrémité est dans γ' et l'autre est dans γ, ces géodésiques étant orientées de γ' vers γ. Cette famille de géodésiques est un carré différentiable: il s'identifie en effet différentiablement à $\gamma' \times \gamma$ différentiablement, car on ne considère que des points à distance finie. Ce carré peut être épuisé par les carrés $[c_i, d_i] \times [a_i, b_i]$ où les quadruplets (a_i, b_i, c_i, d_i) approximent le quadruplet (a, b, c, d) dans $\bar{M}$.

Si nous montrons que pour n'importe quelle suite de points de ce type, la suite de mesures $\omega([c_i, d_i] \times [a_i, b_i])$ (dont la valeur a été explicitée dans la section précédente, puisque toutes les géodésiques qui y interviennent sont contenues dans un même compact) converge nous aurons établi que le carré $\gamma \times \gamma'$ a une mesure finie pour la forme ω. En fait nous allons montrer que ceci est bien le cas, même si les paires de points (a_i, b_i), (c_i, d_i) ne sont pas situés respectivement sur les géodésiques γ ou γ'.

Lemme 2.1. *Soient (a_i, b_i, c_i, d_i) une suite de quadruplets de M qui tend dans $\bar{M}$ vers le quadruplets (a, b, c, d) formé de points de $\bar{M}$ deux à deux distincts. Alors la limite de $\tau(a_i, c_i) + \tau(b_i, d_i) - \tau(a_i, d_i) - \tau(b_i, c_i)$ existe. C'est une fonction continue sur l'espace des quadruplets de la sphère à l'infini que nous noterons $\mathcal{B}(a, b, c, d)$.*

PREUVE. Soient H_a, H_b, H_c et H_d quatre horosphères deux à deux disjointes centrées respectivement aux points a, b, c et d. Les quatre géodésiques de M joignant respectivement a à c, b à d, a à d et b à c, intersectent le complémentaire M_0 dans M des quatre horoboules délimitées par ces horosphères en quatre segments géodésiques de longueur finie que nous noterons respectivement $l(ac)$, $l(bd)$, $l(ad)$ et $l(bc)$. Posons

$$\mathcal{B}(a, b, c, d) = l(ac) + l(bd) - l(ad) - l(bc)\,.$$

On remarque que le nombre défini ci-dessus est indépendant des horosphères choisies.

Alors, dès que l'indice i est suffisamment grand, l'intersection des géodésiques $a_i c_i$, $b_i d_i$, $a_i d_i$ et $b_i c_i$ avec M_0 contient quatre segments géodésiques I_1, I_2, I_3, I_4 de plus en plus proches des quatre segments géodésiques ac, bd, ad et bc. Ceci parce que les bouts dans la sphère à l'infini des géodésiques contenant les segments $a_i c_i$, $b_i d_i$, $a_i d_i$ et $b_i c_i$ convergent respectivement vers a, b, c, d. Donc la trace de ces géodésiques sur tout compact de M_0 converge vers la trace de ac, bd, ad et de bc.

Il nous suffit de montrer que les contributions des segments des géodésiques $a_i c_i$, $b_i d_i$, $a_i d_i$ et $b_i c_i$, complémentaires de I_1, I_2, I_3, I_4 est nulle à la limite, c'est-à-dire que pour chacun des sommets a_i, b_i, c_i, d_i la contribution des termes qui aboutissent en ce sommet est nulle à la limite. Ceci découle du fait que dans les variétés de courbure strictement négative les sphères passant par un point donné convergent vers l'horosphère passant par le même point lorsque leur centre converge vers un point à l'infini.

Nous avons donc obtenu une expression explicite pour la limite. Maintenant, le fait que les feuilletages stables et instables du flot géodésique sont continus entraîne que la fonction ainsi définie est continue.

REMARQUE. En fait, si la courbure de la variété M est pincée entre deux constantes strictement négatives, il est connu que le feuilletage stable est hölderien. Donc, si on munit la sphère à l'infini de coordonnées différentiables en l'identifiant avec la sphère tangente unité en un point de N, l'application $\mathcal{B}$ est hölderienne.

D'autre part, la fonction $\mathcal{B}$ peut être définie de la même façon que précédemment pour les quadruplets de points distincts de $\bar{M}$. L'argument précédent dit en fait que cette fonction est continue sur l'espace des quadruplets distincts de $\bar{M}$.

Définition. *La fonction $\mathcal{B}$ définie ci-dessus sur l'espace de quadruplets de points distincts (a, b, c, d) de $\bar{M}$ sera appelée le birapport symplectique de ces quatre points.*

Considérons, pour justifier cette définition le cas de l'espace hyperbolique de courbure constante -1, $\mathbb{H}^n$. Alors, le birapport est défini pour quatre points, de la façon suivante. Ces quatre points sont toujours contenus dans un espace hyperbolique de dimension 2 ou 3: le birapport de ces quatre points est défini comme le birapport des ces quatre points sur la sphère à l'infini de cet espace. C'est un nombre complexe qui est un invariant du groupe des isométries de $\mathbb{H}^n$ agissant sur les quadruplets. Le logarithme du module de ce nombre n'est autre que le birapport $\mathcal{B}$ que nous avons défini précédemment.

Considérons le cas de quatre points distincts $0, \infty, 1, z$. Dans un premier temps supposons que le point z est de module différent de 1. L'homothétie γ de rapport z laisse invariante la géodésique $0, \infty$. Soit $F =]a, b]$ est un intervalle semi-ouvert contenu dans cette géodésique, domaine fondamental pour l'action de γ sur la géodésique $]0, \infty]$. Alors le birapport $(0, \infty, z, 1)$ a pour module le double de la longueur hyperbolique de l'intervalle F. D'autre part, d'après l'additivité de $\mathcal{B}$, on a

$$\mathcal{B}(0, \infty, z, 1) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{B}(\gamma^n(a), \gamma^n(b), z, 1).$$

Or, par invariance de $\mathcal{B}$ sous l'action du groupe d'isométries de $\mathbb{H}^n$, on a

$$\mathcal{B}(\gamma^n(a), \gamma^n(b), z, 1) = \mathcal{B}(a, b, \gamma^{-n}(z), \gamma^{-n}(1)).$$

Donc, $\mathcal{B}(0, \infty, z, 1) = \mathcal{B}(a, b, 0, \infty)$, c'est-à-dire le double de la longueur de l'intervalle F. Cette formule se prolonge par continuité au cas où z est de module 1.

Soit maintenant N une variété munie d'une métrique complète m de courbure négative: notons M son revêtement universel. Le birapport défini précédemment sur la sphère à l'infini ∂M est invariant sous l'action du groupe d'isométries $\pi_1(N)$.

L'action du groupe $\pi_1(N)$ sur la sphère à l'infini ∂M a un *ensemble limite* $L = L_m(G)$ que l'on peut définir comme le plus petit fermé non-vide invariant par $G = \pi_1(N)$. Nous nous placerons dans la situation où les éléments de $\pi_1(M)$ sont tous hyperboliques. Dans beaucoup de cas intéressants, cet ensemble limite peut être décrit uniquement en termes du groupe fondamental de N (*cf.* [Gr]). C'est le cas par exemple pour une variété hyperbolique complète N contenant un convexe compact tel que l'inclusion soit une équivalence d'homotopie: une telle variété sera dite *géométriquement finie.* On sait alors que l'ensemble limite est homéomorphe au complété de Gromov du groupe et le birapport que nous allons construire définira donc, par restriction, un birapport sur ce complété.

Théorème 2.2. *Soit G le groupe fondamental d'une variété N géométriquement finie. La restriction du birapport symplectique à l'espace des quadruplets de l'ensemble limite $L = L_m(G)$ du groupe $G = \pi_1(N)$ détermine et est déterminée par le spectre marqué de la métrique m.*

PREUVE. Commençons par montrer que le spectre marqué détermine le birapport $\mathcal{B}$ restreint à l'espace des quadruplets de points distincts de l'ensemble limite L. Il nous suffit de montrer que ce birapport est déterminé sur un ensemble dense. Puisque la variété N est géométriquement finie, l'action de $\pi_1(N)$ sur l'espace des paires de points distincts de L a une orbite dense.

Nous allons montrer que le birapport est déterminé à partir du spectre sur l'ensemble des quadruplets extrémités de deux translatés (distincts) de cette paire. Pour cela, considérons une suite de points (a_i, b_i, c_i, d_i) sur ces deux translatés qui approchent des quatre points à l'infini a, b, c, d. On peut choisir ces quatre points de sorte que les projections de leurs vecteurs tangents en leurs extrémités dans la variété N soient arbitrairement proches. Ainsi les projections des segments a_ic_i, b_id_i, a_id_i et b_ic_i, pourront être refermées en des géodésiques faisant un petit angle entr'elles. La longueur de la géodésique fermée (qui est une donnée du spectre marqué) qui leur est respectivement homotope peut être choisie arbitrairement proche des longueurs de ces segments.

Ainsi le birapport des quatre points apparaît comme une limite de différences symétriques de longueurs de géodésiques fermées (*cf.* [O1]).

Pour la réciproque, il suffit de raisonner comme dans le calcul de

$\mathcal{B}$ dans l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$. Soit γ un élément du groupe fondamental de N, donc agissant sur M comme une isométrie hyperbolique; soient γ^-, γ^+ ses deux points fixes dans la sphère à l'infini (donc contenus dans L). Soit z un point de l'ensemble limite, différent de ces deux points. Alors le birapport $\mathcal{B}(\gamma^-, \gamma^+, \gamma(z), z)$ est exactement le double de la longueur de la distance de translation de l'élément γ sur son axe, c'est-à-dire $2\, l_m(\gamma)$. Ainsi, le spectre marqué de la métrique m est déterminé par le birapport $\mathcal{B}$ restreint à l'espace des quadruplets de l'ensemble limite L.

Ceci termine la démonstration du Théorème 2.2.

3. La topologie de la sphère à l'infini.

Soit M une variété simplement connexe dont la courbure sectionnelle est majorée par une constante strictement négative. On a défini dans la section précédente le birapport $\mathcal{B}$, qui coïncide, dans le cas de l'espace $\mathbb{H}^n$ avec le logarithme du module du birapport usuel. En particulier, si on fixe trois points distincts a, b et c, l'ensemble $S_{a,b}(c)$ formé des points $z \in \partial M$ tels que $\mathcal{B}(a, b, c, z) = 0$ est une sphère passant par le point c, en fait le bord à l'infini du sous-espace hyperbolique $\mathbb{H}^{n-1}$ orthogonal à la géodésique $a\,b$ passant par la projection de c sur cette géodésique. Plus précisément, l'ensemble $D_{a,b}(c)$ des points de M tels que $\mathcal{B}(a, b, c, z) = 0$ est l'hyperplan géodésique précédemment décrit; son adhérence dans $\bar{M}$ est homéomorphe à un disque compact de frontière $S_{a,b}(c)$. Nous allons montrer dans cette section que c'est toujours le cas.

Ce résultat est à rapprocher de [Im H] où il est montré que si a et b appartiennent à M, l'ensemble $D_{a,b}(c)$ a une fermeture homéomorphe à un disque fermé. Les hypothèses du théorème de H.C. Im Hof sont que la courbure de M est négative ou nulle, ce qui suffit pour définir $\mathcal{B}(a, b, c, d)$ lorsque deux au plus des points a, b,c et d sont sur ∂M. Le théorème suivant est l'analogue du résultat principal de [Im H] où les points a et b sont sur ∂M.

Proposition 3.1. *Soient trois points distincts de la sphère à l'infini de la variété M. L'ensemble $D_{a,b}(c) \cup S_{a,b}(c)$ est homéomorphe à une boule fermée de dimension $n-1$.*

PREUVE. Sur la géodésique $a\,b$, il existe un unique point p tel que

$\mathcal{B}(a,b,c,p) = 0$. Nous cherchons à déterminer l'ensemble $D_{a,b}(p)$. Soient H^- et H^+ les horosphères centrées respectivement en a et en b qui passent par p. L'ensemble $D_{a,b}(p)$ est exactement l'ensemble des z qui sont équidistants des horosphères H^+ et H^-. Notons d^+ la fonction distance à H^+ et d^- la fonction distance à H^-. Chacune de ces fonctions a pour gradient le vecteur unitaire définissant la géodésique négativement asymptote à b ou à a. La fonction $d^+ - d^-$ a pour gradient la différence de ces deux champs et il est facile de voir que cette différence est partout non nulle dans M. Donc $D_{a,b}(p)$ est une sous-variété de M. La fonction $e = (d^+ + d^-)/2$ a un champ gradient partout tangent à $D_{a,b}(p)$; sur cette sous-variété, le champ grad(e) s'annulle une seule fois: au point p. On montre comme dans [Im H, Proposition 2.6] que la singularité de e est de type Morse en ce point. Donc $D_{a,b}(p)$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^{n-1}$.

Nous allons maintenant construire un difféomorphisme explicite de $D_{a,b}(p)$ avec $\mathbb{R}^{n-1}$ qui se prolongera en un homéomorphisme de $\bar{D}_{a,b}(p)$ avec le disque fermé de dimension $n-1$. Pour un nombre réel strictement positif t, définissons S_t comme l'ensemble des points z de $D_{a,b}(p)$ tels que $e(z) = t$. Considérons le champ de vecteurs

$$Z = \frac{\operatorname{grad}(e)}{\|\operatorname{grad}(e)\|^2} .$$

Ce champ est non singulier en dehors du point p. Le flot ϕ_t est défini sur tout $\mathbb{R}^+$ et envoit la sphère S_τ sur la sphère $S_{\tau+t}$ (*cf.* [Im H, Proposition 3.1]). Soit τ un nombre réel strictement positif, fixé un fois pour toutes.

Lemme 3.2. *La famille d'applications $\phi_t : S_\tau \to \bar{M}$ converge uniformément vers une application ϕ_∞ de S_τ vers ∂M qui est un homéomorphisme sur son image.*

PREUVE. Tout, d'abord $d^+(\phi_t(m)) = t + \tau$, pour tout $m \in S_\tau$; donc $d(\phi_t(m), p)$ tend uniformément vers ∞ sur S_τ.

Notons maintenant π la projection orthogonale sur l'horospère H^+. Pour montrer la convergence uniforme de la suite ϕ_t, nous allons montrer que la suite des projections $\pi \circ \phi_t(m)$ sur l'horosphère H^+ convergent uniformément. Pour cela, il suffit de montrer que la longueur des chemins $\pi \circ \phi_{t'}(m)$ pour $t' \in [t, \infty[$ tend uniformément vers 0 si t tend vers ∞. On raisonne en comparant avec l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$ de courbure -1 en supposant, pour simplifier que la courbure sectionnelle de M est inférieure à -1.

La différentielle $d\pi$ de la projection π au point $\phi_t(m)$ est la composée de la projection orthogonale ρ sur l'espace orthogonal du vecteur grad(d^+) et de la différentielle de la projection orthogonale ψ de l'horosphère passant par $\phi_t(m)$ sur l'horosphère H^+.

La norme de la projection $d\psi$ est inférieure, par les théorèmes de comparaison à la norme de la projection correspondante dans l'espace de courbure constante -1, où elle vaut $e^{-(t+\tau)}$.

Il suffit maintenant de majorer la norme de $\rho(Z(\phi_t(m)))$; la norme du vecteur $Z(\phi_t(m))$ est $1/\cos\omega$, si on désigne par 2ω l'angle en $\phi_t(m)$ du triangle de sommets a, b et $\phi_t(m)$. Cet angle est majoré par l'angle d'un triangle de comparaison dans l'espace $\mathbb{H}^n$ dont tous les côtés ont une longueur plus grande que t; en particulier, la norme $\|\rho(Z(\phi_{t'}(m)))\|$ est uniformément majorée pour $t' \geq t$.

Une intégration facile montre alors que la longueur des chemins projetés $\pi \circ \phi_{t'}(m)$ pour $t' \in [t, \infty[$ tend uniformément vers 0 si t tend vers ∞. Donc, les applications $\phi_t(m)$ convergent uniformément sur S_τ vers une application continue à valeurs dans ∂M.

Pour terminer la démonstration du Lemme 3.2, nous allons maintenant montrer que l'application obtenue ϕ_∞ est injective.

Affirmation 3.3. *Soit $g_m(t)$ la géodésique issue de p dans la direction $\phi_\infty(m)$, paramétrée par longueurs d'arcs; alors, la distance $d(\phi_t(m), g_m(t))$ est uniformément bornée en m et en $t \in \mathbb{R}^+$.*

PREUVE. En effet, notons $H^+_{t+\tau}$ l'horosphère centrée en b, passant par le point $\phi_t(m)$: cette horosphère est donc à distance $t+\tau$ de H^+; soit $\pi_{t+\tau}$ la projection orthogonale sur l'horosphère $H^+_{t+\tau}$. Notons finalement $\gamma_m(t)$ la géodésique entre b et $\phi_\infty(m)$ dont l'origine est choisie sur H^+. La distance $d(\phi_t(m), \gamma_m(t+\tau))$ est inférieure à la longueur de la courbe $\pi_{t+\tau} \circ \phi_{t'}(m)$, pour $t' \in [t, \infty[$. L'argument utilisé précédemment pour établir la convergence uniforme des applications ϕ_t montre aussi que cette longueur est uniformément bornée. Il suffit maintenant d'observer que la distance $d(g_m(0), \gamma_m(0))$ est uniformément bornée sur S_τ, de sorte que, par convexité de la fonction distance, $d(g_m(t), \gamma_m(t))$ est aussi uniformément bornée en m pour $t \in \mathbb{R}^+$. D'où l'affirmation, par l'inégalité triangulaire.

Pour terminer la démonstration de l'injectivité de l'application ϕ_∞, il nous suffit de montrer grâce à l'affirmation précédente que la distance $c(t) = d(\phi_t(m_1), \phi_t(m_2))$ tend vers l'infini avec t si m_1 et m_2 sont deux points distincts de S_τ. Notons $\beta(s)$ la géodésique paramétrée à vitesse unité qui réalise cette distance entre les points $\phi_t(m_1) = \mu_1(t)$ et $\phi_t(m_2) = \mu_2(t)$. Par la formule de la variation première, on a

$$c'(t) = \langle -\beta'(0), \mu_1'(t) \rangle + \langle -\beta'(c(t)), \mu_2'(t) \rangle .$$

Soit $\theta_i^+(t)$ (respectivement $\theta_i^-(t)$) l'angle en $\mu_i(t)$ du triangle de sommets b, $\mu_1(t)$ et $\mu_2(t)$ (respectivement a, $\mu_1(t)$ et $\mu_2(t)$). On a

$$c'(t) \geq \frac{1}{2}(\cos\theta_1^+(t) + \cos\theta_1^-(t) + \cos\theta_2^+(t) + \cos\theta_2^-(t)) .$$

Maintenant, chacun des angles θ_i^ε est inférieur à l'angle correspondant dans l'espace $\mathbb{H}^n$, c'est-à-dire à l'angle θ non nul d'un triangle isocèle centré en un point idéal et dont le côté de longueur finie a pour longueur $c(t)$. L'angle θ vérifie

$$\sin\theta = \frac{1}{\cosh(c(t)/2)} .$$

Donc, $\cos\theta_i^\varepsilon \geq \tanh(c(t)/2)$. Finalement, la fonction $c(t)$ vérifie l'inéquation différentielle

$$c'(t) \geq 2 \tanh\frac{c(t)}{2} .$$

Comme $c(0) = d(m_1, m_2)$ n'est pas nul, on a bien que $c(t)$ tend vers l'infini avec t.

Donc l'adhérence de $D_{a,b}(c)$ dans $\bar{M}$ intersecte ∂M en une sphère topologique de dimension $n-2$. Il nous suffit de vérifier, pour montrer la Proposition 3.1 que cette adhérence est *exactement* $S_{a,b}(c)$.

Raisonnons par l'absurde, et soit $z \in S_{a,b}(c) - \phi_\infty(S_\tau)$. La sphère $\phi_\infty(S_\tau)$ disconnecte ∂M en deux composantes dont l'une contient z; supposons par exemple que cette composante contient aussi le point a. Considérons la projection orthogonale π sur l'horosphère H^+, déjà introduite dans la démonstration du Lemme 3.2.

Affirmation 3.4. *La restriction de π à l'adhérence de $D_{a,b}(p)$ dans ∂M est un homéomorphisme sur son image.*

PREUVE. Montrons que cette projection est injective dans $D_{a,b}(c)$. Soit $t \to \gamma(t)$ une géodésique asymptote négativement à b qui intersecte H^+

en $\gamma(0)$; nous voulons voir que la fonction $d^-(t) - t$ s'annulle au plus une fois: ceci est clair puisque la dérivée de cette fonction a un signe constant.

L'argument précédent montre aussi que pour une géodésique $\gamma(t)$ passant par un point de $\pi(D_{a,b}(c))$ la valeur de $\mathcal{B}(a, b, c, \gamma(\infty))$ sera non nulle. Comme le point z est extrémité $\gamma(\infty)$ d'une géodésique de ce type, on a donc une contradiction.

Donc $S_{a,b}(c)$ est une sphère topologique, bord du disque topologique $\bar{D}_{a,b}(c)$.

4. Le birapport symplectique et la structure quasi-conforme sur la sphère à l'infini.

Soient M et M' deux variétés simplement connexes à courbure négative; considérons deux actions libres proprement discontinues d'un groupe G sur M et sur M', telles que les variétés quotients admettent un coeur convexe compact (variétés *géométriquement finies*). On a un homéomorphisme canonique, ϕ entre les ensembles limites $L_m(G)$ et $L_{m'}(G)$ qui commutte aux actions de G. On a vu que la restriction du birapport $\mathcal{B}$ à l'ensemble limite du groupe $L_m(G)$ était entièrement déterminé par le spectre marqué $\mathcal{L}_m(G)$: si $\mathcal{L}_m(G) = \mathcal{L}_{m'}(G)$, l'homéomorphisme ϕ preserve le birapport $\mathcal{B}$.

Définition. *On définit le rapport de m' sur m comme la plus grande constante K telle que $\mathcal{L}_{m'}(G) \geq K\,\mathcal{L}_m(G)$, c'est-à-dire la plus grande constante K telle que*

$$\forall g \in G, \quad l_{m'}(g) \geq K\, l_m(g)\,.$$

Nous allons maintenant étudier la régularité que cette propriété entraîne pour l'homéomorphisme ϕ.

Considérons d'abord l'autre birapport $\mathcal{P}(a, b, c, d)$ sur les quadruplets de la sphère à l'infini d'une variété simplement connexe de courbure strictement négative M défini comme suit: soient c' et d' les projections orthogonales de c et de d sur la géodésique $a\,b$. On définit $\mathcal{P}(a, b, c, d)$ comme la distance orientée de d' vers c' le long de la géodésique $a\,b$.

Lemme 4.1. *Il existe une constante C, dépendant uniquement de la borne supérieure de la courbure de M telle que, pour tout quadruplet de points distincts de ∂M, on a $|\mathcal{B}(a,b,c,d) - \mathcal{P}(a,b,c,d)| \leq C$.*

PREUVE. Dans une variété simplement connexe dont la courbure sectionnelle est majorée par une constante strictement négative $-a^2$, la longueur de l'hypothénuse d'un triangle rectangle (dont les côtés sont longs), diffère de la somme des longueurs des côtés adjacents à l'angle droit par une constante qui ne dépend que de a.

Nous allons maintenant montrer

Proposition 4.2. *Supposons que $\mathcal{L}_{m'}(G) \geq K\,\mathcal{L}_m(G)$; alors, il existe une constante C telle que, pour tout quadruplet de points distincts, les birapports $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sur $L(G)$ respectivement associés aux métriques m et m' vérifient*

$$|\mathcal{B}'(a,b,c,d)| \geq K\,|\mathcal{B}(a,b,c,d)| + C\,.$$

PREUVE. Soit $T^1_{C(N)}$ le fermé invariant du flot géodésique sur le fibré unitaire de la variété N, quotient de M par G, formé des géodésiques contenu dans le coeur compact $C(N)$; dans le revêtement universel, le relevé de ce fermé invariant dans $T^1(M)$ est exactement l'ensemble des vecteurs unitaires tangents aux géodésiques dont les deux extrémités appartiennent à l'ensemble limite de $G = \pi_1(N)$. Il existe (*cf.* [Gr]) un homéomorphisme de $T^1_{C(N)}$ vers $T^1_{C(N')}$ qui préserve les orbites du flot géodésique.

Soient maintenant quatre points a, b, c et d de l'ensemble limite du groupe G agissant sur M. Soit π_{ab} le projection orthogonale sur la géodésique $a\,b$. D'après le lemme précédent, les projections $c' = \pi_{ab}(c)$ et $d' = \pi_{ab}(d)$ de c et d sont à une distance qui diffère de $\mathcal{B}(a,b,c,d)$ par une quantité bornée par une quantié $c(m)$ qui ne dépend que de la borne supérieure sur la courbure de la métrique m.

Puisque la restriction du flot géodésique à $T^1_{C(N)}$ contient une orbite dense, il existe une constante $c(m)$ telle qu'on puisse refermer la géodésique $c'\,d'$ par un segment de longueur inférieur à $c(m)$; c'est-à-dire qu'il existe un arc géodésique $d''c''$, dont le relevé dans le fibré unitaire est contenu dans $T^1_{C(N)}$, et dont les extrémités sont C^1-proches des extrémités de $c'\,d'$. Il existe alors une géodésique fermée γ ε-proche de $c'd' \cup d''c''$. Si on relève dans le fibré unitaire $T^1(N)$ on obtient une réunion de deux orbites $\widetilde{c'd'} \cup \widetilde{d''c''}$ proche du relevé $\tilde{\gamma}$.

L'image par ψ de la réunion des deux orbites $\widetilde{c'd'} \cup \widetilde{d''c''}$ est, d'après l'uniforme continuité de ψ, ε'-proche de l'orbite $\tilde{\gamma}$ dans la variété $T^1_{C(N')}$. En particulier, la distance le long de l'orbite $\psi(ab)$ entre les points $\psi(c')$ et $\psi(d')$ diffère en valeur absolue de $l_{m'}(\gamma)$ de la longueur de $\psi(d'')\psi(c'')$. Or cette dernière longueur est bornée par une quantité c_1 qui ne dépend que de ψ et de $c(m)$, par compacité de $C(N)$ et puisque la distance entre d'' et c'' est inférieure à $c(m)$.

Il nous reste à voir que la distance entre $\psi(d'')$ et $\psi(c'')$ ne diffère de $\mathcal{B}'(a,b,c,d)$ que par une quantité bornée.

Pour cela, désignons par π' la projection orthogonale dans la variété M' sur la géodésique $a\,b$; soit encore $\tilde{\pi}_{ab}(c)$ le vecteur unitaire tangent à la géodésique $a\,b$ basée en $\pi_{ab}(c)$. Notons encore $\partial^3 G$ l'ensemble des triplés de points distincts de $L_m(G)$: on rappelle que l'action de G sur $\partial^3 G$ est proprement discontinue et cocompacte (*cf.* [Gr]). Considérons alors la fonction F sur ∂G

$$(a,b,c) \to d(\tilde{\pi}_{ab}(c), \psi(c'))\,.$$

Alors la fonction F sur $\partial^3 G$ est G-équivariante. Comme elle est continue, et que G agit de façon cocompacte, elle est bornée en valeur absolue par une constante c_2. Donc

$$|\mathcal{B}'(a,b,c,d) - \mathcal{B}'(a,b,\psi(c'),\psi(d'))| \leq 2\,c_2\,.$$

Finalement, en additionnant toutes les inégalités obtenues, on obtient la Proposition 4.2.

REMARQUE. Dans l'esprit de la Proposition 4.2, on peut se poser la question suivante. Soient M et M' deux variétés de courbure négative (non géométriquement finies) ayant le même groupe fondamental G et dont les spectres marqués vérifient $\mathcal{L}(m) \leq K\mathcal{L}(m')$ et $\mathcal{L}(m') \leq K'\mathcal{L}(m)$ pour des constantes K et K'; les ensembles limites de ces variétés sont-ils homéomorphes par une application transformant le birapport symplectique comme dans les conclusions de la Proposition 4.2.? Il semble qu'un tel résultat n'est pas connu, même pour des variétés de dimension 3 de courbure constante ayant le type d'homotopie d'une surface fermée.

Références.

[BK] Burns, K. and Katok, A., Manifolds with non-positive curvature. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **5** (1985), 307–317.

[C] Croke, C., Rigidity for surfaces of non-positive curvature. *Comm. Math. Helvetici* **65** (1990), 150–169.

[F] Fathi, A., Le spectre marqué des longueurs des surfaces sans points conjuqués. *C. R. Acad. Sci. Paris* **308** (1989).

[Gr] Gromov, M., Hyperbolic groups. *Essays in group theory (MSRI Pub.)* **8** (1987), 75–263.

[Im H] Im Hof, H-C., The family of horospheres through two points. *Math. Ann.* **240** (1979), 1–11.

[K] Klingenberg, W., *Riemannian geometry.* De Gruyter (1982).

[M] Montesinos, A., Thèse de l'Université Paris VI, 1990.

[O1] Otal, J-P., Le spectre marqué des longueurs des surfaces à courbure négative. *Ann. of Math.* **131** (1990), 151–162.

[O2] Otal, J-P., Sur la longueur des géodésiques d'une métrique à courbure négative dans le disque. *Comm. Math. Helvetici* **2** (1990), 334–347.

Recibido: 27 de noviembre de 1.991

Jean-Pierre Otal
Département de Mathématiques
Université de Paris-Sud
91405 Orsay, FRANCE