Revista Matemática Iberoamericana
Vol. 10, N.° 1, 1994

Décompositions dans certaines algèbres de Fréchet de fonctions holomorphes

Ahmed Sebbar

1. Introduction.

Dans ce travail, nous étudions le problème de décomposition suivant: Étant donnés deux ouverts bornés de $\mathbb{C}^p$, Ω_1 et Ω_2 (vérifiant certaines conditions) et étant donnée une matrice $A(z)$, carrée d'ordre n, dont les coefficients sont des fonctions holomorphes dans $\Omega_1 \cap \Omega_2$, ayant un prolongement C^∞ à l'adhérence $\overline{\Omega_1 \cap \Omega_2}$, peut-on trouver deux matrices $A_1(z)$, $A_2(z)$ holomorphes dans Ω_1 et Ω_2 respectivement et se prolongeant de manière C^∞ à $\overline{\Omega_1}$ et $\overline{\Omega_2}$ telles que sur $\Omega_1 \cap \Omega_2$ on ait

$$A = A_1 \, A_2 \, .$$

On connait l'importance de cette décomposition dans la classification des fibrés analytiques (voir par exemple [1], [8] et leurs bibliographies). Dans [8], une décomposition a déjà été obtenue en utilisant la structure topologique de l'espace $A^\infty(\Omega)$ des fontions holomorphes dans Ω qui se prolongent en des fonctions C^∞ sur $\overline{\Omega}$. Cet espace est une limite projective d'espaces de Banach E_n et grâce a un théorème de Mitagg-Leffler, on se ramène à établir la décomposition dans chacun des E_n, ce qui se fait à l'aide du théorème des fonctions implicites dans les espaces de Banach.

La métohode porposée ici est plus directe, nous travaillons directement dans les espaces de Fréchet en développant l'argument des fonctions implicites dans ces espaces. On met alors en évidence certaines propriétés intéressantes de l'espace de Frechét $A^{\infty}(\Omega)$ permettant l'introduction des opérateurs de régularisation de Nash [6] et de montrer un théorème des fontions implicites de type Nash-Moser. Nous suivons pour cela la présentation de R. S. Hamilton [4] et de S. Lojasiewicz et de E. Zehnder [5]. La présente méthode est antérieure à celle de [8] et peut sembler plus compliquée, mais elle est plus effective et peut s'appliquer à d'autres types de factorisation (de type Birkhoff par exemple, voir [7, Théorèmes 8.1.1 et 8.11.5]).

Les notations sont celles de [8] auquel nous revenons pour tous les résultats d'analyse complexe que nous utilisons dans le présent travail. Le second paragraphe est consacré à l'introduction des opérateurs de Nash et à poser le problème de la décomposition dans le cadre des matrices. Le troisième paragraphe traite du théorème des fontions implicites dont nous avons besoin pour la décomposition. Le quatrième paragraphe étudie la décomposition des sections de certains fibrès analytiques, certains calculs -à la formule de Campbell-Hausdorff- sont nécessaires, ils seront traités en appendice.

2. Cas de la propriété (P)

Dans cette section, nous considérons deux ouverts Ω_1 et Ω_2, pseudo -convexes, bornés et à bord lisse et C^{∞} tels que

$$\overline{\Omega_1 \backslash \Omega_2} \cap \overline{\Omega_2 \backslash \Omega_1} = \varnothing ,$$
$$\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega \text{ est pseudo-convexe à bord lisse et } C^{\infty}.$$

Les bords de Ω_1, Ω_2 et Ω vérifient la propriété (P) suivante:

(P) Pour tout $M > 0$, $\lambda \in PSH(\Omega) \cap C^{\infty}(\overline{\Omega})$ (respectivement $PSH(\Omega_i) \cap C^{\infty}(\overline{\Omega}_i)$, $i = 1, 2$), $0 \leq \lambda \leq 1$ telle que pour tout $z \in b\Omega$ (respectivement $z \in b\Omega_i, i = 1, 2$)

$$\sum_{i,j=1}^{p} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(z)\, t_i \bar{t}_j \geq M\, |t|^2 .$$

L'intérêt de cette condition est formulé par un résultat de D. Catlin [2].

Théorème [2]. *Soit Ω un ouvert pseudo-convexe, borné, à bord lisse et C^∞ dont le bord $b\Omega$ vérifie la propriété* (P), *il existe une constante $C_m > 0$ telle que pour toute $(0,1)$-forme α, $\overline{\partial}$-fermée et à coefficients dans $H^m(\Omega)$, la solution u de $\overline{\partial}u = \alpha$, qui est orthogonale aux fonctions holomorphes satisfait à l'estimation*

$$\|u\|_m^2 \leq C_m\left(\|\alpha\|_m^2 + \|u\|^2\right),$$

où $\|u\|^2 = \|u\|^2_{L^2(\Omega)}$. En particulier, si α et dans $C^\infty_{(0,1)}(\overline{\Omega}), u$ est dans $C^\infty(\overline{\Omega})$.

Dans le même travail [2], l'auteur montre que la propriété (P) est satisfaite par une classe très large d'ouverts de $\mathbb{C}^p$.

Suivant la terminologie de [9], on pose

Définition 2.1. *Un bon espace de Fréchet E est un espace dont la topologie est définie à l'aide d'une famille croissante de normes $\|\cdot\|_0 \leq \|\cdot\|_1 \leq \cdots$ et où il existe une famille d'opérateurs $S_t : E \to E$, $t > 0$ tels que il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $x \in E$*

$$\begin{aligned} \|S_t x\|_i &\leq C_{ij}\, t^{i-j+r}\|x\|_j\,, && i + n_0 \geq j\,, \\ \|S_t x - x\|_i &\leq C_{ij} t^{i-j+r}\|x\|_j\,, && i + n_0 \leq j\,. \end{aligned}$$

Les C_{ij} sont des constantes dépendant de i et j, mais non de x, ni de t.

Proposition 2.2. *Soit Ω un ouvert borné, pseudo-convexe à bord lisse et C^∞ et tel que $b\Omega$ satisfait à la propriété* (P), *l'espace de Fréchet $A^\infty(\Omega)$ est un bon espace de Fréchet.*

Nous avons besoin du résultat qui suit.

Lemme 2.3. *Soit $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions bornées sur $\mathbb{R}^n$ et $B(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) :\ D^\alpha f \in L^\infty(\mathbb{R}^n),\ \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n\}$, on munit $B(\mathbb{R}^n)$ de la topologie définie à l'aide de la famille de semi-normes*

$$\|f\|_m = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ |\alpha|\leq m}} |D^\alpha f(x)|\,.$$

L'espace de Fréchet $B(\mathbb{R}^n)$ est un bon espace de Fréchet, en conséquence l'espace $C^\infty(\overline{\Omega})$ est un bon espace de Fréchet.

REMARQUE. Le fait que $C^\infty(\overline{\Omega})$ soit un bon espace de Fréchet résulte aussi de l'isomorphisme bien connu $C^\infty(\overline{\Omega}) \simeq S$ où S est l'espace des suites à décroissance rapide, qui est bon ([4]); ici, nous avons besoin d'inégalités explicites faisant intervenir directement le système de normes définies dans $C^\infty(\overline{\Omega})$.

PREUVE DU LEMME 2.3. On remarque que la construction de Nash [6] s'adapte. Soit φ une fonction C^∞, à support dans $B(0,1)$, boule centrée en 0 et de rayon 1, $\varphi \equiv 1$ sur $B(0,1/2)$ et soit $\Psi = \widehat{\varphi}$ la transformée de Fourier de φ, alors $\Psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $\int_{\mathbb{R}^n} P(x)\,\Psi(x)\,dx = P(0)$ pour tout polynôme sur $\mathbb{R}^n$. Pour $f \in B(\mathbb{R}^n)$ et $t > 0$, on pose

$$S_t f(x) = t^n \int \Psi(t(x-y))f(y)dy = \int \Psi(y) f\big(x - \frac{y}{t}\big)\,dt\,.$$

On vérifie, comme dans [6] que

$$\begin{aligned} \|S_t f\|_i &\le C_{ij}\, t^{i-j}\, \|f\|_j\,, \qquad i \ge j\,, \\ \|S_t f - f\|_i &\le C_{ij}\, t^{i-j}\, \|f\|_j\,, \qquad j \ge i\,, \end{aligned}$$

et donc $B(\mathbb{R}^n)$ est bon. Puisque Ω est à bord régulier, le Théorème de Seeley permet de trouver un opérateur linéaire $\mathcal{E}$,

$$C^\infty(\overline{\Omega}) \xrightarrow{\mathcal{E}} C_0^\infty(\widetilde{\Omega})$$

où $\widetilde{\Omega}$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $\overline{\Omega} \subset \widetilde{\Omega}$ et

$$\mathcal{E}(f)|_{\overline{\Omega}} = f, \quad \|\mathcal{E}(f)\|_{m,\widetilde{\Omega}} \le C_m \|f\|_{m,\Omega}, \quad f \in C^\infty(\widetilde{\Omega}), m \in \mathbb{N}\,.$$

Ainsi, on a une suite

$$C^\infty(\widetilde{\Omega}) \xrightarrow{\mathcal{E}} B(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{R} C^\infty(\widetilde{\Omega})$$

où $R(f) = f|_{\overline{\Omega}}, f \in B(\mathbb{R}^n)$ et $R \circ \mathcal{E} = I_{C^\infty(\overline{\Omega})}$. Soit $(S_t'')_{t>0}$ la famille d'opérateurs dans $B(\mathbb{R}^n)$, définie précédemment, on pose

$$S_t' = R \circ S_t'' \circ \mathcal{E}\,.$$

$(S'_t)_{t>0}$ est une famille d'opérateurs dans $C^\infty(\overline{\Omega})$, vérifiant aussi, $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$,

$$\begin{aligned} \|S'_t\|_i &\le C_{ij}\, t^{i-j}\, \|f\|_j\,, \qquad i \ge j\,,\\ \|S'_t f - f\|_i &\le C_{ij}\, t^{i-j}\, |f\|_j\,, \qquad i \le j\,, \end{aligned}$$

d'où le lemme.

Revenons à la Proposition 2.2. Puisque le bord de Ω vérifie la propriété (P), on peut considérer le projecteur de Bergman

$$P : C^\infty(\overline{\Omega}) \to A^\infty(\Omega)$$

alors $Pf = u - f$ où u est la solution de $\overline{\partial} u = \overline{\partial} f$, qui est orthogonale aux fonctions holomorphes, par le Théorème de D. Catlin: pour tout m entier,

$$\begin{aligned} \|Pf\|_{H^m(\Omega)} &\le \|u\|_{H^m(\Omega)} + \|f\|_{H^m(\Omega)}\\ &\le C_m\, \|f\|_{H^{m+1}(\Omega)}\,. \end{aligned}$$

(En effet : $\|u\|^2_{H^m(\Omega)} \le C_m\, (\|f\|^2_{H^{m+1}(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)}) \le C_m\, (\|f\|_{H^{m+1}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)})^2$ on utilise ensuite $\|u\|_{L^2(\Omega)} \le \|f\|_{L^2(\Omega)} \le \|f\|_{H^{m+1}(\Omega)}$).

Considérons à présent la suite

$$A^\infty(\Omega) \xrightarrow{\mathcal{J}} C^\infty(\overline{\Omega}) \xrightarrow{P} A^\infty(\Omega) \quad (\mathcal{J} \text{ injection canonique})$$

on a $P \circ \mathcal{J} = I_{A^\infty(\Omega)}$. Si l'on pose

$$\begin{cases} S_t : A^\infty(\Omega) \to A^\infty(\Omega)\,,\\ \quad S_t = P \circ S'_t \circ \mathcal{J}\,. \end{cases}$$

On a grâce au lemme d'injection de Sobolev $H^{m+p}(\Omega) \to C^m(\overline{\Omega})$, que

$$\begin{aligned} \|S_t f\|_i &= \|P \circ S'_t \circ \mathcal{J}(f)\|_i\\ &\le C_i\, \|S'_t(f)\|_{H^{p+1}(\Omega)}\\ &\le C_i\, \|S'_t(f)\|_{p+i+1}\\ &\le C_{ij}\, t^{i-j}\, \|f\|_{j+p+1}\,, \end{aligned}$$

si $i \ge j$ et

$$\|S_t f - f\|_i = \|P \circ (S'_t - 1) \circ \mathcal{J}(f)\|_i$$

$$\begin{aligned}&\leq C_i \,\|(S'_t - 1)\circ \mathcal{J}(f)\|_{H^{p+i+1}(\Omega)}\\&\leq C_i \,\|(S'_t - 1)\circ \mathcal{J}(f)\|_{p+i+1}\\&\leq C_{ij}\, t^{i-j}\, \|f\|_{j+p+1}\,.\end{aligned}$$

si $i \leq j$. Les constantes intervenant dans ces inégalités changent à chaque étape mais ne dépendent que de i et de j (et aussi de p, qui est fixé, $p = \dim \mathbb{C}^p$), la proposition est démontrée.

REMARQUES 2.4. 1) Soient $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ trois entiers et $f \in A^\infty(\Omega) \subset C^\infty(\overline{\Omega})$, f vérifie

$$\begin{aligned}\|f\|_\beta &\leq \|S_t f - f\|_\beta + \|S_t f\|_\beta\\&\leq C_{\beta,\gamma}\, t^{\beta-\gamma}\, \|f\|_{\gamma+p} + C_{\beta,\alpha}\, t^{\beta+\alpha}\, \|f\|_{\alpha+p}\,, \qquad t > 0\,.\end{aligned}$$

En minimisant par rapport à t la fonction

$$t \to C_{\beta,\gamma}\, t^{\beta-\gamma}\, \|f\|_{\gamma+p} + C_{\beta,\gamma}\, t^{\beta-\gamma}\, \|f\|_{\alpha+p}$$

on a

$$\|f\|_\beta \leq C_{\alpha,\beta,\gamma}\, \|f\|_{\alpha+p}^{(\beta-\gamma)/(\alpha-\gamma)}\, \|f\|_{\gamma+p}^{(\beta-\alpha)/(\gamma-\alpha)}$$

et si l'on considère f comme élément de $C^\infty(\overline{\Omega})$, il vient

$$\begin{aligned}\|f\|_\beta &\leq \|S'_t f - f\|_\beta + \|S'_t f\|_\beta\\&\leq C_{\beta,\gamma}\, t^{\beta-\gamma}\, \|f\|_\gamma + C_{\beta,\alpha}\, t^{\beta+\alpha}\, \|f\|_\alpha\\&\leq C_{\alpha,\beta,\gamma}\, \|f\|_\alpha^{(\beta-\gamma)/(\alpha-\gamma)}\, \|f\|_\gamma^{(\beta-\alpha)/(\gamma-\alpha)}.\end{aligned}$$

Dans la toute la suite, on ne retiendra que la deuxième inégalité qui est plus précise.

2) La seule existence d'opérateurs $(S_t)_t$ sur $A^\infty(\Omega)$ montre, grâce à un théorème de Vogt [10] que $A^\infty(\Omega)$ est un sous-espace de S, espace des suites à décroissance rapide. En effet soit α_0 un entier quelconque fixé et $\beta \geq \alpha_0$ un autre entier, l'inégalité obtenue dans la Remarque 1) avec $\alpha_0 \leq \beta \leq 2\beta - \alpha_0$ devient $\|f\|_\beta^2 \leq C_{\alpha,\beta,\gamma}\, \|f\|_{\alpha_0+p}\, \|f\|_{2\beta-\alpha_0+p}$, pour toute f dans $A^\infty(\Omega)$, ceci est exactement la propriété (D.N.) de [10].

3) L'existence de régularité globale pour les solutions u de $\overline{\partial} u = \alpha$ dans les ouverts Ω dont le bord vérifie une propriété telle que (P) fait de l'espace $A^\infty(\Omega)$ un quotient de S. En effet, dans [10], on caractérise les

espaces de Fréchet nucléaires qui sont quotients de S par la propriété -dite propriété (Ω)- suivante:

(Ω) Pour tout q, il existe q_0 tel que pour tout k, il existe n et une constante positive $C = C(q, q_0, k, n \in \mathbb{N})$ tels que pour tout $r > 0$

$$U_{q_0} \subset C\, r^n\, U_k + \frac{1}{r}\, U_q \,.$$

On montre dans [10] que $C^\infty(\overline{\Omega})$ vérifie la propriété (Ω), avec pour tout entier m, $U_m = \{f \in C^\infty(\overline{\Omega}) : \ \|f\|_m \leq 1\}$. Pour voir que $A^\infty(\Omega)$ vérifie aussi (Ω), fixons un entier q et soit q_0 l'entier associé à $q+p+1$ et écrivons l'inclusion précédente avec $k+p+1$ ($p = \dim \mathbb{C}^p$),

$$U_{q_0} \subset C'\, r^n\, U_{k+p+1} + \frac{1}{r}\, U_{q+p+1}\,, \qquad (r > 0)\,.$$

Soit $f \in U_{q_0} \cap A^\infty(\Omega)$, il y a donc $f_1' \in U_{k+p+1}$ et $f_2' \in U_{q+p+1}$ tels que $f = C' r^n\, f_1' + f_2'/r$. La $(0,1)$-forme $\omega = -C' r^n\, \overline{\partial} f_1' = \overline{\partial} f_2'/r$ est $\overline{\partial}$-fermée et à coefficients dans $C^\infty(\overline{\Omega})$, il existe $\alpha \in C^\infty(\overline{\Omega})$ telle que $\overline{\partial}\alpha = \omega$. On pose

$$f_1 = f_1' - \frac{1}{C' r^n}\, \alpha, \qquad f_2 = f_2' + r\alpha\,, \qquad f_1, f_2 \in A^\infty(\Omega)\,.$$

Soient $C_k, \ldots$ les constantes intervenant dans le lemme d'injection de Sobolev ou dans les majorations des normes $H^{k+p}(\Omega)$ par $\|\cdot\|_{k+p}$ on a

$$\begin{aligned}
\|f_1\|_k &= \left\| f_1' - \frac{1}{C' r^n}\, \alpha \right\|_k \\
&\leq C_k \left\| f_1' - \frac{1}{C'\ r^n}\, \alpha \right\|_{H^{k+p}(\Omega)} \\
&\leq C_k \left(\|f_1'\|_{H^{k+p}(\Omega)} + C^1\, r^n\, \frac{1}{C'\, r^n}\, \|f_1'\|_{H^{k+p+1}(\Omega)} \right) \\
&\leq C_k' \, \|f_1'\|_{k+p+1}\,,
\end{aligned}$$

de même

$$\|f_2\|_q \leq C_q' \, \|f_2'\|_{q+p+1}\,,$$

comme

$$f = C'\, r^n\, f_1 + \frac{1}{r}\, f_2 \in C_k\, r^n (U_k \cap A^\infty(\Omega)) + \frac{1}{r}\, C_q (U_q \cap A^\infty(\Omega))\,.$$

Il vient

$$U_{q_0} \cap A^\infty(\Omega) \subset C'(C'_q)^n\, C'_k\big(\frac{r}{C'_q}\big)^n\, U_k \cap A^\infty(\Omega) + \frac{C'_q}{r}(U_q \cap A^\infty(\Omega))$$

puisque r est positif quelconque, avec $C = C'\,(C'_q)^n\, C'_k$

$$U_{q_0} \cap A^\infty(\Omega) \subset C\, r^n\, (U_k \cap A^\infty(\Omega)) + \frac{1}{r}(U_q \cap A^\infty(\Omega))\,.$$

En résumé, on a montré la proposition suivante.

Proposition 2.5. *Si Ω est un ouvert pseudo-convexe borné, à bord lisse et C^∞ dont le bord vérifie une propriété telle que la propriété* (P), *l'espace de Fréchet nucléaire $A^\infty(\Omega)$ est à la fois un sous-espace et un quotient de l'espace S des suites complexes à décroissance rapide.*

(L'espace $A^\infty(\Omega)$ est nucléaire puisque c'est un sous espace fermé de $C^\infty(\overline{\Omega})$ qui l'est).

Dans la suite, nous aurons besoin du lemme simple suivant.

Lemme. *Soit X un espace métrique compact et soit E un bon espace de Fréchet, l'espace $C(X, E)$ des applications continues de X dans E est bon.*

Rappelons que la topologie de $C(X, E)$ est définie à l'aide des normes suivantes, pour $f \in C(X, E)$,

$$\|f\|_i = \sup_{x \in X} \|f(x)\|_i\,, \qquad i \in \mathbb{N}\,.$$

Si $(S'_t)_{t>0}$ est la famille d'opérateurs sur E, on définit sur $C(X, E)$ les opérateurs

$$\begin{aligned} S_t : C(X, E) &\to C(X, E) \\ f &\mapsto S_t f \end{aligned}$$

où $(S_t f)(x) = S'_t(f(x))$, on en déduit aisément des inégalités sur S_t analogues à celles données sur S'_t.

Comme conséquence immédiate et pour un ouvert Ω dont le bord vérifie (P).

Corollaire 2.6. *Soit s un entier ≥ 2, $M(s; A^\infty(\Omega))$ l'algèbre des matrices $s \times s$ à coefficients dans $A^\infty(\Omega)$, si X est un métrique compact, l'espace $C(X, M(s, A^\infty(\Omega)))$ est un bon espace de Fréchet.*

Tout d'abord, remarquons que si E_1 et E_2 sont deux bons espaces de Fréchet avec deux familles d'opérateurs $(S_t^1)_{t>0}$ et $(S_t^2)_{t>0}$ correspondantes, l'espace produit $E_1 \times E_2$ est, lui aussi bon, il suffit de poser $S_t(x,y) = (S_t^1 x, S_t^2 y)$, $(x,y) \in E_1 \times E_2$ en munissant ce dernier, par exemple, du système de normes

$$(x,y) \in E_1 \times E_2 : \ \|(x,y)\|_i = \sup\{\|x\|_i, \|y\|_i\}, \qquad i \in \mathbb{N}.$$

Si bien que si $f \in M(s; A^\infty(\Omega)), f = (f_{ij})_{ij}$ et en posant encore: $\|f\|_n = \sup_{i,j} \|f_{ij}\|_n$. On a pour $f, g \in M(s, A^\infty(\Omega))$

$$\begin{aligned} \|f+g\|_n &\leq \|f\|_n + \|g\|_n , \\ \|fg\|_n &\leq s\,\|f\|_n\,\|g\|_n . \end{aligned}$$

Si $S_t'' : A^\infty(\Omega) \to A^\infty(\Omega)$, on définit

$$S_t' : \ M(s, A^\infty(\Omega)) \to M(s, A^\infty(\Omega))$$

par $(S_t' f)_{ij} = S_t''(f_{ij})$ et

$$S_t : \ C(X, M(s, A^\infty(\Omega)) \to C(X, M(s, A^\infty(\Omega))$$

par $(S_t f)(x) = S_t'(f(x))$, où $f \in C(X, M(s, A^\infty(\Omega))$ et $x \in X$. Ainsi

$$\begin{aligned} \|S_t f\|_i &\leq C_{ij}\, t^{i-j}\, \|f_a\|_{j+p+1} , &\quad i \geq j , \\ \|S_t f - f\|_i &\leq C_{ij}\, t^{i-j}\, \|f\|_{j+p+1} , &\quad i \leq j . \end{aligned}$$

Les C_{ij} sont des constantes ne dépendant que de i et de j. Si maintenant S est un fermé de X et E un espace de Fréchet, on note par: $C_S(X, E) = \{f : \ X \to E, \ f$ continue et $f(t) = 0, \ t \in S\}$, c'est aussi un espace de Fréchet, quand on le munit de la topologie induite par celle de $C(X, E)$. Il est aussi bon si $C(X, E)$ est bon, c'est-à-dire si E est bon. Avant d'énoncer le théorème principal de cette section, précisons la situation.

On considère deux ouverts Ω_1, Ω_2 de $\mathbb{C}^p$, pseudo-convexes, bornés et à bord lisse et C^∞ tels que

i) $\overline{\Omega_1 \backslash \Omega_2} \cap \overline{\Omega_2 \backslash \Omega_1} = \varnothing$,

ii) $\Omega_1 \cup \Omega_2$ est pseudo-convexe, à bord lisse et C^∞,

iii) les bords de Ω_1, Ω_2 et $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ vérifient (P).

Dans ces conditions, on a le

Lemme 2.7. *Pour tout s entier ≥ 2, on a la suite exacte suivante*

$$\begin{aligned} 0 &\to C_S(X, M(s, A^\infty(\Omega_1 \cup \Omega_2))) \\ &\xrightarrow{\mathcal{J}} C_S(X, M(s, A^\infty(\Omega_1))) \oplus C_S(X, M(s, A^\infty(\Omega_2)) \\ &\xrightarrow{R} C_S(X, M(s, A^\infty(\Omega_1 \cap \Omega_2))) . \end{aligned}$$

avec de plus R inversible à droite et d'inverse linéaire et continu.

PREUVE. La suite $0 \to A^\infty(\Omega_1 \cup \Omega_2) \xrightarrow{i} A^\infty(\Omega_1) \oplus A^\infty(\Omega_2) \xrightarrow{\alpha} A^\infty(\Omega_1 \cap \Omega_2) \to 0$ est toujours exacte sous les seules hypothèses i) et ii). L'hypo - thèse iii) implique que de plus α est inversible à droite, d'inverse linéaire et continu, en effet si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{C}^p)$, $\varphi \equiv 1$ sur $\overline{\Omega_1 \backslash \Omega_2}$ et $\varphi \equiv 0$ sur $\overline{\Omega_2 \backslash \Omega_1}$, la forme (0,1)-forme $\omega = f\ \overline{\partial}\varphi$ est $\overline{\partial}$-fermée et à coefficients dans $C^\infty(\overline{\Omega_1 \cup \Omega_2})$ et le fait que $\Omega_1 \cup \Omega_2$ ait un bord vérifiant (P) montre qu'il existe un opérateur $T_1 : C_{0,1}^\infty(\overline{\Omega_1 \cup \Omega_2}) \to C^\infty(\overline{\Omega_1 \cup \Omega_2})$ tel que $\overline{\partial}(T_1(f\overline{\partial}\varphi)) = f\overline{\partial}\varphi$, pour tout $f \in A^\infty(\Omega_1 \cap \Omega_2)$ et

$$\|T_1(f\overline{\partial}\varphi)\|_{H^m(\Omega_1 \cap \Omega_2)} \leq C_m\ \|f\overline{\partial}\varphi\|_{H^m(\Omega_1 \cup \Omega_2)}$$

ce qui montre, grâce au lemme d'injection de Sobolev et le fait que $f\overline{\partial}\varphi$ soit à coefficients dans $C^\infty(\overline{\Omega_1 \cup \Omega_2})$, que $T_1(f\overline{\partial}\varphi)$ est dans $C^\infty(\overline{\Omega_1 \cup \Omega_2})$. Evidemment, si $f_1 = (1-\varphi)f + T_1(f\overline{\partial}\varphi)$ et $f_2 = T(f\overline{\partial}\varphi) - f\varphi$, le couple $(f_1, f_2) \in A^\infty(\Omega_1) \times A^\infty(\Omega_2)$ dépend linéairement de f. Soit

$$\begin{aligned} \ell :\ A^\infty(\Omega_1 \cap \Omega_2) &\to A^\infty(\Omega_1) \times A^\infty(\Omega_2) \\ f &\mapsto (f_1, f_2) \end{aligned}$$

on a

$$\|\ell(f)\|_n \leq C_n\ \|f\|_{n+p}\ , \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Si maintenant $f \in C(X, M(s; A^\infty(\Omega_1 \cap \Omega_2))$, on pose

$$\mathcal{L}(f)(t) = \ell(f(t)) , \qquad t \in X ,$$

alors

$$\mathcal{L}:\ C(X, M(s, A^\infty(\Omega_1 \cap \Omega_2)) \\ \to C(X, M(s, A^\infty(\Omega_1)) \times C(X, m(s, A^\infty(\Omega_2))$$

est linéaire et $R \circ \mathcal{L}(f)(t) = \alpha$, $(\mathcal{L}(f)(t) = \alpha \circ \ell(f(t)) = f(t),\ t \in X)$ c'est à dire

$$R \circ \mathcal{L} = I_{C(X, M(s; A^\infty(\Omega_1 \cap \Omega_2))}$$

on vérifie facilement que

$$\|\mathcal{L}(f)\|_n \leq C_n \|f\|_{n+p}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Enfin, à cause de la linéarité de ℓ, l'application $\mathcal{L}$ induit une application notée encore $\mathcal{L}$

$$C_S(X, M(s; A^\infty(\Omega_1 \cap \Omega_2)) \\ \to C_S(X, M(s, A^\infty(\Omega_1)) \times C_S(X, M(s, A^\infty(\Omega_2)).$$

avec

$$R \circ \mathcal{L} = I_{C_S(X, M(s; A^\infty(\Omega_1 \cap \Omega_2))}.$$

Le théorème principal de cette section est

Théorème 2.8. *Soient* $E_i = C_S(X, M(s; A^\infty(\Omega_i)), i = 1, 2$; $E = C_S(X, M(s; A^\infty(\Omega_1 \cap \Omega_2))$ *et* $U_i = \{f \in E :\ \|f\|_{i.1} \leq s^{-1}\}$. *Si* φ *est l'application*

$$\varphi : U_1 \times U_2 \subset E_1 \times E_2 \to E \\ (x, y) \mapsto xy - x - y$$

il existe $\delta > 0$ *et* $s_0 \in \mathbb{N}$ *tels que si* $V = \{y \in E :\ \|y\|_{s_0} < \delta\}$, *il existe une application continue* $\psi : V \to U_1 \times U_2$, $\varphi(\psi(y)) = y$, *pour tout* y *dans* V.

Avant de démontrer ce théorème signalons qu'il entraine un "lemme de matrices holomorphes" dans la classe A^∞. Si $z \in C(X, M(s, A^\infty(\Omega_1 \cap \Omega_2)))$, $z(t) = e$ pour tout $t \in S$ et $\|z - e\|_{s_0}, < \delta$, soit $z' = z - e$, z' est dans V, il va donc exister $x' \in U_1$ et $y' \in U_2$ tels que $x'y' - x' - y' = z'$. Soient $x = e - x'$ et $y = e - y'$ alors $xy = z$ et $x(t) = y(t) = e$ pour $t \in S$ où e est la matrice identité de $M(s, A^\infty(\Omega_i))$

$i = 1, 2$, de plus, si $\delta < s^{-1}$ (situation qu'on va réaliser en construisant le voisinage V), z est inversible. La norme de matrices considérées ici est $\|A\| \leq \sup_{1 \leq i,j \leq s} |a_{ij}|$. Les antécédents x, y sont aussi inversibles. Enfin, le théorème ne donne de factorisation que pour les z qui sont voisins de la matrice identité dans $C(X, M(s, A^\infty(\Omega_1 \cap \Omega_2)))$ et $z(t) = e$, $t \in S$ mais si par exemple $X = \varnothing$ ou X est contractible en un point et $GL(s; A^\infty(\Omega_1 \cap \Omega_2))$ est connexe (par exemple si $\Omega_1 \cap \Omega_2$ est convexe) on montre facilement que $C(X, GL(X, A^\infty(\Omega_1 \cap \Omega_2)))$ est connexe par arcs, et en raisonnant comme dans la première partie, tout $z \in C(X, GL(s, A^\infty(\Omega_1 \cap \Omega_2)))$ s'écrit alors $z = xy$ où x (respectivement y) est dans $C(X, GL(s, A^\infty(\Omega_1)))$ (respectivement $C(X, GL(s, A^\infty(\Omega_2)).)$

Pour montrer le théorème, on a besoin de quelques inégalités.

Lemme 2.9. *Dans l'algèbre $C(X, M(s, A^\infty(\Omega)) = A$, Ω étant un ouvert à bord lisse (sans conditions supplémlentaires), on a les inégalités suivantes:*

a) Si $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{N}^3$, $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, $f \in A$,

$$\|f\|_\beta^{\gamma-\alpha} \leq C \, \|f\|_\gamma^{\beta-\alpha} \, \|f\|_\alpha^{\gamma-\beta} .$$

b) Si $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ appartient au segment joignant (k, ℓ) et (m, n) et si $f, g \in A$,

$$\|f\|_i \, \|g\|_j \leq C \left(\|f\|_k \, \|f\|_\ell + \|f\|_m \, \|g\|_n \right),$$

c) Si $f, g \in A$ et n est un entier,

$$\|fg\|_n \leq C \left(\|f\|_n \, \|g\|_0 + \|f\|_0 \, \|g\|_n \right).$$

Les constantes C intervenant dans ces inégalités dépendent naturellement des indices $\alpha, \beta, \ldots, i, j$ mais non des éléments $f \in A$. Les inégalités de b) et c) se déduisent de celles de a) par des méthodes habituelles. Pour montrer les inégalités de a), on se ramène facilement au cas où f, g sont dans $C^\infty(\overline{\Omega})$, le résultat se déduit alors de l'existence des opérateurs (S_t) sur $C^\infty(\overline{\Omega})$ comme on l'a fait dans les Remarques 2.4 (voir [4]).

Lemme 2.10. *Soit B un élément de $C(X, M(s, A^\infty(\Omega)))$ tel que $\|B - I\|_1 < \varepsilon$ où ε est assez petit, B est inversible dans $C(X, M(s, A^\infty(\Omega))$*

et pour tout entier $n \geq 1$ il existe une constante C_n ne dépendant que de n (et de s) tels que

$$\|B^{-1}\|_n \leq C_n \, \|B\|_n \, .$$

PREUVE. On procède essentiellement comme dans [8]. Remarquons d'abord que B^{-1} existe dans $C(X, M(s, A^0(\Omega))$ où $A^0(\Omega)$ est l'algèbre des fonctions holomorphes dans Ω et continues sur $\overline{\Omega}$ et à cause de la présence du déterminant, B^{-1} est en fait dans $C(X, M(s; A^\infty(\Omega))$. D'autre part, il existe une constante C, indépendante des éléments B vérifiant l'hypothèse du lemme telle que $\|B\|_0 \leq C$. En effet si $\varepsilon < s^{-1}$,

$$B^{-1} - I = \sum_{n \geq 1} (I - B)^n$$

et

$$\|B^{-1} - I\|_0 \leq \sum_{n \geq 1} s^n \, \|B - I\|_0^n \leq \frac{s\varepsilon}{1 - s\varepsilon}$$

et donc

$$\|B^{-1}\|_0 \leq \|I\|_0 + \frac{s\varepsilon}{1 - s\varepsilon} = C < +\infty \, .$$

Pour montrer les inégalités d'ordre supérieur ou égal à 1, on identifie B à une matrice $s \times s$ en la variable $z \in \overline{\Omega}$ et dépendant du paramètre $t \in X$. Pour t fixé et puisque $B^{-1}(t,z) B(t,z) = I$ pour tout opérateur différentiel du premier ordre D sans terme constant on a $DB^{-1}(t,z) = -B^{-1}(t,z) \, (DB(t,z)) \, B^{-1}(t,z)$ donc

$$\|DB^{-1}(t,\cdot)\|_0 \leq C_1 \, \|DB(t,\cdot)\|_0 \quad \text{et} \quad \|DB^{-1}\|_0 \leq C_1 \, \|DB\|_0 \, ,$$

ou encore $\|B^{-1}\|_1 \leq C_1 \|B\|_1$

Supposons que l'on ait prouvé $\|B^{-1}\|_p \leq C_p \, \|B\|_p$, $p \leq n-1$, $n \geq 2$.

Soit n' un multi-indice, $|n'| \leq n$ et $D^{n'}$ un opérateur différentiel d'ordre n'

$$\begin{aligned} O = D^{n'} I &= D^{n'} (B(t,z) \, B^{-1}(t,z)) \\ &= D^{n'} B(t,z) \, B^{-1}(t,z) + B(t,z) \, D^{n'} B^{-1}(t,z) \\ &\quad + \sum_{\substack{p+q=n' \\ |p| \leq n-1, \ |q| \leq n-1}} C_{pq} \, D^p \, B(t,z) \, D^q \, B^{-1}(t,z) \, . \end{aligned}$$

On en déduit, grâce aux hypothèses $\|B^{-1}\|_p \leq C_p \|B\|_p$, $p \leq n-1$, que

$$\|B(t,\cdot)\|_{|p|} \|B^{-1}(t,\cdot)\|_{|q|} \leq \|B\|_{|p|} \|B^{-1}\|_{|q|} \leq C \|B\|_{|p|} \|B\|_{|q|}$$

et par l'inégalité *a*) du Lemme 2.9,

$$\begin{aligned} \|B\|_p \|B\|_q &\leq C \|B\|_{|n'|}^{|p|/|n'|} \|B\|_0^{1-|p|/|n'|} \|B\|_{|n'|}^{|q|/|n'|} \|B\|_0^{1-|q|/|n'|} \\ &\leq C \|B\|_{|n'|} \leq C \|B\|_n \end{aligned}$$

et comme

$$\|D^{n'} B(t,\cdot)\|_0 \leq \|B(t,\cdot)\|_{|n'|} \leq \|B\|_n$$

il vient que

$$\|B^{-1}\|_n \leq C_n \|B\|_n \,.$$

On est en mesure de montrer que l'application φ du théorème principal est différentiable (au sens de Gâteaux), que sa différentielle est une "bonne" application linéaire, qu'elle est inversible à droite et que son inverse est aussi bon (au sens de [9]).

Proposition 2.11. *Soient* $E_i = C_S(X, M(s, A^\infty(\Omega_i)))$, $i = 1,2$, $E = C_S(X, M(s, A^\infty(\Omega_1 \cap \Omega_2)))$ *et* $U_i = \{x \in E_1 : \|x\|_{i,1} < s^{-1}\}$. *L'application* $\varphi : U_1 \times U_2 \to E$, $\varphi(x,y) = xy - x - y$ *est différentiable au sens Gâteaux et il existe une application linéaire* L,

$$\begin{aligned} L : \; & U_1 \times U_2 \times E \to E_1 \times E_2 \\ & ((x,y),\eta) \mapsto L(x,y)\eta \end{aligned}$$

telle que $d\varphi(x,y)L(x,y)\eta = \eta$ *;* $\eta \in E$, $(x,y) \in U_1 \times U_2$.

Par définition

$$d\varphi(x,y)(h,k) = \lim_{t\to 0} \frac{\|\varphi((x,y)+t(h,k)) - \varphi(x,y)\|}{t} \,.$$

On en déduit que

$$d\varphi(x,y)(h,k) = h(y-e) + (x-e)k \,.$$

Afin de déterminer l'application L, on résoud en $(h,k) \in E_1 \times E_2$, l'équation $d\varphi(x,y)L(x,y)\eta = \eta$, c'est-à-dire que $h(y-e)+(x-e)k = \eta$.

Comme $x-e$ et $y-e$ sont inversibles si $(x,y) \in U_1 \times U_2$, il est équivalent de résoudre

$$(x-e)^{-1}h + k(y-e)^{-1} = (x-e)^{-1}\eta\,(y-e)^{-1}\,.$$

Mais si η est donné dans E, nous savons qu'il existe $(\xi_1, \xi_2) \in E_1 \times E_2$ tel que

$$\xi_1 + \xi_2 = (x-e)^{-1}\eta\,(y-e)^{-1}\,,$$

de plus le couple (ξ_1, ξ_2) dépend linéairement de $(x-e)^{-1}\eta(y-e)^{-1}$ lorsque η varie. On pose

$$h = (x-e)\,\xi_1 \in E_1\,, \qquad k = \xi_2\,(y-e) \in E_2\,.$$

Ceci définit une application

$$L : U_1 \times U_2 \times E \to E_1 \times E_2\,,$$
$$L(x,y)\eta = ((x-e)\xi_1, \xi_2(y-e))\,,$$

telle que $d\varphi(x,y)L(x,y)\eta = \eta$, d'où la proposition.

On désigne par $R(x,y)$ le reste dans le développement de φ,

$$R(x,y)(h,k) = \varphi((x,y)+(h,k)) - \varphi(x,y) = df(x,y)(h,k) = hk\,.$$

Dans la suite, nous aurons besoin des estimations simples suivantes.

Proposition 2.12. *Pour tout n, il existe $C_n > 0$ tels que si $(x,y) \in U_1 \times U_2$, $(h,k) \in E_1 \times E_2$ et $\eta \in E$*

a) $\|\varphi(x,y)\|_n \le C_n \,\|(x,y)\|_n$,

b) $\|d\varphi(x,y)(h,k)\|_n \le C_n\,(\|(h,k)\|_0\,\|(x,y)\|_n + \|(h,k)\|_n)$,

c) $\|L(x,y)\eta\|_n \le C_n\,(\|(x,y)\|_{n+p}\,\|\eta\|_0 + \|\eta\|_{n+p})$,

d) $\|R(x,y)(h,k)\|_n \le C_n\,\|(h,k)\|_0\,\|(h,k)\|_n$.

Ces inégalités résultent de ce qui précède, à titre d'exemple, montrons comment on obtient *c*). Par construction de L, si $(x,y) \in U_1 \times U_2$, $\eta \in E$,

$$L(x,y)\eta = ((x-e)\xi_1, \xi_2(y-e))\,, \qquad \xi_1 + \xi_2 = (x-e)^{-1}\eta(y-e)^{-1}\,,$$

avec de plus; $i = 1, 2$,

$$\|\xi_i\|_{H^m(\Omega_i)} \leq C_m \, \|(x-e)^{-1}\eta(y-e)^{-1}\|_{H^m(\Omega')} \,, \qquad m \in \mathbb{N}\,,$$

où on a noté pour simplifier $\Omega' = \Omega_1 \cap \Omega_2$. Par le lemme d'injection de Sobolev,

$$\|\xi_i\|_{n,\Omega_i} \leq C_n \, \|(x-e)^{-1}\eta(y-e)^{-1}\|_{n+p,\Omega'}$$

et par le Lemme 2.9.c)

$$\begin{aligned}\|(x-e)^{-1}\eta(y-e)^{-1}\|_{n+p,\Omega'} &\leq C_n \big(\|(x-e)^{-1}\eta\|_{0,\Omega'} \, \|(y-e)^{-1}\|_{n+p,\Omega'} \\ &\qquad + \|(x-e)^{-1}\|_{n+p,\Omega'} \\ &\qquad \cdot \|(y-e)^{-1}\|_{0,\Omega'}\big) \\ &\leq C_n \big(\|\eta\|_{0,\Omega'} \, \|(y-e)^{-1}\|_{n+p,\Omega'} \\ &\qquad + \|(x-e)^{-1}\eta\|_{n+p,\Omega'}\big)\,,\end{aligned}$$

car si $(x,y) \in U_1 \times U_2$ $\|(x-e)^{-1}\|_0 \leq C$ et $\|(y-e)^{-1}\|_0 \leq C$.

En utilisant deux fois le même lemme, on trouve

$$\|(x-e)^{-1}\|_{n+p,\Omega'} \leq C_n \left(\|\eta\|_{n+p,\Omega'} + \|(x-e)^{-1}\|_{n+p,\Omega'} \, \|\eta\|_0\right)$$

et

$$\begin{aligned}\|(x-e)^{-1}\eta(y-e)^{-1}\|_{n+p,\Omega'} \leq C_n \big(&\|\eta\|_{0,\Omega'} \, \|(y-e)\|_{n+p,\Omega'} \\ &+ \|\eta\|_{n+p,\Omega'} \\ &+ \|(x-e)\|_{n+p,\Omega'} \, \|\eta\|_{0,\Omega'}\big)\,,\end{aligned}$$

comme

$$\|(x-e)\|_{n+p,\Omega'} \leq \|(x-e)\|_{n+p,\Omega_1} \quad \text{et} \quad \|(y-e)\|_{n+p,\Omega'} \leq \|(y-e)\|_{n+p,\Omega_2}$$

il vient enfin

$$\|\xi_i\|_{\Omega_i} \leq C_n \left(\|(x,y)\|_{n+p} \, \|\eta\|_0 + \|\eta\|_n\right).$$

En recommançant de la même façon avec

$$\|(x-e)\xi_1\|_{n+p,\Omega_1} \quad \text{et} \quad \|\xi_2(y-e)\|_{n+p,\Omega_2}$$

on aboutit à l'inégalité c).

3. Preuve du théorème principal.

Dans ce paragraphe, on montre le théorème principal du Paragraphe 2, il s'agit d'un théorème des fonctions implicites dans les espaces de Fréchet. On sait qu'en toute généralité, un tel théorème ne peut être vrai. De nombreux contre-exemples se trouvent dans [4]. Cependant, on a pu dégager depuis [6], une classe d'espaces de Fréchet où un théorème des fonctions implicites est possible (voir [4], [5] et [6] et leurs bibliographies). L'espace $A^\infty(\Omega)$ -qui est limite projective d'espaces de Banach-fait partie de cette classe si le bord de l'ouvert Ω est régulier et vérifie une propriété telle que la propriété (P) du Paragraphe 2. Notre situation est voisine de celles déjà étudiées à un décalage d'un entier p près dans la définition des opérateurs S_t et dans les estimations portant sur l'inverse L de la différentielle. Ce décalage est dû aux estimations dont on dispose à l'heure actuelle sur le projecteur de Bergman.

La situation est formulée par le théorème suivant.

Théorème. *Soient E_1 et E_2 deux espaces de Fréchet, on suppose qu'il existe des opérateurs $S_t : E_1 \to E_1$ tels que pour p entier non nul*

$$\begin{aligned} \|S_t x\|_i &\le C_{ij}\, t^{i-j}\, \|x\|_{j+p}\,, \qquad i \ge j\,,\\ \|S_t x - x\|_i &\le C_{ij}\, t^{i-j}\, \|x\|_{j+p}\,, \qquad i \le j\,. \end{aligned}$$

Soit U l'ouvert de E_1, $U = \{x \in E : \ \|x\|_1 \le a\}$ où a est un réel inférieur ou égal à 1 et soit $\varphi : U \to E_2$ une application différentiable au sens de Gâteaux, $\varphi(0) = 0$ et dont la différentielle $d\varphi$ est inversible à droite, d'inverse L, vérifiant en outre pour $x \in U$ et $y_1 \in E_1$, $y_2 \in E_2$ les inégalités

$$\|\varphi(x)\|_n \le C_n\,(1 + \|x\|_n)\,,$$

$$\|d\varphi(x) y_1\|_n \le C_n\,(\|x\|_n\,\|y_1\|_0 + \|y_1\|_n)\,,$$

$$\|L(x) y_2\|_n \le C_n\,(\|x\|_{n+p}\,\|y_2\|_0 + \|y_2\|_{n+p})\,,$$

$$\|R(x) y_1\|_n \le C_n\,(\|x\|_n\,\|y_1\|_0^2 + \|y\|_0\,\|y_1\|_n)\,.$$

Alors φ admet une section locale: il existe V, voisinage de 0 dans E_2 et une application ψ de V dans U telle que, pour tout y dans V, $\varphi(\psi(y))= y$.

PREUVE. On veut montrer que si y est dans un voisinage de 0 dans E_2, il y a un x dans U tel que $\varphi(x) = y$. Posons, comme dans [5], [9] et [4],

$$x_0 = 0\,, \qquad x_{q+1} = x_q + S_{t_q} L(x_p) z_q\,, \qquad z_q = y - \varphi(x_q)$$

et

$$\Delta x_q = x_{q+1} - x_q\,,$$

où $(t_q)_q$ est la suite suivante: Si $\tau = 3/2$, $t_q = 2^{\tau^q}$ de sorte que $t_{q+1} = t_q^\tau$. Avant de montrer que la suite (x_q) est convergente vers un élément x de V vérifiant $\varphi(x) = y$, on renforce sensiblement l'inégalité sur φ : $\|\varphi(x)\|_n \leq C'_n(1 + \|x\|_n)$ en utilisant le fait que $\varphi(0) = 0$ et que pour tout x dans U, y_1 dans E_1,

$$\|d\varphi(x)y_1\| \leq C_n\,(\|x\|_n\,\|y_1\|_0 + \|y_1\|_n)\,.$$

La formule de Taylor avec reste intégral appliquée à φ donne, U étant convexe

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^1 d\varphi(tx)x\,dt = \int_0^1 d\varphi(tx)x\,dt\,.$$

Si $x \in U$,

$$\|\varphi(x)\|_n \leq \int_0^1 |d\varphi(tx)x\|_n\,dt \leq C'_n\,(\|x\|_n\,\|x\|_0 + \|x\|_n)\,.$$

Comme $\|x\|_0 \leq a \leq 1$, on a, avec une nouvelle constante $C_n = 2C'_n$,

$$\|\varphi(x)\|_n \leq C_n \|x\|_n\,, \qquad x \in U\,.$$

Dans toute la suite, c'est cette dernière estimation qu'on utilisera.

Lemme 3.1. *Si $\|y\|_1 \leq a$ et $\|x_j\|_1 \leq a$ pour $j = 1, \ldots, q-1$, pour tout entier n, il existe une constante K_n indépendante de q, telle que*

$$\|x_q\|_n \leq K_n\, t_q^{4p+1}\, \|y\|_n\,.$$

PREUVE. Commençons par remarquer que l'élément $z_j = y - \varphi(x_j)$ vérifie

$$\|z_j\|_n \leq \|y\|_n + \|\varphi(x_j)\|_n \leq \|y\|_n + C_n\,\|x_j\|_n\,.$$

Sans diminuer la généralité, on va supposer que, pour n entier donné, les constantes C_n intervenant dans les majorations du théorème précèdent sont égales à une même constante, notée encore C_n, supérieure ou égale à 1. Ainsi,

$$\|z_j\|_n \leq C_n\left(\|y\|_n + \|x_j\|_n\right).$$

En particulier $\|z_j\|_1 \leq 2\,C_1$, dès que $\|x_j\|_1 \leq a$. Grâce aux estimations sur les opérateurs S_t, nous avons, si $n \geq 2p$,

$$\begin{aligned}
\|\Delta x_j\|_n &= \|S_{t_j} L(x_j) z_j\|_n \, C_{n,n-2p}\, t_j^{2p}\, \|L(x_j) z_j\|_{n-p} \\
&\leq C_{n,n-2p}\, C_{n-p}\, t_j^{2p}\left(\|x_j\|_n \|z_j\|_0 + \|z_j\|_n\right) \\
&\leq 2\,C_1\, C_{n,n-2p}\, C_{n-p}\, t_j^{2p}\left(\|x_j\|_n + \|z_j\|_n\right).
\end{aligned}$$

D'autre part $\|x_j\|_n + \|z_j\|_n \leq 2C_n(\|x_j\|_n + \|y\|_n)$ donc

$$\|\Delta x_j\|_n \leq 4\,C_1\, C_n\, C_{n-p}\, C_{n,n-2p}\, t_j^{2p}\left(\|x_j\|_n + \|y\|_n\right).$$

On va poser pour simplifier $A_n = 4C_1C_nC_{n-p}C_{n,n-2p}$. Revenons au lemme. Soit j, $1 \leq j \leq q-1$, puisque $x_j = x_{j-1} + \Delta x_j$, on a

$$\begin{aligned}
\|x_j\|_n + \|y\|_n &\leq \|x_{j-1}\|_n + \|y\|_n + \|\Delta x_{j-1}\|_n \\
&\leq A_n\, t_{j-1}^{2p}\left(\|x_{j-1}\|_n + \|y\|_n\right) + \left(\|x_{j-1}\|_n + \|y\|_n\right) \\
&\leq 2A_n\, t_{j-1}^{2p}\left(\|x_{j-1}\|_n + \|y\|_n\right).
\end{aligned}$$

Car A_n et t_{j-1}^{2p} sont supérieurs à 1. En itérant, il vient

$$\begin{aligned}
\|\Delta x_j\|_n &\leq (2A_n)^2\, t_j^{2p}\, t_{j-1}^{2p}\left(\|x_{j-1}\|_n + \|y\|_n\right) \\
&\;\;\vdots \\
&\leq (2A_n)^q\left(t_j t_{j-1}\cdots t_0\right)^{2p}\|y\|_n\,, \qquad (x_0 = 0).
\end{aligned}$$

Remarquons que si $j \leq q-1$

$$(t_j t_{j-1}\ldots t_0)^{2p} \leq 2^{2p(\tau^q-1)/(\tau-1}\leq 2^{4p\tau^q}$$

et que

$$x_q = (x_q - x_{q-1}) + \cdots + (x_1 - x_0) = \sum_{j=0}^{q-1}\Delta x_j$$

il vient alors

$$\|x_q\|_n \leq \sum_{j=0}^{q-1} \|\Delta x_j\|_n \leq q\,(2A_n)^q\, 2^{4p\tau^q}\, \|y\|_n \,.$$

On veut trouver K_n, indépendant de q tel que

$$q\,(2A_n)^q\, 2^{4p\tau^q} \|y\|_n \leq K_n\, t_q^{4p+1}\, \|y\|_n$$

pour cela on écrit $t_q^{4p+1} = 2^{(4p+1)\tau^q}$ et il suffit alors que

$$q\,(2A_n)^q \leq K_n\, 2^{\tau^q} \,.$$

Ce qui résulte facilement d'un passage à la limite après division par 2^{τ^q}.

Afin d'alléger quelque peu les calculs qui vont suivre on introduit

$$C' = C^4\, C_0\, C_{2p}\, C_{23p}\, C_{24p}\, C_{2p,22p}\, K_{24p} \,,$$
$$C'' = 2^2\, C_{2p}\, C_p^2\, C_{2p,0}^2 \,, \qquad C = C' + C'' \,, \qquad M = C + 2^{10p}$$

et on fixe δ, $0 < \delta < (a^{-1}M^3)^{-1}$.

Proposition 3.2. *Si $\|y\|_{24p} < \delta$, tous les x_q vérifient $\|x_q\|_{2p} \leq a$.*

PREUVE. On va prouver par récurrence sur q et sous l'hypothèse $\|y\|_{24p} < \delta$ les implications $(R_{q-1})_{q \geq 1}$ suivantes

$$(R_{q-1}) \qquad \|x_j\|_{2p} \leq a,\ 0 \leq j \leq q-1 \Rightarrow \|z_q\|_{2p} \leq M\, t_q^{-10p}\, \|y\|_{24p} \,.$$

Admettons pour un instant que $(R_{q'})$ est vraie pour $q' \geq 0$, on va prouver la proposition, par récurrence sur q. Si $q = 0$, $x_0 = 0$ et il n'y a rien à démontrer. Supposons que $\|x_j\|_{2p} \leq a$, $0 \leq j \leq q$. Cela veut dire en particulier que $R_{q'-1}$ est vraie pour tout $q' \leq q+1$. Pour j, $0 \leq j \leq q$, on a

$$\begin{aligned}
\|\Delta x_j\|_{2p} &\leq \|S_{t_j} L(x_j) z_j\|_{2p} \\
&\leq C_{2p,0}\, t_j^{2p}\, \|L(x_j) z_j\|_p \\
&\leq C_{2p,0}\, C_p\, t_j^{2p}\, (\|x_j\|_{2p}\, \|z_j\|_0 + \|z_j\|_{2p}) \\
&\leq 2\, C_{2p,0}\, C_p\, t_j^{2p}\, \|z_j\|_{2p} \,.
\end{aligned}$$

Comme R_{j-1} est vraie $\|z_j\|_{2p} \le M\, t_j^{-10p}\, \|y\|_{24p}$, par suite

$$\begin{aligned}\|x_{q+1}\|_{2p} &\le \sum_{j=0}^{q} \|\Delta x_j\|_{2p} \\ &\le 2\, C_p\, C_{2p,0}\, M\, \|y\|_{24p} \sum_{j=0}^{q} t_j^{-8p} \\ &\le 2\, C_p\, C_{2p,0}\, M\, \|y\|_{24p}\ ,\end{aligned}$$

car

$$\sum_{j=0}^{q} t_j^{-8p} \le \sum_{j=0}^{+\infty} t_j^{-8p} = \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{-8p r^j} \le \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-8p(1+j/2)} < 1\,.$$

Comme $\delta < (a^{-1}M^3)^{-1}$

$$\|x_{q+1}\|_{2p} \le C''\, M\, \|y\|_{24p} \le a\,.$$

La proposition sera donc démontrée si l'on prouve les implications $(R_{q-1})_{q\ge 1}$. Pour ce faire, en notant $\varphi'(x) = d\varphi(x)$, on établit d'abord une identité. On a, par définition de la suite $(x_j)_j$,

$$\varphi(x_{j+1}) = \varphi(x_j) + \varphi'(x_j)\,\Delta x_j + R(x_j)\,\Delta x_j$$

et donc

$$\begin{aligned} z_{j+1} = y - \varphi(x_{j+1}) &= z_j - \varphi'(x_j)\,\Delta x_j - R(x_j)\,\Delta x_j \\ &= z_j - \varphi'(x_j)\, S_{t_j}\, L(x_j) z_j - R(x_j)\,\Delta x_j \\ &= \varphi'(x_j) L(x_j) z_j - \varphi'(x_j)\, S_{t_j}\, L(x_j) z_j - R(x_j)\,\Delta x_j \\ &= \varphi'(x_j)(I - S_{t_j}) L(x_j) z_j - R(x_j)\,\Delta x_j\ . \end{aligned}$$

Cette identité, pour $j = 0$ donne,

$$\|z_1\|_{2p} \le C_{2p} \|(I - S_{t_0}) L(x_0) z_0\|_{2p} + \|R(x_0)\Delta x_0\|_{2p}\ .$$

On majore successivement chacun des facteurs dans le second membre

$$\begin{aligned} C_{2p}\, \|(I - S_{t_0}) L(x_0) z_0\|_{2p} &\le C_{2p}\, C_{2p,22p}\, t_0^{-20p}\, \|L(x_0) y\|_{23p} \\ &\le C_{2p}\, C_{2p,22p}\, C_{23p}\, t_0^{-20p} \\ &\quad \cdot \big(\|x_0\|_{23p}\, \|y\|_0 + \|y\|_{24p}\big) \end{aligned}$$

$$\leq C_{2p}\, C_{2p,22p}\, C_{23p}\, t_0^{-20p}\, \|y\|_{24p}\ , \quad (x_0 = 0)\,.$$

Le second facteur se majore comme suit

$$\begin{aligned}\|R(x_0)\Delta x_0\|_{2p} \leq C_{2p}\, \|\Delta x_0\|_{2p}^2 &\leq C_{2p}\, \|S_{t_0} L(x_0) y\|_{2p}^2 \\ &\leq C_{2p}\, (C_{2p,0}\, t_0^{2p}\, \|L(x_0)y\|_p)^2 \\ &\leq C_{2p}\, C_{2p,0}^2\, t_0^{4p}\, \|L(x_0)y\|_p^2 \\ &\leq C_{2p}\, C_{2p,0}\, C_p^2\, t_0^{4p}\, \|y\|_{2p}^2\ .\end{aligned}$$

En remarquant que $t_0^{10p} = 2^{10p} < M$ et $\|y\|_{2p} \leq \|y\|_{24p}$ il vient que

$$C_{2p}\, \|\Delta x_0\|_{2p}^2 \leq C_{2p}\, C_{2p,0}^2\, C_p^2\, M^2\, t_0^{-16p}\, \|y\|_{24p}^2\ .$$

En ajoutant les deux majorations obtenues, on a

$$\begin{aligned}\|z_1\|_{2p} \leq (&C_{2p}\, C_{2p,22p}\, C_{23p}\, t_0^{-20p} \\ &+ C_{2p}\, C_{2p,0}^2\, C_p^2\, M^2\, t_0^{-16p}\, \|y\|_{24p})\, \|y\|_{24p}\ .\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}C_{2p}\, C_{2p,22p}\, C_{23p}\, t_0^{-20p} &\leq C'\, t_0^{-20p} \\ &= C'\, t_1^{-20p\cdot(2/3)} = C'\, t_1^{-40p/3} \leq C'\, t_1^{-10p}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}C_{2p}\, C_{2p,0}^2\, C_p^2\, M^2\, t_0^{-16p} &\leq C''\, M^2\, t_0^{-16p} \\ &= C''\, M^2\, t_1^{-16p\cdot(2/3)} \leq C''\, M^2\, t_1^{-10p}\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\|z_1\|_{2p} &\leq (C' + C''\, M^2\, \|y\|_{24p})\, t_1^{-10p}\, \|y\|_{24p} \\ &\leq C\,(1 + M^2\, \|y\|_{24})\, t_1^{-10p}\, \|y\|_{24p}\ .\end{aligned}$$

et d'après le choix des constantes C, M et δ

$$C\,(1 + M^2\, \|y\|_{24p}) \leq C\,(1 + M^2 \delta) \leq M\,,$$

il vient finalement

$$\|z_1\|_{2p} \leq M\, t_1^{-10p}\, \|y\|_{24p}\ .$$

A présent, montrons que R_{q-1} implique R_q. Supposons que $\|x_j\|_{2p} \le a$ pour j, $0 \le j \le q$, il s'agit de montrer que $\|x_{q+1}\|_2 p \le M\, t_{q+1}^{-10p}\, \|y\|_{24p}$. On procède exactement comme pour z_1, en partant de

$$z_{q+1} = \varphi'(x_q)(I - S_{t_q})L(x_q)z_q - R(x_q)\Delta x_q$$

$$\begin{aligned}
\|\varphi'(x_q)(I - S_{t_q})L(x_q)z\|_{2p} &\le C_{2p}\,\big(\|(I - S_{t_q})L(x_q)z_q\|_0\, \|x_q\|_{2p} \\
&\qquad + \|(I - S_{t_q})L(x_q)z_q\|_{2p}\big) \\
&\le 2\, C_{2p}\, \|(I - S_{t_q})L(x_q)z_q\|_{2p} \\
&\le 2\, C_{2p}\, C_{2p,22p}\, t_q^{-20p}\, \|L(x_q)z_q\|_{23p} \\
&\le 2\, C_{2p}\, C_{2p,22p}\, C_{23p}\, t_q^{-20p} \\
&\quad \cdot \big(\|x_q\|_{24p}\, \|z_q\|_0 + \|z_q\|_{24p}\big)\,,
\end{aligned}$$

($\|x_q\|_{2p} \le a \le 1$), on a vu que

$$\|z_q\|_0 \le \|y\|_0 + \|\varphi(x_q)\|_0 \le \|y\|_0 + C_0\, \|x_q\|_0 \le 2\, C_0$$

($\|y\|_0 \le \delta \le 1 \le C_0$) par suite

$$\begin{aligned}
\|x_q\|_{24p}\, \|z_q\|_0 + \|z_q\|_{24p} &\le 2\, C_0\big(\|x_q\|_{24p} + \|z_q\|_{24p}\big) \\
&\le 2\, C_0\big(\|x_q\|_{24p} + \|y\|_{24p} + C_{24p}\, \|x\|_{24p}\big) \\
&\le 2^2\, C_0\, C_{24p}\, \big(\|x_q\|_{24p} + \|y\|_{24p}\big) \\
&\le 2^2\, C_0\, C_{24p}\, \big(K_{24p}\, t_q^{4p+1} + 1\big)\, \|y\|_{24p} \\
&\le 2^3\, C_0\, C_{24p}\, K_{24p}\, t_q^{4p+1}\, \|y\|_{24p}\,,
\end{aligned}$$

(Lemme 1). Si bien que

$$\begin{aligned}
\|\varphi'(x_q)(I - S_{t_q})L(x_q)z_q\|_{2p} &\le 2^4\, C_0\, C_{2p}\, C_{23p}\, C_{24p} \\
&\quad \cdot C_{2p,22p}\, K_{24p}\, t_q^{-16p+1}\, \|y\|_{24p} \\
&\le C'\, t_q^{-16p+1}\, \|y\|_{24p} \le C'\, t_{q+1}^{-10p}\, \|y\|_{24p}\,.
\end{aligned}$$

Reste à majorer le terme $\|R(x_q)\Delta\, x_q\|_{2p}$,

$$\begin{aligned}
\|R(x_q)\Delta x_q\|_{2p} &\le C_{2p}\, (\|x_q\|_{2p}\, \|\Delta x_q\|_0^2 + \|\Delta x_q\|_0\, \|\Delta x_q\|_{2p}) \\
&\le 2\, C_{2p}\, \|\Delta x_q\|_{2p}^2 \\
&\le 2\, C_{2p}\, \|S_{t_q} L(x_q)z_q\|_{2p}^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq 2\,C_{2p}\left(C_{2p,0}\,t_q^{2p}\,\|L(x_q)z_q\|_p\right)^2\\
&\leq 2\,C_{2p}\,C_{2p,0}^2\,C_p^2\,t_q^{4p}(\|x_q\|_{2p}\,\|z_q\|_0+\|z_q\|_{2p})\\
&\leq 2\,C_{2p}\,C_{2p,0}^2\,C_p^2\,2^2t_q^{4p}\,\|z_q\|_{2p}^2\\
&\leq 2\,C''\,t_q^{4p}\,\|z_q\|_{2p}^2\,,
\end{aligned}
$$

($\|x_q\|_{2p}\leq a\leq 1$ et $\|\Delta x_q\|_0\leq\|\Delta x_q\|_{2p}$). Comme R_{q-1} est vraie $\|z_q\|_{2p}\leq M\,t_q^{-10p}\,\|y\|_{24p}$, par conséquent

$$
\|R(x_q)\Delta x_q\|_{2p}\leq 2\,C''\,M^2\,t_q^{-16p}\,\|y\|_{24p}^2\leq 2\,C''\,M^2\,t_{q+1}^{-10p}\,\|y\|_{24p}^2\,.
$$

En définitive,

$$
\begin{aligned}
\|z_{q+1}\|_{2p}&\leq(C'+2\,C''M^2\,\|y\|_{24p})\,t_{q+1}^{-10p}\|_{24p}\\
&\leq C\,(1+2\,M^2\delta)\,t_{q+1}^{-10p}\,\|y\|_{24p}\\
&\leq M\,t_{q+1}^{-10p}\,\|y\|_{24p}\,.
\end{aligned}
$$

Ceci achève la preuve de la proposition.

Lemme 3.3. *Pour tout entier k, il existe une constante $C=C(k)$, un entier $n=n(k)$ tels que si $\|y\|<\delta$*

$$
\|z_q\|_{2p}\leq C\,t_q^{-k}\,\|y\|_{n(k)}\,,\qquad q\in\mathbb{N}\,.
$$

PREUVE. Si $k\leq 10p$, la proposition précédente affirme que $\|z_q\|_{2p}\leq M\,t_q^{-10p}\,\|y\|_{24p}$, on prend alors $C=M$ et $n(k)=24p$. Supposons le lemme vrai pour un entier $k>10\,p$ et montrons le pour $k+1$, posons pour simplifier $\alpha=2(k+1)+6p+1$. On sait que pour $q\geq 0$.

$$
\|z_{q+1}\|_{2p}\leq C_{2p}\left(\|(I-S_{t_q})L(x_q)z_q\|_{2p}+\|R(x_q)\Delta x_q\|_{2p}\right).
$$

Mais

$$
\begin{aligned}
\|(I-S_{t_q})L(x_q)z_q\|_{2p}&\leq C_{2p,\alpha}\,t_q^{2p-\alpha}\,\|L(x_q)z_q\|_{\alpha+p}\\
&\leq C_{2p,\alpha}\,C_{\alpha+p},2\,C_0\,t_q^{2p-\alpha}\left(\|x_q\|_{\alpha+2p}+\|z_q\|_{\alpha+2p}\right),
\end{aligned}
$$

où, dans la dernière inégalité, on utilise $\|z_q\|_0\leq 2C_0$. Comme

$$
\|z_q\|_{\alpha+2p}\leq C_{\alpha+2p}\left(\|y\|_{\alpha+2p}+\|x_q\|_{\alpha+2p}\right),
$$

on en déduit, grâce au Lemme 1 que

$$\begin{aligned}\|(I - S_{t_q})L(x_q)z_q\|_{2p} &\leq C(\alpha,p)\, t_q^{2p-\alpha} \left(\|x_q\|_{\alpha+2p} + \|y\|_{\alpha+2}\right) \\ &\leq C(\alpha,p)\, t_q^{4p+1+2p-\alpha}\, \|y\|_{\alpha+2p} \,,\end{aligned}$$

avec une constante $C(\alpha,p)$, dépendant de α et de p, non de q. On remarque à présent, par définition de α, que $t_q^{6p+1-\alpha} \leq t_{q+1}^{-(k+1)}$. Ceci donne

$$C_{2p}\|(I - S_{t_q})L(x_q)z_q\|_{2q} \leq C_1(k)\, t_{q+1}^{-(k+1)}\, \|y\|_{2(k+1)+8p+1} \,.$$

Quand au terme $\|R(x_q)\Delta x_q\|_{2p}$, il se majore comme suit

$$\|R(x_q)\Delta x_q\|_{2p} \leq 2\, C_{2p}\, \|\Delta x_q\|_{2p}^2 \leq 2\, C'' t_q^{4p}\, \|z_q\|_{2p}^2 \,.$$

Comme le lemme a été supposé vrai à l'ordre k, on a

$$\|z_q\|_{2p} \leq C(k)\, t_q^{-k}\, \|y\|_{n(k)} \,,$$

c'est-à-dire,

$$\|R(x_q)\Delta x_q\|_{2p} \leq 2\, C'' C^2(k)\, t_q^{4p-2k}\, \|y\|_{n(k)}^2 \,.$$

Le Lemme 2.9 entraine, par interpolation entre 0 et $2n(k)$,

$$\|y\|_{n(k)}^2 \leq C'(k)\, \|y\|_{2n(k)} \,,$$

il vient finalement, avec une nouvelle constante $C_2(k)$,

$$\|R(x_q)\Delta x_q\|_{2p} \leq C_2(k)\, t_q^{4p-2k}\, \|y\|_{2n(k)} \,.$$

L'hypothèse $0 < 10p < k$ montre que $t_q^{4p-2k} \leq t_{q+1}^{-(k+1)}$. Donc

$$\|z_{q+1}\|_{2p} \leq C(k)\, t_{q+1}^{-k+1)}\, \|y\|_{n(k+1)} \,,$$

où $C(k) = \max\{C_1(k), C_2(k)\}$ et $n(k+1) = \max\{2n(k), 2(k+1) + 8p + 1\}$.

Lemme 3.4. *Pour tout entier $n \geq 0$, pour tout entier $k \geq 0$, il existe une constante $C = C(n,k)$ et un entier $\sigma = \sigma(n,k)$ tels que si $\|y\|_{24p} \leq \delta$,*

$$\|\Delta x_q\|_n \leq C\, \|y\|_\sigma\, t_q^{-k} \qquad \textit{et} \qquad \|z_q\|_n \leq C\, \|y\|_\sigma\, t_q^{-k} \,.$$

PREUVE. Fixons deux entiers k et n, par le Lemme 2.9,

$$\|\Delta x_q\|_n \leq C\,\|\Delta x_q\|_0^{1/2}\,\|\Delta x_q\|_{2n}^{1/2}\,,$$

$$\begin{aligned}\|\Delta x_q\|_0 &\leq \|S_{t_q} L(x_q) z_q\|_0\\ &\leq C_{0,0}\,\|L(x_q)z_q\|_p\\ &\leq C_{0,0}\left(\|x_q\|_{2p}\,\|z_q\|_0 + \|z_q\|_{2p}\right).\end{aligned}$$

La Proposition 3.2 implique que $\|x_q\|_{2p} \leq a \leq 1$ et alors

$$\|\Delta x_q\|_0 \leq 2\,C_{0,0}\,\|z_q\|_{2p}\,.$$

On applique le Lemme 3.3 avec $k' = 2k + 6p + 2$, il vient

$$\|\Delta x_q\|_0 \leq 2\,C_{0,0}\,C(k')\,t_q^{-k'}\,\|y\|_{n(k')}\,.$$

D'autre part $x_{q+1} = x_q + \Delta x_q$ et $\|\Delta x_q\|_{2n} \leq \|x_{q+1}\|_{2n} + \|x_q\|_{2n'}$ par le Lemme 1,

$$\|x_{q+1}\|_{2n} \leq K_{2n}\,t_{q+1}^{4p+1}\,\|y\|_{2n}\,, \qquad \|x_q\|_{2n} \leq K_{2n}\,t_q^{4p+1}\,\|y\|_{2n}\,.$$

et on a $\|\Delta x_q\|_{2n} \leq 2\,K_{2n}\,t_{q+1}^{4p+1}\,\|y\|_{2n}$ et

$$\|\Delta x_q\|_n \leq C(n,k)\,t_q^{-k'/2}\,t_{q+1}^{(4p+1)/2}\,\|y\|_{n(k')}^{1/2}\,\|y\|_{2n}^{1/2}$$

par le choix de $k' = 2k + 6p + 2$, on a

$$t_q^{-k'/2}\,t_{q+1}^{(4p+1)/2} = t_q^{-k'/2}\,t_q^{\tau(4p+1)/2} \leq t_q^{-k}$$

et si donc $\sigma = \sigma(n,k) = \sup\{2n, n(k')\}$,

$$\|y\|_{n(k')}^{1/2}\,\|y\|_{2n}^{1/2} \leq \|y\|_{\sigma(n,k)}$$

et finalement

$$\|\Delta x_q\|_n \leq C(n,k)\,t_q^{-k}\,\|y\|_{\sigma(n,k-)}\,.$$

Les inégalités sur $\|z_q\|_n$ se prouvent de la même manière en écrivant que

$$\|z_q\|_n \leq C_n\,\|z_q\|_0^{1/2}\,\|z_q\|_{2n}^{1/2}$$

par le Lemme 1: $\|z_q\|_{2n} \leq K_{2n}\, t_q^{4p+1}\, \|y\|_{2n}$, par le Lemme 2, $\|z_q\|_0 \leq \|z_q\|_{2p} \leq C\, t_q^{-k'}\, \|y\|_{n(k')}$ et on conclut de la même façon.

Conclusion: Dans le Lemme 3.4, on prend $k \geq 1$, comme $\sigma = \sigma(n,k)$ ne dépend pas de q, la suite (x_q) est de Cauchy dans E_1, on désigne par x sa limite. Le même Lemme 3.4 montre que la suite (z_q) tend vers 0 dans E_2, lorsque q tend vers plus l'infini et on a $y = \varphi(x)$, par continuité de φ. Enfin si y est dans E_2 vérifiant $\|y\|_{24p} \leq \sigma$, tous les x_q sont dans $U \subset E_1$. L'algorithme définissant la suite (x_q) a un sens [illegible] limite x est nécessairement dans U. L'application Ψ définie sur $V = \{y \in E_2 : \|y\|_{24p} \leq \delta\}$, qui à y associe x répond aux exigences du théorème.

4. Fibrés vectoriels $\mathcal{A}^\infty$. Espaces des Sections.

Dans ce paragraphe, nous précisons quelques notions et établissons quelques lemmes techniques dans la catégorie des fibrés $\mathcal{A}^\infty$. Le résultat principal est le théorème dont voici l'énoncé: Soient Ω un ouvert borné, pseudo-convexe, à bord lisse et C^∞ vérifiant la propriété (P) et E un fibré vectoriel $\mathcal{A}^\infty$ sur $\overline{\Omega}$, l'espace des sections $\mathcal{A}^\infty$ de E est un bon espace de Fréchet.

Définition 4.1. *Soit Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{C}^p$ et $X = \overline{\Omega}$. Un fibré vectoriel topologique E, de rang n sur X est dit fibré $\mathcal{A}^\infty$ si le fibré restreint à Ω, $E|_\Omega$, est un fibré analytique tel que si $\{U_i, h_i\}$ est un atlas holomorphe de trivialisations locales, le cocycle associé*

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \to GL(n, \mathbb{C}),$$
$$(z, g_{ij}(z)v) = h_i h_j^{-1}(z, v), \qquad z \in U_i \cap U_j, \qquad v \in \mathbb{C}^n,$$

est dans le groupe $GL(n, A^\infty(U_i \cap U_j))$ des matrices $n \times n$, inversibles et à coefficients dans $A^\infty(U_i \cap U_j)$.

Comme d'habitude, on note par: $E \xrightarrow{p} X$ de tels fibrés. Si ω est un ouvert de X et $u : \omega \to E$ est une section, u est dite section C^∞ (respectivement, $\mathcal{A}^\infty$) si les applications $h_i \circ u = u_i$ de $\omega \cap U_i$ dans $\mathbb{C}^n$ sont des éléments de $C^\infty(\overline{\omega \cap U_i}, \mathbb{C}^n) = C^\infty(\overline{\omega \cap U_i})^n$ (respectivement, $A^\infty(\omega \cap \Omega \cap U_i)^n$).

Soient ζ et η deux fibrés vectoriels $\mathcal{A}^\infty$ sur $\overline{\Omega}$ de rangs respectifs n et m, on peut trouver un recouvrement $\mathcal{U} = (U_i)_i$, ouvert, de $\overline{\Omega}$ et des homéomorphismes $h_i : \zeta_{U_i} = p_\zeta^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{C}^n$ et $g_i : \eta_{U_i} \to U_i \times \mathbb{C}^m$ tels que $p \circ h_i = p_\zeta$ et $p \circ g_i = p_\eta$ où $p : U \times \mathbb{C}^k \to U$, $k = m$ où $k = n$ est la première projection. Un morphisme $f : \zeta \to \eta$ est une application continue telle que $p_\zeta = p_\eta \circ f$ et pour tout i, $g_i \circ f \circ h_i^{-1}$: $U_i \times \mathbb{C}^n \to U_i \times \mathbb{C}^m$ soit de la forme $g_i \circ f \circ h_i^{-1}(z,t) = (z, A_i(z)t)$ où $A_i(z)$ est une matrice $m \times n$ à coefficients dans $A^\infty(U_i)$. Si U_j est une carte, $g_j \circ f \circ h_j^{-1}$: $U_j \times \mathbb{C}^n \to U_j \times \mathbb{C}^m$ l'application associée, par restriction à U_{ij}, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
U_{ij} \times \mathbb{C}^n \arrow[rr] \arrow[ddd, "g_j \circ f \circ h_j^{-1}"'] & & U_{ij} \times \mathbb{C}^n \arrow[ddd, "g_i \circ f \circ h_i^{-1}"] \\
& \zeta_{U_{ij}} \arrow[ul, "h_j"'] \arrow[ur, "h_i"] \arrow[d] & \\
& \eta_{U_{ij}} \arrow[dl, "g_j"'] \arrow[dr, "g_i"] & \\
U_{ij} \times \mathbb{C}^m \arrow[rr] & & U_{ij} \times \mathbb{C}^m
\end{tikzcd}$$

On désigne par $A^\infty(\Omega, E)$ l'espace des sections $\mathcal{A}^\infty$ d'un fibré vectoriel $\mathcal{A}^\infty$ E sur $\overline{\Omega}$ et si $f : \zeta \to \eta$ est un morphisme de fibrés $\mathcal{A}^\infty$, on note par $\Gamma(f) : A^\infty(\Omega, \zeta) \to A^\infty(\Omega, \eta)$ l'application entre les espaces des sections définie par $\Gamma(f)(s) = s \circ f$, $s \in A^\infty(\Omega, \zeta)$. On a d'après [8],

Lemme 4.2. *Soient $f, g : \zeta \to \eta$ deux morphismes tels que $\Gamma(f) = \Gamma(g)$, alors $f = g$. Et si $F : A^\infty(\Omega, \zeta) \to A^\infty(\Omega, \eta)$ est une application A^∞ linéaire, il existe un unique morphisme $f : \zeta \to \eta$ tel que $\Gamma(f) = F$.*

Et toujours d'après [8], on a le

Corollaire 4.3. *Soit E un fibré vectoriel $\mathcal{A}^\infty$ sur $\overline{\Omega}$, il existe un entier N assez grand et un épimorphisme $f : E' = \Omega \times \mathbb{C}^N \to E$. D'autre part il existe un morphisme $g : E \to E'$, $f \circ g = I_E$.*

On peut résumer cela dans le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "p_E"'] & E' = \overline{\Omega} \times \mathbb{C}^N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"] & E \arrow[dl, "p_E"] \\ & \overline{\Omega} & \end{tikzcd}$$

avec $f \circ g = I_E$, ceci donne une suite

$$A^\infty(\Omega, E) \overset{\Gamma(g)}{\to} A^\infty(\Omega)^N \overset{\Gamma(f)}{\to} A^\infty(\Omega, E).$$

Comme $\Gamma(f \circ g) = \Gamma(f) \circ \Gamma(g)$, il vient que $\Gamma(f) \circ \Gamma(g) = I_{A^\infty(\Omega,E)}$. Disons maintenant un mot sur la topologie qu'on met sur $A^\infty(\Omega, E)$: on fixe un recouvrement fini $\mathcal{U} = (U_j)_{1\le j\le s}$ et ouvert de $\overline{\Omega}$, par des ouverts de trivialisations. Soient $\varphi_j : E|_{\overline{U}_j} \to \overline{U}_j \times \mathbb{C}^n$ les isomorphismes de trivialisation. Toute section s de E sur $\overline{\Omega}$ s'identifie à l'aide des applications φ_j à un système $(s_j)_{1\le j\le s}$ où pour tout j, s_j est un n-uple $(s_j^1, \dots, s_j^n)$ de fonctions $s_j^k \in A^\infty(U_j)$. Pour tout entier m et pour $s \in A^\infty(\Omega, E)$, on pose

$$\|s\|_m = \sup_{\substack{1\le j\le s \\ 1\le k\le n}} \|s_j^k\|_{m,A^\infty(U_j)} \,.$$

Les normes $\|\cdot\|_m$ dépendent du recouvrement $\mathcal{U}$ choisi, mais tout autre choix donne des normes équivalentes à celles-ci. Sur U_j l'application $\Gamma(g) : A^\infty(U_j, E) \to A^\infty(U_j)^N$ est de la forme

$$\Gamma(g)(s_j)(z) = A_j(z)\, s_j(z)\,, \qquad s_j \in A^\infty(U_j, E)\,,\ z \in U_j\,,$$

où $A_j(z)$ est une matrice $N \times n$, à coefficients dans $A^\infty(U_j)$. Donc

$$\begin{aligned} \|\Gamma(g)s\|_{m,A^\infty(\Omega)^N} &\le \sup_{1\le j\le s} \|\Gamma(g)s\|_{m,A^\infty(U_j)^N} \\ &\le \sup_{1\le j\le s} \|A_j\, s_j\|_{m,A^\infty(U_i)^N} \\ &\le C_m \sup_{\substack{1\le j\le s \\ 1\le k\le n}} \|s_j^k\|_{m,A^\infty(U_j)} = C_m\, \|s\|_m \,. \end{aligned}$$

L'application $\Gamma(g)$ est donc une bonne application linéaire continue entre les espaces de Fréchet $A^\infty(\Omega, E)$ et $A^\infty(\Omega)^N$, on procède de même pour $\Gamma(g)$, on a ainsi le

Théorème 4.4. *Si Ω est un ouvert borné, pseudo-convexe, à bord lisse C^∞, vérifiant* (P). *L'espace $A^\infty(\Omega, E)$ des sections $\mathcal{A}^\infty$ d'un fibré vectoriel $\mathcal{A}^\infty$ sur $\overline{\Omega}$ est un bon espace de Fréchet.*

On va préciser maintenant la notion de fibré A^∞ principal et prouver un "lemme de matrices holomorphes" pour certaines sections de ces fibrés, c'est le lemme fondamental dans la terminologie de Cartan [1].

Nous remplaçons l'argument d'équations différentielles de [1], non commode pour A^∞ par un argument de fonctions implicites qui utilise le Théorème 4.4 mais auparavant, nous énonçons une proposition relative aux fibrés vectoriels.

Proposition 4.5. *Soient Ω un ouvert pseudo-convexe dont le bord vérifie* (P) *et E un fibré vectoriel $\mathcal{A}^\infty$ sur $\overline{\Omega}$, on suppose que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, avec*

i) *Ω_1 et Ω_2 sont pseudo-convexe à bords vérifiant* (P),

ii) *$\Omega_1 \cap \Omega_2$ est à bord lisse et C^∞,*

iii) $\overline{\Omega_1 \backslash \Omega_2} \cap \overline{\Omega_2 \backslash \Omega_1} = \varnothing$.

Si $\mathcal{C}$ est un espace métrique compact, S un fermé de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{F}$ est le faisceau des germes des sections $\mathcal{A}^\infty$ de E, on a l'exactitude de la suite

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \to C_S(\mathcal{C}, \mathcal{F}(\Omega)) &\xrightarrow{\alpha} C(\mathcal{C}, \mathcal{F}(\Omega_1)) \times C_S(\mathcal{C}, \mathcal{F}(\Omega_2)) \\ &\xrightarrow{\beta} C_S(\mathcal{C}, \mathcal{F}(\Omega_1 \cap \Omega_2)) \to 0 \,, \end{aligned}$$

où

$$\alpha(f)(t) = (f(t)|_{\Omega_1}, f(t)|_{\Omega_2}) \,,$$
$$\beta(f_1, f_2)(t) = f_2(t)|_{\Omega_1 \cap \Omega_2} - f_1(t)|_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \,,$$

pour t dans $\mathcal{C}$, f dans $C_S(\mathcal{C}, \mathcal{F}(\Omega))$, f_i dans $C_S(\mathcal{C}, \mathcal{F}(\Omega_i))$, $i = 1, 2$; $C_S(\mathcal{C}, \mathcal{F}(\cdot))$ étant l'espace des fonctions continues sur $\mathcal{C}$, à valeurs dans $\mathcal{F}(\cdot)$ et nulles sur S. De plus β est inversible à droite, d'inverse linéaire.

PREUVE. On procède essentiellement comme dans le Lemme 2.7 du Paragraphe 2. Puisque $\mathcal{F}$ est $\mathcal{A}^\infty$-cohérent ([8, Définition 2.1]), il résulte de la suite de Mayer-Vietoris et du Théorème B ([8]) l'exactitude de la suite

$$0 \to \mathcal{F}(\Omega_1 \cup \Omega_2) \xrightarrow{\alpha'} \mathcal{F}(\Omega_1) \times \mathcal{F}(\Omega_2) \xrightarrow{\beta'} \mathcal{F}(\Omega_1 \cap \Omega_2) \to 0$$

pour montrer la proposition, il suffit de montrer que β' est inversible à droite. On sait que la propriété (P) de $\Omega_1 \cup \Omega_2$ fait que l'application β'' dans la suite exacte

$$0 \to A^\infty(\Omega_1 \cup \Omega_2) \to A^\infty(\Omega_1) \times A^\infty(\Omega_2) \xrightarrow{\beta''} A^\infty(\Omega_1 \cap \Omega_2) \to 0$$

est inversible, d'inverse linéaire et continu (Lemme 2.7). Notons par $b'' = (b_1'', b_2'') : A^\infty(\Omega_1 \cap \Omega_2) \to A^\infty(\Omega_1) \times A^\infty(\Omega_2)$ cet inverse. Grâce au Théorème A ([8]), il existe $(G_\alpha)_{1 \leq \alpha \leq N}$: N sections de $\mathcal{F}$ sur $(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ tel que pour tout f dans $\mathcal{F}(\Omega_1 \cap \Omega_2)$ s'écrit $f = \Sigma f_\alpha G_\alpha$, $f_\alpha \in A^\infty(\Omega_1 \cap \Omega_2)$ et avec les notations du Paragraphe 2, on a la commutativité du diagramme suivant,

$$\begin{tikzcd}
A^{\infty N}(\Omega_1) \times A^{\infty N}(\Omega_2) \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "(\Gamma_1(f), \Gamma_2(f))"'] & A^{\infty N}(\Omega \cap \Omega_2) \arrow[d, "\Gamma(f)"] \\
\mathcal{F}(\Omega_1) \times \mathcal{F}(\Omega_2) \arrow[r, "\beta'"] & \mathcal{F}(\Omega_1 \cap \Omega_2)
\end{tikzcd}$$

où $\Gamma_i(f) = \Gamma_{\Omega_i}(f)$, $i = 1, 2$ et $\Gamma(f) = \Gamma_{\Omega_1 \cap \Omega_2}(f)$. Si $\Gamma(g) : \mathcal{F}(\Omega_1 \cap \Omega_2) \to A^{\infty N}(\Omega_1 \cap \Omega_2)$ est l'application $\Gamma(g) = \Gamma_{\Omega_1 \cap \Omega_2}(g)$ vérifiant $\Gamma(f) \circ \Gamma(g) = I_{\mathcal{F}(\Omega_1 \cap \Omega_2)}$, on définit un inverse $b' : \mathcal{F}(\Omega_1 \cap \Omega_2) \to \mathcal{F}(\Omega_1) \times \mathcal{F}(\Omega_2)$ de β' en posant

$$\begin{aligned} b' &= (\Gamma_1(f), \Gamma_2(f)) \circ b'' \circ \Gamma(g) \\ &= (\Gamma_1(f) \circ b_1'' \circ \Gamma(g),\ \Gamma_2(f) \circ b_2'' \circ \Gamma(g)). \end{aligned}$$

La proposition en résulte.

Définition 4.6. *Soient G un groupe de Lie complexe, $\mathcal{G}$ son algèbre de Lie, U_0 un voisinage de 0 dans $\mathcal{G}$ telle que l'application exponentielle* *soit un biholomorphisme de U_0 sur un voisinage U_e de l'élément neutre e de G et V un autre voisinage de e, $V_e^2 \subset V_e \subset U_e$, on considère une suite (g_j) d'éléments de G, dense dans G et $\{V_j = g_j V_e, \varphi_j\}$ l'atlas de G correspondant à (g_j) et V_e. Une application f continue d'un ouvert U de $\mathbb{C}^p$ dans G est dans $A^\infty(U,G)$ si et seulement si, pour tout j, $\varphi_j \circ f$ est dans $A^\infty(U_{j,f})^m$, où $U_{j,f} = f^{-1}(V_j)$ et $m = \dim G$.*

REMARQUE 4.7. On peut munir $A^\infty(U,G)$ d'une distance invariante par translation pour laquelle le groupe topologique $A^\infty(U,G)$ devient métrisable et complet. Si $(L_\ell)_\ell$ est une suite exhaustive de compacts de $\overline{U}$ et $\log = (\exp)^{-1} : U_e \to U_0$, pour f, g deux éléments de $A^\infty(U,G)$ on pose

$$d(f,g) = \sum_{\ell,j,M} \frac{1}{2^{j+\ell+M}} \frac{\alpha_{j,\ell,M}}{1+\alpha_{j,\ell,M}} ,$$

$$\alpha_{j,\ell,M} = \sup_{z \in U_{j,f} \cap L_\ell} \ \sup_{|\alpha| \leq M} |D^\alpha \log(g_j^{-1} f(z)\, g(z)^{-1} g_j)| .$$

Si maintenant $\mathcal{C}$ est un espace métrique compact, on munit l'espace $C(\mathcal{C}, A^\infty(U,G))$ des applications continues de $\mathcal{C}$ dans $A^\infty(U,G)$ de la topologie définie par la distance $\delta(f,g) = \sup_{t\in\mathcal{C}} d(f(t), g(t))$, $f, g \in C(\mathcal{C}, A^\infty(U,G))$. Les groupes topologiques $A^\infty(U,G)$ et $C(\mathcal{C}, A^\infty(U,G))$ est complets puisqu'ils admettent des voisinages des éléments neutres respectifs qui sont complets.

Définition 4.8. *Soit Ω un ouvert pseudo-convexe, à bord lisse et C^∞ (non nécessairement borné). La donnée d'un fibré $E \to X = \overline{\Omega}$, $\mathcal{A}^\infty$ et à fibre caractéristique un groupe de Lie complexe G est la donnée d'un recouvrement $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ de X et pour tout i et tout j de $f_{ij} : (U_i \cap U_j) \times G \to G$, $f_{ij}(z,\cdot)$ est analytique dans G pour z dans $U_{ij} = U_i \cap U_j$ et pour tout g fixé dans G, $f_{ij}(\cdot, g)$ est dans $A^\infty(U_{ij}, G)$ satisfaisant en outre à*

i) $f_{ij}(z, f_{jk}(z,y)) = f_{ik}(z,y), \quad z \in U_i \cap U_j \cap U_k,\ y \in G,$

ii) *pour tout z dans U_{ij}, $f_{ij}(z,\cdot)$ est un automorphisme de G tels que E soit quotient de $\cup_i(U_i \times G)$ par la relation d'équivalence $\mathcal{R}$: si x est dans U_{ij}, on définie le point (x,y) de $U_j \times G$ au point $(x, f_{ij}(x,y))$ de $U_i \times G$.*

A un fibré $\mathcal{A}^\infty$ E, à fibre un groupe de Lie complexe G, on peut associer un fibré $\mathcal{A}^\infty$ vectoriel noté $Ad\,E$, dont les fibres sont les algèbres de Lie des fibres de E ([1, Section 7]). L'application exponentielle définie sur l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G, à valeurs dans G induit une application exp de $Ad\,E$ dans E. Il existe un voisinage $\Theta_{Ad\,E}$ de la section nulle de $Ad\,E$ et un voisinage Θ_E de la section neutre de E tels que exp soit un isomorphisme au sens des fibrés $\mathcal{A}^\infty$ de $\Theta_{Ad\,E}$ sur Θ_E. On note encore log, l'inverse de exp, qui est définie sur Θ_E.

Si ω est un ouvert de X, $\mathcal{A}^{\infty E}(\omega)$ (respectivement $\mathcal{A}^{\infty Ad\,E}(\omega)$) est l'espace des sections $\mathcal{A}^\infty$ de E (respectivement, $Ad\,E$) sur ω. De même si l'on remplace le faisceau $\mathcal{A}^\infty$ par C^∞. Si $\mathcal{C}$ est un métrique compact et S un fermé de $\mathcal{C}$, $A^{\infty E}_{\mathcal{C}S}(\omega)$ (respectivement, $\mathcal{A}^{\infty Ad\,E}_{\mathcal{C}S}(\omega)$) est l'espace des applications continues de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{A}^{\infty E}(\omega)$ (respectivement, $\mathcal{A}^{\infty Ad\,E}(\omega)$) neutres (respectivement, nulles) sur le fermé S.

Dorénavant, on prend $G = GL(n, \mathbb{C})$, $\mathcal{G} = M(n, \mathbb{C})$, l'application exponentielle de $\mathcal{G}$ dans G est l'exponentielle habituelle. Nous sommes en mesure d'énoncer le lemme fondammental de décomposition.

Lemme 4.9. *Soient Ω, Ω_1 et Ω_2 comme dans la Proposition 3.1. Il existe un voisinage Σ de l'application neutre dans $\mathcal{A}^{\infty E}_{\mathcal{C}S}(\Omega_1 \cap \Omega_2)$ et des applications*

$$\sigma_j \;:\; \Sigma \to \mathcal{A}^{\infty E}_{\mathcal{C}S}(\Omega_j)\,, \qquad j = 1, 2\,,$$

tels que $f = \sigma_1(f)\,\sigma_2(f)$ sur $\Omega_1 \cap \Omega_2$, pour tout f dans Σ.

PREUVE. Pour démontrer le lemme, il suffit de montrer que l'application

$$\Phi : \mathcal{A}^{\infty Ad\,E}_{\mathcal{C}S}(\Omega_1) \times \mathcal{A}^{\infty Ad\,E}_{\mathcal{C}S}(\Omega_2) \to \mathcal{A}^{\infty Ad\,E}_{\mathcal{C}S}(\Omega_1 \cap \Omega_2)$$

$$\Phi(f_1, f_2)(t) = \log e^{f_1(t)}\, e^{f_2(t)}\,, \qquad t \in C\,,$$

admet une section au voisinage de 0 dans $\mathcal{A}^{\infty Ad\,E}_{\mathcal{C}S}(\Omega_1 \cap \Omega_2)$. Puisque les espaces $\mathcal{A}^{\infty\, Ad\,E}(\Omega)$ sont des bons espaces de Fréchet (Théorème 4.4) nous utilisons notre théorème des fonctions implicites dans les espaces de Fréchet (Paragraphe 3, Théorème). En premier lieu, nous montrons que l'application Φ ci-dessus est différentiable au sens de Gâteaux, que sa différentielle est inversible en tout point $(x_0, y_0) \in \mathcal{A}^{\infty Ad\,E}_{\mathcal{C}S}(\Omega_1) \times \mathcal{A}^{\infty Ad\,E}_{\mathcal{C}S}(\Omega_2)$, voisin de $(0, 0)$. Les estimations nécessaires pour utiliser le théorème des fonctions implicites et qui nécessitent l'utilisation de formules à la Campbell-Hausdorff seront faites en appendice. Nous rappelons quelques propriétés utiles pour les calculs qui vont suivre,

a) Si $x \in \mathcal{G}$, $ad\, e^x = e^{ad\, x}$, où $ad\, x(y) = [x,y]$, $x, y \in \mathcal{G}$ et $ad\, x\ y = x\, y\, x^{-1}$ si $x \in G$.

b) $(\exp x)^{-1} \exp' x = g(ad\, x)$, $x \in \mathcal{G}$,

$$g(z) = \frac{1 - e^{-z}}{z} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^n}{(n+1)!}, \qquad (z \in \mathbb{C},\ z \neq 0)$$

et $g(0) = 1$.

c) Si

$$\Psi(z) = \frac{z \log z}{z-1} = z \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{n+1}, \qquad |z-1| < 1,$$

on a pour $x \in \mathcal{G}$, voisin de 0: $g(x)\, \Psi(e^x) = 1 = \Psi(e^x)\, g(x)$.

Posons $\mathcal{G}_i = \mathcal{A}_{C_S}^{\infty Ad\, E}(\Omega_i)$, $i = 1, 2$, $\mathcal{G} = \mathcal{A}_{C_S}^{\infty Ad\, E}(\Omega)$ et établissons la

1) *Différentiabilité de* $\Phi : \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2 \to \mathcal{G}$, $\Phi(x,y) = \log e^x\, e^y$. (On note $e^x = \exp x$ pour simplifier). Soit $(x,y) \in \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$, voisin de $(0,0)$, on fixe $(h,k) \in \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ et $t \in \mathbb{R}$ suffisamment petit. Posons $H(t) = \log e^{x+th}\, e^{y+tk}$. Par dérivation de la fonction $t \to e^{H(t)}$

$$\exp' H(t)\, H'(t) = \exp'(x+th)\, h\, \exp(y+tk) + \exp(x+th) \exp'(t+tk)\, k\,.$$

En multipliant à gauche par $\exp(-H(t))$, il vient par le rappel *b)*

$$\begin{aligned} g(ad\, H(t))\, H'(t) &= \exp(-H(t))\, \exp'(H(t))\, H'(t) \\ &= \exp -(y+tk)\, \exp -(x+th) \\ &\quad \cdot \exp'(x+th)\, h\, \exp(y+tk) \\ &\quad + \exp -(y+tk)\, \exp'(y+tk) k \\ &= e^{-(y+tk)}\, g(ad\,(x+th))\, h\, e^{y+tk} + g(ad\,(y+tk))\, k \\ &= e^{-ad\,(y+tk)} g(ad\,(x+th))\, h + g(ad\,(y+tk))\, k\,. \end{aligned}$$

Le rappel *c)* permet d'écrire

$$H'(t) = \Psi(e^{ad\, H(t)}) \left(e^{-ad\,(y+tk)}\, g(ad\,(x+th))\, h + g(ad\,(y+tk))\, k\right).$$

En faisant $t = 0$ il vient

$$H'(0) = \Psi(e^{ad\,H(0)})\left(e^{-ad\,y}\,g(ad\,x)\,h + g(ad\,y)\,k\right).$$

Or

$$e^{ad\,H(0)} = ad\;e^{H(0)} = ad\;e^x\;e^y = e^{ad\,x}\,e^{ad\,y} = e^{ad\Phi(x,y)}$$

et

$$\Psi(e^{ad\,H(0)}) = \Psi(e^{ad\,\Psi(x,y)}) = \frac{ad\,\Phi(x,y)\,e^{ad\,\Phi(x,y)}}{e^{ad\,\Phi(x,y)} - 1} = \frac{ad\,\Phi(x,y)}{1 - e^{ad\,\Phi(x,y)}}\,.$$

Ceci donne

$$\begin{aligned} H'(0) &= \frac{e^{ad\,\Phi(x,y)}ad\,\Phi(x,y)}{e^{ad\,\Phi(x,y)} - 1}\,e^{-ad\,y}\,\frac{1 - e^{-ad\,x}}{ad\,x}\,h \\ &\quad + ad\,\Phi(x,y)\,\frac{e^{ad\,\Phi(x,y)}}{e^{ad\,\Phi(x,y)} - 1}\,\frac{1 - e^{-ad\,y}}{ad\,y}\,k \\ &= \frac{ad\,\Phi(x,y)}{e^{ad\,\Phi(x,y)} - 1}\,\frac{e^{ad\,x} - 1}{ad\,x}\,h + \frac{ad\,\Phi(x,y)}{1 - e^{-ad\,\Phi(x,y)}}\,\frac{1 - e^{-ad\,y}}{ad\,y}\,k\,. \end{aligned}$$

Cela montre que

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y) = \frac{ad\,\Phi(x,y)}{e^{ad\,\Phi(x,y)} - 1}\,\frac{e^{ad\,x} - 1}{ad\,x}\,,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,y) = \frac{ad\,\Phi(x,y)}{1 - e^{-ad\,\Phi(x,y)}}\,\frac{1 - e^{-ad\,y}}{ad\,y}\,.$$

2) *Surjectivité de la différentielle en* $(x,y) \in \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$, *voisin de* $(0,0)$. Il s'agit de résoudre en (h,k) dans $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ et pour η donné dans $\mathcal{G}$ l'équation

$$\frac{ad\,\Phi(x,y)}{e^{ad\,\Phi(x,y)} - 1}\,\frac{e^{ad\,x} - 1}{ad\,x}\,h + \frac{ad\,\Phi(x,y)}{1 - e^{-ad\,\Phi(x,y)}}\,\frac{1 - e^{-ad\,y}}{ad\,y}\,k = \eta$$

posons

$$\eta' = e^{-ad\,x}\,\frac{e^{ad,\Phi(x,y)} - 1}{ad,\Phi(x,y)}\,\eta\,,$$

c'est un élément de $\mathcal{G}$ (Appendice), il existe, par la Proposition 4.5 un couple (η_1, η_2) dans $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$, $\eta_1 + \eta_2 = \eta'$. On pose

$$h = \frac{ad\,x}{1 - e^{-ad\,x}}\,\eta_1\,, \qquad k = \frac{ad\,y}{e^{ad\,y} - 1}\,\eta_2$$

et on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y)h &= \frac{ad\,\Phi(x,y)}{e^{ad\,\Phi(x,y)}-1}\,\frac{e^{ad\,x}-1}{ad\,x}\,\frac{ad\,x}{1-e^{-ad\,x}}\,\eta_1\\ &= \frac{ad\,\Phi(x,y)}{e^{ad\,\Phi(x,y)}-1}\,e^{ad\,x}\,\eta_1\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,y)k &= \frac{ad\,\Phi(x,y)}{1-e^{-ad\,\Phi(x,y)}}\,\frac{1-e^{-ad\,y}}{ad\,y}\,\frac{ad\,y}{e^{ad\,y}-1}\,\eta_2\\ &= \frac{ad\,\Phi(x,y)}{e^{ad\,\Phi(x,y)}-1}\,e^{ad\,x}\,\eta_2\,,\end{aligned}$$

par suite

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y)h + \frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,y)k = \eta\,.$$

On posera dans la suite $L(x,y)\eta = (h,k)$.

$L(x,y)$ est ainsi un inverse à droite de $d\Phi(x,y)$, pourvu que (x,y) soit voisin de $(0,0)$ dans $\mathcal{A}^{\infty Ad\,E}_{Cs}(\Omega_1) \times \mathcal{A}^{\infty Ad\,E}_{Cs}(\Omega_2)$. On verra après les estimations de l'Appendice, que si $U_i = \{x \in \mathcal{A}^{\infty Ad\,E}_{Cs(\Omega_i)} : \ \|x\|_{1,\Omega_i} \le a\}$, $i = 1, 2$, avec un réel a suffisamment petit et si Φ est l'application

$$\begin{aligned}&\Phi : U_1 \times U_2 \to \mathcal{A}^{\infty Ad\,E}_{Cs}(\Omega_1 \cap \Omega_2)\,,\\ &\Phi(f_1, f_2)(t) = \log e^{f_1(t)}\,e^{f_2(t)}\,,\end{aligned}$$

alors l'image de Φ couvre un voisinage V de l'application nulle dans $\mathcal{A}^{\infty Ad\,E}_{Cs}(\Omega_1 \cap \Omega_2)$. Si a est comme ci-dessus, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}^{\infty\,Ad\,E}_{Cs}(\Omega_1) \times \mathcal{A}^{\infty\,Ad\,E}_{Cs}(\Omega_2) \arrow[r] \arrow[d, "\exp"'] & \mathcal{A}^{\infty\,Ad\,E}_{Cs}(\Omega_1 \cap \Omega_2) \arrow[d, "\exp"] \\
U_1 \times U_2 \arrow[r, "\Phi"] & V
\end{tikzcd}$$

On prend $\Sigma = \exp(V)$, ceci donne le lemme fondamental.

Soit $\mathcal{C}'$ un autre espace métrique compact, $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$; pour tout ouvert U de X on note par $\mathcal{F}(U)$ le groupe des applications continues de $\mathcal{C}'$ dans $C^{\infty E}(\overline{U})$ telles que $f|_{\mathcal{C}}$ soient dans $\mathcal{A}^{\infty}_{\mathcal{C}s}(U)$.

Si (U_i) est une famille d'ouverts de trivialisation de E, $U_i \cap U \neq \varnothing$, on munit chaque groupe $C^{\infty E}(\overline{U \cap U_i})$ de la topologie indiquée dans la Remarque 4.7 et $\mathcal{F}(U)$ de la topologie produit de celles des $C^{\infty E}(\overline{U \cap U_i})$. Tous ces groupes topologiques sont alors métrisables et complets.

Voici maintenant le résultat de décomposition, pour la définition de la A^{∞}-convexité, on se referera à [8].

Corollaire 4.10. *Soient K_1, K_2 deux compacts de X, $A^{\infty}(\Omega)$-convexes tels que $K_1 \cup K_2$ soit $A^{\infty}(\Omega)$-convexe. Soit U_0 un voisinage de $K_1 \cap K_2$ dans X, si f est un élément de $\mathcal{F}(U_0)$ suffisamment voisin de l'élément neutre de $\mathcal{F}(U_0)$ il existe des voisinages U_i de K_i, $i = 1, 2$, $U_1 \cap U_2 \subset U_0$ et il existe des f_i dans $\mathcal{F}(U_i)$ tels que pour tout t dans $\mathcal{C}'$, on ait sur $\overline{U_1 \cap U_2}$*

$$f_1(t)\, f_2(t)^{-1} = f(t)\,.$$

Avant de donner la démonstration du Corollaire, on rappelle une généralisation du Théorème d'extension de Tietze, due à Dugundji ([3, Théorème 4.1]).

Lemme. *Soient X un espace métrique, A un fermé de X, L un espace vectoriel topologique localement convexe et f une application continues de A dans L. Il existe une extension continue F de f, de X dans L dont l'image $F(X)$ est contenue dans l'enveloppe convexe de $f(A)$.*

PREUVE DU COROLLAIRE 4.10. On raisonne comme dans [1]. Puisque K_1, K_2 et $K_1 \cap K_2$ sont $A^{\infty}(\Omega)$-convexes on peut trouver un voisinage U de $K_1 \cup K_2$ et des voisinages U_i' de K_i, $i = 1, 2$; U, U_1' et U_2' sont pseudo-convexes, à bords lisses et C^{∞}, bornés vérifiant (P), $U_1' \cup U_2' = U$, $U_1' \cap U_2'$ est pseudo-convexe à bord lisse et C^{∞}, $\overline{U_1' \backslash U_2'} \cap \overline{U_2' \backslash U_1'} = \varnothing$ et $U_1' \cap U_2' \subset U_0$. Si f est suffisamment voisin de l'élément neutre dans $\mathcal{F}(U_0)$, par le lemme fondamental, il existe f_i' dans $A^{\infty E}_{\mathcal{C}s}(U_i'), i = 1, 2$ tels que $f(t) = f_1'(t)\, f_2'(t)^{-1}$ pour tout t dans $\mathcal{C}$. Si dans les données du théorème des fonctions implicites, on prend a suffisamment petit, on peut définir pour tout t dans $\mathcal{C}$ les sections $\log\, f_i'(t)$ éléments de $\mathcal{A}^{\infty Ad\, E}_{\mathcal{C}s}(U_i')$. On dispose ainsi de deux applications $\log \circ f_i'$, définies sur $\mathcal{C}$ et à valeurs dans les espaces de Fréchet $\mathcal{A}^{\infty Ad\, E}_{\mathcal{C}s}(U_i')$ et qui sont voisines des applications nulles dans $C(\mathcal{C}, \mathcal{A}^{\infty Ad\, E}_{\mathcal{C}s}(U_i'))$, $i = 1, 2$. D'après le lemme ci-dessus, elle se prolongent en deux éléments g_i de $C(\mathcal{C}', \mathcal{A}^{\infty Ad\, E}_{\mathcal{C}s}(U_i'))$ en prenant $X = \mathcal{C}'$, $A = \mathcal{C}$ et $L = \mathcal{A}^{\infty Ad\, E}_{\mathcal{C}s}(U_i')$ et de plus les applications g_i sont aussi voisines des applications nulles. En considérant $f_i'' = \exp g_i$, les applications f_i'' sont définies sur $\mathcal{C}'$, à valeurs dans $\mathcal{A}^{\infty Ad\, E}_{\mathcal{C}s}(U_i')$, voisines des applications neutres dans $C(\mathcal{C}', \mathcal{A}^{\infty Ad\, E}_{\mathcal{C}s}(U_i'))$ et vérifient

$$f(t) = f_1''(t)\, f_2''(t)^{-1}$$

pour tout t dans $\mathcal{C}$. Considérons l'élément v de $C(\mathcal{C}', C^{\infty E}_{\mathcal{C}s}(\overline{U_1' \cap U_2'}))$, $v(t) = f_1''(t)\, f_2''(t)^{-1}\, f(t)^{-1}$ pour t dans $\mathcal{C}'$, en diminuant si besoin est le paramètre a du théorème des fonctions implicites et en prenant f suffisamment voisine de l'élément neutre dans $\mathcal{F}(U)$, on peut alors définir $\log v(t)$ pour tout t' dans $\mathcal{C}'$. On considère maintenant des voisinages U_i de K_i, $U_i \subset\subset U_i'$, et une fonction Ψ de classe C^∞, $\Psi \equiv 1$ sur $\overline{U_1 \cap U_2}$, $\Psi \equiv 0$ au voisinage du complémentaire de $\overline{U_1' \cap U_2'}$ et on définit une application w de $\mathcal{C}'$ dans $C^{\infty E}_{\mathcal{C}s}(U_1)$ par $w(t)(z) = \exp(\Psi(z) \log(v(t)(z)))$ et des éléments de $\mathcal{F}(U_i)$ en posant $f_1 = w^{-1} f_1'', f_2 = f_2''$, alors pour tout t dans $\mathcal{C}'$, on a sur $\overline{U_1 \cap U_2}$: $f(t) = f_1(t)\, f_2(t)^{-1}$, ce qui achève la preuve du corollaire.

Appendice.

Pour terminer la preuve du lemme fondamental, il reste à voir que l'application Φ satisfait aux conditions du théorème des fonctions implicites (Paragraphe 3, Théorème).

La situation est décrite ainsi: les espaces $A^\infty(\Omega_i,\, Ad\, E)$ sont des bons espaces de Fréchet, on considère un voisinage U_i de la section nulle dans $A^\infty(\Omega_i, Ad\, E)$ donnée par: $U_i = \{x \in A^\infty(\Omega_i, Ad\, E) :\ \|x\|_{1,i} \leq a\}$ avec un réel a assez petit, afin que l'application

$$\Phi : U_1 \times U_2 \to A^\infty(\Omega_1 \cap \Omega_2, Ad\, E)\,,$$

$$\Phi(x, y) = \log e^x\, e^y\,,$$

soit définie et on veut prouver que l'image de $U_1 \times U_2$ par Φ contient un voisinage de la section nulle dans $A^\infty(\Omega_1 \cap \Omega_2, Ad\, E)$. On fixe une fois pour toute un recouvrement $\mathcal{U} = (U_i)$ de $\Omega_1 \cup \Omega_2$, constitué d'ouverts de trivialisation du fibré $Ad\,E$ (ou E). On a vu que la topologie de $A^{\infty}(\Omega, Ad\,E)$, lorsque Ω est borné, ne dépend pas du choix d'un recouvrement. Pour (x,y) élément de $U_1 \times U_2$ (a petit), on a au dessus de $V_i = \overline{U_i \cap \Omega_1 \cap \Omega_2}$ le diagramme

$$\begin{tikzcd}
Ad\ E|_{V_i} \arrow[rr] & & V_i \times M_0(s,\mathbb{C}) \arrow[dr, "\exp"] & & & \\
& V_i \arrow[ul, "x"'] \arrow[ur, "\varphi_i \circ x|_{V_i}"] \arrow[dl, "y"] \arrow[dr, "\varphi_i \circ y|_{V_i}"'] & & V_i \times GL_e(s,\mathbb{C}) \arrow[r, "\log"] & V_i \times M_0(s,\mathbb{C}) \arrow[r, "\varphi_i^{-1}|_{V_i}"] & Ad\ E|_{V_i} \\
Ad\ E|_{V_i} \arrow[rr] & & V_i \times M_0(s,\mathbb{C}) \arrow[ur, "\exp"'] & & &
\end{tikzcd}$$

où $\exp : V_i \times M_0(n,\mathbb{C}) \to V_i \times GL_e(n,\mathbb{C})$ est définie par $\exp(x;A) = (x, \exp A)$ et, dans le second membre, exp est l'exponentielle habituelle qui envoie un voisinage $M_0(n,\mathbb{C})$ de la matrice nulle sur un voisinage $GL_e(n,\mathbb{C})$ de la matrice identité. Au dessus de V_i, l'application Φ admet la représentation

$$\Phi(x|_{V_i}, y|_{V_i}) = \varphi_i^{-1}|_{V_i}\,(\log e^{\varphi_i|_V \circ x|_{V_i}} e^{\varphi_i|_V \circ y|_{V_i}}).$$

Vu les normes définies dans les espaces des sections des fibrés vectoriels, on a

$$\|\Phi(x,y)\|_{n,V_i} = \|\log e^{\varphi_i \circ x}\, e^{\varphi_i \circ y}\|_{n,V_i}$$

et si l'on prouve que

$$\|\log e^{\varphi_i \circ x}\, e^{\varphi_i \circ y}\|_{n,V_i} \leq C_n\,(1 + \|(\varphi_i \circ x, \varphi_i \circ y)\|_{n,V_i}),$$

où $\|(\zeta_1,\zeta_2)\|_n = \|\zeta_1\|_n + \|\zeta_2\|_n$, on aura

$$\|\Phi(x,y)\|_n \leq C_n\,(1 + \|(x,y)\|_n).$$

Le même raisonnement vaut pour la différentielle $d\Phi$, pour l'inverse L de $d\varphi$ et pour le reste $R(x,y)(h,k)$ dans le développement de Taylor de $\Phi(x+h, y+k)$. Le problème des estimations se ramène donc au cas des matrices, on peut même supposer que $\Omega_1 = \Omega_2$ dans les majorations sur $\Phi(x,y), d\Phi(x,y)(h,k)$ et $R(x,y)(h,k)$ (on s'occupera de l'application L un peut plus tard).

Lemme 1. *Soit s un entier, $s \geq 1$ et soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, soit $\mathcal{U} = \{x \in M(s, C^\infty(\overline{\Omega})) : \|x\|_0 \leq \}$, l'application*

$$\Phi_0 : U \times U \to M(s, C^\infty(\overline{\Omega}))\,, \qquad \Phi_0(x,y) = \log e^x\, e^y$$

vérifie les estimations $\|\Phi_0(x,y)\|_n \leq C_n\,(1 + \|(x,y)\|_n)$, $(x,y) \in U \times U$, avec des constantes C_n indépendantes des x et des y.

PREUVE. On va utiliser les deus faits suivants.

a) Si $x \in U$, le spectre de chaque matrice scalaire $x(t), t \in \overline{\Omega}$ est contenu dans le disque $D(0, 1/2)$, de centre 0 et de rayon $1/2$ et on a la représentation pour $t \in \overline{\Omega}$

$$e^{x(t)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{0,1}} (\lambda I - x(t))^{-1}\, e^\lambda\, d\lambda\,,$$

où, comme dans toute cette appendice $C_{a,r} = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - a| = r\}$. Le terme $(\lambda I - x(t))^{-1}$ est une fonction C^∞ en t et si $\lambda \in C_{0,1}$, par le Lemme 2.10 (Paragraphe 2): $\|\lambda I - x)^{-1}\|_n \leq C_n\,(1 + \|x\|_n)$; par suite avec une nouvelle constante C_n, ne dépendant qu de n

$$\|e^x\|_n \leq C_n\,(1 + \|x\|_n)\,.$$

b) Si $x \in U$, $y \in U$, on a $\|e^x\, e^y - 1\|_0 < s^{-1}/2$ et alors $Sp(e^{x(t)} e^{y(t)}) \subset D(1, 1/2)$ pour tout t dans $\overline{\Omega}$, si $\log z$ est la détermination principale de la fonction log et si r est un réel $3/4 < r < 1$. On a

$$\log e^{x(t)}\, e^{y(t)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{1,r}} (\lambda I - e^{x(t)} e^{y(t)})^{-1} \log \lambda\ d\lambda$$

et donc $\|\log e^x e^y\|_n \leq C_n\,(1 + \|e^x e^y\|_n)$, par le Lemme 2.9 inégalité *c*) (Paragraphe 2) et grâce à *a*),

$$\begin{aligned}
\|\log e^x e^y\|_n &\leq C_n\,(1 + \|e^x\|_n\, \|e^y\|_0 + \|e^x\|_0\, \|e^y\|_n) \\
&\leq C_n\,(1 + \|x\|_n + |y\|_n) \\
&\leq C_n\,(1 + |(x,y)\|_n)\,.
\end{aligned}$$

Lemme 2. *Si x, y, h, k sont des éléments de U et $R(\lambda, x) = (\lambda l - x)^{-1}$ on a*

i) $Sp(e^{x(t)+h(t)}e^{y(t)+k(t)}) \subset D(1, \frac{1}{2})$, *pour tout* $t \in \overline{\Omega}$,

ii)

$$\begin{aligned} e^{x+h} &= e^{x} + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{0,1}} R(\lambda, x)\, h\, R(\lambda, x)\, e^{\lambda}\, d\lambda \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{0,1}} R(\lambda, x)\, h\, R(\lambda, x+h)\, h\, R(\lambda, x)\, e^{\lambda}\, d\lambda\,, \end{aligned}$$

iii) *On désigne par* $D_1(x,h)$ *l'expression*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{0,1}} R(\lambda, x)\, h\, R(\lambda, x)\, d\lambda\,.$$

Alors pour tout n, *on a avec une constante uniforme en* x, h

$$\|D_1(x,h)\|_n \leq C_n\,(\|x\|_n\, \|h\|_0 + \|h\|_n)\,.$$

PREUVE. Comme on va avoir besoin dans toute la suite des techniques de majorations nécessaires pour ce lemme, on va les faire avec quelques détails. Puisque la norme $\|\cdot\|_0$ vérifie $\|AB\|_0 \leq s\,\|A\|_0\,\|B\|_0$, $A, B \in M(s, C^\infty(\overline{\Omega}))$, on a

$$\begin{aligned} \|e^{x+h}e^{y+h} - l\|_0 &\leq s\,\|e^{x+h} - l\|_0\,\|e^{y+k}\|_0 + \|e^{y+k} - l\|_0 \\ &\leq s\,(e^{s\|x+h\|_0} - 1)\, e^{s\|y+k\|_0} + e^{s\|y+k\|_0} - 1\,. \end{aligned}$$

Comme x, y, h et k appartiennent à U

$$\|x+h\|_0 \leq \frac{\log(1+s^{-2})}{4s}\,, \qquad \|y+k\|_0 \leq \frac{\log(1+s^{-2})}{4s}\,,$$

et alors

$$\begin{aligned} s\,(e^{s\|x+h\|_0} - 1)\, e^{s\|y+k\|_0} + e^{s\|y+k\|_0} - 1 &\leq s\,(e^{s(\|x+h\|_0 + \|y+k\|_0)} - 1) \\ &\leq s\,((1+s^{-2})^{1/2} - 1) \\ &\leq \frac{s^{-1}}{2}\,, \end{aligned}$$

d'où le point i).

Pour établir la formule ii) du lemme, on remarque ceci: Si $R(\lambda, x) = (\lambda I - x)^{-1}$, on a

$$R(\lambda, x+h) = R(\lambda, x) + R(\lambda, x)\, h\, R(\lambda, x+h)\,,$$
$$R(\lambda, x+h) = R(\lambda, x) + R(\lambda, x+h)\, h\, R(\lambda, x)\,.$$

Donc si f est analytique au voisinage de $\overline{D(a,r)}$ et si x et h sont deux éléments de U, avec $Sp(x+h) \subset\subset D(a,r)$, on a la formule

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{a,r}} (\lambda I - x - h)^{-1} f(\lambda)\, d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{a,r}} R(\lambda,\ x+h)\, f(\lambda)\, d\lambda \end{aligned}$$

et donc

$$(*) \qquad \begin{aligned} f(x+h) = f(x) &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{a,r}} R(\lambda, x)\, h\, R(\lambda, x)\, f(\lambda)\, d\lambda \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{a,r}} R(\lambda, x)\, h\, R(\lambda, x+h)\, h\, R(\lambda, x)\, f(\lambda)\, d\lambda\,. \end{aligned}$$

Cette dernière formule, avec $f(\lambda) = e^{\lambda}$ est la formule ii) cherchée. Prouvons maintenant le point iii) du lemme, on procède comme dans le Lemme 1

$$\|D_1(x,h)\|_n \leq C_n \left((1 + \|x\|_n)\, \|h\|_0\, (1 + \|x\|_0) + (1 + \|x\|_0)^2\, \|h\|_n \right)$$

comme x est dans U, $1 + \|x\|_0 \leq (1 + \|x\|_0)^2 \leq C$, C est indépendant de x et alors

$$\begin{aligned} \|D_1(x,h)\|_n &\leq C_n \left((1 + \|x\|_n)\, \|h\|_0 + \|h\|_n \right) \\ &\leq C_n \left(\|x\|_n\, \|h\|_0 + \|h\|_n \right). \end{aligned}$$

Naturellement, les constantes C_n changent à chaque étape, mais restent indépendantes de x et h, éléments de U.

Lemme 3. *L'application $\Phi_0 : U \times U \to M(s, C^\infty(\overline{\Omega}))$ est différentiable au sens de Gâteaux et pour $(x,y) \in U \times U$ et $(h,k) \in M(s, C^\infty(\overline{\Omega}))^2$ et on a*

$$\left\| \frac{\partial \Phi_0}{\partial x}(x,y)(h,k) \right\|_n \leq C_n \left(\|(x,y)\|_n\, \|h\|_0 + \|h\|_n \right),$$
$$\left\| \frac{\partial \Phi_0}{\partial y}(x,y)(h,k) \right\|_n \leq C_n \left(\|(x,y)\|_n\, \|k\|_0 + \|k\|_n \right).$$

PREUVE. Les calculs de ce lemme vont donner des estimations et compléter ceux faits dans la preuve du lemme fondamental et qui permettaient de construire l'application $L(x,y)$, inverse à droite de $d\Phi(x,y)$. On conserve les notations des lemmes précédents. Posons

$$R_1(x,h) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{0,1}} R(\lambda,x)\, h\, R(\lambda, x+h)\, h\, R(\lambda,x)\, e^{\lambda}\, d\lambda\,,$$

de manière que $e^{x+h} = e^x + D_1(x,h) + R_1(x,h),\ x \in U,\ h \in U$. Si

$$D_2(y,k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{0,1}} R(\lambda,y)\, k\, R(\lambda,y)\, e^{\lambda} d\lambda\,,$$

$(y \in U, k \in U)$ et

$$R_2(y,k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{0,1}} R(\lambda,y)\, k\, R(\lambda, y+k)\, k\, R(\lambda,y)\, e^{\lambda}\, d\lambda\,,$$

$(y \in U,\ k \in U)$ on a aussi

$$e^{y+k} = e^y + D_2(y,k) + R_2(y,k)$$

et alors

$$e^{x+h} e^{y+k} = e^x e^y + D_1(x,h)\, e^y + e^x D_2(y,k) + R'((x,y))(h,k)\,,$$

avec

$$\begin{aligned} R'((x,y))(h,k) = e^x R_2(y,k) &+ R_1(x,y)\, e^y + D_1(x,h)\, D_2(y,k) \\ &+ D_1(x,h)\, R_2(y,k) + R_1(x,y)\, D_2(y,k) \\ &+ R_1(x,h)\, R_2(y,k)\,. \end{aligned}$$

On posera pour simplifier

$$T = T(x,y,h,k) = D_1(x,h)\, e^y + e^x D_2(y,k) + R'((x,y))(h,k)$$

et ainsi

$$e^{x+h} e^{y+k} = e^x e^y + T\,.$$

D'après le Lemme 2, $Sp(e^{x+h}e^{y+k}) \subset D(1,1/2)$ si x, y, h et k sont dans U, il en est de même de $Sp(e^x e^y)$ d'après le point $b)$ du Lemme 1, par suite, avec r, $3/4 < r < 1$, et d'après la formule (*),

$$\begin{aligned}
\log e^{x+h}e^{y+k} &= \log(e^x e^y + T) \\
&= \log e^x e^y + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{1,r}} R(\lambda, e^x e^y)\, T\, R(\lambda, e^x e^y)\, \log\lambda\, d\lambda \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{1,r}} R(\lambda, e^x e^y)\, T\, R(\lambda, e^x e^y + T) \\
&\qquad\qquad \cdot T\, R(\lambda, e^x e^y)\, \log\lambda\, d\lambda \\
&= \log e^x e^y \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{1,r}} R(\lambda, e^x e^y)\, D_1(x,h)\, e^y R(\lambda, e^x e^y)\, \log\lambda\, d\lambda \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{1,r}} R(\lambda, e^x e^y)\, e^x D_1(y,k)\, R(\lambda, e^x e^y)\, \log\lambda\, d\lambda \\
&\quad + R((x,y))(h,k)\,.
\end{aligned}$$

Cette dernière expression est le développement de Taylor de $\log e^{x+h}\ e^{y+k}$ avec les variables non commutatives x et y et $R((x,y))$ (h,k) vaut

$$\begin{aligned}
&R((x,y))(h,k) \\
&\quad = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{1,r}} R(\lambda, e^x e^y)\, R'((x,y))(h,k)\, R(\lambda, e^x e^y)\, \log\lambda\ d\lambda \\
&\qquad + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{1,r}} R(\lambda, e^x e^y)\, T\, R(\lambda, e^x e^y + T)\, T\, R(\lambda, e^x e^y)\, \log\lambda\ d\lambda\,.
\end{aligned}$$

Ces calculs donnent de nouvelles expressions des dérivées partielles de Φ_0, par exemple

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial x}(x,y)h = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{1,r}} R(\lambda, e^x e^y)\, D_1(x,h)\, e^y R(\lambda, e^x e^y)\, \log\lambda\ d\lambda$$

pour obtenir les estimations du Lemme 3, il suffit de les avoir pour les h dans U. Si h est quelconque, λh est dans U pour λ réel petit et on utilise l'homogénéité de degrés 1 en h, de l'expression $\partial\Phi_0(x,y)h/\partial x$. Il en est de même pour $\partial\Phi_0(x,y)k/\partial y$. On utilisera cette idée dans les estimations du reste $R((x,y))(h,k)$ qui est homogène de degrée 2 en (h,k). Or

$$\left\|\frac{\partial\Phi_0}{\partial x}(x,y)h\right\|_n \leq \frac{1}{2\pi}\int_{C_{1,r}} \|R(\lambda, e^x e^y)\, D_1(x,h)\, e^y R(\lambda, e^x e^y)\|_n \;|\log\lambda|\; d|\lambda|\,.$$

On utilise ensuite à plusieurs reprises l'inégalité *c*) du Lemme 2, l'inégalité sur $\|e^x e^y\|_n$ du Lemme 1 et celle sur $\|D_1(x,y)\|_n$ du Lemme 2, pour trouver finalement

$$\begin{aligned}\|\frac{\partial\Phi_0}{\partial x}(x,y)h\|_n &\leq C_n\left((1+\|(x,y)\|_n)\,\|h\|_0 + \|h\|_n\right)\\ &\leq C_n\left(\|(x,y)\|_n\,\|h\|_0 + \|h\|_n\right).\end{aligned}$$

De même

$$\left\|\frac{\partial\Phi_0}{\partial y}(x,y)k\|_n \leq C_n\left(\|(x,y)\|_n\,\|k\|_0 + \|k\|_n\right)\right.$$

et donc pour $(x,y) \in U \times U$ et $(h,k) \in M(s, C^\infty(\overline{\Omega}))^2$

$$\|d\Phi_0(x,y)(h,k)\|_n \leq C_n\left(\|(x,y)\|_n\,\|(h,k)\|_0 + \|(h,k)\|_n\right).$$

Le Lemme 3 est démontré. Par les mêmes méthodes, on obtient aussi le

Lemme 4. *Si* $(x,y) \in U \times U,\ (h,k) \in E_1^2,$

$$\|R((x,y))(h,k)\|_n \leq C_n\left(\|(x,y)\|_n\,\|(h,k)\|_0^2 + \|(h,k)\|_0\,\|(h,k)\|_n\right).$$

Nous passons maintenant aux estimations sur l'inverse $L(x,y)$ de $d\Phi(x,y)$ dont l'expression a été obtenue dans le lemme fondamental.

Si x et y sont voisins de la section nulle dans $\mathcal{A}^{\infty,Ad\,E}(\Omega_1)$ et $\mathcal{A}^{\infty Ad\,E}(\Omega_2)$ respectivement, si η appartient à $\mathcal{A}^{\infty Ad\,E}(\Omega_1 \cap \Omega_2)$, on a

$$L(x,y)\,\eta = (h,k)\,,$$

avec

$$h = \frac{ad\,x}{1-e^{-ad\,x}}\,\eta_1\,, \qquad k = \frac{ad\,y}{e^{ad\,y}-1}\,\eta_2$$

et η_1, η_2, dont l'existence est assurée par la Proposition 4.5, vérifient

$$\eta_1 + \eta_2 = \eta' = e^{-ad\,x}\,\frac{e^{ad\,\Phi(x,y)} - 1}{ad\,\Phi(x,y)}\,\eta\,.$$

Il convient de préciser ce que l'on veut dire par x et y sont voisines de la section nulle dans $\mathcal{A}^{\infty,Ad\,E}(\Omega_1)$ et $\mathcal{A}^{\infty,Ad\,E}(\Omega_2)$ respectivement: on prend x dans $U_1 = \{x \in A^\infty(\Omega_1, Ad\,E) : \|x\|_{1,\Omega_1} \leq a\}$ et y dans $U_2 = \{y \in A^\infty(\Omega_2, Ad\,E) : \|y\|_{1,\Omega_2} \leq a\}$ avec un réel a suffisamment petit de sorte que pour chaque ouvert de trivialisation U_i, $U_i \cap \Omega_j \neq \varnothing$, $(j = 1,2)$, si $\varphi_i : Ad\,E|_{\overline{U_i}} \to U_i \times M(s, \mathbb{C})$ est l'isomorphisme de trivialisation, la composée $\varphi_i \circ s|_{\overline{U_i \cap \Omega_j}}$ soit dans le voisinage de matrice nulle

$$\left\{x \in M(s, C^\infty(\overline{U_i \cap \Omega_j}) : \|x\|_{o,\overline{U_i \cap \Omega_j}} \leq \alpha \leq \frac{\log(1+s^{-2})}{8s}\right\},$$

de même pour la section y. Ceci est possible puisque Ω_1 et Ω_2 sont bornés et le recouvrement $\mathcal{U} = (U_i)$, est fini. D'autre part, nous savons d'après la Proposition 2.12 que

$$\|\eta_i\|_{n,\Omega_j} \leq C_n\,\|\eta'\|_{n+p,\Omega_1\cap\Omega_2} = C_n\left\|e^{-ad\,x}\,\frac{e^{ad\,\Phi(x,y)} - 1}{ad\,\Phi(x,y)}\,\eta\right\|_{n+p,\Omega_1\cap\Omega_2},$$

où p est la dimension de l'espace. Pour estimer en norme $\|\cdot\|_n$ le couple (h,k) en fonction de la norme $\|\cdot\|_n$ de η, on estime h en fonction η_1, k en fonction de η_2 et

$$e^{-ad\,x}\,\frac{e^{ad\,\Phi(x,y)} - 1}{ad\,\Phi(x,y)}\,\eta$$

en fonction de η. Comme on l'a remarqué au dédut de cet appendice il suffit de faire les calculs dans le cas des matrices. Nous commençons par des observations simples:

a) Soit $A \in M(s, C(\overline{\Omega}))$, Ω est un ouvert borné dans $\mathbb{R}^n$, soit $Ad\,A$ l'opérateur linéaire

$$Ad\,A : M(s, C(\overline{\Omega})) \to M(s, C(\overline{\Omega}))\,,$$

$$Ad\,A(X) = [A, X] = AX - XA\,.$$

Alors

$$\|Ad\,A\|_0 \leq 2S\|A\|_0\,.$$

b) Soit $A \in M(s, C^\infty(\overline{\Omega}))$, $\|A\|_0 \leq 1/(4s)$. Si $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, pour toute matrice x dans $M(s, C^\infty(\overline{\Omega}))$ et tout entier n non nul

$$\|(\lambda - Ad\,A)^{-1}x\|_n \leq C_n\,(\|A\|_n\,\|x\|_0 + \|x\|_n)\,.$$

En identifiant les matrices x à des vecteurs $\widetilde{x}$ à n^2 composantes, on peut trouver une matrice $\widetilde{A}$, $n^2 \times n^2$, à coefficients dans $C^\infty(\overline{\Omega})$: $Ad\,A\ x = \widetilde{\widetilde{x}}$ avec de plus $\|\widetilde{A}\| \leq 2\,\|A\|_n$ et alors

$$(\lambda - Ad\,A)^{-1}x = \lambda \sum_{p \geq 0} \frac{(Ad\,A)^p}{\lambda^p}\ x = \lambda \sum \frac{\widetilde{A}^p}{\lambda^p}\,\widetilde{x} = (\lambda - \widetilde{A})^{-1}\widetilde{x}\,,$$

donc

$$\|(\lambda - Ad\,A)^{-1}x\|_n \leq C_n\,(\|(\lambda - \widetilde{A})^{-1}\|_n\,\|\widetilde{x}\|_0 + \|(\lambda - \widetilde{A})^{-1}\|_0\,\|\widetilde{x}\|_n)$$

en tenant compte de $\|\widetilde{x}\|_k = \|x\|_k$ et le Lemme 2. On obtient

$$\begin{aligned}\|(\lambda - Ad\,A)^{-1}\|_n &\leq C_n\,\big((1 + \|\widetilde{A}\|_n)\,\|x\|_0 + \|\widetilde{x}\|_n\big)\\ &\leq C_n\,(\|A\|_n\,\|x\|_0 + \|x\|_n)\,.\end{aligned}$$

c) Si $\eta_1, x \in M(s, C^\infty(\overline{\Omega}))$, $\|x\|_0 \leq \dfrac{\log(1 + s^{-2})}{8s}$, on a

$$\left\|\frac{ad\,x}{1 - e^{-ad\,x}}\,\eta_1\right\|_n \leq C_n\,(\|x\|_n\,\|\eta_1\|_0 + \|\eta_1\|_n)\,.$$

On écrit pour cela

$$\frac{ad\,x}{1 - e^{-ad\,x}}\,\eta_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{0,1}} (\lambda I - ad\,x^{-1})\,\eta_1\,\frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda}}\ d\lambda$$

et on utilise l'observation *b*) précédente.

d) Si $x, y \in M(s, C^\infty(\overline{\Omega}))$,

$$\|x\|_0 \leq \frac{\log(1 + s^{-2})}{8s}\,, \qquad \|y\|_0 \leq \frac{\log(1 + s^{-2})}{8s}\,,$$

et si $\eta \in M(s, C^\infty(\overline{\Omega}))$, on a

$$\|e^{-ad\,x}\frac{e^{ad\,\Phi(x,y)} - 1}{s\,ad\,\Phi(x,y)}\eta\|_{n+p} \leq C_n\,(\|(x,y)\|_{n+p}\,\|\eta\|_0 + \|\eta\|_{n+p})\,.$$

On écrit pour cela

$$e^{-ad\,x}\,\frac{e^{ad\,\Phi(x,y)}-1}{ad\,\Phi(x,y}\,\eta=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{0,1}}(\lambda I+ad\,x)^{-1}\,\frac{e^{ad\,\Phi(x,y)}-1}{ad\,\Phi(x,y)}\,\eta\,e^{\lambda}\,d\lambda\,.$$

Cela donne, par *b*)

$$\begin{aligned}\left\|e^{-ad\,x}\,\frac{e^{ad\,\Phi(x,y)}-1}{ad\,\Phi(x,y)}\,\eta\right\|_{n+p}\leq C_n\Bigg(\|x\|_{n+p}\left\|\frac{e^{ad\,\Phi(x,y)}-1}{ad\,\Phi(x,y)}\,\eta\right\|_0\\ +\left\|\frac{e^{ad\,\Phi(x,y)}-1}{ad\,\Phi(x,y)}\,\eta\right\|_{n+p}\Bigg)\,,\end{aligned}$$

on utilise le Lemme 1, point *b*) pour estimer

$$\|\frac{e^{ad\,\Phi(x,y)}-1}{ad\,\Phi(x,y)}\eta\|_k$$

en fonction de $1+\|(x,y)\|_k$, on utilise ensuite que $\|x\|_{n+p}\leq\|(x,y)\|_{n+p}$ et $\|\Phi(x,y)\|_0\leq C$ à cause des hypothèses faites sur x et y.

On estime finalement

$$\|L(x,y)\eta\|_n=\Big\|\Big(\frac{ad\,x}{1-e^{-ad\,x}}\,\eta_1,\frac{ad\,x}{e^{ad\,y}-1}\,\eta_2)\|_n\,.$$

L'inégalité du point *c*) ci-dessus, ainsi q'une autre où x est remplacé par y et η_1 par η_2, permettent d'écrire

$$\begin{aligned}\|L(x,y)\eta\|_n&\leq C_n\,(\|(x,y)\|_n\,\|(\eta_1,\eta_2)\|_0+\|(\eta_1,\eta_2)\|_n)\\ &\leq C_n\,(\|(x,y)\|_n\,\|\eta'\|_0+\|\eta'\|_{n+p})\,,\end{aligned}$$

avec

$$\eta'=e^{-ad\,x}\frac{e^{ad\,\Phi(x,y)}-1}{ad\,\Phi(x,y)}\eta\,,$$

l'inégalité de *d*) donne enfin

$$\|L(x,y)\eta\|_n\leq C_n\,(\|(x,y)\|_{n+p}\,\|\eta\|_0+\|\eta\|_{n+p})\,,$$

d'où les estimations voulues.

REMARQUES FINALES.

1) Nous venons de voir que si x est une section de $Ad\,E$ sur $\overline{\Omega}_1$ et y est une section de $Ad\,E$ sur $\overline{\Omega}_2$, toutes deux voisines de la section nulle, alors (Lemme 1)

$$\|\log e^x e^y\|_{n,\Omega_1\cap\Omega_2} \leq C_n\,(1+\|(x,y)\|_n)\,,$$
$$\|(x,y)\|_n = \|x\|_{n,\Omega_1} + \|y\|_{n,\Omega_2}\,.$$

Si maintenant $\mathcal{C}$ est un compact et $\mathcal{A}^{\infty,Ad\,E}(\Omega)$ l'espace des applications continues de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{A}^{\infty,Ad\,E}(\Omega)$ dont la topologie de Fréchet est définie par le système de normes

$$\|f\|_{n,\Omega} = \sup_{t\in\mathcal{C}} \|f(t)\|_{n,\Omega}\,, \qquad f\in\mathcal{A}_{\mathcal{C}}^{\infty,Ad\,E}(\Omega)\,,\ n\in\mathbb{N}\,,$$

alors pour toute application f_1 de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{A}_{\mathcal{C}}^{\infty,Ad\,E}(\Omega_1)$ et toute application f_2 de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{A}_{\mathcal{C}}^{\infty,Ad\,E}(\Omega_2)$ toutes deux voisines de l'application nulle, pour tout t dans $\mathcal{C}$

$$\|\log e^{f_1(t)}e^{f_2(t)}\|_{n,\Omega_1\cap\Omega_2} \leq C_n\,(1+\|(f_1(t),f_2(t))\|_n)\,,$$

donc

$$\begin{aligned}\|\Phi(f_1,f_2)\|_n &= \sup_{t\in\mathcal{C}} \|\log e^{f_1(t)}e^{f_2(t)}\|_{n,\Omega_1\cap\Omega_2}\\ &\leq C_n\,(1+\sup_{t\in\mathcal{C}}\|f_1(t),f_2(t)\|_n)\,.\end{aligned}$$

Il en est de même pour

$$\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial x}(h,k)\,,\quad \frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial y}(h,k)\,,\quad L(x,y)\eta \quad \text{et} \quad R((x,y))(h,k)$$

et le lemme fondamental est démontré.

2) Nous aurions pu démontrer le théorème des matrices holomorphes du Paragraphe 2 en faisant intervenir l'application $(x,y)\mapsto\log e^x e^y$ pour des raisons de clarté, nous avons travaillé avec l'application (x,y) $\mapsto xy$ qui, du point de vue "calcul différentiel" est nettement plus simple.

References.

[1] Cartan, H., Espaces Fibrés analytiques. *Symposium International de Topología Algebraica*, México (1958), 97-121.

[2] Catlin, D., Global regularity of the $\overline{\partial}$-Neuman problem. *Proc. Symp. Pure Math.* **41** (1984), 39-49.

[3] Dugundji, J., An extension of Tietze's Theorem. *Pacific J. Math.* (1951), 353-367.

[4] Hamilton, R. S., The inverse function theorem of Nash and Moser. *Bull. Amer. Math. Soc.* **7** (1982), 65-222.

[5] Lojasiewicz, S. and Zehnder, E., An inverse function theorem in Fréchet spaces. *J. Funct. Anal.* **33** (1979), 165-174.

[6] Nash, J., The imbedding problem for Riemann manifolds. *Ann. of Math.* **63** (1956), 20-63.

[7] Pressley, A. and Segal, G., *Loop Groups.* Oxford Mathematical monographs (1986).

[8] Sebbar, A., Principe d'Oka-Grauert dans A^∞. *Math. Z.* **201** (1989), 561-581.

[9] Sergeraert, F., Un théorème de fonctions implicites sur certains espaces de Fréchet et applications. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **45** (1972), 599-660.

[10] Vogt, D., Subspaces and quotient spaces of S, in *Functional analysis surveys and recent results.* North-Holland Math. Studies **27** (1977), 167-187.

Recibido: 23 de enero de 1.992

Ahmed Sebbar
Centre de Recherche en Mathématiques de Bordeaux
Université Bordeaux I
C.N.R.S., U.A. 226
U.F.R. de Mathématiques
351, cours de la Libération
33405 Talence Cedex, FRANCE