Revista Matemática Iberoamericana
Vol. 9, N.° 2, 1993

Isopérimétrie pour les groupes et les variétés

Thierry Coulhon et Laurent Saloff-Coste

Introduction.

Dans cet article, nous proposons une approche très directe de différentes inégalités isopérimétriques. Cette approche est inspirée de la preuve élégante que donne Robinson de la décroissance du noyau de la chaleur sur les groupes de Lie, [20]. Dans le cadre des groupes unimodulaires moyennables, nous montrons dans la Section 1 comment des inégalités isopérimétriques optimales se déduisent simplement de la croissance du volume. Dans le cas de la croissance polynômiale, nous retrouvons ainsi les résultats de [26] (voir aussi [22] et [16]). Dans le cas de la croissance superpolynômiale, nous prouvons une conjecture de Varopoulos, [28]. Ces résultats sont optimaux (Section 2). Ils permettent de traiter par discrétisation les revêtements galoisiens de variétés compactes (Section 4).

Sur une variété riemannienne, en l'absence de structure de groupe, la croissance du volume est une information insuffisante pour déterminer l'isopérimétrie. Nous dégageons dans la Section 3 des hypothèses géométriques (inégalité de Poincaré, régularité dans la croissance du volume) qui permettent de déduire une inégalité isopérimétrique d'une minoration du volume. Les résultats connus en courbure de Ricci positive ou nulle apparaissent, grâce aux travaux de Buser [3], comme un cas particulier. Notre approche est aussi bien adaptée pour traiter de l'isopérimétrie dans le cadre des graphes (Section 5). Ces résultats positifs sont à rapprocher des résultats négatifs de [9] (voir aussi [7]).

1. Groupes.

Nous allons d'abord nous placer dans le cadre des groupes discrets finiment engendrés, parce qu'il est intéressant par lui-même, qu'il permet de ne pas s'embarrasser de difficultés techniques, et enfin parce qu'on y voit apparaître des phénomènes de croissance intermédiaire du volume (ni polynômiale ni exponentielle) qui n'existent pas pour les groupes de Lie.

Soit G un groupe discret infini finiment engendré et $\{g_1, \dots, g_k\}$ un système de générateurs de G. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $B(n) = \{x \in G : \ x = g_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots g_{i_n}^{\varepsilon_n}, \ i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, k\}, \ \varepsilon_j = 0, \pm 1\}$. Si Ω est un sous-ensemble de G, $|\Omega|$ désignera son cardinal, et nous définirons son bord par

$$\partial\Omega = \left\{ x \in \Omega : \text{ il existe } \ i \in \{1, \dots, k\} \text{ et } \varepsilon = \pm 1 \text{ tel que } x g_i^\varepsilon \notin \Omega \right\}.$$

Si f est une fonction à support fini sur G, nous définirons son gradient par

$$\nabla f(x) = \sum_{y \in G, \ y \sim x} |f(x) - f(y)| \ ,$$

où $x \sim y$ signifie qu'il existe un générateur g_i tel que $y = x g_i^{\pm 1}$. La quantité $\|\nabla f\|_1$ (les normes L^p sont bien sûr prises par rapport à la mesure de comptage) vaut donc $\sum_{x,y \in G, x \sim y} |f(x) - f(y)|$. On a clairement

$$|\partial\Omega| \leq \frac{1}{2} \|\nabla 1_\Omega\|_1 \leq 2\,k\,|\partial\Omega| \ .$$

La fonction de croissance du volume de G est $V(n) = |B(n)|$. Elle peut être polynômiale, *i.e.* il existe $D \in \mathbb{N}^*$ et $C > 0$ tels que

$$C^{-1}\, n^D \leq V(n) \leq C\, n^D .$$

D'après un théorème de Gromov, ceci se produit si et seulement si G contient un sous-groupe nilpotent d'indice fini. Elle peut être exponentielle, *i.e.* $V(n) \geq C e^{cn}$, par exemple si G est résoluble sans avoir de sous-groupe nilpotent d'indice fini, ou bien s'il est non moyennable. Elle peut enfin être intermédiaire, *i.e.*

$$C_1\, e^{c_1 n^\alpha} \leq V(n) \leq C_2\, e^{c_2 n^\beta} \ , \qquad 0 < \alpha \leq \beta < 1 \, ,$$

cf. [14]. Nous aurons à considérer la fonction $\phi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{N}^*$ définie par $\phi(\lambda) = \inf\{n \in \mathbb{N}^* : \; V(n) > \lambda\}$.

Nous allons démontrer le

Théorème 1. *G vérifie l'inégalité isopérimétrique*

$$\frac{|\Omega|}{\phi(2\,|\Omega|)} \leq 8k\,|\partial\Omega| \; , \qquad \textit{pour tout } \Omega \subset G \, .$$

EXEMPLES. Si $V(n) \geq Cn^D$, alors

$$|\Omega|^{(D-1)/D} \leq C\,|\partial\Omega| \; ,$$

ce qui est bien connu, au moins sous l'hypothèse $V(n) \simeq n^D$ (*cf.* [26]); notons toutefois que notre preuve est beaucoup plus simple que les approches déjà disponibles. Si $V(n) \geq Ce^{cn^\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$, alors

$$|\Omega|\,(\log|\Omega|)^{-1/\alpha} \leq C\,|\partial\Omega| \; ,$$

pour $|\Omega| \geq 2$, ce qui était conjecturé dans [28].

Le théorème se déduit de la

Proposition. *Pour tout $\lambda > 0$, pour toute fonction f à support fini sur G,*

$$|\{|f| \geq \lambda\}| \leq \frac{2}{\lambda}\,\phi\Big(\frac{2}{\lambda}\,\|f\|_1\Big)\,\|\nabla f\|_1 \; .$$

Il suffit pour le voir d'appliquer la proposition à $f = 1_\Omega$ et $\lambda = 1$.

PREUVE DE LA PROPOSITION. Si f est une fonction sur G et $n \in \mathbb{N}^*$, définissons f_n par

$$f_n(x) = \frac{1}{V(n)} \sum_{y \in B(n)} f(xy) \, .$$

Ecrivons

$$\Big|\{\,|f| \geq \lambda\}\Big| \leq \Big|\{\,|f - f_n| \geq \frac{\lambda}{2}\}\Big| + \Big|\{\,|f_n| \geq \frac{\lambda}{2}\}\Big| \, .$$

Il est clair que

$$\|f_n\|_\infty \leq V(n)^{-1}\,\|f\|_1 \; .$$

Si n_0 est le plus petit entier tel que

$$V(n_0)^{-1} \|f\|_1 < \frac{\lambda}{2},$$

autrement dit si $n_0 = \phi((2/\lambda)\|f\|_1)$, on a

$$\left|\left\{ |f_{n_0}| \geq \frac{\lambda}{2} \right\}\right| = 0$$

et

$$\left|\left\{ |f| \geq \lambda \right\}\right| \leq \left|\left\{ |f - f_{n_0}| \geq \frac{\lambda}{2} \right\}\right| \leq \frac{2}{\lambda} \|f - f_{n_0}\|_1 .$$

La preuve de la proposition est alors terminée grâce au

Lemme. *Pour toute fonction f à support fini sur G,*

$$\|f - f_n\|_1 \leq n \|\nabla f\|_1 .$$

Ce lemme est bien connu et sa preuve est simple. Définissons f^y par $f^y(x) = f(xy)$. Il est clair que, si y est un des générateurs $g_1, \ldots, g_k$ ou un de leurs inverses, $\|f - f^y\|_1 \leq \|\nabla f\|_1$. Par inégalité triangulaire, $\|f - f^y\|_1 \leq n \|\nabla f\|_1$ si $y \in B(n)$. Finalement

$$\begin{aligned} \|f - f_n\|_1 &\leq \frac{1}{V(n)} \sum_{x \in G} \sum_{y \in B(n)} |f(x) - f(xy)| \\ &= \frac{1}{V(n)} \sum_{y \in B(n)} \|f - f^y\|_1 \\ &\leq n \|\nabla f\|_1 . \end{aligned}$$

Le Théorème 1 peut, dans l'esprit de [24, Section 6], être reformulé en termes de plongement d'un espace de Sobolev dans un espace d'Orlicz. Ainsi, si $V(n) \geq Ce^{cn^\alpha}$, l'espace des fonctions à support fini complété par rapport à la norme $|||f||| = \|\nabla f\|_1$ se plonge dans l'espace d'Orlicz L_ψ, et même l'espace d'Orlicz-Lorentz $L_{\psi,1}$, où $\psi(x) = x(-\log x)^\alpha$.

Nous allons maintenant envisager le cas des groupes de Lie. Soit G un groupe de Lie réel connexe unimodulaire non compact et U un voisinage compact de l'origine dans G. La fonction de croissance du volume de G est donnée par $V(n) = |U^n|$, où $|\cdot|$ désigne maintenant la mesure de Haar. Guivarc'h a montré dans [15] que deux situations seulement peuvent se produire: soit il existe $C > 0$ et $D \in \mathbb{N}^*$ tels que $C^{-1}n^D \leq V(n) \leq Cn^D$, et l'on dit que G est à croissance polynômiale d'exposant D, soit il existe $c, C > 0$ tels que $V(n) \geq Ce^{cn}$, et G est dit à croissance exponentielle. On a alors le

Théorème 2. *Soit G un groupe de Lie de dimension d, muni d'une métrique riemannienne invariante à gauche. Si G est à croissance polynômiale d'exposant D, on a l'inégalité isopérimétrique*

$$\sup \left\{ |\Omega|^{(d-1)/d}, |\Omega|^{(D-1)/D} \right\} \leq C\, |\partial\Omega| ,$$

pour tout ouvert Ω à bord régulier de G, si $d \leq D$, et

$$\inf \left\{ |\Omega|^{(d-1)/d}, |\Omega|^{(D-1)/D} \right\} \leq C\, |\partial\Omega| ,$$

pour tout ouvert Ω à bord régulier de G, si $d > D$. Si G est à croissance exponentielle, on a

$$\sup \left\{ |\Omega|^{(d-1)/d}, |\Omega| \left(\log(|\Omega| + 2)\right)^{-1} \right\} \leq C\, |\partial\Omega| ,$$

pour tout ouvert Ω à bord régulier de G.

REMARQUE. Si G est non-moyennable, on a

$$\sup \left\{ |\Omega|^{(d-1)/d}, |\Omega| \right\} \leq C\, |\partial\Omega| .$$

La preuve est identique à celle du cas discret. On est simplement amené à considérer aussi des boules de petit rayon t, pour lesquelles $V(t) \approx t^d$. Nous aurions pu, au lieu de munir G d'une structure riemannienne, le munir plus généralement d'une famille de champs de vecteurs invariants à gauche vérifiant la condition de Hörmander, comme dans [26]; l'exposant d n'est plus en général la dimension topologique: il est donné par la croissance des boules de petit rayon pour la distance associée aux champs et dépend donc des champs choisis. Dans ce contexte, la notion de volume du bord d'un ensemble et sa relation avec le gradient sont moins claires. Il suffit, pour contourner cette difficulté, d'énoncer des inégalités de Sobolev plutôt que des inégalités isopérimétriques.

Les considérations précédentes peuvent finalement s'étendre au cadre des groupes localement compacts à génération compacte, qui contient à la fois celui des groupes discrets finiment engendrés et celui des groupes de Lie connexes. On retrouve et on généralise ainsi les résultats de [16, Section 7].

Une autre approche de l'isopérimétrie, précédemment développée par Varopoulos ([26], voir aussi [7, Section 2]), consiste à utiliser le semi-groupe de la chaleur dans le cas continu ou des puissances de convolution de mesures dans le cas discret. Ce type d'argument nécessite une estimation non-triviale des dérivées spatiales du noyau de la chaleur, *cf.* [22] (ou bien de leur analogue pour les puissances de convolution, *cf.* [16]). Ce qui nous permet ici d'éviter cette estimation, c'est l'idée, transposée de Robinson [21, Chap. IV, Section 2.a], d'opérer directement sur les convolutions par des fonctions caractéristiques de boules de rayon variable, plutôt que sur le semi-groupe de la chaleur (ou les puissances de convolution).

2. Décroissance des puissances de convolution et problèmes d'optimalité.

Nous nous plaçons à nouveau dans le cadre des groupes discrets. En faisant le lien avec les questions de décroissance des puissances de convolutions de probabilités traitées dans [29], nous allons vérifier que les inégalités isopérimétriques obtenues à la Section 1 sont optimales.

2.1. Groupes à croissance polynômiale.

Supposons que $V(n) \geq Cn^D$. Le Théorème 1 nous donne l'inégalité isopérimétrique $|\Omega|^{1/D} \leq C\,|\partial\Omega|^{1/(D-1)}$. Réciproquement, cette dernière a pour conséquence

$$V(n)^{(D-1)/D} \leq C\big(V(n+1) - V(n)\big)\,,$$

qui redonne $V(n) \geq Cn^D$. L'isopérimétrie et la minoration du volume correspondante sont donc équivalentes. On sait que chacune de ces deux propriétés entraîne à son tour le fait que, pour toute probabilité μ sur G à support générateur, $\mu^{(k)}(e) = O(k^{-D/2})$. On peut voir que l'isopérimétrie entraîne la décroissance des puissances de convolution en transitant par l'inégalité de Sobolev

$$\|f\|_{2D/(D-2)} \leq C\,\|\nabla f\|_2\ ,$$

puis en employant des arguments d'analyse fonctionnelle (*cf.* [26], [10] et [11]).

Mais on peut aussi partir directement de la minoration du volume et écrire, comme Robinson, et avec les notations de la Section 1,

$$\|f\|_2 \leq \|f - f_n\|_2 + \|f_n\|_2 \leq C\,n\,\|\nabla f\|_2 + C\,n^{-D/2}\,\|f\|_1 \ ,$$

et en déduire, en optimisant sur n,

$$\|f\|_2^{1+2/D} \leq C\,\|\nabla f\|_2\,\|f\|_1^{2/D} \ ,$$

qui suffit à nouveau à entraîner $\mu^{(k)}(e) = O(k^{-D/2})$ (*cf.* [4], ou [10, Théorème 5], ou encore [11, Proposition 2]).

Rappelons que, comme par ailleurs la décroissance des puissances de convolution, via l'inégalité de Sobolev L^2 à laquelle elle équivaut, entraîne la minoration du volume, il y a une équivalence complète entre $V(n) \geq n^D$, $|\Omega|^{1/D} \leq C\,|\partial\Omega|^{1/(D-1)}$ et $\mu^{(k)}(e) = O(k^{-D/2})$.

2.2. Groupes à croissance super-polynômiale.

Supposons $V(n) \geq Ce^{cn^\alpha}$. L'inégalité isopérimétrique obtenue, $|\Omega|\,(\log(|\Omega| + 2))^{-1/\alpha} \leq C\,|\partial\Omega|$, ne donne cette fois en retour que

$$V(n) \geq C\,e^{cn^{\alpha/(\alpha+1)}}$$

En revanche, partant de $V(n) \geq Ce^{cn^\alpha}$, on peut écrire

$$\|f\|_2 \leq C\,n\ \|\nabla f\|_2 + C\,e^{-cn^\alpha/2}\ \|f\|_1 \ ,$$

et en déduire que, pour μ probabilité à support générateur,

$$\mu^{(k)}(e) = O(e^{-ck^{\alpha/(\alpha+2)}})$$

(les détails sont donnés dans [29]); on retrouve ainsi les résultats de [28] (voir aussi [16]). Ces résultats sont optimaux, puisque sur tout groupe polycyclique à croissance exponentielle, c'est-à-dire tel que $\alpha = 1$, et pour toute probabilité ν à support fini et générateur sur ce groupe, $\nu^{(k)}(e) \approx O(e^{-ck^{1/3}})$, *cf.* [1].

Même si on ne peut pas le voir cette fois à travers des arguments de volume, l'inégalité isopérimétrique fournie par le Théorème 1 est elle aussi optimale, au moins pour $\alpha = 1$: une inégalité sensiblement meilleure, du type

$$|\Omega|\,(\log(|\Omega|+2))^{-1+\varepsilon} \leq C\,|\partial\Omega|$$

entraînerait une décroissance trop forte des puissances de convolution, en $e^{-ck^{1/(3-2\varepsilon)}}$ (voir [28, Section 5]).

Notons enfin que l'inégalité isopérimétrique extrême $|\Omega| \leq C\,|\partial\Omega|$ entraîne, elle, directement la croissance exponentielle $V(n) \geq e^{cn}$; mais elle ne vaut que sur les groupes non-moyennables. Sur ces groupes, et sur ces groupes seulement, les puissances de convolution de probabilités décroissent d'ailleurs en e^{-cn}.

3. Variétés.

Soit M une variété riemannienne complète connexe. Pour Ω un sous-ensemble mesurable de M, $|\Omega|$ désignera son volume riemannien, et s'il est suffisamment régulier, $|\partial\Omega|$ sera la mesure superficielle de son bord; $B(x,r)$ dénotera la boule riemannienne de centre x et de rayon r, et l'on notera $V(x,r) = |B(x,r)|$. Pour $f \in C_0^\infty(M)$, nous poserons

$$f_r(x) = \frac{1}{V(x,r)} \int_{B(x,r)} f(y)\,dy\,.$$

Supposons que $V(x,r) \geq V(r)$, pour toute $r > 0$, et pour toute $x \in M$, où V est une fonction strictement positive croissante; soit ϕ la fonction réciproque de V, définie par

$$\phi(\lambda) = \inf\{r \in \mathbb{R}_+^* \,:\, V(r) \geq \lambda\}\,.$$

Pour montrer, en utilisant les idées de la Section 1, qu'il existe $C > 0$ tel que, pour tout sous-ensemble Ω de M à bord régulier, $|\Omega|\,/\phi(C\,|\Omega|) \leq C\,|\partial\Omega|$, il suffit de supposer

$$(*) \qquad \|f - f_r\|_1 \leq C\,r\,\|\nabla f\|_1\,, \quad \forall r > 0, \quad \forall f \in C_0^\infty(M)\,.$$

On écrit en effet à nouveau, pour $x \in M$, $r > 0$ et $f \in C_0^\infty(M)$,

$$\Big|\{\,|f| \geq \lambda\}\Big| \leq \Big|\{\,|f - f_r| \geq \frac{\lambda}{2}\}\Big| + \Big|\{\,|f_r| > \frac{\lambda}{2}\}\Big|\,.$$

Comme $|f_r(x)| \leq V(x,r)^{-1} \|f\|_1$, on a bien

$$\|f_r\|_\infty \leq V^{-1}(r) \|f\|_1 \ . \tag{1}$$

D'autre part,

$$\left|\{ |f - f_r| \geq \frac{\lambda}{2}\}\right| \leq \frac{2}{\lambda} \|f - f_r\|_1 \ .$$

On a alors, d'après $(*)$,

$$\left|\{ |f - f_r| \geq \frac{\lambda}{2}\}\right| \leq \frac{2Cr}{\lambda} \|\nabla f\|_1 \ . \tag{2}$$

Comme dans le cas des groupes, on déduit des estimations (1) et (2)

$$|\{|f| \geq \lambda\}| \leq \frac{2C}{\lambda} \phi(\frac{2}{\lambda} \|f\|_1) \|\nabla f\|_1 \ ,$$

d'où l'inégalité isopérimétrique annoncée.

Nous allons maintenant considérer des propriétés géométriques qui suffisent à entraîner la propriété $(*)$. Nous dirons que M vérifie l'inégalité de Poincaré à l'échelle sur les boules si

$$\int_{B(x,r)} |f(y) - f_r(x)| \, dy \leq Cr \int_{B(x,2r)} |\nabla f(y)| \, dy \, , \tag{P}$$

pour tout $x \in M$, $r > 0$, et que M a la propriété de doublement du volume si la quantité $V(x, 2r)/V(x,r)$ est bornée indépendamment de $x \in M$ et de $r > 0$. On sait qu'une variété à courbure de Ricci positive ou nulle vérifie (P) (*cf.* [3]) et a la propriété de doublement du volume ([6, Proposition 4.1]). La propriété (P) peut être traduite en termes de constantes de Cheeger relatives aux boules de rayon r (*cf.* [18, p. 232]). Notons qu'une variété possédant la propriété de doublement du volume et à courbure de Ricci minorée est nécessairement à croissance polynômiale: il existe $D > 0$ tel que $V(x,r) \leq C r^D$, pour tout $x \in M$ et $r > 0$.

Lemme. *Si M vérifie* (P) *et a la propriété de doublement du volume, alors la propriété* $(*)$ *est vérifiée:*

$$\|f - f_r\|_1 \leq Cr \|\nabla f\|_1 \ ,$$

pour tout $r > 0$ et $f \in C_0^\infty(M)$.

PREUVE DU LEMME. Considérons dans M une famille maximale $(x_i)_{i\in I}$ de points à distance mutuelle supérieure ou égale à r. On a $M = \bigcup_{i\in I} B(x_i, r)$, et les boules $B(x_i, r/2)$ sont deux à deux disjointes.

La propriété de doublement du volume a classiquement pour conséquence le fait que le nombre de boules $B(x_i, 2r)$ dans lesquelles se trouve un point quelconque de M est borné. Soit en effet $x \in M$ et $r > 0$. On a, si l'on note $I_r(x) = \{i \in I : x \in B(x_i, 2r)\}$,

$$\begin{aligned} V(x, 4r) \geq \sum_{I_r(x)} V\Big(x_i, \frac{r}{2}\Big) &\geq K^{-4} \sum_{I_r(x)} V(x_i, 8r) \\ &\geq K^{-4} \operatorname{Card} I_r(x)\, V(x, 4r) \end{aligned}$$

(dans ce qui précède, K est bien sûr la constante de doublement du volume; cette ligne de raisonnement est recopiée dans [17]).

On a alors

$$\begin{aligned} \|f - f_r\|_1 &\leq \sum_{i\in I} \int_{B(x_i,r)} |f(x) - f_r(x)|\, dx \\ &\leq \sum_{i\in I} \int_{B(x_i,r)} |f(x) - f_r(x_i)|\, dx \\ &\quad + \sum_{i\in I} \int_{B(x_i,r)} |f_r(x_i) - f_{2r}(x_i)|\, dx \\ &\quad + \sum_{i\in I} \int_{B(x_i,r)} |f_r(x) - f_{2r}(x_i)|\, dx\,. \end{aligned}$$

L'inégalité (P) donne pour le premier terme

$$\begin{aligned} \sum_{i\in I} \int_{B(x_i,r)} |f(x) - f_r(x_i)|\, dx &\leq C\, r \sum_{i\in I} \int_{B(x_i,2r)} |\nabla f(x)|\, dx \\ &\leq C\, K^4\, r\, \|\nabla f\|_1\,. \end{aligned}$$

Le second terme vaut

$$\begin{aligned} V(x_i, r)\, |f_r(x_i) - f_{2r}(x_i)| &\leq \int_{B(x_i,r)} |f(y) - f_{2r}(x_i)|\, dy \\ &\leq \int_{B(x_i,2r)} |f(y) - f_{2r}(x_i)|\, dy \\ &\leq 2\, C\, r \int_{B(x_i,4r)} |\nabla f(x)|\, dx\,. \end{aligned}$$

Pour traiter le troisième terme, on écrit

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I}\int_{B(x_i,r)} &|f_r(x) - f_{2r}(x_i)|\,dx\\ &\le \int_{B(x_i,r)} \frac{1}{V(x,r)}\int_{B(x,r)} |f(y) - f_{2r}(x_i)|\,dy\,dx\\ &\le \int_{B(x_i,r)} \frac{1}{V(x,r)}\int_{B(x_i,2r)} |f(y) - f_{2r}(x_i)|\,dy\,dx\\ &= \int_{B(x_i,2r)} |f(y) - f_{2r}(x_i)|\,dy \int_{B(x_i,r)} \frac{1}{V(x,r)}\,dx\,.\end{aligned}$$

Le premier facteur se majore à nouveau grâce à (P), et le second en remarquant que $B(x,4r) \supset B(x_i,r)$, et en utilisant le doublement du volume. Ceci termine la démonstration du lemme.

Nous avons démontré le

Théorème 3. *Si M vérifie* (P), *a la propriété de doublement du volume et si $V(r) = \inf_{x\in M} V(x,r) > 0$ pour tout $r > 0$, alors M vérifie l'inégalité isopérimétrique:*

il existe $C > 0$ tel que, pour tout sous-ensemble Ω de M à bord régulier,

$$\frac{|\Omega|}{\phi(C\,|\Omega|)} \le C\,|\partial\Omega|\ ,$$

où ϕ est la fonction réciproque de V.

EXEMPLE. Soit M une variété riemannienne à courbure de Ricci positive ou nulle de dimension d. Les théorèmes de comparaison donnent

$$\frac{V(x,r)}{V(x,s)} \le \left(\frac{r}{s}\right)^d, \qquad \text{pour tout } x\in M \quad \text{et} \quad 0 < s \le r\,.$$

En particulier, en faisant tendre s vers 0 dans l'inégalité précédente, on obtient $V(x,r) \le Cr^d$, $\forall x \in M$, $\forall r \ge 1$. Supposons que $V(x,r) \ge Cr^D$, pour r grand, avec $D \le d$. Le Théorème 4 permet d'affirmer que

$$\inf\left\{\,|\Omega|^{(d-1)/d}, |\Omega|^{(D-1)/D}\,\right\} \le C\,|\partial\Omega|\ ,$$

pour tout Ω ouvert à bord régulier de M. Ceci généralise le résultat pour $D = d$ annoncé dans [24, Section 5].

REMARQUE. Soit M une variété riemannienne de dimension d à courbure de Ricci minorée et telle que $V(x,1) \geq c > 0$ pour tout $x \in M$ (cette dernière condition est vérifiée par exemple si le rayon d'injectivité de M est strictement positif). Alors, avec les notations habituelles, nos techniques permettent de montrer que M vérifie l'inégalité isopérimétrique

$$\text{(IL)} \qquad |\Omega|^{(d-1)/d} \leq C\,|\partial\Omega| \qquad \text{pour tout } \Omega \text{ tel que } |\Omega| \leq 1\,.$$

On retrouve ainsi une inégalité de Sobolev locale contenue dans [27], voir aussi [23].

Dans le cas des variétés comme dans celui des groupes, une approche de l'isopérimétrie via le semi-groupe de la chaleur est possible ([27], voir aussi [7]). Les estimations des dérivées spatiales du noyau de la chaleur qu'elle nécessite sont alors fournies par les inégalités de Harnack paraboliques démontrées par Li et Yau dans [18]. Le théorème ci-dessus peut donc être vu comme un moyen de leur substituer les inégalités de Poincaré. Dans cette direction, voir aussi [23].

4. Revêtements.

Soit N une variété riemannienne compacte de dimension d et M un revêtement galoisien de N, de groupe Γ: Γ agit proprement et librement sur M par isométries et $M/\Gamma = N$. Le groupe Γ est finiment engendré. Réciproquement, tout groupe finiment engendré peut apparaître comme le groupe d'un revêtement co-compact. Soit V_1 la fonction de croissance du volume de Γ au sens du Section 1. Milnor a remarqué dans [20] qu'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $x \in M$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$C^{-1}\ V_1(C^{-1}n) \leq V(x,n) \leq C\ V_1(Cn)\,.$$

Si M est à courbure de Ricci positive ou nulle, Γ est à croissance polynômiale de degré au plus d et si M est à courbure sectionnelle majorée par un nombre strictement négatif, Γ est à croissance exponentielle. Nous allons montrer que, comme dans le cas des groupes, l'isopérimétrie sur M est contrôlée par la croissance du volume.

Théorème 4. *Si M est un revêtement galoisien d'une variété compacte de dimension d et si V_1 est la fonction de croissance du volume du groupe du revêtement, on a les inégalités isopérimétriques*

$$\sup\{\,|\Omega|^{(d-1)/d}, |\Omega|^{(D-1)/D}\,\} \leq C\,|\partial\Omega|\,, \quad \text{si } V_1(n) \simeq n^D \text{ et } d \leq D,$$
$$\inf\{\,|\Omega|^{(d-1)/d}, |\Omega|^{(D-1)/D}\,\} \leq C\,|\partial\Omega|\,, \quad \text{si } V_1(n) \simeq n^D \text{ et } d > D,$$
$$\sup\{\,|\Omega|^{(d-1)/d}, |\Omega|\,(\log(|\Omega|+2))^{-1/\alpha}\,\} \leq C\,|\partial\Omega|\,,$$

si $V_1(n) \geq e^{cn^\alpha}$, avec $0 < \alpha \leq 1$.

REMARQUE. Si Γ est non-moyennable, on montre

$$\sup\{\,|\Omega|^{(d-1)/d}, |\Omega|\,\} \leq C\,|\partial\Omega|\,,$$

ce qui raffine le résultat de [2].

PREUVE DU THÉORÈME. Identifions Γ à une fibre Γx_0, pour x_0 fixé dans N; Γ est alors un discrétisé de M au sens de [17]. Nous reprenons la démarche et les notations de [8, Section III]: $\varepsilon > 0$ est tel que $d(x,y) \geq \varepsilon$, pour tout $x, y \in \Gamma, x \neq y$, et $d(x,\Gamma) \leq \varepsilon$, pour tout $x \in M$; $(\varphi_x)_{x\in X}$ est une partition de l'unité convenablement subordonnée aux boules $B(x, 2\,\varepsilon)$.

Soit maintenant une fonction $\psi \in C_0^\infty(M)$; $\tilde{\psi}$ est la fonction sur Γ définie par

$$\tilde{\psi}(x) = \frac{1}{|B(x,\varepsilon)|}\int_{B(x,\varepsilon)} \psi\, d\xi\,,$$

et S l'opérateur de $C_0^\infty(M)$ dans lui-même défini par

$$S\psi = \sum_{x\in X} \tilde{\psi}(x)\varphi_x\,.$$

Si ϕ_1 est définie par $\phi_1(\lambda) = \inf\{n \in \mathbb{N}^* :\; V_1(n) > \lambda\}$, la proposition de la Section 1 donne, pour tout $\lambda > 0$ et pour tout $\psi \in C_0^\infty(M)$,

$$|\{|\tilde{\psi}| \geq \lambda\}| \leq \frac{2}{\lambda}\,\phi_1\Big(\frac{2}{\lambda}\|\tilde{\psi}\|_1\Big)\,\|\nabla\tilde{\psi}\|_1\,.$$

Maintenant il est clair que $\|\tilde{\psi}\|_1 \leq C\,\|\psi\|_1$ et que $\|\nabla\tilde{\psi}\|_1 \leq C\,\|\nabla\psi\|_1$ (suivant le contexte, ∇ désigne le gradient riemannien sur M ou bien le gradient discret sur Γ et les normes $\|\cdot\|_1$ sont prises par rapport à la mesure riemannienne sur M ou bien la mesure de comptage sur Γ; l'inégalité sur les gradients utilise une inégalité de Poincaré sur les boules de rayon ε, voir [8, Section III, Lemme 3]).

Soit N tel que, pour tout $y \in M$, il y ait au plus N fonctions φ_x non nulles en y. On a

$$|\{|S\psi| \geq N\lambda\}| \leq C\,|\{|\tilde{\psi}| > \lambda\}|$$

(ici, $|\cdot|$ désigne soit la mesure riemannienne, soit la mesure de comptage). En effet, si $K = \{x \in \Gamma : \ |\tilde{\psi}(x)| > \lambda\}$, notons $\tilde{K} = \{y \in M : \varphi_x(y) > 0$ pour au moins un $x \in K\}$. Sur $\tilde{K}^c$, on a $|S\psi| \leq N\lambda$, donc

$$|\{|S\psi| \geq N\lambda\}| \leq |\tilde{K}| \leq |K|\,|B(x, 2\varepsilon)|\,.$$

Finalement,

$$|\{|S\psi| \geq \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda}\,\phi_1\Big(\frac{C}{\lambda}\,\|\psi\|_1\Big)\ \|\nabla\psi\|_1\ .$$

D'autre part, on remarque comme dans [8, Lemme 3] que $\|\psi - S\psi\|_1 \leq C\,\|\nabla\psi\|_1$, donc a fortiori que

$$|\{|\psi - S\psi| \geq \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda}\,\|\nabla\psi\|_1\ .$$

Il en résulte que

$$|\{|\psi| \geq \lambda\}| \leq \frac{C'}{\lambda}\,\phi_1\Big(\frac{C}{\lambda}\,\|\psi\|_1\Big)\ \|\nabla\psi\|_1$$

(on se souviendra que $\phi_1 \geq 1$). Jointe à l'inégalité isopérimétrique locale (IL) de la Section 3, cette inégalité donne le théorème.

5. Graphes.

Soit X un graphe dénombrable et connexe, tel que tout sommet ait au plus N voisins. Si x et y sont deux points de X, on note $d(x,y)$ le nombre de pas du plus court chemin joignant x à y; $x \sim y$ signifie que x et y sont voisins. Si Ω est un ensemble de sommets de X, $|\Omega|$ désignera le cardinal de Ω, et $\partial\Omega$ l'ensemble des points de Ω qui sont voisins d'au moins un point de Ω^c. Pour $x \in X$ et $n \in \mathbb{N}^*$, nous noterons $B(x,n) =$

$\{y \in X : d(x,y) \leq n\}$ et $V(x,n)$ le cardinal de $B(x,n)$. Si f est une fonction à support fini sur X, son gradient sera défini par $\nabla f(x) = \sum_{y \in X, y \sim x} |f(x) - f(y)|$. Comme à la Section 1, on a clairement

$$|\partial\Omega| \leq \frac{1}{2} \|\nabla 1_\Omega\|_1 \leq N |\partial\Omega| .$$

La moyenne de f sur $B(x,n)$ sera notée $f_n(x)$:

$$f_n(x) = \frac{1}{V(x,n)} \sum_{y \in B(x,n)} f(y) .$$

Soit $V(n) = \inf_{x \in X} V(x,n)$ et, pour $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\phi(\lambda) = \inf\{n \in \mathbb{N}^* : V(n) > \lambda\}$. Si la propriété

$$(*) \qquad \|f - f_n\|_1 \leq C n \|\nabla f\|_1 , \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* ,$$

et pour toute fonction à support fini sur X, est vérifiée, on montre comme précédemment que

$$\frac{|\Omega|}{\phi(C|\Omega|)} \leq C |\partial\Omega| , \qquad \text{pour tout } \Omega \subset X .$$

En particulier, on a l'analogue du Théorème 3: nous dirons que X vérifie (P) si

$$\sum_{y \in B(x,n)} |f(y) - f_n(x)| \leq C n \sum_{y \in B(x,2n)} |\nabla f(y)| ,$$

pour tout $x \in X$ et $n \in \mathbb{N}^*$, et que X a la propriété de doublement du volume si la quantité $V(x, 2n)/V(x,n)$ est bornée indépendamment de $x \in X$ et de $n \in \mathbb{N}^*$. La propriété (P) s'exprime aussi en termes d'une constante de Cheeger relative aux boules et, jointe à la propriété de doublement du volume, elle entraîne $(*)$ comme à la Section 3.

Théorème 5. *Si X vérifie (P) et a la propriété de doublement du volume, alors X vérifie l'inégalité isopérimétrique:*

$$\textit{il existe } C > 0 \textit{ tel que, pour tout } \Omega \subset X , \qquad \frac{|\Omega|}{\phi(C|\Omega|)} \leq C |\partial\Omega| .$$

Nous allons maintenant recourir, pour obtenir (P), à des idées développées par Diaconis et Stroock dans [13]. Soit $x \in X$ et $n \in \mathbb{N}^*$;

pour chaque couple de points y, z dans $B(x,n)$, choisissons un chemin minimisant $\gamma_{y,z}$ joignant y et z. Soit $\Gamma_{x,n} = \{\gamma_{y,z} \,:\, y,z \in B(x,n)\}$; il est facile de voir que les éléments de $\Gamma_{x,n}$ ne sortent pas de $B(x,2n)$. Si e est une arête orientée du graphe X, nous noterons e_+ son origine et e_- son extrémité. On a alors, pour $y,z \in B(x,n)$,

$$|f(y) - f(z)| \leq \sum_{e \in \gamma_{y,z}} |f(e_+) - f(e_-)|,$$

et donc

$$\sum_{y,z \in B(x,n)} |f(y) - f(z)| \leq \sum_{y,z \in B(x,n)} \sum_{e \in \gamma_{y,z}} |f(e_+) - f(e_-)| \,.$$

Mais le membre de gauche de l'inégalité précédente majore

$$V(x,n) \sum_{y \in B(x,n)} |f(y) - f_n(x)| \,,$$

et le membre de droite est majoré par

$$\sum_{e \in B(x,2n)} \#\{\gamma \in \Gamma_{x,n} \,:\, e \in \gamma\} \; |f(e_+) - f(e_-)|$$

(par $e \in B(x,2n)$, nous entendons $e_+, e_- \in B(x,2n)$). Si l'on pose

$$K(x,n) = V(x,n)^{-1} \max_{e \in B(x,2n)} \#\{\gamma \in \Gamma_{x,n} \,:\, e \in \gamma\} \,,$$

on a donc

$$\sum_{y \in B(x,n)} |f(y) - f_n(x)| \leq K(x,n) \sum_{y \in B(x,2n)} |\nabla f(y)| \,.$$

L'inégalité (P) est donc vérifiée dès que $K(x,n) \leq Cn$. Il est tentant d'appeler graphe à courbure positive ou nulle un graphe tel qu'il existe un choix des $\Gamma_{x,n}$ pour lequel $K(x,n)$ vérifie la majoration demandée. Nous ne connaissons pas, en dehors du cas des graphes de Cayley, de méthode générale pour prouver qu'un graphe est à courbure positive au sens précédent.

En fait, il est naturel d'appliquer les idées ci-dessus directement à la propriété $(*)$, ce qui nous permettra d'éviter l'hypothèse de doublement du volume. Soit $x \in X$ et $n \in \mathbb{N}^*$; pour chaque y dans

$B(x,n)$, choisissons un chemin minimisant $\gamma_{x,y}$ joignant y à x. Notons $\Gamma'_{x,n} = \{\gamma_{x,y} \;:\; y \in B(x,n)\}$.

Ecrivons

$$\begin{aligned}|f(x) - f_n(x)| &\leq V(x,n)^{-1} \sum_{y \in B(x,n)} |f(x) - f(y)| \\ &\leq V(x,n)^{-1} \sum_{\gamma \in \Gamma'_{x,n}} \sum_{e \in \gamma} |f(e_+) - f(e_-)| ,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{x \in X} |f(x) - f_n(x)| &\leq \sum_{x \in X} V(x,n)^{-1} \sum_{y \in B(x,n)} |f(x) - f(y)| \\ &\leq \sum_{x \in X} V(x,n)^{-1} \sum_{\gamma \in \Gamma'_{x,n}} \sum_{e \in \gamma} |f(e_+) - f(e_-)| \\ &\leq \sum_{e \in E} \Big(\sum_{x \in B(e_+,n)} V(x,n)^{-1} \#\{\gamma \in \Gamma'_{x,n} | e \in \gamma\}\Big) \\ &\qquad \cdot |f(e_+) - f(e_-)| \\ &\leq K(n) \, \|\nabla f\|_1 ,\end{aligned}$$

où E désigne l'ensemble des arêtes orientées de X et

$$K(n) = \max_{e \in E} \sum_{x \in X} V(x,n)^{-1} \#\{\gamma \in \Gamma'_{x,n} \;:\; e \in \gamma\} .$$

Nous avons démontré le

Théorème 6. *Si $K(n) \leq Cn$, alors:*

il existe $C > 0$ tel que, pour tout $\Omega \subset X$, $\quad \dfrac{|\Omega|}{\phi(C\,|\Omega|)} \leq C\,|\partial\Omega|$.

REMARQUES. L'énoncé ci-dessus contient le Théorème 1. En effet, suivant les calculs de [12], on peut montrer que, lorsque X est le graphe de Cayley d'un groupe finiment engendré, on a $K(n) \leq Cn$, (et aussi d'ailleurs $K(x,n) \leq Cn$ si le groupe est à croissance polynômiale).

Une estimation du type $K(n) \leq Cn^\alpha$, $\alpha \geq 1$ entraîne

$$|\Omega| / \phi^\alpha(C\,|\Omega|) \leq C\,|\partial\Omega| .$$

Nous n'avons pas utilisé dans ce qui précède toute la souplesse de la méthode: en particulier, il suffit d'établir la propriété (*) en remplaçant les f_n par des moyennes sur des familles d'ensembles plus générales que des boules. Le lecteur intéressé construira facilement des graphes où (P) est fausse, mais qui peuvent être traités par ce moyen.

Nous allons maintenant laisser de côté les questions d'isopérimétrie et reprendre les idées précédentes, mais au niveau L^2, dans le but d'obtenir des informations sur la décroissance des marches aléatoires directement en termes de croissance du volume. Nous noterons $|\gamma|$ la longueur d'un chemin γ.

On a, par Cauchy-Schwarz,

$$|f(y) - f(z)|^2 \leq |\gamma_{y,z}| \sum_{e \in \gamma_{y,z}} |f(e_+) - f(e_-)|^2 ,$$

pour $y, z \in B(x,n)$. Il en résulte que

$$\sum_{y,z \in B(x,n)} |f(x) - f(y)|^2 \leq \sum_{y,z \in B(x,n)} |\gamma_{y,z}| \sum_{e \in \gamma_{y,z}} |f(e_+) - f(e_-)|^2 .$$

Le membre de gauche majore

$$V(x,n) \sum_{y \in B(x,n)} |f(y) - f_n(x)|^2 ,$$

et le membre de droite est majoré par

$$\sum_{e \in B(x,2n)} \sum_{\{\gamma \in \Gamma_{x,n} \,:\, e \in \gamma\}} |\gamma| \, |f(e_+) - f(e_-)|^2 .$$

Si l'on pose

$$K_2(x,n) = \max_{e \in B(x,2n)} \sum_{\{\gamma \in \Gamma_{x,n} \,:\, e \in \gamma\}} |\gamma| ,$$

on a donc

$$\sum_{y \in B(x,n)} |f(y) - f_n(x)|^2 \leq \frac{K_2(x,n)}{V(x,n)} \sum_{y \in B(x,2n)} |\nabla f(y)|^2 .$$

Mais $K_2(x,n)$ est toujours majoré par $2\,n\,V^2(x,n)$. Supposons maintenant que

$$C^{-1}\, n^D \leq V(x,n) \leq C\, n^D .$$

On a, d'après la majoration de $K_2(x,n)$,

$$\sum_{y\in B(x,n)} |f(y)-f_n(x)|^2 \le C\,n^{D+1} \sum_{y\in B(x,2n)} |\nabla f(y)|^2 \,.$$

Il est facile d'en déduire, puisque X a en particulier la propriété de doublement du volume, que

$$\|f-f_n\|_2 \le C\,n^{(D+1)/2}\,\|\nabla f\|_2 \,, \qquad \text{pour tout } \; n\in\mathbb{N}^* \,,$$

et pour tout fonction f à support fini sur X. Suivons maintenant la ligne de raisonnement esquissée dans le deuxième alinéa de la Section 2.2 ci-dessus

$$\|f\|_2 \le \|f-f_n\|_2 + \|f_n\|_2 \le C\,n^{(D+1)/2}\,\|\nabla f\|_2 + C\,n^{-D/2}\,\|f\|_1 \,,$$

donc, en optimisant sur n,

$$\|f\|_2^{1+(D+1)/D} \le C\;\|\nabla f\|_2\;\|f\|_1^{(D+1)/D}$$

(on a utilisé cette fois la minoration du volume). En utilisant les méthodes de [4] ou [11], on en déduit une estimation sur la marche aléatoire standard sur X.

Théorème 7. *Soit X un graphe tel que $C^{-1}\,n^D \le V(x,n) \le C\,n^D$. Soit p_k le noyau de la marche aléatoire standard sur X à l'instant k. Alors*

$$\sup_{x,y\in X} p_k(x,y) = O(k^{-D/(D+1)})\,.$$

Ceci précise le résultat de Varopoulos, valable pour tout graphe infini, suivant lequel

$$\sup_{x,y\in X} p_k(x,y) = O(k^{-1/2})$$

(voir [4] et [11]). D'un autre côté, il est exclu d'obtenir en général mieux que

$$\sup_{x,y\in X} p_k(x,y) = O(k^{-1})\,,$$

ne serait-ce que parce que X peut être récurrent. Par discrétisation ([8, Théorème 3]), on peut déduire des considérations précédentes

Théorème 8. *Soit M une variété riemannienne à courbure de Ricci minorée, et telle que $C^{-1}\, r^D \leq V(x,r) \leq C\, r^D$, pour tout $r \geq 1$ et pour tout $x \in M$. Alors*

$$\sup_{x,y\in M} p_t(x,y) = O(t^{-D/(D+1)}), \quad t \to +\infty\,,$$

où p_t est le noyau de la chaleur sur M.

On rapprochera cet énoncé du Théorème 3 de [5].

Remerciement. Les auteurs tiennent à remercier Nicholas Varopoulos, qui, après avoir ouvert la voie, a attiré leur attention à maintes reprises sur le problème de l'isopérimétrie optimale pour les groupes à croissance super-polynômiale.

Bibliographie.

[1] Alexopoulos, G., A lower estimate for central probabilities on polycyclic groups, prépublication.

[2] Brooks, R., The fundamental group and the spectrum of the Laplacian. *Comm. Math. Helvetici* **56** (1981), 581-598.

[3] Buser, P., A note on the isoperimetric constant. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **15** (1982), 213-230.

[4] Carlen, E., Kusuoka, S., Stroock, D., Upper bounds for symmetric Markov transition functions. *Ann. Inst. H. Poincaré, Probabilités et Statistique* **23** (1987), 245-287.

[5] Chavel, I., Feldman, E., Modified isoperimetric constants and large time heat diffusion in Riemannian manifolds. *Duke Math. J.* **64** (1991).

[6] Cheeger, J., Gromov, M., Taylor, M., Finite propagation speed, kernel estimates for functions of the Laplace operator and the geometry of complete Riemannian manifolds. *J. Differential Geom.* **17** (1982), 15-53.

[7] Coulhon, T., Sobolev inequalities on graphs and on manifolds, in *Harmonic Analysis and Discrete Potential Theory*, pp. 207-214, Picardello éd., Plenum Press, 1992.

[8] Coulhon, T., Noyau de la chaleur et discrétisation d'une variété riemannienne, à paraître dans *Isr. J. Math.*

[9] Coulhon, T., Ledoux, M. Isopérimétrie, décroissance du noyau de la chaleur et transformations de Riesz: un contre-exemple, à paraître dans *Arkiv. Mat.*

[10] Coulhon, T., Saloff-Coste, L., Puissances d'un opérateur régularisant. *Ann. Inst. H. Poincaré, Probabilités et Statistique* **26** (1990), 419-436.

[11] Coulhon, T., Saloff-Coste, L., Marches aléatoires non symétriques sur les groupes unimodulaires. *C. R. Acad. Sci. Paris* **310** (1990), 627-630.

[12] Diaconis, P., Saloff-Coste, L., Comparison theorems for reversible Markov chains, à paraître dans *Ann. Appl. Probab.*

[13] Diaconis, P., Stroock, D., Geometric bounds for eigenvalues of Markov chains. *Ann. Appl. Probab.* **1** (1991), 39-61.

[14] Grigorchuk, R., Degrees of growth of finitely generated groups and the theory of invariant means. *Math. U.S.S.R. Izvestiya* **25** (1985).

[15] Guivarc'h, Y., Croissance du volume et périodes des fonctions harmoniques. *Bull. Soc. Math. France* **101** (1973), 333-379.

[16] Hebisch, W., Saloff-Coste, L., Gaussian estimates for Markov chains and random walks on groups, à paraître dans *Ann Probab.*

[17] Kanai, M., Rough isometries and combinatorial approximations of geometries of non-compact riemannian manifolds. *J. Math. Soc. Japan* **37** (1985), 391-413.

[18] Li, P., Yau, S. Estimates of eigenvalues of a compact riemannian manifold. *Proc. Symp. Pure Math.* **36** (1980), 205-239.

[19] Li, P., Yau, S., On the parabolic kernel of the Schrödinger operator. *Acta Math.* **156** (1986), 153-201.

[20] Milnor, J., A note on curvature and fundamental group. *J. Differential Geom.* **2** (1968), 1-7.

[21] Robinson, D., *Elliptic operators and Lie groups.* Oxford Univ. Press, 1991.

[22] Saloff-Coste, L., Analyse sur les groupes de Lie à croissance polynômiale. *Arkiv Math.* **28** (1990), 315-331.

[23] Saloff-Coste, L., A note on Poincaré, Sobolev and Harnack inequalities. *Duke Math. J.* **65** (1992), 27-38.

[24] Varopoulos, N., Hardy-Littlewood theory for semigroups. *J. Funct. Anal.* **63** (1985), 240-260.

[25] Varopoulos, N., Random walks and Brownian motion on manifolds. *Symp. Math.* **XXIX** (1987), 97-109.

[26] Varopoulos, N., Analysis on Lie Groups. *J. Funct. Anal.* **76** (1988), 346-410.

[27] Varopoulos, N., Small time gaussian estimates of heat diffusion kernels. Part I: the semigroup technique. *Bull. Sc. Math.* **113** (1989), 253-277.

[28] Varopoulos, N., Groups of superpolynomial growth, in *Proceedings of the I.C.M. satellite conference on Harmonic Analysis*, Springer Verlag, 1991.

[29] Varopoulos, N., Saloff-Coste, L., Coulhon, T., *Analysis and Geometry on Groups*, Cambridge Tracts in Mathematics **100**, 1992.

Recibido: 10 de marzo de 1.992

Thierry Coulhon*
Département de Mathématiques
Université de Cergy-Pontoise
95806 Cergy Pontoise Cedex, FRANCE

and

Laurent Saloff-Coste
CNRS, Laboratoire Analyse Complexe et Géométrie
Université Paris VI
75252 Paris Cedex 05, FRANCE

* Le présent travail a été réalisé pendant un détachement du premier auteur au CNRS.