Revista Matemática Iberoamericana
Vol. 9, N.° 3, 1993

Sur les mesures de Wigner

Pierre Louis Lions et Thierry Paul

dédié à M. R. Dautray

Résumé. Nous étudions les propriétés de la transformée de Wigner pour des fonctions arbitraires dans L^2 ou pour des noyaux hermitiens du type "matrices densité". Et nous introduisons des limites de ces transformées de Wigner pour des suites de fonctions dans L^2, limites qui correspondent à la limite semi-classique en Mécanique Quantique. Les mesures obtenues ainsi, que nous appelons mesures de Wigner, possèdent diverses propriétés mathématiques que nous établissons. En particulier, nous démontrons qu'elles satisfont, dans des cadres linéaires (équation de Schrödinger) ou nonlinéaires (équation de Hartree dépendant du temps), des équations de transport du type Liouville ou Vlasov.

Abstract. We study the properties of the Wigner transform for arbitrary functions in L^2 ir for hermitian kernels like the so-called density matrices. And we introduce some limits of these transforms for sequences of fonctions in L^2, limits that correspond to the semi-classical limit in Quantum Mechanics. The measures we obtain in this way, that we call Wigner measures, have various mathematical properties that we establish. In particular, we prove they satisfy, in linear situations (Schrödinger equations) or nonlinear ones (time-dependent Hartree equations), transport equations of Liouville or Vlasov type.

SOMMAIRE

I. Introduction.

En 1932, Wigner [45] a introduit une transformation que l'on peut écrire ainsi

$$(1) \qquad W(x,\xi) = (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\xi\cdot y}\, \psi(x+\frac{y}{2})\, \psi^*(x-\frac{y}{2})\, dy\,,$$

pour tout $(x,\xi) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$. Cette opération transformant une fonction ψ arbitraire dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ en une fonction sur l'espace des phases (ici $\mathbb{R}^N_x \times \mathbb{R}^N_\xi$) est appelée *transformée de Wigner*. Dans (1) et dans tout ce qui suit, z^* désigne le conjugué d'un nombre complexe z. L'application qui à ψ associe W est bien évidemment quadratique mais devient linéaire dès lors que l'on introduit la *matrice densité* associée à ψ à savoir

$$(2) \qquad \rho(x,y) = \psi(x)\,\psi^*(y)\,, \qquad \text{p.p. } (x,y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N\,.$$

Une propriété remarquable de cette transformée est la suivante: si $\psi = \psi(x,t)$ résout l'*équation de Schrödinger* (dans le cas d'une particule quantique libre)

$$(3) \qquad i\,\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{1}{2}\,\Delta\psi\,, \qquad \text{dans } \mathbb{R}^N_x \times \mathbb{R}_t\,,$$

alors $W(x,\xi,t)$ (donnée par (1) avec $\psi = \psi(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$) résoud l'*équation de transport* libre (*i.e.*, l'*équation de Liouville* correspondant à une particule classique libre)

$$(4) \qquad \frac{\partial W}{\partial t} + \xi\cdot\nabla_x W = 0\,, \qquad \text{dans } \mathbb{R}^N_x \times \mathbb{R}^N_\xi \times \mathbb{R}_t\,.$$

Et W joue alors le rôle d'une densité de particules libres classiques du point de vue de la mécanique classique statistique. C'est pour cette raison qu'on parle parfois de la densité de Wigner même si, et ce point qui gênait Wigner sera détaillé dans la suite, W n'est en général pas positive ou nulle.

Ce lien entre Mécanique Quantique (Statistique ou non) et Mécanique Classique est éclairé par les remarques suivantes classiques du point de vue physique: si $\hbar$ désigne la constante de Planck et si ψ ($= \psi_\hbar$) résout

$$(5) \qquad i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2} \Delta\psi , \qquad \text{dans} \quad \mathbb{R}_x^N \times \mathbb{R}_t ,$$

alors $W_\hbar(x,\xi,t) = (1/\hbar^N)\, W(\psi)\big(x, \xi/\hbar, t\big)$ résout encore (4), comme on peut s'en convaincre aisément par un simple changement d'échelle en t. Ainsi, si $W_\hbar$ "converge" vers une fonction f quand $\hbar$ tend vers 0 en un sens convenable, on doit s'attendre à ce que f résolve également (4). Enfin, si l'on rajoute dans (5) un terme de force, *i.e.*

$$(6) \qquad i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2} \Delta\psi + V\psi , \qquad \text{dans} \quad \mathbb{R}_x^N \times \mathbb{R}_t ,$$

où V désigne un potentiel convenable (*i.e.*, une fonction sur $\mathbb{R}^N$), alors les mêmes considérations heuristiques indiquent que f, après passage à la limite quand $\hbar$ tend vers 0, devrait résoudre

$$(7) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \xi \cdot \nabla_x f - \nabla V(x) \cdot \nabla_\xi f = 0 , \qquad \text{dans} \quad \mathbb{R}_x^N \times \mathbb{R}_\xi^N \times \mathbb{R}_t .$$

Et l'on reconnaît l'équation de Liouville (classique) correspondant au système (de Newton) Hamiltonien: $\dot{x} = \xi$, $\dot{\xi} = -\nabla V(x)$. Le formalisme introduit par Wigner permet donc d'établir la *limite semi-classique* et le passage de la Mécanique Quantique à la Mécanique Classique (de manière consistante du point de vue de la Physique Statistique) en faisant tendre $\hbar$ vers 0. Ce point de vue a été développé par de nombreux physiciens et nous nous contenterons de citer J. Yvon [46], [47], par des développements concernant la Physique Statistique.

La transformation de Wigner, la convergence de $W_\hbar$ quand $\hbar$ tend vers 0 et la limite semi-classique sont précisément les trois points essentiels que nous étudions rigoureusement dans cet article, et sont développées respectivement dans les trois sections qui le composent. A ce point, il convient d'ajouter que notre objectif n'est pas uniquement de rendre rigoureuses des considérations formelles classiques en

Physique. En effet, cette étude nécessite l'introduction de mesures obtenues comme limites de W_ε pour des suites arbitraires u_ε de $L^2(\mathbb{R}^N)$. Et ces mesures, que nous appelons *mesures de Wigner* (ou W-mesures), ont des propriétés mathématiques tout à fait remarquables, nous semble-t-il, qui seront certainement utiles pour des problèmes sans rapport avec la Mécanique Quantique. En fait, dans un travail indépendant du nôtre annoncé dans [19], P. Gérard a introduit ces mesures par une approche très différente (basée sur des éléménts du calcul pseudo-différentiel), a obtenu quelques-unes des propriétés que nous établissons et, surtout, a pu résoudre grâce à ces mesures des problèmes délicats d'homogénéisation. Nous décrivons brièvement dans la suite de cette Introduction les propriétés essentielles de ces mesures.

La troisième motivation de ce travail concerne la *limite semi-classique* et la possibilité de relier rigoureusement les équations de Schrödinger linéaires ou nonlinéaires (par exemple de type Hartree) aux équations dites *cinétiques* de la Mécanique Statistique et plus précisément aux équations de Liouville (dans le cas linéaire) ou aux équations de Vlasov (dans le cas nonlinéaire). Cela permet d'une part la déduction ab initio de tels systèmes cinétiques mais aussi dans le cas linéaire de contourner les difficultés des développements semi-classiques usuels liées aux caustiques. Enfin, il convient de noter que les équations obtenues par transformée de Wigner à partir d'équations de type Hartree sont utilisées en Physique Nucléaire ou dans la Physique des semi-conducteurs (l'interaction étant coulombienne comme dans le modèle original de Hartree en Physique Atomique, on parle alors de l'équation de Wigner-Poisson -voir par exemple G. Grimwall [23], U. Ravaioli et al. [36], W.R. Frensley [17], V.I. Tatarskii [42], P.A. Markowich [32].

Décrivons maintenant un peu plus précisément les résultats que nous avons établis. La Section II ci-dessous est consacrée à l'étude des transformées de Wigner non seulement pour des fonctions ψ dans L^2 mais également pour des opérateurs hermitiens de Hilbert-Schmidt sur L^2 c'est-à-dire pour des matrices-densité $\rho \in L^2(\mathbb{R}_x^N \times \mathbb{R}_y^N)$ vérifiant: $\rho(x,y) = \rho(x,y)^*$. Et nous supposerons le plus souvent que ces opérateurs sont positifs ou nuls.

Nous rappelons également dans cette section les liens entre équations de Schrödinger du type (3) ou (6) (et leurs formulations en terme d'équations de Liouville quantiques) et des équations de transport intégro-différentielles satisfaites par les transformées de Wigner (ces équations sont parfois appelées équations de Wigner). Signalons que cette réécriture de l'équation de Schrödinger est utilisée dans B. Perthame et P.L. Lions [30] pour établir ou retrouver des propriétés de dispersion et de régularité locale des solutions de l'équation de Schrödinger.

La Section III est la section centrale de notre article puisque:

1) nous introduisons les limites (au sens des distributions et en fait dans une dualité qui sera précisée) de

$$W_\varepsilon = \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i(\xi/\varepsilon)\cdot y} \rho_\varepsilon\big(x + \frac{y}{2}\,,\, x - \frac{y}{2}\big)\, dy\,,$$

où $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est une suite bornée dans $L^2(\mathbb{R}^N_x \times \mathbb{R}^N_y)$ de noyaux définissant des opérateurs auto-adjoints, positifs ou nuls et de trace bornée,

2) nous montrons que ces limites sont des mesures *positives* bornées ou $\mathbb{R}^N_x \times \mathbb{R}^N_\xi$ *arbitraires*, la positivité étant une conséquence simple de l'observation suivante

$$\text{(8)} \qquad \tilde{W}_\varepsilon \;=\; W_\varepsilon * e^{-(|x|^2+|\xi|^2)/\varepsilon} \;\geq\; 0\,, \qquad \text{p.p. sur} \quad \mathbb{R}^N_x \times \mathbb{R}^N_\xi\,.$$

En fait, $\tilde{W}_\varepsilon$ est appelée transformée de Husimi de l'opérateur ρ_ε et est reliée aux états cohérents et aux paquets d'onde [8], [25] and [37],

3) nous donnons diverses autres constructions équivalentes de ces mesures notamment en faisant le lien avec la limite des quantités quadratiques construites à partir d'opérateurs pseudo-différentiels convenables. Il est à noter que les transformées de Wigner peuvent être considérées comme le symbole de Weyl des opérateurs considérés et que les limites semi-classiques que nous étudions correspondent aux règles de quantifications de Weyl (voir H. Weyl [44, page 274]) même si nous pouvons utiliser nos résultats dans le cadre du calcul symbolique usuel,

4) et enfin, nous montrons que ces mesures peuvent servir à mesurer les pertes de *compacité dans* L^2 (et dans L^2 uniquement) de $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, enregistrant les concentrations et les oscillations éventuelles, en tous cas lorsque ces dernières ont une "longueur d'ordre $1/\varepsilon$" (si

$$\rho_\varepsilon = \psi_\varepsilon(x)\psi^*_\varepsilon(y)\,,$$

cela signifie que $\hat{\psi}_\varepsilon$ est essentiellement, au sens de la norme L^2, supportée dans des boules de rayon R/ε avec $R < \infty$). On voit donc un lien méthodologique avec les H-mesures introduites indépendamment par L. Tartar [41] et P. Gérard [18] pour mesurer les défauts de compacité de suites bornées dans L^2, idée qui est à rapprocher de mesures de défaut de compacité introduites antérieurement dans d'autres situations par P.L. Lions [27], [28] (méthode de concentration-compacité) puis par R.J. DiPerna et A. Majda [15], [16]. Un résumé grossier des liens que nous établissons est donné par les assertions suivantes: i) la (ou les) H-mesures sont définies et ont un sens pour des suites arbitraires tandis que les mesures de Wigner nécessitent d'avoir une longueur caractéristique d'oscillations -comme c'est le cas dans les limites semiclassiques ou dans l'homogénéisation périodique, voir P. Gérard [19]-, ii) si la mesure de Wigner μ est "bien définie" (au sens précédent), la H-mesure σ est la mesure sur $\mathbb{R}_x^N \times \mathbb{R}_\omega^{N-1}$ définie par

$$d\sigma(x,\omega) = \int_0^\infty d\mu(x,t\,\omega)\,dt\,. \tag{9}$$

Cette observation permet en fait de donner des procédés nouveaux de construction des H-mesures.

Nous donnons également dans cette Section III quelques autres propriétés de ces mesures de Wigner ainsi que divers exemples représentatifs.

Enfin, la Section IV est consacrée à l'analyse de la *limite semi-classique* ($\hbar \to 0$) dans des équations de Schrödinger linéaires ((5), (6)) ou nonlinéaires. Ce type de limites est bien sûr classique en Physique et diverses présentations heuristiques se trouvent dans les traités classiques de Mécanique Quantique ou de Physique Nucléaire -une présentation rapide d'un cas nonlinéaire peut être trouvée dans V.P. Maslov [35]. En fait, nous partons de l'équation de Liouville où l'inconnue est la matrice densité $\rho(x,y)$

$$i\hbar\,\frac{\partial \rho}{\partial t} = [H,\rho]\,, \tag{10}$$

où $H = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta + V$, $\hbar$ joue maintenant le rôle du paramètre ε précédent. Dans le cas linéaire, V est fixé tandis qu'un exemple canonique de problème nonlinéaire est donné par $V = V_0 * \rho$ et $\rho = \rho(x)$ est la densité ($= \rho(x,x)$). Bien sûr, si $\rho(x,y)$ vu comme un opérateur est un projecteur de rang 1, *i.e.*, $\rho(x,y) = \psi(x)\,\psi^*(y)$ avec $\|\psi\|_{L^2} = 1$, (10) est une formulation équivalente de (6). Les hypothèses minimales sur ρ qui dépend de $\hbar$ bien évidemment sont alors: $\rho = \rho^*$, $\rho \geq 0$, $\mathrm{Tr}\,(\rho)$ bornée. La limite semi-classique que nous étudions consiste à introduire

$$\begin{aligned} f_\hbar \;=\; W_\hbar(\rho) \;&=\; \frac{1}{(2\pi\hbar)^N}\int e^{-i(\xi/\hbar)\cdot y}\,\rho\big(x+\frac{y}{2}\,,\,x-\frac{y}{2}\big)\,dy \\ &=\; \frac{1}{(2\pi)^N}\int e^{-i\xi\cdot y}\,\rho\big(x+\frac{\hbar y}{2}\,,\,x-\frac{\hbar y}{2}\big)\,dy \end{aligned}$$

et à établir l'équation satisfaite par la (ou les) mesures de Wigner limites de $f_\hbar$ quand $\hbar$ tend vers 0. Si on note f une telle limite, on s'attend bien sûr à trouver les équations de *Liouville* (dans le cas linéaire) ou de *Vlasov* (dans le cas nonlinéaire) de la mécanique statistique classique à savoir

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi\cdot\nabla_x f - \nabla_x V\cdot\nabla_\xi f \;=\; 0\,, \tag{11}$$

avec $V = V_0 * \rho$ et $\rho = \int_{\mathbb{R}^N} f(x,\xi)\,d\xi$ dans le cas non-linéaire.

Les problèmes mathématiques associés à ce passage à la limite sont nombreux: justification de la limite, type de convergence de $f_\hbar$ vers f et régularité du potentiel nécessaire à cela. Nous obtenons ici trois types de résultats:

i) si V (ou V_0) $\in C_0^1$ (*i.e.*, V, $\partial V/\partial x_i \in C_0(\mathbb{R}^N)$ pour $1 \leq i \leq N$), nous vérifions que $f_\hbar$ converge (par exemple au sens des distributions) vers f solution faible de (11). Même si la régularité nécessitée en V est importante, il est à noter qu'elle n'entraîne pas l'unicité des solutions de (11) ou de

$$\dot{x} \;=\; \xi\,, \qquad \dot{\xi} \;=\; -\nabla V(x)\,, \tag{12}$$

ii) si V est régulier et, au temps $t = 0$, $f_\hbar$ converge "régulièrement" vers f_0 régulière alors $f_\hbar$ converge fortement dans $C([O,T]\,;\,L^2(\mathbb{R}_x^N \times \mathbb{R}_\xi^N))$ (pour tout $T < \infty$) vers la solution de (11) vérifiant $f|_{t=0} = f_0$ et de plus on peut écrire et justifier un développement asymptotique de $f_\hbar$ en puissances de $\hbar$ (valable par exemple au sens de $C([0,T]\,;\,L^2(\mathbb{R}_x^N \times \mathbb{R}_\xi^N))$ (pour tout $T < \infty$).

iii) si V ou V_0 sont peu réguliers et si, au temps $t = 0$, $f_\hbar$ est bornée dans $L^2(\mathbb{R}_x^N \times \mathbb{R}_\xi^N)$, on peut encore obtenir la convergence (faible dans

L^2) de $f_\hbar$ vers une solution f de (11). L'hypothèse essentielle que nous devons faire dans ce cas sur V ou V_0 est:

$$\begin{aligned} &\nabla V \in L^2(\mathbb{R}^N) + L^q(\mathbb{R}^N), && \text{où } 2 < q < \infty, \\ &\nabla V_0 \in L^r(\mathbb{R}^N) + L^q(\mathbb{R}^N), && \text{avec } \frac{2N+8}{N+8} < r < q < \infty. \end{aligned}$$

Il est à noter que cette dernière hypothèse autorise le potentiel coulombien en dimension 3 (*i.e.*, $V_0(x) = 1/|x|$, $N = 3$) -puisque $3/2 > 14/11$. En d'autres termes, notre analyse donne en particulier la *convergence de Wigner-Poisson vers Vlasov-Poisson* en dimension 3. Rappelons que diverses études du système de Wigner-Poisson ont été réalisées ([34], [5], [39], [4], [6], [2], [40], [10], [11], [31], [32], [33]) tandis que le système de Vlasov-Poisson est maintenant assez bien compris (les résultats les plus généraux d'existence de solutions faibles ou de solutions régulières peuvent être trouvés respectivement dans R. J. DiPerna et P. L. Lions [12], [13], P. L. Lions et B. Perthame [30]).

Un des principaux ingrédients mathématiques de notre analyse dans le cas iii) est un résultat à la Lieb-Thirring [26] (voir aussi B. Simon [38] pour une présentation de ces résultats) détaillé dans l'appendice: si $(\psi_n)_{n\geq 1}$ est un système orthonormé dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ et si $(\lambda_n)_{n\geq 1} \in l^p$ avec $\lambda_n \geq 0$ (pour tout $n \geq 1$), $1 < p \leq \infty$, alors on a dans le cas où $N = 3$ (par exemple)

$$\|\rho\|_{L^q(\mathbb{R}^3)} \leq C\, \|(\lambda_n)_n\|_{l^p}^{\theta} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \sum_n \lambda_n |\nabla \psi_n|^2 \, dx \right)^{(1-\theta)/2}, \tag{13}$$

avec

$$\rho = \sum_n = \sum_n \lambda_n |\psi_n|^2, \quad q = \frac{2p'+3}{2p'+1}, \quad p' = \frac{p}{p-1}, \quad \theta = \frac{3}{2p'+3},$$

où $C > 0$ ne dépend que de p. Nous obtenons également des résultats, apparemment nouveaux également, du même type sur

$$j = \sum_n \lambda_n \, \mathrm{Im}\,(\nabla \psi_n \psi_n^*).$$

Enfin, signalons pour conclure cette longue introduction que l'étude du cas iii) sera prolongée par un travail en cours en collaboration avec

P. Gérard dans lequel nous étudions le cas de systèmes du type Vlasov-Maxwell, et nous revenons sur les résultats donnés en iii) en traitant d'autres conditions initiales (ce qui permet en fait d'affaiblir encore l'hypothèse faite sur V_0) et en précisant la convergence ainsi que la nature des solutions obtenues en faisant tendre $\hbar$ vers 0. Cela est rendu possible par la possibilité de "renormaliser" l'équation de Liouville quantique à la manière du cas classique (voir R. J. DiPerna et P. L. Lions [14]).

II. Transformées de Wigner.

Ainsi que nous l'avons indiqué dans l'Introduction, cette section est consacrée à diverses généralités sur la transformée de Wigner.

Pour commencer, soit $\psi \in L^2(\mathbb{R}^N)$, on note $\rho(x,y)$ la matrice densité associée à savoir l'expression donnée par (2). Bien sûr, $\rho(x,y) \in L^2(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ et peut être considéré comme le noyau d'un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R}^N)$: cet opérateur n'est rien d'autre que l'opérateur de projection sur $\mathbb{R}\psi$ au facteur multiplicatif $\|\psi\|_{L^2}^2$ près. C'est donc un opérateur compact, positif, hermitien de trace égale à $\|\psi\|_{L^2}^2$. On voit en outre que $\rho(x,x) = |\psi(x)|^2$ a un sens et appartient à $L^1_+(\mathbb{R}^N)$. Une manière systématique de comprendre ce dernier point consiste à introduire $\tilde{\rho}(x,y)$

$$(14) \qquad \tilde{\rho}(x,y) \;=\; \rho\big(x+\frac{y}{2}\,,\,x-\frac{y}{2}\big)\,, \qquad \text{p.p. } (x,y)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N\,.$$

Alors, bien sûr,

$$\tilde{\rho} \in L^2(\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N)\cap C_0(\mathbb{R}^N_y;L^1(\mathbb{R}^N_x))\cap C_0(\mathbb{R}^N_x;L^1(\mathbb{R}^N_y))$$

et ρ, vu comme opérateur, est hermitien si et seulement si

$$(15) \qquad \tilde{\rho}(x,-y) \;=\; \tilde{\rho}(x,y)^*\,, \qquad \text{p.p. } (x,y)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N\,.$$

Enfin, $\rho(x)=\rho(x,x)$ (appelée densité) n'est rien d'autre que la restriction de $\tilde{\rho}$ au sous-espace $\{y=0\}$ de $\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N$.

Ces considérations élémentaires s'étendent à des opérateurs plus généraux sur $L^2(\mathbb{R})$. En effet, soit K un opérateur hermitien de Hilbert-Schmidt sur $L^2(\mathbb{R}^N)$ alors -et il s'agit d'une caractérisation évidente- il existe un noyau $\rho(x,y)\in L^2(\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N)$ vérifiant

$$(16) \qquad \rho(x,y) \;=\; \rho(y,x)^*\,, \qquad \text{p.p. } (x,y)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N\,.$$

De plus, et c'est encore une fois un point de vue équivalent, on peut écrire

$$(17) \qquad \rho(x,y) = \sum_{i\in I} \lambda_i \, \psi_i(x)\, \psi_i^*(y)\,, \qquad \text{p.p. } (x,y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N\,,$$

où I est au plus dénombrable (vide si $\rho \equiv 0$), $\lambda_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (pour tout $i \in I$) et

$$(18) \qquad \sum_i \lambda_i^2 < +\infty\,, \qquad \int_{\mathbb{R}^N} \psi_i \psi_j^* = \delta_{ij} \quad (\text{pour tout } i,j \in I)\,.$$

En outre, K est positif si et seulement si

$$(19) \qquad \lambda_i > 0\,, \qquad \text{pour tout } i \in I\,.$$

Et, dans ce cas, K est de trace finie si et seulement si $\sum_i \lambda_i < +\infty$, ou également si et seulement si $\tilde{\rho}$ donné par (14) appartient à

$$C_0(\mathbb{R}_y^N\,;\, L^1(\mathbb{R}_x^N)) \qquad \left(\cap C_0(\mathbb{R}_x^N\,;\, L^1(\mathbb{R}_y^N)\right)\,.$$

On note alors

$$\rho(x) = \tilde{\rho}|_{y=0} = \sum_i \lambda_i \, |\psi_i(x)|^2 \in L^1_+(\mathbb{R}_x^N)$$

de sorte que

$$(20) \qquad \operatorname{Tr}(K) = \sum_i \lambda_i = \int_{\mathbb{R}^N} \rho(x)\, dx$$

tandis que

$$(21) \qquad \operatorname{Tr}(K^2) = \sum_i \lambda_i^2 = \|\rho\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)}\,.$$

Dans tout ce qui suit, nous identifierons complètement K et son noyau $\rho(x,y)$. Nous utiliserons également la notation $\rho = \rho(x)$ pour la densité $\sum_i \lambda_i \, |\psi_i(x)|^2$ et nous parlerons simplement d'un opérateur ρ de Hilbert-Schmidt, hermitien, positif, éventuellement de trace finie.

On définit alors la transformée de Wigner de ρ

$$W(x,\xi) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\xi\cdot y} \rho(x+\frac{y}{2}, x-\frac{y}{2})\, dy\,, \tag{22}$$

pour $(x,\xi) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, *i.e.*, la transformée de Fourier de $\tilde{\rho}(x,\cdot)$. Au vu de (15), ρ est un opérateur hermitien si et seulement si W est réelle, de Hilbert-Schmidt si et seulement si $W \in L^2(\mathbb{R}^N_x \times \mathbb{R}^N_\xi)$ et

$$\|W\|^2_{L^2} = \frac{1}{(2\pi)^N} \|\tilde{\rho}\|^2_{L^2} = \frac{1}{(4\pi)^N} \|\rho\|^2_{L^2}\,. \tag{23}$$

La traduction en terme de W du fait que ρ soit de trace finie est plus délicate. Formellement, on observe que

$$\int_{\mathbb{R}^N} W(x,\xi)\, d\xi = \rho(x) \in L^1_+(\mathbb{R}^N)$$

en tout cas si ρ est positif. Cette intégration en ξ peut être en fait justifiée, toujours dans le cas où ρ est positif, en considérant

$$\int_{\mathbb{R}^N} W(x,\xi)\, e^{\varepsilon|\xi|^2/2}\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^N_y} \tilde{\rho}(x,y)\, \frac{e^{-|y|^2/2\varepsilon}}{(2\pi\varepsilon)^{N/2}}\, dy$$

qui converge dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ vers $\rho(x) \in L^1_+(\mathbb{R}^N)$ si et seulement si ρ est de trace finie. Nous verrons plus loin une caractérisation très simple de la propriété de trace finie.

La positivité de ρ semble se traduire difficilement en terme des transformées de Wigner. Une caractérisation implicite consiste à procéder par équivalences: $\rho \geq 0$ équivaut à

$$\begin{aligned} 0 &\leq \iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \rho(x,y)\, \psi(y)\, \psi^*(x)\, dx\, dy \\ &= \iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \tilde{\rho}(x,y)\, \psi\big(x-\frac{y}{2}\big)\, \psi^*\big(x+\frac{y}{2}\big)\, dx\, dy\,, \end{aligned} \tag{23}$$

d'où

$$\iint_{\mathbb{R}^N_x\times\mathbb{R}^N_\xi} W\, W_\psi\, dx\, d\xi \geq 0\,, \tag{24}$$

pour tout $\psi \in L^2(\mathbb{R}^N)$, où W_ψ est la transformée de Wigner de ψ ou plus précisément de $\psi(x)\,\psi^*(y)$. La condition nécessaire et suffisante (24) n'entraîne pas que $W \geq 0$. De plus, si on choisit

$$\psi(x) \;=\; \pi^{-N/4}\, e^{|x-x_0|^2/2}\, e^{i\xi_0\cdot x}\,, \qquad \text{où } (x_0,\xi_0) \in \mathbb{R}^{2N}$$

on trouve $W_\psi(x,\xi) = \pi^{-N}\ \exp\big(-(|x-x_0|^2+|\xi-\xi_0|^2)\big)$ et (24) implique

$$\tilde{W} \;=\; W * G \;\geq\; 0\,, \qquad \text{sur } \mathbb{R}^{2N}\,. \tag{25}$$

On appelle cette dernière quantité la transformée de Husimi de ρ.

En fait, (24) implique également beaucoup d'autres positivités de convoleés de W. En effet, si $\tilde{\rho}'$ est un noyau dans $L^2(\mathbb{R}^{2N})$ définissant un opérateur hermitien positif et si W' est sa transformée de Wigner (qui est donc réelle et appartient à $L^2(\mathbb{R}^{2N})$ d'après ce qui précède), on a donc d'après (23)-(24)

$$\iint_{\mathbb{R}^{2N}} W\,W'\,dx\,d\xi \;\geq\; 0\,. \tag{24'}$$

Or si on considère $\tilde{\rho}(x-x_0, y-y_0)\,e^{i\xi_0\cdot(x-y)}$, avec (x_0,ξ_0) quelconque dans $\mathbb{R}^{2N}$, ce nouveau noyau a les mêmes propriétés que $\tilde{\rho}$ et sa transformée de Wigner n'est rien d'autre que $W'(x-x_0, \xi-\xi_0)$ de sorte que (24$'$) implique

$$W * Z \;\geq\; 0\,, \qquad \text{sur } \mathbb{R}^{2N}\,, \tag{26}$$

avec $Z(x,\xi) \;=\; W'(-x,-\xi)$ sur $\mathbb{R}^{2N}$.

Enfin, si on revient sur l'hypothèse de trace finie pour ρ, on peut maintenant facilement la traduire en terme de W en écrivant que $\tilde{W} \in L^1(\mathbb{R}^{2N})$. On a alors

$$\begin{aligned} &\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \tilde{W}\,dx\,d\xi \;=\; \sum_i \lambda_i \;=\; \int_{\mathbb{R}^N} \rho(x)\,dx\,, \\ &\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{W}\,d\xi \;=\; \rho(x)\,, \qquad \text{p.p. } x \in \mathbb{R}^N\,. \end{aligned} \tag{27}$$

En *conclusion*, la transformée de Wigner W d'un noyau $\rho \in L^2(\mathbb{R}^{2N})$ hermitien est caractérisé par: W est réelle et $W \in L^2(\mathbb{R}^{2N})$. La positivité de ρ (en tant qu'opérateur sur $L^2(\mathbb{R}^N)$) est caractérisée par (24) (ou (26)). Et, dans ce cas, ρ est de trace finie si et seulement si $\tilde{W} = W * G$ (par exemple) $\in L^1(\mathbb{R}^{2N})$ -et cette dernière quantité est positive ou nulle sur $\mathbb{R}^{2N}$. Enfin, les identités (23) et (27) ont lieu. De façon à ne pas toujours rappeler les hypothèses faites sur ρ, de tels noyaux ρ vérifiant *toutes* les propriétés précédentes seront simplement appelées des *matrices densité*.

Signalons bien sûr que, puisque

$$\tilde{\rho} \in C_0(\mathbb{R}^N_x; L^1(\mathbb{R}^N_y)), \qquad W \in C_0(\mathbb{R}^N_x; \mathcal{F}L^1(\mathbb{R}^N_\xi))$$

et en remarquant que l'on a

$$\begin{aligned}(28) \qquad (\mathcal{F}_x^{-1} W)(\eta, \xi) &= (2\pi)^{-2N} \lambda_i \hat{\psi}_i \left(\frac{\xi - \eta}{2}\right) \hat{\psi}_i \left(\frac{\xi + \eta}{2}\right)^* \\ &\in C_0\big(\mathbb{R}^N_\xi; L^1(\mathbb{R}^N_\eta)\big),\end{aligned}$$

on en déduit également que $W \in C_0\big(\mathbb{R}^N_\xi; \mathcal{F}L^1(\mathbb{R}^N_x)\big)$. Enfin,

$$\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N_x \times \mathbb{R}^N_y) \quad \text{si et seulement si} \quad W \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N_x \times \mathbb{R}^N_\xi)$$

ce qui permet les arguments de densité habituels.

Nous allons maintenant conclure cette section par une brève présentation des équations satisfaites par la transformée de Wigner de la solution d'une équation de Schrödinger ou de Liouville. Nous commencerons par le cas de particules libres où donc $\psi \in C(\mathbb{R}_t; L^2(\mathbb{R}^N_x))$ est solution de (3). Plus généralement, si ρ_0 est une matrice densité, il existe une unique solution $\rho \in C(\mathbb{R}_t; L^2(\mathbb{R}^N_x \times \mathbb{R}^N_y))$ de l'équation de Liouville

$$(29) \qquad i\,\frac{\partial \rho}{\partial t} = [H_0, \rho], \qquad \text{pour} \;\; t \in \mathbb{R}, \quad \rho|_{t=0} = \rho_0\,,$$

avec H_0 donné par l'opérateur hermitien $\left(-\frac{1}{2}\Delta\right)$ non borné sur $L^2(\mathbb{R}^N)$ (de domaine $H^2(\mathbb{R}^N)$). Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\rho(t)$ est une matrice densité et si

$$\rho_0 = \sum_i \lambda_i\, \psi_i(x)\, \psi_i^*(y)\,,$$

avec

$$\lambda_i > 0\,, \quad \sum_i \lambda_i < \infty\,, \quad \int_{\mathbb{R}^N} \psi_i \psi_j^*\, dx = \delta_{ij} \quad (\text{pour tout } i, j)\,,$$

alors

$$\rho(t) = \sum_i \lambda_i \, \psi_i(t,x) \, \psi_i^*(t,y)$$

et $\psi_i(t) = e^{-itH_0}\psi_i$ est la solution de (3) dans $C(\mathbb{R}_t; L^2(\mathbb{R}_x^N)$ vérifiant $\psi_i(0) = \psi_i$. On peut également écrire $\rho(t) = e^{-itH_0} \, \rho_0 \, e^{itH_0}$.

On introduit alors $W(t,x,\xi)$ qui est, pour chaque $t \in \mathbb{R}$, la transformée de Wigner de $\rho(t)$. Un calcul élémentaire de transformée de Fourier donne que W vérifie (4) à savoir l'équation de transport (classique) libre. Ce passage de Schrödinger au transport libre est d'ailleurs systématiquement utilisé dans P.L. Lions et B. Perthame [30] pour préciser les lemmes de régularité locale de l'équation de Schrödinger (de type dispersion) grâce à l'équation (4) et les relier à des lemmes de gains locaux de moments pour des équations du type (4).

Il est d'ailleurs utile de préciser les liens entre moments de W et énergie cinétique de ρ. En effet, si $\psi_i \in H^1(\mathbb{R}^N)$ (pour tout i) et si

$$\sum_i \lambda_i \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \psi_i|^2 \, dx < \infty$$

ce que l'on peut écrire de manière synthétique $\mathrm{Tr}\,(H_0\rho_0) < +\infty$, cette propriété est bien sûr conservée (indépendamment de t) pour la solution de (29). Cela, en terme de W, signifie uniquement que

$$\iint_{\mathbb{R}^{2N}} W|\xi|^2 \, dx \, d\xi$$

est indépendant de $t \in \mathbb{R}$. En effet, en tout cas si $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_x^N \times \mathbb{R}_y^N)$ de façon à ce que $W \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_x^N \times \mathbb{R}_\xi^N)$, on a

$$\iint_{\mathbb{R}^{2N}} W|\xi|^2 \, dx \, d\xi \; = \; \mathrm{Tr}\,(H_0\rho)\,. \tag{30}$$

De manière encore plus précise, on peut observer que $\mathrm{Tr}\,(H_0\rho) < +\infty$ équivaut à

$$|\xi|^2 \, \tilde{W} \in L^1(\mathbb{R}_x^N \times \mathbb{R}_\xi^N) \quad \text{et} \quad \iint_{\mathbb{R}^{2N}} |\xi|^2 \, \tilde{W} \, dx \, d\xi = \mathrm{Tr}\,(H_0\rho) + N\,,$$

où $\tilde{W} = W * G$ est la transformée de Husimi, et ceci ne nécessite plus de supposer que $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_x^N \times \mathbb{R}_y^N)$. En fait, l'identité entre moments en ξ de W et normes (ou semi-normes) de type Sobolev sur ρ ou les ψ_i peut se voir grâce à la remarque générale suivante basée sur (28):

$$\int_{\mathbb{R}^N} W\,dx = \frac{1}{(2\pi)^N} \sum_i \lambda_i\, |\hat{\psi}_i(\xi)|^2 . \tag{31}$$

Considérons maintenant le cas d'une équation de Schrödinger avec un potentiel V (réel)

$$\begin{cases} i\,\dfrac{\partial \psi}{\partial t} = -\dfrac{1}{2}\,\Delta\psi + V\psi\,, & \text{dans } \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N\,, \\ \psi|_{t=0} = \psi_0\,, & \text{dans } \mathbb{R}^N\,, \end{cases} \tag{32}$$

ou de l'équation de Liouville associée

$$i\,\frac{\partial \rho}{\partial t} = [H,\rho]\,, \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \quad \rho|_{t=0} = \rho_0\,, \tag{33}$$

où H est l'opérateur $(-\frac{1}{2}\Delta + V)$. Une façon de résoudre (32) ou (33) consiste à écrire $\psi(t) = e^{-itH}\psi_0$ ou $\rho(t) = e^{-itH}\,\rho_0 e^{itH}$ pour $\psi_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et ρ_0 étant une matrice densité. Il faut alors des conditions sur V assurant que H, sur un domaine convenable est un opérateur autoadjoint. Par exemple, d'après T. Kato [24], M. Aizenman et B. Simon [1] -voir aussi R. Dautray [9], on sait que H est un opérateur autoadjoint minoré si V vérifie

$$V^+ \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)\,, \qquad V^- \in K^N(\mathbb{R}^N)\,, \tag{34}$$

où la classe $K^N(\mathbb{R}^N)$ est définie par

$$K^N(\mathbb{R}^N) = \left\{ f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N) : \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_x \int_{|x-y|\le\varepsilon} |x-y|^{2-N} |f(y)|\,dy = 0 \right\},$$

si $N \ge 3$,

$$K^N(\mathbb{R}^N) = \left\{ f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2) \colon \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_x \int_{|x-y|\le\varepsilon} (\log |x-y|^{-1}) |f(y)|\,dy = 0 \right\},$$

si $N \ge 2$, et

$$K^N(\mathbb{R}^N) = \left\{ f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) : \sup_x \int_{|x-y|\le 1} |f(y)|\,dy < \infty \right\},$$

si $N \geq 3$.

Le domaine de H est donné par

$$D(H) = \left\{ \psi \in H^1(\mathbb{R}^N) : \ |V|\psi \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N) \, , \ -\frac{1}{2}\,\Delta\psi + V\psi \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\}.$$

Pourtant, si on veut écrire l'équation satisfaite par la transformée de Wigner, des hypothèses supplémentaires sur V semblent nécessaires. Les hypothèses que nous ferons sont faciles à comprendre si on veut écrire que $\psi = e^{-itH}\,\psi_0 \in C(\mathbb{R}_t; L^2(\mathbb{R}^N_x))$ vérifie (32) dans $\mathcal{S}'$ (dans $\mathcal{D}'$ il suffirait de supposer que $V \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$) et nous supposerons donc qu'il existe $C \geq 0$, $m \geq 0$

$$\text{(35)} \qquad V \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N) \, , \qquad \int_{|x| \leq R} |V(x)|^2 \, dx \ \leq \ C\,(1+R)^m \, ,$$

pour $R \geq 0$.

On démontre alors (sans grande difficulté) la

Proposition II.1. *Soit V vérifiant* (34)-(35) *et soit ρ_0 une matrice densité. On pose $\rho(t) = e^{-itH}\,\rho_0\,e^{itH}$ et on note $W(t,x,\xi)$ la transformée de Wigner de $\rho(t)$ (pour tout $t \in \mathbb{R}$). Alors, W est une fonction dans*

$$C(\mathbb{R}_t; L^2(\mathbb{R}^N_x \times \mathbb{R}^N_\xi)) \cap C_b(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^N_x; \mathcal{F}L^1(\mathbb{R}^N_\xi)) \cap C_b(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^N_\xi; \mathcal{F}L^1(\mathbb{R}^N_x))$$

et vérifie

$$\text{(36)} \qquad \frac{\partial W}{\partial t} + \xi \cdot \nabla_x W + K \underset{\xi}{*} W \ = \ 0 \qquad \textit{dans } \mathcal{D}' \, ,$$

où

$$\begin{aligned} K \ &= \ \frac{i}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\xi\cdot y} \Big(V\big(x + \frac{y}{2}\big) - V\big(x - \frac{y}{2}\big) \Big) \, dy \\ &= \ i \left(e^{i2\xi\cdot x}\,\hat{V}(2\xi) - e^{-i2\xi\cdot x}\,\hat{V}(2\xi)^* \right) . \end{aligned}$$

REMARQUE II.1. Le produit de convolution $K \underset{\xi}{*} W$ a un sens (dans $\mathcal{D}'$ ou dans $\mathcal{S}'$) puisque d'après (35) $\int |V(x)|^2 (1+|x|^2)^{-p}\,dx < \infty$ pour $p > 0$ suffisamment grand $(p > m/2)$ et donc $\hat{V} \in H^{-p}(\mathbb{R}^N)$. Ceci entraîne que

$$K \in C(\mathbb{R}^N_x; H^{-p}(\mathbb{R}^N_\xi)) \qquad \text{et} \qquad \|K(x,\cdot)\|_{H^{-p}} \leq C\,(1+|x|)^p \, .$$

Comme $W \in L^2(\mathbb{R}_x^N \times \mathbb{R}_\xi^N)$, on peut alors définir aisément $K \underset{\xi}{*} W$.

REMARQUE II.2. Plusieurs choix de normalisation sont possibles pour les transformées de Wigner. Nous avons choisi la normalisation classique.

REMARQUE II.3. L'énergie totale au niveau de (32) ou (33) s'écrit

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Tr}(H_0\rho + V\rho) &= \frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^{2N}} W|\xi|^2\,dx\,d\xi + \int_{\mathbb{R}^N} V\,\rho\,dx \\
&= \iint_{\mathbb{R}^{2N}} W\left(\frac{1}{2}|\xi|^2 + V(x)\right)dx\,d\xi\,,
\end{aligned}
\tag{37}
$$

avec $\rho(x) = \int_{\mathbb{R}^N} W(x,\xi)\,d\xi$. Il est intéressant de retrouver sur (36) les invariances classiques de l'équation de Schrödinger à savoir que $\operatorname{Tr}(\rho)$, $\operatorname{Tr}(\rho^2)$ et $\operatorname{Tr}(H_0\rho + V\rho)$ sont indépendants de t. Ceci se fait aisément sur (36) -en supposant pour simplifier la présentation que V, W sont réguliers (dans $\mathcal{S}$ par exemple)- en remarquant que

$$
\iint_{\mathbb{R}^{2N}} W\,dx\,d\xi\,, \qquad \iint_{\mathbb{R}^{2N}} W^2\,dx\,d\xi\,,
$$

et

$$
\frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^{2N}} W|u|^2\,dx\,d\xi + \int_{\mathbb{R}^N} V\rho\,dx
$$

sont indépendants de t. En effet, pour la première invariance, il suffit d'observer que $\int_{\mathbb{R}^N} K\,d\rho = 0$. Pour la deuxième invariance, on remarque que

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} (K * W)W\,d\xi \\
&= -2\,\operatorname{Im}\left(\iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \hat{V}(2\xi)\,e^{2i(\xi-\eta)\cdot x}\,W(x,\xi)\,W(x,\eta)\,d\xi\,d\eta\right) = 0\,,
\end{aligned}
$$

en échangeant ξ et η puisque $\hat{V}(-\xi) = \hat{V}(\xi)^*$ (car V est réel). Enfin, la conservation de l'énergie totale découle des identités suivantes

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^{2N}} W|\xi|^2\,d\xi\,dx\right) = -\frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^{2N}} (K * W)|\xi|^2\,d\xi\,dx \\
&= -\frac{i}{2(2\pi)^N}\int_{\mathbb{R}^{3N}} dx\,dy\,d\eta\,W(x,\eta)\Big(V(x+\frac{y}{2}) - V(x-\frac{y}{2})\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\cdot \int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^2 \, e^{-i(\xi-\eta)\cdot y} \, d\xi \\
&= -\frac{i}{2} \int_{\mathbb{R}^{2N}} dx \, d\eta W(x,y)(-\Delta_y) \Big(\big(V\big(x+\frac{y}{2}\big) - V\big(x-\frac{y}{2}\big) \big) \, e^{i\eta\cdot y} \Big) |_{y=0} \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N} dx \, \nabla V(x) \cdot \int_{\mathbb{R}^N} d\eta \, \eta \, W(x,\eta) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} dx \, V(x) \, \operatorname{div} \int_{\mathbb{R}^N} W(x,\eta)\eta \, d\eta \, .
\end{aligned}
$$

Or, toujours d'après (36),

$$
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \int_{\mathbb{R}^N} W(x,\xi)\xi \, d\xi \; = \; 0 \, ,
$$

ce qui permet de conclure:

$$
\frac{d}{dt} \Big(\frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^{2N}} W|\xi|^2 \, d\xi \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} V\rho \, dx \Big) \; = \; 0 \, .
$$

Signalons une dernière identité remarquable satisfaite par les solutions de (32) ou (33)

$$
\frac{d^2}{dt^2} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 \, \rho(x) \, dx \; = \; 2 \operatorname{Tr}(H_0\rho) - 2 \int_{\mathbb{R}^N} x \cdot \nabla V(x) \, \rho(x) \, dx \tag{38}
$$

que l'on peut retrouver grâce à (36) par des calculs (fastidieux) semblables à ce qui précède. Cette identité en terme de W devient bien sûr

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dt^2} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 \, \rho(x) \, dx \\
&\quad = \iint_{\mathbb{R}^{2N}} W|\xi|^2 \, dx \, d\xi - 4 \int_{\mathbb{R}^N} x \cdot \nabla V \rho \, dx \\
&\quad = \iint_{\mathbb{R}^{2N}} W'(|\xi|^2 - 4\, x \cdot \nabla V) \, dx \, d\xi \, .
\end{aligned} \tag{39}
$$

III. Mesures de Wigner.

Cette section est consacrée à l'étude des limites de transformées de Wigner pour des suites bornées dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ ou plus généralement pour des suites de noyaux hermitiens, positifs ou nuls, de trace bornée et bornées dans $L^2(\mathbb{R}_x^N \times \mathbb{R}_y^N)$. Nous conviendrons dans la suite d'appeler simplement suite bornée de matrices densité de telles suites de noyaux. Nous établissons les principales propriétés de ces limites en commençant par le cas de suites bornées u_ε dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ (avec $\varepsilon \in]0,1]$ par exemple).

Ainsi que nous l'avons expliqué dans l'Introduction, nous introduisons

$$
(40)\qquad \begin{aligned} W_\varepsilon(x,\xi) &= \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i(\xi/\varepsilon)\cdot y}\, u_\varepsilon\big(x+\frac{y}{2}\big)\, u_\varepsilon^*\big(x-\frac{y}{2}\big)\, dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\xi\cdot z}\, u_\varepsilon\big(x+\frac{\varepsilon z}{2}\big)\, u_\varepsilon^*\big(x-\frac{\varepsilon z}{2}\big)\, dz \end{aligned}
$$

(transformée de Wigner avec changement d'échelle d'ordre ε en ξ) ainsi que les transformées de Husimi correspondantes

$$
(41)\qquad \tilde{W}_\varepsilon(x,\xi) = W_\varepsilon * \Big(e^{-|x|^2/\varepsilon}\, e^{-|\xi|^2/\varepsilon}\, (\pi\varepsilon)^{-N}\Big)\,.
$$

Nous avons vu dans la section précédente que $\tilde{W}_\varepsilon \geq 0$ sur $\mathbb{R}_x^N \times \mathbb{R}_\xi^N$ en fait, on a

$$
(42)\qquad \begin{aligned} \tilde{W}_\varepsilon(x,\xi) &= 2^{N/2}(2\pi\varepsilon)^{-N} \\ &\quad \cdot \left| \int_{\mathbb{R}^N} u_\varepsilon(z)\, e^{-|x-z|^2/(4\varepsilon)}\, (2\pi\varepsilon)^{-N/4}\, e^{-i\xi\cdot z/2\varepsilon}\, dz \right|^2 \end{aligned}
$$

et on reconnaît là (à quelques constantes près) le module au carré des paquets d'ondes de A. Córdoba et C. Fefferman [8].

Il est clair que ε n'étant que le paramètre définissant la suite u_ε, la normalisation $\big(\xi/\varepsilon\,,\,(2\pi\varepsilon)^{-N}\big)$ dans (40) est arbitraire. Nous verrons plus loin que les limites de W_ε (quand $\varepsilon \to 0_+$) donneront des informations précises sur le comportement de u_ε lorsque ε est soigneusement choisi en fonction des $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ et plus précisément lorsque ε est "la longueur caractéristique des oscillations de u_ε".

Bien sûr, si $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ est borné dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, on voit immédiatement que $\tilde{W}_\varepsilon$ est une suite bornée de fonctions positives ou nulles dans

$L^1(\mathbb{R}^N)$ (rappeler par exemple que $\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \tilde{W}_\varepsilon \, dx \, d\xi = \int_{\mathbb{R}^N} |u_\varepsilon|^2 \, dx$). Par contre, les bornes sur W_ε sont probablement moins évidentes. Une manière d'en obtenir consiste à introduire l'espace suivant (il s'agit en fait d'une algèbre) de fonctions test

$$\mathcal{A} = \{\varphi \in C_0(\mathbb{R}^N_x \times \mathbb{R}^N_\xi) : \ (\mathcal{F}_\xi \varphi)(x,z) \in L^1(\mathbb{R}^N_z ; C_0(\mathbb{R}^N_x))\}$$

muni de la norme

$$\|\mathcal{F}_\xi \varphi\|_{L^1_z(C_x)} = \int_{\mathbb{R}^N} \sup_x |\mathcal{F}_\xi \varphi|(x,z) \, dz \, .$$

On vérifie sans peine que $\mathcal{A}$ est un espace (et une algèbre) de Banach séparable contenant $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N_x \times \mathbb{R}^N_\xi)$ et que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N_x \times \mathbb{R}^N_\xi)$, $C_0^\infty(\mathbb{R}^N_x \times \mathbb{R}^N_\xi)$, $\{\varphi \in \mathcal{S} : \ \mathcal{F}_\xi \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N_x \times \mathbb{R}^N_z)\}$ ou même les combinaisons linéaires de produits $\psi_1(x)\psi_2(\xi)$ (avec $\psi_1, \psi_2 \in C_0^\infty$ ou $\mathcal{F}(C_0^\infty)$) sont denses dans $\mathcal{A}$.

Proposition III.1. *La suite W_ε est bornée dans $\mathcal{A}'$.*

DÉMONSTRATION (évidente). Pour tout $\varphi \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^{2N}} W_\varepsilon \varphi \, dx \, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^{2N}} dx \, d\xi \, \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\xi \cdot z} \, u_\varepsilon(x + \frac{\varepsilon z}{2}) \, u_\varepsilon^*(x - \frac{\varepsilon z}{2}) \, \varphi(x,\xi) \, dx \, dz \\
&= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^{2N}} dx \, dz \, \Big((\mathcal{F}_\xi \varphi)(x,z) \, u_\varepsilon(x + \frac{\varepsilon z}{2}) \, u_\varepsilon^*(x - \frac{\varepsilon z}{2}) \Big) \, ,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^{2N}} W_\varepsilon \varphi \, dx \, d\xi \right| &\le \frac{1}{(2\pi)^N} \Big(\int_{\mathbb{R}^N} \sup_x |\mathcal{F}_\xi \varphi|(x,z) \, dz \Big) \\
&\quad \cdot \Big(\sup_x \Big| \int_{\mathbb{R}^N} u_\varepsilon(x + \frac{\varepsilon z}{2}) \, u_\varepsilon^*(x - \frac{\varepsilon z}{2}) \, dx \Big) \\
&\le \frac{1}{(2\pi)^N} \, \|\varphi\|_{\mathcal{A}} \, \|u_\varepsilon\|^2_{L^2} \, .
\end{aligned}$$

Quitte à extraire une sous-suite, on peut donc toujours supposer que $u_\varepsilon, W_\varepsilon, \tilde{W}_\varepsilon$ convergent faiblement vers $u, \mu, \tilde{\mu}$ respectivement dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, $\mathcal{A}'$ (muni de la topologie faible $*$) et au sens des mesures.

Nous pratiquerons systématiquement dans ce qui suit l'abus de langage consistant à noter encore $u_\varepsilon, W_\varepsilon, \tilde{W}_\varepsilon$ les suites extraites. En fait, dans toute cette section, ε désignera une suite $\varepsilon_n > 0$ qui converge vers 0. Il convient de noter également que même si u_ε ou u_{ε_n} converge faiblement dans L^2 vers u, rien n'assure a priori que $W_\varepsilon, \tilde{W}_\varepsilon$ (ou $W_{\varepsilon_n}, \tilde{W}_{\varepsilon_n}$) convergent faiblement sans qu'il ne soit nécessaire d'extraire des sous-suites (supplémentaires). Enfin, nous noterons $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathbb{R}^k)$ le cône des mesures positives ou nulles bornées sur $\mathbb{R}^k$.

Avec ces hypothèses et notations, on démontre le

Théorème III.1.

1) *On a $\mu \equiv \tilde{\mu}$. En particulier, $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^{2N})$.*

2) *L'inégalité suivante a lieu*

$$\mu \geq |u(x)|^2 \, \delta_0(\xi)\,, \tag{43}$$

d'où en particulier

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^2 \, dx \leq \iint_{\mathbb{R}^{2N}} d\mu \leq \liminf_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} |u_\varepsilon|^2 \, dx\,. \tag{44}$$

3) *$|u_\varepsilon(x)|^2$ converge faiblement au sens des mesures vers $\int_{\mathbb{R}^N_\xi} d\mu(\cdot,\xi)$ si et seulement si $\left|\hat{u}_\varepsilon(\xi/\varepsilon)\right|^2/\varepsilon^N$ est une suite étroitement relativement compacte dans $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$, i.e.*

$$\sup_\varepsilon \left\{ \frac{1}{\varepsilon^N} \int_{|\xi| \geq R} \left|\hat{u}_\varepsilon\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right)\right|^2 d\xi = \int_{|\xi| \geq R/\varepsilon} |\hat{u}_\varepsilon(\xi)|^2 \, d\xi \right\} \to 0\,, \tag{45}$$

si $R \to +\infty$. Si $|u_\varepsilon(x)|^2$, $\left|\hat{u}_\varepsilon(\xi/2)\right|^2/(2\pi\varepsilon)^N$ (ou des sous-suites) convergent faiblement au sens des mesures vers des mesures positives ou nulles bornées notées respectivement μ_x, μ_ξ, alors: $\mu_x \geq \int_{\mathbb{R}^N} d\mu(\cdot,\xi)$, $\mu_\xi \geq \int_{\mathbb{R}^N} d\mu(x,\cdot)$.

4) *L'égalité*

$$\iint_{\mathbb{R}^{2N}} d\mu = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} |u_\varepsilon|^2 \, dx$$

a lieu si et seulement si $|u_\varepsilon(x)|^2$ et $\varepsilon^{-N}\left|\hat{u}_\varepsilon(\xi/2)\right|^2$ sont étroitement relativement compactes dans $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$. En particulier, si cette hypothèse *est vérifiée, u_ε converge dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ vers u si et seulement si* $\mu = |u(x)|^2\,\delta_0(\xi)$.

5) *Soit* $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^{2N})$, *soit* $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ *telle que* $\mu \geq |u(x)|^2\,\delta_0(\xi)$. *Alors, il existe* $u_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^N)$ *telle que* u_ε *converge faiblement dans* $L^2(\mathbb{R}^N)$ *vers* u, W_ε *converge faiblement dans* $\mathcal{A}'_{w-*}$ *vers* μ *et*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_\varepsilon(x)|^2\,dx \to \iint_{\mathbb{R}^{2N}} d\mu\,, \qquad \textit{dans } \varepsilon \to 0_+\ .$$

Avant de démontrer ce résultat, il convient de faire quelques remarques et de donner une série d'exemples où l'on peut "calculer" μ. Bien sûr, nous appelons μ la *mesure de Wigner* associée à u_ε (ou à la sous-suite convenable).

REMARQUE III.1. Rappelons qu'une suite bornée de mesures positives ou nulles bornées μ_n sur $\mathbb{R}^k$ est étroitement relativement compacte si et seulement si

$$\sup_n \mu_n\{|x| > R\} \ \to\ 0\,, \qquad \text{si} \quad R \to +\infty\ .$$

REMARQUE III.2. Ce théorème montre que les limites de transformées de Wigner sont des mesures bornées positives ou nulles "arbitraires" sur l'espace des phases et qu'elles contiennent toute l'obstruction à la compacité dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ de suites bornées dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, en tout cas si $|u_\varepsilon|^2$ est étroitement compacte (pour éviter le phénomène dit de bosse glissante, par exemple $u_\varepsilon(x) = u(x + e/\varepsilon)$ avec $|e| = 1$) et surtout si $\left|\hat{u}_\varepsilon(\xi/2)\right|^2/\varepsilon^N$ est étroitement compacte. Cette dernière hypothèse est fondamentale pour obtenir une mesure μ informative sur le comportement de la suite u_ε. Elle signifie en effet que la longueur "non initiale d'oscillation" de u_ε est d'ordre ε; ce point sera illustré par les exemples qui suivent et nous reviendrons plus loin sur cette question en indiquant également des hypothèses simples et réalistes qui permettent de vérifier cette hypothèse.

EXEMPLE III.1. (Suite compacte) $u_\varepsilon \underset{\varepsilon}{\rightharpoonup} u$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. Alors

$$u_\varepsilon\big(x + \frac{\varepsilon z}{2}\big)\,u_\varepsilon^*\big(x - \frac{\varepsilon z}{2}\big) \ \underset{\varepsilon}{\rightharpoonup}\ |u(x)|^2$$

(faiblement) dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N_x \times \mathbb{R}^N_z)$, d'où

$$W_\varepsilon = (2\pi)^{-N} \mathcal{F}_z \Big(u_\varepsilon(x + \frac{\varepsilon z}{2})\, u^*_\varepsilon(x - \frac{\varepsilon z}{2})\Big) \underset{\varepsilon}{\rightharpoonup} |u(x)|^2\, \delta_0(\xi)$$

et $\mu = |u(x)|^2\, \delta_0(\xi)$.

EXEMPLE III.2. (Suite oscillante) $u_\varepsilon = u\varphi(x/\varepsilon^\alpha)$ où $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$, $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ est périodique en $x_1, \ldots, x_N$ et $\alpha > 0$. Alors, si $\alpha < 1$, le même raisonnement que celui de l'Exemple III.1 s'applique et donne $\mu = \langle|\varphi|^2\rangle\, |u(x)|^2\, \delta_0(\xi)$ où $\langle|\varphi|^2\rangle$ désigne la moyenne de $|\varphi|^2$ sur sa période. Si $\alpha > 1$, on peut vérifier que $\mu = 0$ par le même argument que celui que nous allons maintenant donner dans le cas $\alpha = 1$. Si $\alpha = 1$ donc, par un simple argument de densité, il suffit de considérer le cas où $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ et d'étudier la limite de

$$(2\pi)^{-N} \mathcal{F}_z \Big(|u(x)|^2\, \varphi(\frac{x}{\varepsilon} + \frac{z}{2})\, \varphi^*(\frac{x}{\varepsilon} - \frac{z}{\varepsilon})\Big)\,.$$

Pour simplifier les notations, on peut supposer que φ est périodique en chacun des x_i de période 2π et on développe φ en série de Fourier

$$\varphi \;=\; \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \varphi_k\, e^{ik\cdot x}\,.$$

On obtient alors aisément que $\mu = |u(x)|^2 \sum_k \delta_k(\xi)|\varphi_k|^2$. On peut également écrire cette expression en introduisant

$$\Gamma(z) = \langle\varphi(\cdot + \frac{z}{2})\, \varphi(\cdot - \frac{z}{2})\rangle$$

et on voit que $\mu = (2\pi)^{-N}\, |u(x)|^2\, \hat{\Gamma}(\xi)$.

EXEMPLE III.3. (Suite avec concentration ponctuelle)

$$u_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^{N\alpha/2}}\, u(\frac{x}{\varepsilon^\alpha})\,, \qquad \text{où } u \in L^2(\mathbb{R}^N)\,.$$

Si $\alpha < 1$, comme à l'Exemple III.1, on voit que

$$\mu = \Big(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^2\, dx\Big)\, \delta_0(x)\, \delta_0(\xi)\,.$$

Si $\alpha > 1$, on vérifie facilement que $\mu = 0$. Enfin, si $\alpha = 1$, on observe que

$$W_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^N} W(\frac{x}{\varepsilon}, \xi),$$

avec

$$W(x,\xi) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int e^{-i\xi\cdot z} u(x+\frac{z}{2}) u^*(x-\frac{z}{2}) dz,$$

de sorte que (en raisonnant par densité par exemple)

$$\mu = \delta_0(x)(\int_{\mathbb{R}^N} W(y,\xi) dy).$$

Et d'après la section précédente (voir (31))

$$\int_{\mathbb{R}^N} W(y,\xi) dy = \frac{1}{(2\pi)^N} |\hat{u}(\xi)|^2.$$

D'où finalement $\mu = \delta_0(x) (4\pi)^{-n} |\hat{u}(\xi)|^2$.

EXEMPLE III.4. (État cohérent) On pose

$$u_\varepsilon = \varepsilon^{-N\alpha/\varepsilon} u(\frac{x-x_0}{\varepsilon^\alpha}) e^{i(\xi_0/\varepsilon)\cdot x}$$

où $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$, $\alpha > 0$, $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{2N}$. Alors, si $0 < \alpha < 1$

$$\begin{aligned} W_\varepsilon(x,\xi) = {} & (2\pi\varepsilon)^{-N} \varepsilon^{-N\alpha} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i(\xi/\varepsilon)\cdot z} u\left(\frac{x-x_0+z/2}{\varepsilon^\alpha}\right) \\ & \cdot u^*\left(\frac{x-x_0+z/2}{\varepsilon^\alpha}\right) e^{i(\xi_0/\varepsilon)\cdot z} dz \\ = {} & (2\pi\varepsilon)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i(\xi/\varepsilon^{1-\alpha})\cdot y} u\left(\frac{x-x_0}{\varepsilon^\alpha} + \frac{y}{2}\right) \\ & \cdot u^*\left(\frac{x-x_0}{\varepsilon^\alpha} - \frac{y}{2}\right) e^{-i(\xi_0/\varepsilon^{1-\alpha})\cdot y} dy \\ = {} & \varepsilon^{-N} W\left(\frac{x-x_0}{\varepsilon^\alpha}, \frac{\xi-\xi_0}{\varepsilon^{1-\alpha}}\right) \\ \underset{\varepsilon}{\rightharpoonup} {} & \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} W \, dx \, d\xi\right) \delta_{x_0}(x) \, \delta_{\xi_0}(\xi), \end{aligned}$$

où

$$W(x,\xi) = (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\xi\cdot y}\, u\big(x+\frac{y}{2}\big)\, u^*\big(x-\frac{y}{2}\big)\, dy\,,$$

de sorte que d'après la section précédente

$$\iint_{\mathbb{R}^{2N}} W\, dx\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^2\, dx\,.$$

D'où,

$$\mu = \Big(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^2\, dx\Big)\, \delta_{x_0}(x)\, \delta_{\xi_0}(\xi)\,.$$

Si $\alpha > 1$, on vérifie sans peine que $\mu = 0$. Enfin, si $\alpha = 1$, on obtient de la même manière que dans l'Exemple III.4, $\mu = (2\pi)^{-N}\, \delta_0(x)\, |\hat{u}(\xi - \xi_0)|^2$.

EXEMPLE III.5. (État WKB) On pose $u_\varepsilon = u\, e^{ia(x)/\varepsilon^\alpha}$ où $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$, $a \in W^{1,1}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ et a est réelle, $\alpha \in]0,1]$.

Alors, $u_\varepsilon(x+\varepsilon z/2)\, u_\varepsilon^*(x-\varepsilon z/2)$ converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2N})$ vers $|u(x)|^2$ si $\alpha < 1$, $|u(x)|^2\, e^{i\nabla a(x)\cdot z}$ si $\alpha = 1$. D'où

$$\mu = |u(x)|^2\, \delta_0(\xi) \quad \text{si } \alpha > 1\,, \qquad \mu = |u(x)|^2\, \delta_{\nabla a(x)}(\xi) \quad \text{si } \alpha = 1\,.$$

Le cas $\alpha > 1$ est plus délicat sauf si on suppose $\nabla a(x) \neq 0$ p.p. sur $\mathbb{R}^N$ auquel cas on voit facilement que $\mu = 0$. Si par contre $\nabla a(x) = 0$ sur un ensemble de mesure positive (et $\alpha > 1$), l'identification de μ requiert des informations supplémentaires sur a en ses points critiques.

EXEMPLE III.6. (États liés de l'oscillateur harmonique) Pour $A_1, \ldots A_N > 0$ rationnellement dépendants, on pose

$$u_\varepsilon = c_\varepsilon\, H_{A_1/\varepsilon}\big(\frac{x_1}{\sqrt{\varepsilon}}\big) \ldots H_{A_N/\varepsilon}\big(\frac{x_N}{\sqrt{\varepsilon}}\big)\, e^{-|x|^2/(2\varepsilon)}\,,$$

avec c_ε constante de normalisation L^2 et $H_k(x)$ polynome d'Hermite, alors, pour $\varepsilon_k \to 0$ avec

$$\varepsilon_k = \frac{A_1}{n_k^1} = \cdots = \frac{A_N}{n_k^N}\,,$$

n_k^i entiers,

$$\mu = \delta(x_1^2 + \xi_1^2 - A_1) \ldots \delta(x_N^2 + \xi_N^2 - A_N)\,.$$

Cet exemple montre un exemple concret où il faut prendre une sous-suite en ε, situation générique lorsque μ a un support compact (règles de quantification).

REMARQUE III.3. On voit que dans les exemples III.2, III.3, III.4 et III.5, $\mu \equiv 0$. Ceci est bien sûr à rapprocher de la Remarque III.2 puisque $\alpha > 1$ signifie que la longueur caractéristique des "oscillations" de u_ε est d'ordre ε^α et donc plus petite que ε. Ceci explique le fait que μ se trivialise et ne donne donc plus aucune information sur le comportement de u_ε.

REMARQUE III.4. On observe que si μ est la mesure de Wigner associée à une suite $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ alors $\mu(\cdot - x_0, \cdot - \xi_0)$ est la mesure de Wigner associée à

$$u_\varepsilon(x - x_0)\, e^{i(\xi_0/\varepsilon)\cdot x}\,, \qquad \text{pour tout} \ \ (x_0, \xi) \in \mathbb{R}^{2N}\,.$$

REMARQUE III.5. La mesure de Wigner μ est aussi la limite (quand ε tend vers 0) de

$$(2\pi)^{-N} \int e^{-i\xi\cdot z}\, u_\varepsilon\big(x + \alpha\frac{\varepsilon z}{2}\big)\, u_\varepsilon^*\big(x - \beta\frac{\varepsilon z}{2}\big)\, dz$$

pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha + \beta = 1$.

REMARQUE III.6. La mesure de Wigner associée à une suite $(u_\varepsilon + v_\varepsilon)_\varepsilon$ où $u_\varepsilon, v_\varepsilon$ génèrent des mesures de Wigner μ, ν n'est en général pas $\mu + \nu$ (prendre $v_\varepsilon = u_\varepsilon$ et remarquer que la mesure de Wigner associée à $2u_\varepsilon$ est 4μ !). Par contre, si μ et ν sont étrangères (ou mutuellement singulières), on peut démontrer que cette additivité est alors vraie -par exemple en utilisant le fait que les mesures de Wigner sont les limites des transformées de Husimi $\tilde{W}_\varepsilon$ (*cf.* Théorème III.1). En effet, grâce au caractère quadratique de W_ε et donc de $\tilde{W}_\varepsilon$, on voit que (avec des notations évidentes)

$$\tilde{W}_\varepsilon(u_\varepsilon + u_\varepsilon) = \tilde{W}_\varepsilon(u_\varepsilon) + \tilde{W}_\varepsilon(u_\varepsilon) + 2\, R_\varepsilon\,,$$

avec

$$R_\varepsilon(x,\xi) \in L^1 \quad \text{et} \quad |R_\varepsilon(x,\xi)| \leq \tilde{W}_\varepsilon(u_\varepsilon)^{1/2}\, \tilde{W}_\varepsilon(u_\varepsilon)^{1/2}\,.$$

Pour montrer que R_ε converge faiblement vers 0, il suffit alors de prendre φ arbitraire dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^{2N})$ et de construire, pour tout $\alpha > 0$,

$\psi_\alpha, \chi_\alpha \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2N})$ tels que $0 \le \psi_\alpha, \chi_\alpha \le 1$, $\psi_\alpha + \chi_\alpha \equiv 1$ sur le support de φ et $\int_{\mathbb{R}^{2N}} \psi_\alpha\, d\nu$, $\int_{\mathbb{R}^{2N}} \chi_\alpha\, d\mu \le \alpha$. On voit alors que

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} R_\varepsilon\, \varphi\, dx\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^{2N}} \varphi\, \psi_\alpha\, R_\varepsilon\, dx\, d\xi + \int_{\mathbb{R}^{2N}} \varphi\, \chi_\alpha\, R_\varepsilon\, dx\, d\xi\ ,$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^{2N}} \varphi \psi_\alpha R_\varepsilon\, dx\, d\xi \right| \le \Big(\sup_{\mathbb{R}^{2N}} |\varphi| \Big) \int_{\mathbb{R}^{2N}} \psi_\alpha \tilde{W}_\varepsilon(u_\varepsilon)^{1/2}\, \tilde{W}_\varepsilon(u_\varepsilon)^{1/2}\, dx\, d\xi\ ,$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^{2N}} \varphi \chi_\alpha R_\varepsilon\, dx\, d\xi \right| \le \Big(\sup_{\mathbb{R}^{2N}} |\varphi| \Big) \int_{\mathbb{R}^{2N}} \chi_\alpha \tilde{W}_\varepsilon(u_\varepsilon)^{1/2}\, \tilde{W}_\varepsilon(u_\varepsilon)^{1/2}\, dx\, d\xi\, .$$

De plus,

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \psi_\alpha\, \tilde{W}_\varepsilon(u_\varepsilon)^{1/2}\, \tilde{W}_\varepsilon(u_\varepsilon)^{1/2}\, dx\, d\xi \\ \le \int_{\mathbb{R}^{2N}} \psi_\alpha \Big(\frac{\sqrt{\alpha}}{2} \tilde{W}_\varepsilon(u_\varepsilon) + \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \tilde{W}_\varepsilon(u_\varepsilon) \Big)\, dx\, d\xi\ ,$$

d'où

$$\overline{\lim_{\varepsilon}} \left| \int_{\mathbb{R}^{2N}} \varphi \psi_\alpha\, R_\varepsilon\, dx\, d\xi \right| \\ \le \frac{\sqrt{\alpha}}{2} \int_{\mathbb{R}^{2N}} \psi_\alpha\, d\mu + \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \int_{\mathbb{R}^{2N}} \psi_\alpha\, d\nu\ \le\ C_1 \sqrt{\alpha}\ .$$

De même, on obtient:

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \left| \int_{\mathbb{R}^{2N}} \varphi \chi_\alpha\, R_\varepsilon\, dx\, d\xi \right|\ \le\ C_2 \sqrt{\alpha}\ ,$$

où C_1 et C_2 sont des constantes indépendantes de α. On en déduit aisément que

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \varphi R_\varepsilon\, dx\, d\xi \underset{\varepsilon}{\rightarrow} 0\,,$$

ce qui prouve l'additivité de la mesure de Wigner dans ce cas.

Signalons une autre situation où $W_\varepsilon(u_\varepsilon * v_\varepsilon) \underset{\varepsilon}{\rightharpoonup} \mu + \nu$: on suppose que u_ε converge (fortement) dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ vers u et donc $\mu = |u(x)|^2\, \delta_0(\xi)$ (*cf.* Exemple III.1) et que v_ε converge faiblement dans

$L^2(\mathbb{R}^N)$ vers 0. Un exemple de ce phénomène est donné par la superposition d'un nombre fini d'états cohérents

$$u_\varepsilon = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \, u^j\left(\frac{x - x_j}{\sqrt{\varepsilon}}\right) e^{-N/4} \, e^{i(\xi_j \cdot x)/\varepsilon} ,$$

où $(x_j, \xi_j)_{1 \leq j \leq N}$ est un ensemble fini de points distincts de $\mathbb{R}^{2N}$, $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $u^j \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et $\int_{\mathbb{R}^N} |u^j|^2 \, dx = 1$. On vérifie facilement que la mesure de Wigner associée à une telle suite est donnée par

$$\mu = \sum_{j=1}^{N} |\alpha_j|^2 \, \delta_{x_j}(x) \, \delta_{\xi_j}(\xi) .$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME III.1.

DÉMONSTRATION DU POINT 1). Il suffit bien sûr de prouver que $\mu = \tilde{\mu}$. Or,

$$\tilde{W}_\varepsilon = W_\varepsilon * G_\varepsilon , \qquad \text{où } \; G_\varepsilon = (\pi\varepsilon)^{-N} \, e^{-(|x|^2 + |\xi|^2)/\varepsilon} ,$$

et il suffit donc de prouver que si $\varphi \in \mathcal{A}$ (ou une partie dense de $\mathcal{A}$) alors $\varphi * G_\varepsilon$ converge dans $\mathcal{A}$ vers φ. Comme

$$\mathcal{F}_\xi(\varphi * G_\varepsilon)(x, z) = \left[(\mathcal{F}_\xi \varphi)(x, z) \underset{x}{*} (\pi\varepsilon)^{-N/2} \, e^{-|x|^2/\varepsilon}\right] e^{-\varepsilon |z|^2/4} ,$$

on voit que

$$\begin{aligned} |\varphi * G_\varepsilon - \varphi|_{\mathcal{A}} \leq & \int_{\mathbb{R}^N} dz \, \sup_x \left| (\mathcal{F}_\xi \varphi) - (\mathcal{F}_\xi \varphi) * (\pi\varepsilon)^{-N/2} \, e^{-|x|^2/\varepsilon} \right| \\ & + \int_{\mathbb{R}^N} \left(1 - e^{-\varepsilon |z|^2/4}\right) \sup_x |\mathcal{F}_\xi \varphi| \, dz . \end{aligned}$$

Le deuxième terme tend vers 0 quand ε tend vers 0_+. Il en va de même pour le premier terme si φ et donc $\mathcal{F}_\xi \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ ce qui suffit pour établir 1). Mais en fait, par un argument de densité standard, ce premier terme converge vers 0 pour tout $\varphi \in \mathcal{A}$.

DÉMONSTRATION DU POINT 2). La première inégalité de (44) se déduit bien sûr de (43) et la deuxième inégalité se déduit de l'observation suivante

$$\iint_{\mathbb{R}^{2N}} d\mu = \iint_{\mathbb{R}^{2N}} d\tilde{\mu} \leq \varliminf_{\varepsilon} \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \tilde{W}_\varepsilon \, dx \, d\xi = \varliminf_{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^N} |u_\varepsilon|^2 \, dx ,$$

d'après (27). Il suffit donc d'établir (43). Il est particulièrement commode d'utiliser pour ce faire les transformées de Husimi en observant que l'on a (avec des notations évidentes)

$$\begin{aligned}\tilde{W}_\varepsilon(u_\varepsilon) &= \tilde{W}_\varepsilon(u) + \tilde{W}_\varepsilon(u_\varepsilon - u) + 2\,\tilde{W}_\varepsilon(u, u_\varepsilon - u)\\ &\geq \tilde{W}_\varepsilon(u) + 2\,\tilde{W}_\varepsilon(u, u_\varepsilon - u)\,.\end{aligned}$$

D'après l'Exemple III.1, $\tilde{W}_\varepsilon(u)$ (comme $W_\varepsilon(u)$) converge vers $|u(x)|^2 \cdot \delta_0(\xi)$. Il suffit donc de vérifier que $\tilde{W}_\varepsilon(u, u_\varepsilon - u)$ converge faiblement (au sens des mesures) vers 0. Bien sûr $\tilde{W}_\varepsilon(v_1, v_2)$ est bilinéaire symétrique en (v_1, v_2).

Mais, on a bien sûr

$$\|\tilde{W}_\varepsilon(u,v)\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^2}\,\|v\|_{L^2}$$

(en fait, $|\tilde{W}_\varepsilon(u,v)| \leq \tilde{W}_\varepsilon(u)^{1/2}\,\tilde{W}_\varepsilon(v)^{1/2}$ p.p. $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2N}$). Par densité, il suffit alors de montrer que $\tilde{W}_\varepsilon(u, v_\varepsilon)$ converge faiblement (au sens des mesures) vers 0 si $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ et si v_ε converge faiblement vers 0 dans $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Or, $\tilde{W}_\varepsilon(u, v_\varepsilon) = W_\varepsilon(u, v_\varepsilon) * G_\varepsilon$ et

$$\begin{aligned}W_\varepsilon(u, v_\varepsilon) &= (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\xi\cdot z}\,\frac{1}{2}\Big\{u\big(x + \frac{\varepsilon z}{2}\big)\,v_\varepsilon^*\big(x - \frac{\varepsilon z}{2}\big)\\ &\qquad\qquad + v_\varepsilon\big(x + \frac{\varepsilon z}{2}\big)\,u^*\big(x - \frac{\varepsilon z}{2}\big)\Big\}\,dz\\ &= (2\pi)^{-N}\,\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\xi\cdot z}\,u\big(x + \frac{\varepsilon z}{2}\big)\,v_\varepsilon^*\big(x - \frac{\varepsilon z}{2}\big)\,dz\,.\end{aligned}$$

Donc, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, on a

$$\begin{aligned}&\langle W_\varepsilon(u, v_\varepsilon), \varphi\rangle_{\mathcal{A}' \times \mathcal{A}}\\ &\quad= (2\pi)^{-N}\,\mathrm{Re}\iint_{\mathbb{R}^{2N}} dx\,dz\,u\big(x + \frac{\varepsilon z}{2}\big)\,v_\varepsilon^*\big(x - \frac{\varepsilon z}{2}\big)\,(\mathcal{F}_\xi\varphi)(x,z)\\ &\quad= (2\pi)^{-N}\,\mathrm{Re}\iint_{\mathbb{R}^{2N}} dy\,dz\,v_\varepsilon^*(y)\,u(y + \varepsilon z)(\mathcal{F}_\xi\varphi)\,\big(y + \frac{\varepsilon z}{2}, z\big)\,.\end{aligned}$$

Or,

$$u(y + \varepsilon z)(\mathcal{F}_\xi\varphi)\,\big(y + \frac{\varepsilon z}{2}, z\big) \underset{\varepsilon}{\rightarrow} u(y)(\mathcal{F}_\xi\varphi)(y,z)$$

dans $L^1(\mathbb{R}^N_z, L^2(\mathbb{R}^N_x))$ puisque $\varphi \in \mathcal{S}$, $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Comme v_ε converge faiblement vers 0 dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, on obtient donc que $W_\varepsilon(u, v_\varepsilon)$ converge faiblement dans $\mathcal{A}'(w-*)$ vers 0. Par le même raisonnement que celui utilisé pour le point 1), on en déduit que $\tilde{W}_\varepsilon(u, v_\varepsilon)$ converge faiblement au sens des mesures vers 0.

REMARQUE III.7. La démonstration précédente montre que

$$\begin{aligned} W_\varepsilon(u_\varepsilon) &= W_\varepsilon(u) + W_\varepsilon(u-u_\varepsilon) + 2\,W_\varepsilon(u, u-u_\varepsilon)\,, \\ \tilde{W}_\varepsilon(u_\varepsilon) &= \tilde{W}_\varepsilon(u) + \tilde{W}_\varepsilon(u-u_\varepsilon) + 2\,\tilde{W}_\varepsilon(u, u-u_\varepsilon) \end{aligned}$$

et $W_\varepsilon(u)$ ou $\tilde{W}_\varepsilon(u)$, $W_\varepsilon(u-u_\varepsilon)$ ou $\tilde{W}_\varepsilon(u-u_\varepsilon)$, $W_\varepsilon(u, u-u_\varepsilon)$ ou $\tilde{W}_\varepsilon(u, u-u_\varepsilon)$ convergent faiblement (dans $\mathcal{A}'_{w-*}$ ou au sens des mesures) respectivement vers $|u(x)|^2\,\delta_0(\xi)$, $\mu - |u(x)|^2\,\delta_0(\xi)$, 0.

DÉMONSTRATION DU POINT 3): Nous commençons par la deuxième partie du point 3) et si μ_x, μ_ξ sont respectivement les limites faibles de $|u_\varepsilon(x)|^2$, $(\pi\varepsilon)^{-N}\,\big|\hat{u}_\varepsilon(\xi/\varepsilon)\big|^2$, remarquons qu'elles sont encore les limites faibles de

$$\begin{aligned} |u_\varepsilon(x)|^2 * \frac{e^{-|x|^2/\varepsilon}}{(\pi\varepsilon)^{N/2}} &= \int_{\mathbb{R}^N} W_\varepsilon\,d\xi\,, \\ \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^N}\left|\hat{u}_\varepsilon\big(\frac{\xi}{\varepsilon}\big)\right|^2 * \frac{e^{-|\xi|^2/\varepsilon}}{(\pi\varepsilon)^{N/2}} &= \int_{\mathbb{R}^N} W_\varepsilon\,dx\,. \end{aligned}$$

Il suffit alors d'introduire $\varphi_R(\cdot) = \varphi(\cdot/R)$ où $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $0 \le \varphi \le 1$, $\varphi = 1$ sur $B(0,1)$ et $R > 0$ et d'observer que $\tilde{W}_\varepsilon$ étant positive ou nulle, nous avons pour tout $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\psi \ge 0$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \psi(x)\Big(\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{W}_\varepsilon\,d\xi\Big)\,dx \;&\ge\; \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \psi(x)\,\varphi_R(\xi)\,\tilde{W}_\varepsilon\,d\xi\,dx\;, \\ \int_{\mathbb{R}^N} \psi(\xi)\Big(\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{W}_\varepsilon\,dx\Big)\,d\xi \;&\ge\; \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \psi(\xi)\,\varphi_R(x)\,\tilde{W}_\varepsilon\,d\xi\,dx\;; \end{aligned}$$

d'où en passant à la limite quand ε tend vers 0_+

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \psi\,d\mu_x &\ge \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \psi(x)\,\varphi_R(\xi)\,d\mu \;\underset{R\to\infty}{\longrightarrow}\; \int_{\mathbb{R}^N} \psi(x)\Big(\int_{\mathbb{R}^N} d\mu(\cdot,\xi)\Big)\,, \\ \int_{\mathbb{R}^N} \psi\,d\mu_\xi &\ge \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \psi(\xi)\,\varphi_R(x)\,d\mu \;\underset{R\to\infty}{\longrightarrow}\; \int_{\mathbb{R}^N} \psi(\xi)\Big(\int_{\mathbb{R}^N} d\mu(x,\cdot)\Big)\,. \end{aligned}$$

Si on suppose que $(4\pi\varepsilon)^{-N}\left|\hat{u}_\varepsilon(\xi/(2\varepsilon))\right|^2$ est étroitement relativement compacte, comme cette quantité n'est rien d'autre que $\int_{\mathbb{R}^N} W_\varepsilon\, dx$, on en déduit aisément que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{W}_\varepsilon\, dx = \Big(\int_{\mathbb{R}^N} W_\varepsilon\, dx\Big) * \frac{e^{-|\xi|^2/\varepsilon}}{(\pi\varepsilon)^{N/2}}$$

est également étroitement compacte. Et donc

$$\sup_\varepsilon \iint_{\mathbb{R}^{2N}} 1_{\{|\xi|>R\}}\, \tilde{W}_\varepsilon\, dx\, d\xi \;\to\; 0\,, \qquad \text{si } R \to +\infty\,.$$

Cela suffit bien sûr à assurer que pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$

$$\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \tilde{W}_\varepsilon\, \varphi(x)\, dx\, d\xi \;\to\; \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \varphi(x)\, d\mu(x,\xi)$$

et le point 3) est démontré.

REMARQUE III.8. La condition donnée au point 3) est suffisante pour assurer que $\mu_x = \int_{\mathbb{R}^N} d\mu(\cdot,\xi)$ mais n'est en général pas nécessaire. Il suffit pour s'en convaincre de considérer l'exemple suivant. On choisit $u_\varepsilon(x) = u\big(x + e_1/\varepsilon\big)\, e^{ix_1/\varepsilon^2}$ où $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ et on vérifie sans peine que $\mu_x \equiv 0$, $\mu \equiv 0$. Pourtant,

$$\frac{1}{\varepsilon^N}\left|\hat{u}_\varepsilon\Big(\frac{\xi}{\varepsilon}\Big)\right|^2 = \frac{1}{\varepsilon^N}\left|\hat{u}\Big(\frac{\xi}{\varepsilon} - \frac{e_1}{\varepsilon^3}\Big)\right|^2$$

n'est pas étroitement relativement compacte.

DÉMONSTRATION DU POINT 4): La deuxième partie du point 4) est une conséquence immédiate de la première partie et de l'Exemple III.1. En ce qui concerne le premier point, on remarque tout d'abord que $\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \tilde{W}_\varepsilon\, dx\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^N} |u_\varepsilon|^2\, dx$ converge vers $\iint_{\mathbb{R}^{2N}} d\mu$ si et seulement si $\tilde{W}_\varepsilon$ est étroitement relativement compacte. De plus, $\tilde{W}_\varepsilon$ est étroitement relativement compacte si et seulement si $\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{W}_\varepsilon\, dx$, $\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{W}_\varepsilon\, d\xi$ sont étroitement relativement compactes. Or, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{W}_\varepsilon\, dx &= (2\pi\varepsilon)^{-N}\left|\hat{u}\Big(\frac{\xi}{2}\Big)\right|^2 * \frac{e^{-|\xi|^2/\varepsilon}}{(\pi\varepsilon)^{N/2}}\,, \\ \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{W}_\varepsilon\, d\xi &= (2\pi\varepsilon)^{-N}\, |u_\varepsilon|^2 * \frac{e^{-|x|^2/\varepsilon}}{(\pi\varepsilon)^{N/2}}\,. \end{aligned} \tag{46}$$

Il ne nous reste donc plus qu'à montrer que si μ_ε est une suite bornée de mesures positives ou nulles bornées sur $\mathbb{R}^N$, μ_ε est étroitement relativement compacte si et seulement si $u_\varepsilon * \left(e^{-|y|^2/\varepsilon}/(\pi\varepsilon)^{N/2}\right)$ est étroitement relativement compacte. Or, on a d'une part

$$\begin{aligned}
&\int_{|x|>R}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{e^{-|x-y|^2/\varepsilon}}{(\pi\varepsilon)^{N/2}}\,dx\,d\mu_\varepsilon(y)\\
&\quad= \int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{|x|>R} \frac{e^{-|x-y|^2/\varepsilon}}{(\pi\varepsilon)^{N/2}}\,dx\right) d\mu_\varepsilon(y)\\
&\quad\leq \int_{|y|>(R-1)} d\mu_\varepsilon(y) + \int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{|x-y|\geq 1} \frac{e^{-|x-y|^2/\varepsilon}}{(\pi\varepsilon)^{N/2}}\,dx\right) d\mu_\varepsilon(y)\\
&\quad\leq \int_{|y|>(R-1)} d\mu_\varepsilon(y) + C\left(\int_{|z|\geq\varepsilon^{-1/2}} \frac{e^{-|z|^2/\varepsilon}}{(\pi)^{N/2}}\,dz\right).
\end{aligned}$$

D'autre part, on a également

$$\begin{aligned}
&\int_{|x|>R}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{e^{-|x-y|^2/\varepsilon}}{(\pi\varepsilon)^{N/2}}\,dx\,d\mu_\varepsilon(y)\\
&\qquad\geq \int_{|y|>(R+1)}\left(\int_{|x-y\leq 1} \frac{e^{-|x-y|^2/\varepsilon}}{(\pi\varepsilon)^{N/2}}\,dx\right) d\mu_\varepsilon(y)\\
&\qquad\geq \left(\int_{|z|\leq\varepsilon^{-1/2}} \frac{e^{-|z|^2}}{(\pi)^{N/2}}\,dz\right)\int_{|y|>(R+1)} d\mu_\varepsilon(y)\,;
\end{aligned}$$

et ces inégalités suffisent pour conclure.

DÉMONSTRATION DU POINT 5). Au vu de la Remarque III.6, il suffit de traiter le cas où $u \equiv 0$. D'après le point 4), il nous faut construire une suite (et une véritable famille u_ε paramétrée par $\varepsilon\in]0,1]$ peut également être construite avec la même démonstration et un peu plus de soin) u_ε convergeant faiblement vers 0 dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ telle que $W_\varepsilon, \tilde{W}_\varepsilon$ convergent faiblement vers μ et $\int_{\mathbb{R}^N}|u_\varepsilon|^2\,dx$ converge vers $\iint_{\mathbb{R}^{2N}} d\mu$ (quand $\varepsilon\to 0_+$). Toujours d'après la Remarque III.6, la construction est explicite dans le cas où μ est purement atomique avec un nombre fini d'atomes *i.e.* $\mu = \sum_{i=1}^n \mu_i\,\delta_{x_i}(x)\,\delta_{\xi_i}(\xi)$ avec $1\leq n$, $\mu_i\geq 0$ $(1\leq i\leq n)$, (x_i,ξ_i) sont des points distincts de $\mathbb{R}^{2N}$ $(1\leq i\leq u)$. Dans le cas général, il suffit d'approcher une mesure μ positive ou nulle bornée quelconque par une suite μ_n de telles mesures atomiques de façon à ce que μ_n converge étroitement vers μ. On conclut alors par un procédé habituel de suite diagonale.

REMARQUE III.9. (Condition suffisante pour (45)). Une condition simple assurant que (45) a lieu est de supposer

$$\varepsilon^s \, \|D^s u_\varepsilon\|_{L^2} \le C \,, \tag{47}$$

pour un $s > 0$, où C désigne une constante positive indépendante de ε. En effet, ceci signifie que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^{2s} \, |\xi|^{2s} \, |\hat{u}_\varepsilon(\xi)|^2 \, d\xi \le C \,,$$

d'où bien sûr

$$\int_{|\xi|>R/\varepsilon} |\hat{u}_\varepsilon(\xi)|^2 \, d\xi \le C \, R^{-2s} \,.$$

REMARQUE III.10. (Liens avec le calcul pseudo-différentiel). Une autre manière de construire les mesures de Wigner (il s'agit en fait de la construction privilégiée par P. Gérard [18]) est de considérer des opérateurs pseudo-différentiels de symbole $a(x, \varepsilon\xi)$ où $a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ (par exemple) et d'étudier la limite des quantités quadratiques $\int_{\mathbb{R}^N} (a(x, \varepsilon D) \cdot u_\varepsilon) u_\varepsilon^* \, dx$. En effet, si on note $\hat{u}(x, z) = (\mathcal{F}_\xi a)(x, z)$, on voit que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} (a(x, \varepsilon D) \cdot u_\varepsilon) u_\varepsilon^* \, dx \\
&= \iint_{\mathbb{R}^{2N}} u_\varepsilon^*(x) \, (2\pi\varepsilon)^{-N} \, \hat{a}\big(x, \frac{y-x}{\varepsilon}\big) \, u_\varepsilon(y) \, dy \, dx \\
&= (2\pi)^{-N} \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \hat{a}(x, z) \, u_\varepsilon(x+z) \, u_\varepsilon^*(x) \, dz \, dx
\end{aligned}$$

et ceci converge quand ε tend vers 0 vers $\iint_{\mathbb{R}^{2N}} a(x, \xi) \, d\mu$ -voir la Remarque III.5.

REMARQUE III.11. (Liens avec les H-mesures) L. Tartar [41] et P. Gérard [18] ont introduit indépendamment une mesure positive ou nulle, bornée σ sur $\mathbb{R}_x^N \times S_\xi^{N-1}$ mesurant les défauts de compacité forte d'une suite u_ε convergeant faiblement dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ vers 0. On vérifie aisément que si la mesure de Wigner μ associée à u_ε (ou une sous-suite) ne change pas $\{\xi = 0\}$ et si $\varepsilon^{-N} \left|\hat{u}_\varepsilon(\xi/2)\right|^2$ est étroitement relativement compacte (voir Remarque III.9) alors σ est "la moyenne de μ sur les rayons passant par ξ". En d'autres termes, on a pour tout $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^N \times S^{N-1})$

$$\iint_{\mathbb{R}^N \times S^{N-1}} \varphi \, d\sigma = \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \tilde{\varphi} \, d\mu \,,$$

où $\tilde{\varphi}(x,\xi) \in C_b(\mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}^N - \{0\}))$ est définie par $\tilde{\varphi}(x,\xi) = \varphi(x, \xi/|\xi|)$. On voit donc que la H-mesure est moins précise que la mesure de Wigner mais que par contre elle ne nécessite pas de connaître la taille des oscillations de la suite u_ε.

D'autre part, les constructions (variées) que nous avons établies pour la mesure de Wigner permettent de donner des procédés apparemment nouveaux de construction des H-mesures. En effet, pour une suite $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ convergeant faiblement vers 0 dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, on peut former

$$H_\varepsilon(x,\xi) = \int_0^\infty t^{n-1}\, W(u^\varepsilon)\,(x,t,\xi)\,dt\,, \tag{48}$$

pour tout $(x,\xi) \in \mathbb{R}^N \times S^{N-1}$, où $W(u^\varepsilon)$ est la transformée de Wigner associée à u^ε, *i.e.*

$$W(u^\varepsilon) \;=\; (2\pi)^{-N}\,\mathcal{F}_y\left(u^\varepsilon(x+\frac{y}{2})\,u^\varepsilon(x-\frac{y}{2})\right)\,.$$

On démontre alors aisément que $W(u_\varepsilon)$ converge faiblement dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N \times S^{N-1})$ vers la H-mesure σ de u_ε (après extraction éventuelle d'une sous-suite). On peut d'ailleurs retrouver la positivité de σ en montrant que σ est la limite faible (au sens des mesures sur $\mathbb{R}^N \times S^{N-1}$) de quantités faisant intervenir des transformées de Husimi convenables. Nous ne développerons pas plus ici ce type d'approche pour les H-mesures.

Signalons maintenant une propriété de localisation des mesures de Wigner lorsque u_ε satisfait une équation aux dérivées partielles du type:

$$P_\varepsilon(x\,,\,\varepsilon D u_\varepsilon) \;=\; f_\varepsilon\,, \tag{49}$$

où $f_\varepsilon \underset{\varepsilon}{\rightarrow} 0$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ et u_ε est bornée dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. On suppose que $P_\varepsilon(x,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^N_x \times \mathbb{R}^N_\xi)$ est polynomiale en ξ de degré borné, *i.e.*

$$P_\varepsilon(x,\xi) \;=\; \sum_{|\alpha|\le M} a^\varepsilon_\alpha(x)\,\xi^\alpha\,, \qquad a^\varepsilon_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^N_x)\,. \tag{50}$$

On suppose que a^ε_α converge vers a^0_α (par exemple) dans $C^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N_x)$ et que $W_\varepsilon(u_\varepsilon)$ converge (faiblement dans $\mathcal{A}'_{w-*}$) vers μ. Alors, on démontre facilement que $P_0\mu = 0$ sur $\mathbb{R}^{2N}$, en notant bien sûr

$$P_0(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\le M} a^0_\alpha(x)\,\xi^\alpha\,.$$

Cette observation est bien sûr à rapprocher des propriétés analogues connues pour les H-mesures (voir L. Tartar [41], P. Gérard [18]). On peut bien sûr notablement affaiblir les hypothèses de régularité sur les coefficients -comme nous le ferons dans la section suivante pour un problème relié- mais nous n'aborderons pas ce point technique (mais important) ici. On peut aussi considérer des équations pseudo-différentielles à la place de (49).

Egalement, comme pour les H-mesures, il est possible d'obtenir une équation de transport sur μ si $f_\varepsilon/\varepsilon \underset{\varepsilon}{\rightarrow} 0$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ et si P_0 est réel -il faut en outre préciser le comportement de P_ε quand ε tend vers 0-, mais nous nous contenterons d'aborder ce thème sur l'exemple de la limite semi-classique dans des équations de Schrödinger. C'est l'objet de la section suivante. De façon générale, indiquons que les résultats établis dans L. Tartar [41] et P. Gérard [18] pour les H-mesures s'adaptent aux mesures de Wigner.

Nous voulons maintenant conclure cette section en généralisant l'étude précédente à des suites d'objets plus "complexes" que des suites de fonctions scalaires dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. Une première généralisation consiste à considérer des suites u_ε bornées dans $L^2(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^m)$ (on pourrait également considérer le cas de fonctions prenant leurs valeurs dans un Hilbert séparable). Tout ce que nous avons fait précédemment s'adapte aisément en considérant les limites faibles μ_{ij} de $W_\varepsilon((u_\varepsilon)_i,(u_\varepsilon)_j)$ qui sont des mesures bornées sur $\mathbb{R}^N$ et la matrice symétrique $(\mu_{ij})_{ij}$ est positive.

La généralisation que nous voulons développer consiste à introduire comme dans la section précédente des matrices densité ρ_ε et nous considérons dans tout le reste de cette section une suite bornée de matrices densité $(\rho_\varepsilon)_\varepsilon$ (avec le même abus de langage sur la signification réelle de ε). Rappelons que ceci veut dire que ρ_ε est bornée dans $L^2(\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N)$, définit une suite d'opérateurs hermitiens $\big(\rho_\varepsilon(x,y) = \rho_\varepsilon(y,x)^*\big)$ positifs ou nuls et que leurs traces sont uniformément majorées $(\rho_\varepsilon(x) = \rho_\varepsilon(x,x) \geq 0$ est bornée dans $L^1(\mathbb{R}^N))$. On introduit alors les transformées de Wigner sur $\mathbb{R}^N_x\times\mathbb{R}^N_\xi$

$$(51)\qquad \begin{aligned} W_\varepsilon(x;\xi) &= \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^N}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-i(\xi/\varepsilon)\cdot y}\,\rho_\varepsilon\big(x+\frac{y}{2},x-\frac{y}{2}\big)\,dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\xi\cdot y}\,\rho_\varepsilon\big(x+\frac{\varepsilon y}{2},x-\frac{\varepsilon y}{2}\big)\,dy \end{aligned}$$

ainsi que les transformées de Husimi également définies sur $\mathbb{R}_x^N \times \mathbb{R}_\xi^N$

$$\tilde{W}_\varepsilon(x,\xi) \;=\; \frac{1}{(\pi\varepsilon)^N}\, W_\varepsilon * e^{-(|x|^2+|\xi|^2)/\varepsilon} \,. \tag{52}$$

On rappelle (*cf.* Section II) que $\tilde{W}_\varepsilon \geq 0$ est bornée dans $L^1(\mathbb{R}_x^N \times \mathbb{R}_\xi^N)$ car

$$\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \tilde{W}_\varepsilon\, dx\, d\xi = \mathrm{Tr}\,(\rho_\varepsilon) = \iint_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(x)\, dx\,.$$

De plus, la Proposition III.1 s'adapte facilement et montre que W_ε est bornée dans $\mathcal{A}'$.

On peut donc extraire une sous-suite (encore notée ε) telle que $\rho_\varepsilon(x,y)$ converge faiblement dans $L^2(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ vers ρ (qui définit bien sûr un opérateur hermitien, positif ou nul, de trace finie), $\rho_\varepsilon(x)$ converge faiblement au sens des mesures (sur $\mathbb{R}^N$) vers μ_x, W_ε converge faiblement dans $\mathcal{A}'_{w-*}$ vers μ et $\tilde{W}_\varepsilon$ converge faiblement au sens des mesures (sur $\mathbb{R}^{2N}$) vers $\tilde{\mu}$ (qui est donc une mesure bornée positive ou nulle sur $\mathbb{R}^{2N}$). On démontre alors, de la même manière que le Théorème III.1, le

Théorème III.2.

1) *On a:* $\mu \equiv \tilde{\mu}$. *En particulier,* $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^{2N})$.

2) *L'inégalité suivante a lieu, en notant* $\rho(x) = \rho(x,x)$*:*

$$\mu \;\geq\; \rho(x)\,\delta_0(\xi) \tag{53}$$

d'où en particulier

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho(x)\, dx \;\leq\; \int_{\mathbb{R}^{2N}} d\mu \;\leq\; \liminf_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(x)\, dx\,. \tag{54}$$

3) *L'égalité* $\mu_x = \int_{\mathbb{R}_\xi^N} d\mu(\cdot,\xi)$ *a lieu si* $\varepsilon^{-N}\,\hat{\rho}_\varepsilon(\xi/\varepsilon,\xi/\varepsilon)$ *est une suite étroitement relativement compacte dans* $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$*, où*

$$\hat{\rho}_\varepsilon(\xi,\eta) = (\mathcal{F}_x\,\overline{\mathcal{F}}_y)\,\rho_\varepsilon(x,y)\,.$$

Si $(2\pi\varepsilon)^{-N}\,\hat{\rho}(\xi/\varepsilon,\xi/\varepsilon)$ *(ou une sous-suite) converge faiblement au sens des mesures vers une mesure* μ_ε *alors*

$$\mu_x \geq \int_{\mathbb{R}_\xi^N} d\mu(\cdot,\xi) \qquad et \qquad \mu_x \geq \int_{\mathbb{R}_x^N} d\mu(x,\cdot)\,.$$

4) *L'égalité*

$$\iint_{\mathbb{R}^{2N}} d\mu = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(x)\, dx$$

a lieu si et seulement si $\rho_\varepsilon(x)$ et $\varepsilon^{-N}\, \hat{\rho}\big(\xi/\varepsilon, \xi/\varepsilon\big)$ sont étroitement relativement compactes. En particulier, si cette hypothèse est vérifiée, ρ_ε converge dans $L^2(\mathbb{R}^{2N})$ vers ρ si et seulement si $\mu = \rho(x)\,\delta_0(\xi)$.

REMARQUE III.12. Rappelons que $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(x)\, dx = \mathrm{Tr}\,(\rho_\varepsilon)$. D'autre part, il est clair que $\hat{\rho}_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ définit un opérateur hermitien, positif ou nul, de trace finie ($\mathrm{Tr}\,(\hat{\rho}_\varepsilon) = (2\pi)^N\, \mathrm{Tr}\,(\rho_\varepsilon)$) et donc $\hat{\rho}_\varepsilon(\xi,\xi) \geq 0$, $(2\pi\varepsilon)^{-N}\, \hat{\rho}\big(\xi/\varepsilon, \xi/\varepsilon\big)$ est bornée dans $L^1_+(\mathbb{R}^N)$. En particulier, μ_ξ est donc une mesure bornée sur $\mathbb{R}^N$.

REMARQUE III.13. On pourrait également donner l'analogue du point 5) du Théorème III.1 ou des Remarques III.6, III.7, III.8 ou III.10. Nous ne le ferons évidemment pas mais nous nous contenterons de signaler que l'analogue de (47) est

$$\varepsilon^s\, \mathrm{Tr}\,\big(H_0^{s/2}\, \rho_\varepsilon\big) \;\leq\; C\,, \tag{55}$$

où $H_0 = -\frac{1}{2}\Delta$. Ceci peut se réécrire plus simplement en diagonalisant ρ_ε :

$$\rho_\varepsilon \;=\; \sum_i \lambda_i^\varepsilon\, \psi_i^\varepsilon \quad \text{avec} \quad \lambda_i^\varepsilon \geq 0\,, \quad \int_{\mathbb{R}^N} \psi_i^\varepsilon\, \psi_j^{\varepsilon *}\, dx \;=\; \delta_{ij}\,.$$

Auquel cas, (55) devient

$$\sum_i \lambda_i^\varepsilon\, \varepsilon^s \int_{\mathbb{R}^N} |D^s \psi_i^\varepsilon|^2\, dx \;\leq\; C\,. \tag{55'}$$

Nous allons maintenant conclure cette section en donnant quelques exemples de noyaux ρ_ε qui approchent des mesures arbitraires sur $\mathbb{R}^{2N}$.

EXEMPLE III.6. (Mélange d'états WKB). On considère

$$\rho_\varepsilon \;=\; \int_{\mathbb{R}^N} u_\varepsilon(x)\, u_\varepsilon^*(y)\, e^{-i\eta\cdot(x-y)}\, dm(\eta)\,, \tag{56}$$

où $u_\varepsilon(x) = u(x)\, e^{i\,a(x)/\varepsilon}$, $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$, $a \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, $m \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$. Alors, on vérifie que $\mu = |u(x)|^2\, dm\,(\nabla a(x) - \xi)$.

EXEMPLE III.7 (Approximation d'une mesure $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^{2N})$ par un mélange d'états cohérents). Soit $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^{2N})$ et soit $u_0 \in Lr(\mathbb{R}^N)$ (ou $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$) tel que $\|u\|_{L^2} = 1$. On pose

$$\rho_\varepsilon = \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \varepsilon^{-N/2} u_0\left(\frac{x-x_0}{\varepsilon^{1/2}}\right) u_0^*\left(\frac{y-x_0}{\varepsilon^{1/2}}\right) \cdot e^{i(\xi_0/\varepsilon)\cdot(x-y)}\, d\mu(x_0,\xi_0)\,. \tag{57}$$

On vérifie que

$$W_\varepsilon = u * W_\varepsilon^0\,, \qquad \text{où } W_\varepsilon^0 = \frac{1}{\varepsilon^N} W^0\left(\frac{x-x_0}{\varepsilon^{1/2}}, \frac{\xi-\xi_0}{\varepsilon^{1/2}}\right), \tag{58}$$

et

$$W^0(x,\xi) = (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\xi\cdot y}\, u_0(x+y/2)\, u_0^*(x-y/2)\, dy\,.$$

Et on déduit aisément de (58) que W_ε converge vers μ quand ε tend vers 0 dans $\mathcal{A}'_{w-*}$ et même dans $\mathcal{M}(\mathbb{R}^{2N}$ si $W^0 \in L^1(\mathbb{R}^{2N})$ (ce qui est le cas bien sûr si $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$).

Dans le cas où μ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue (par exemple) encore notée μ, on peut d'une part établir des "inégalités de convexité" liant ρ_ε à μ et d'autre part préciser la convergence de Wigner μ. En effet, voir W. Thirring [43] par exemple, on a

$$\operatorname{Tr}\left((2\pi\varepsilon)^N F\left(\frac{\rho_\varepsilon}{(2\pi\varepsilon)^N}\right)\right) \geq \iint_{\mathbb{R}^{2N}} F(\mu)\, dx\, d\xi\,, \tag{59}$$

pour toute fonction F convexe, positive ou nulle (par exemple), nulle en 0. On admet bien sûr dans (59) la possibilité que le membre de gauche ou que les deux membres valent $+\infty$. Cette inégalité se démontre aisément en diagonalisant ρ_ε

$$\rho_\varepsilon = \sum_j \lambda_j\, \psi_j(x)\, \psi_j^*(y) \quad \text{avec } \lambda_j \geq 0\,, \qquad \int_{\mathbb{R}^N} \psi_j \psi_j^* = \delta_{jk}\,,$$

(et on peut toujours supposer que la famille $(\psi_j)_j$ définit une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R}^N)$). En effet, on a alors

$$\operatorname{Tr}\left(F\left((2\pi\varepsilon)^{-N}\rho_\varepsilon\right)\right) = \sum_j F\left((2\pi\varepsilon)^{-N}\lambda_j\right)$$

et

$$\lambda_j = \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \mu(x_0,\xi_0)\left|(u_\varepsilon^{x_0,\xi_0},\psi_j)_{L^2}\right|^2 dx_0\,d\xi_0$$

en notant

$$u_\varepsilon^{x_0,\xi_0} = \varepsilon^{-N/4} u_0\left(\frac{x-x_0}{\varepsilon^{1/2}}\right) e^{i(\xi_0/\varepsilon)\cdot x}\,.$$

Il suffit alors d'observer que pour tout $\psi \in L^2(\mathbb{R}^N)$

$$\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \left|(u_\varepsilon^{x_0,\xi_0},\psi)_{L^2}\right|^2 dx_0\,d\xi_0 = (2\pi\varepsilon)^N\,\|\psi\|_{L^2}^2\,, \tag{60}$$

car

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left|(u_\varepsilon^{x_0,\xi_0},\psi)_{L^2}\right|^2 d\xi_0 = (2\pi\varepsilon)^N \int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^{-N/2}\left|u\left(\frac{x-x_0}{\varepsilon^{1/2}}\right)\right|^2 |\psi(x)|^2\,dx\,.$$

On voit donc que

$$\sum_j F((2\pi\varepsilon)^{-N}\lambda_j)$$
$$\geq \sum_j \iint_{\mathbb{R}^{2N}} F(\mu)(x_0,\xi_0)\left|(u_\varepsilon^{x_0,\xi_0},\psi_j)_{L^2}\right|^2 (2\pi\varepsilon)^N\,dx_0\,d\xi_0$$

et

$$\sum_j \left|(u_\varepsilon^{x_0,\xi_0},\psi_j)_{L^2}\right|^2 = \left\|u_\varepsilon^{x_0,\xi_0}\right\|_{L^2}^2 = 1\,.$$

D'autre part, il est clair que si $W_0 \in L^1(\mathbb{R}^{2N})$ et si $\mu \in L^p(\mathbb{R}^{2N})$ avec $1 \leq p \leq \infty$ alors W_ε est bornée dans $L^p(\mathbb{R}^{2N})$ et converge dans $L^p(\mathbb{R}^{2N})$ vers μ (si $p < \infty$). De plus, si W_0 est positive ou nulle -c'est le cas si $u_0 = (\pi)^{-N/4}\,e^{-|x|^2/2}$ puisqu'on a alors $W_0(x,\xi) = \pi^{-N}\,e^{-(|x|^2+|\xi|^2)}$-, on voit que l'on a aussi

$$\iint_{\mathbb{R}^{2N}} F(W_\varepsilon)\,dx\,d\xi \leq \iint_{\mathbb{R}^{2N}} F(\mu)\,dx\,d\xi\,, \tag{61}$$

pour toute fonction F convexe, positive ou nulle sur $[0,+\infty[$, nulle en 0.

Signalons pour conclure des “inégalités de convexité” liant une suite bornée de matrices-densité $(\rho_\varepsilon)_\varepsilon$ à leurs transformées de Husimi.

Nous allons les énoncer pour des transformées en fait plus générales. En effet, à partir de W_ε, on peut considérer

$$\tilde{W}_\varepsilon^\mu = W_\varepsilon * W_\varepsilon^0, \qquad \text{où } W_\varepsilon^0 = \frac{1}{\varepsilon^N} W^0\Big(\frac{\cdot}{\varepsilon^{1/2}}, \frac{\cdot}{\varepsilon^{1/2}}\Big) \tag{62}$$

et

$$W^0 = (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\xi\cdot y}\, u(-x+y/2)\, u^*(-x-y/2)\, dy,$$

où $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ (ou $\mathcal{S}, C_0^\infty$) et $\|u\|_{L^2} = 1$. Noter que

$$W_\varepsilon^0(-x,-\xi) = (2\pi\varepsilon)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i(\xi/\varepsilon)\cdot y} \Big(\varepsilon^{-N/4}\, u\big(\frac{x+y/2}{\varepsilon^{1/2}}\big)\Big) \cdot \Big(\varepsilon^{-N/4}\, u\big(\frac{x-y/2}{\varepsilon^{1/2}}\big)\Big)^* dy$$

et que

$$\tilde{W}_\varepsilon^u(x,\xi) = (2\pi\varepsilon)^{-N} \big(\rho_\varepsilon \cdot u_\varepsilon^{x,\xi}, u_\varepsilon^{x,\xi}\big)_{L^2},$$

avec

$$u_\varepsilon^{x,\xi}(z) = \varepsilon^{-N/4}\, u\big(\frac{z-x}{\varepsilon^{1/2}}\big)\, e^{i(\xi/\varepsilon)\cdot z}.$$

En particulier (voir également la Section II), $\tilde{W}_\varepsilon^u \geq 0$ sur $\mathbb{R}^{2N}$ et $\tilde{W}_\varepsilon^u \in L^1(\mathbb{R}^{2N})$. Enfin, $\tilde{W}_\varepsilon$ correspond au choix particulier de

$$u = (\pi)^{-N/4}\, e^{-|x|^2/2}.$$

On démontre alors (voir W. Thirring [43] pour l'inégalité (64)) que pour toute fonction convexe F, positive ou nulle sur $[0,+\infty[$, nulle en 0,

$$\big(F((2\pi\varepsilon)^{-N}\rho_\varepsilon)\cdot u_\varepsilon^{x,\xi}, u_\varepsilon^{x,\xi}\big)_{L^2} \geq F(\tilde{W}_\varepsilon^u)(x,\xi), \tag{63}$$

pour tout (x,ξ). En effet, en diagonalisant ρ_ε (comme précédemment), on a

$$\begin{aligned}\big(F((2\pi\varepsilon)^{-N}\rho_\varepsilon)u_\varepsilon^{x,\xi}, u_\varepsilon^{x,\xi}\big)_{L^2} &= \sum_j F\big(\frac{\lambda_j}{(2\pi\varepsilon)^N}\big) \Big|\big(u_\varepsilon^{x,\xi},\psi_j\big)_{L^2}\Big|^2 \\ &\geq F\Big(\sum_j \frac{\lambda_j}{(2\pi\varepsilon)^N} \Big|\big(u_\varepsilon^{x,\xi},\psi_j\big)_{L^2}\Big|^2\Big)\end{aligned}$$

$$= F\Big((2\pi\varepsilon)^N \big(\rho_\varepsilon \cdot u_\varepsilon^{x,\xi}, u_\varepsilon^{x,\xi}\big)_{L^2}\Big)$$
$$= F(\tilde{W}_\varepsilon^u)(x,\xi)\,,$$

l'inégalité étant due au fait que $\sum_j \big|(u_\varepsilon^{x,\xi}, \psi_j)_{L^2}\big|^2 = \|u_\varepsilon^{x,\xi}\|_{L^2}^2 = 1$. Et, d'après (60), on déduit de (63) en intégrant par rapport à $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2N}$

$$\text{(64)} \qquad \operatorname{Tr}\big((2\pi\varepsilon)^N F((2\pi\varepsilon)^{-N}\rho_\varepsilon)\big) \geq \iint_{\mathbb{R}^{2N}} F(\tilde{W}_\varepsilon^u)\, dx\, d\xi\,,$$

inégalité valable pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et donc en particulier pour $\tilde{W}_\varepsilon$. Enfin les inégalités suivantes ont lieu:

$$\begin{aligned} \tilde{F(\rho)} &\leq F(\tilde{\rho})\,, && \text{si } F \text{ est concave,} \\ &\geq F(\tilde{\rho})\,, && \text{si } F \text{ est convexe.} \end{aligned}$$

En effet, décomposant ρ sur une base orthogonale,

$$\rho = \sum_i \lambda_i |\psi_i >< \psi_i|\,,$$

ce qui signifie

$$\rho(x,y) = \sum_i \lambda_i \psi_i(x) \psi_i^*(y)\,,$$

on a $F(\rho) = \sum_i F(\lambda_i)|\psi_i >< \psi_i|$ et donc $\tilde{F}(\rho) = \sum_i F(\lambda_i)|(u_{\varepsilon=1}^{x,\xi}, \psi_i)|^2$ avec $\sum_i |(u_{\varepsilon=1}^{x,\xi}, \psi_i)|^2 = 1$.

IV. Limite semi-classique.

Nous allons étudier dans cette section la limite quand $\hbar$ tend vers 0 des transformées de Wigner des solutions de l'équation de Schrödinger (6) ou de l'équation de Liouville associée (10). Et nous traiterons aussi bien le cas linéaire (où le potentiel V est donné) que le cas nonlinéaire (où le potentiel V dépend de la densité $\rho(x)$: $V = V_0 * \rho$ et V_0 est alors un potentiel donné).

Comme nous l'avons indiqué dans l'Introduction, les limites "doivent" vérifier l'équation de Liouville classique (11) qui dans le cas nonlinéaire où $V = V_0 * \rho$ est en fait l'équation de Vlasov.

Avant d'indiquer l'organisation de cette section, il est utile, d'expliquer au moins formellement l'obtention de ces équations de transport classiques (au sens de la Mécanique Classique). On considère donc une solution $\psi^\hbar$ dans $C(\mathbb{R}_t; L^2(\mathbb{R}^N))$ de (6) ou une matrice-densité $\rho^\hbar$ solution de (10) qui est donc de la forme

$$\rho^\hbar(t) = \sum_j \lambda_j \, \psi^\hbar(t,x) \, \psi_j^\hbar(t,y)^* \,,$$

avec $\lambda_j \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^N} \psi_j^\hbar \, \psi_k^{\hbar *} \, dx = \delta_{jk}$, pour tout j,k, et pour tout $t \in \mathbb{R}$, et $\psi_j^\hbar \in C(\mathbb{R}_t; L^2(\mathbb{R}^N))$. Comme dans la Section III et en choisissant $\varepsilon = \hbar$, on introduit $f^\hbar = W_\hbar(\psi^\hbar)$ ou $W_\hbar(\rho^\hbar)$

$$\begin{aligned} & f^\hbar(t,x,\xi) \\ (65) \qquad & = (2\pi\hbar)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i(\xi/\hbar)\cdot y} \, \psi_\hbar\big(t, x + \frac{y}{2}\big) \, \psi_\hbar\big(t, x - \frac{y}{2}\big)^* \, dy \\ & = (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\xi\cdot y} \, \psi_\hbar\big(t, x + \frac{\hbar y}{2}\big) \, \psi_\hbar\big(t, x - \frac{\hbar y}{2}\big)^* \, dy \,, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} (66) \qquad f^\hbar(t,x,\xi) & = (2\pi\hbar)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i(\xi/\hbar)\cdot y} \, \rho_\hbar\big(t \,, \, x + \frac{y}{2} \,, \, x - \frac{y}{2}\big) \, dy \\ & = (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\xi\cdot y} \, \rho_\hbar\big(t \,, \, x + \frac{\hbar y}{2} \,, \, x - \frac{\hbar y}{2}\big) \, dy \,, \end{aligned}$$

pour $t \in \mathbb{R}$, $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2N}$.

L'analogue de la Proposition III.1 a lieu et implique que $f^\hbar$ résout dans $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^{2N}_{x,\xi}$

$$(67) \qquad \frac{\partial f^\hbar}{\partial t} + \xi \cdot \nabla_x f^\hbar + K_\hbar \underset{\xi}{*} f^\hbar \; = \; 0 \,,$$

où

$$K_\hbar \; = \; \frac{i}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\xi\cdot y} \, \hbar^{-1} \Big(V\big(x + \frac{\hbar y}{2}\big) - V\big(x - \frac{\hbar y}{2}\big) \Big) \, dy \,.$$

On voit donc que, au moins formellement, quand $\hbar$ tend vers 0_+, $K_\hbar$ "converge" vers

$$K_0 = \frac{i}{(2\pi)^N} \nabla V(x) \cdot \mathcal{F}(y) = -\nabla V(x) \, \nabla \delta_0(\xi)$$

et que l'on peut s'attendre à ce que la limite de $f_\hbar$ résolve (11).

Les résultats que nous démontrons dans cette section concernent précisément la justification de cette limite formelle avec, en outre, une analyse de la convergence de $f^\hbar$ vers sa ou ses limites f. Bien sûr, $\psi^\hbar$ ou $\rho^\hbar$ seront les solutions de (6) et de (10) correspondant à des conditions initiales

$$(68) \qquad \psi^\hbar|_{t=0} = \psi_0^\hbar, \qquad \text{dans } \mathbb{R}^N,$$

ou

$$(69) \qquad \rho^\hbar|_{t=0} = \rho_0^\hbar, \qquad \text{dans } \mathbb{R}^{2N},$$

et $\psi_0^\hbar, \rho_0^\hbar$ sont des suites bornées de $L^2(\mathbb{R}^N)$ ou de matrices-densité respectivement. On supposera toujours que $f_0^\hbar = W_\hbar(\psi_0^\hbar)$ ou $W_\hbar(\rho^\hbar)$ converge dans $\mathcal{A}'_{w-*}$, après extraction éventuelle d'une sous-suite, vers une mesure positive ou nulle, bornée notée f_0.

Nos objectifs seront d'établir que $f^\hbar$ converge (en un sens à préciser) vers f solution de (11), vérifiant la condition initiale

$$(70) \qquad f|_{t=0} = f_0, \qquad \text{dans } \mathbb{R}^{2N}.$$

D'après la forme même de l'équation limite (11) où apparaît le terme $\nabla V(x)\nabla_\xi f$, il n'est pas surprenant d'obtenir des résultats de nature un peu différente suivante que l'on suppose que V est "régulier" ou non, et dans ce dernier cas il est alors naturel de requérir plus de "régularité" sur f c'est-à-dire plus de "régularité" sur $\rho^\hbar$ et donc sur $\rho_0^\hbar$.

Les premiers résultats que nous donnerons exigerons "un peu de régularité" sur V. Nous démontrerons ensuite que si toutes les données sont régulières, un développement asymptotique en puissances de $\hbar$ est possible. Enfin, nous aborderons le cas de potentiels moins réguliers. Dans tous les résultats concernant la limite $\hbar \to 0_+$, nous présenterons tout d'abord le cas linéaire puis le cas nonlinéaire, et sauf mention explicite nous traiterons toujours le cas de l'équation de Liouville (10), plus général que celui de (6).

Théorème IV.1. (Cas linéaire). *Nous supposons que V vérifie* (34) *et* (35).

1) *Si $V \in C^1(\mathbb{R}^N$, alors $f^\hbar$, après extraction éventuelle d'une sous-suite, converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}_t$ dans $\mathcal{A}'w-*$ vers $f \in C_b(\mathbb{R}_t, \mathcal{M}w-*)$ qui vérifie* (11) *au sens des distributions et* (70).

2) *Si de plus $V \in C^{1,1}(\mathbb{R}^N)$ et si V vérifie*

$$
\begin{cases} \textit{il existe } \ C \geq 0\ , \ \textit{pour tout } \ x \in \mathbb{R}^N\ , \\ V(x) \ \geq \ -C\,(1+|x|^2)\ , \end{cases} \tag{71}
$$

alors f est l'unique solution de (11) *et* (70) *dans $C_b(\mathbb{R}_t, \mathcal{M}w-*)$ et f est donnée par le transport de f_0 par le flot Hamiltonien ($\dot{x} = \xi$, $\dot{\xi} = -\nabla V(x)$).*

REMARQUE IV.1. La convergence uniforme sur $[-T, +T]$ dans $\mathcal{A}_{w-*}$ signifie que, pour tout ψ dans $\mathcal{A}'$, $\iint_{\mathbb{R}^{2N}} f^\hbar\, \psi\, dx\, d\xi$ converge uniformément sur $[-T, +T]$ vers $\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \psi\, df(t)$. De même, $f \in C_b(\mathbb{R}_t\, , \mathcal{M}w-*)$ signifie que $\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \psi\, df(t) \in C(\mathbb{R}_t)$ pour tout $\psi \in C_0(\mathbb{R}^{2N})$ et que $f(t)$ est bornée dans $\mathcal{M}$. On peut également considérer que $f(t)$ appartient pour tout $t \in \mathbb{R}$ à une boule de $\mathcal{M}$ dans laquelle la topologie faible $*$ est métrisable et que f est continue en t à valeurs dans cet espace métrique.

L'écriture de (11) (au sens des distributions) consiste à écrire les termes $\xi \cdot \nabla_x f$ et $\nabla V(x) \cdot \nabla_\xi f$ sous forme conservative, *i.e.* $\mathrm{div}_x(\xi f)$ et $\mathrm{div}_\xi(\nabla V(x) f)$ respectivement.

En ce qui concerne 2), l'hypothèse (71) garantit que le flot Hamiltonien H_t est bien défini pour tout $t \in \mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{2N}$ et que pour tout $\psi \in C_b(\mathbb{R}^N)$

$$
\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \psi\, df(t) \ = \ \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \psi \circ H_t\, df_0\ . \tag{72}
$$

En particulier, $\iint_{\mathbb{R}^{2N}} df(t) = \iint_{\mathbb{R}^{2N}} df_0$, de sorte que si

$$
\iint_{\mathbb{R}^{2N}} f_0^\hbar\, dx\, d\xi = \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \tilde{f}_0^\hbar\, dx\, d\xi = \mathrm{Tr}\,(\rho_0^\hbar) \underset{\hbar \to 0_+}{\longrightarrow} \iint_{\mathbb{R}^{2N}} df_0
$$

(en d'autres termes, $\tilde{f}_0^\hbar$ converge étroitement vers f_0) alors

$$
\iint_{\mathbb{R}^{2N}} f^\hbar(t)\, dx\, d\xi = \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \tilde{f}^\hbar(t)\, dx\, d\xi = \mathrm{Tr}\,(\varphi^\hbar(t)) = \mathrm{Tr}\,(\rho_0^\hbar)
$$

converge donc (uniformément sur $\mathbb{R}_t$) vers $\iint_{\mathbb{R}^{2N}} df(t)$ (et donc, $\tilde{f}^\hbar$ converge étroitement vers $f(t)$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}_t$).

Enfin, l'unicité de $f(t)$ montre également que si toute la suite $f_0^\hbar$ converge vers f_0 dans $\mathcal{A}'_{w-*}$ alors toute la suite $f^\hbar(t)$ converge vers $f(t)$ dans $\mathcal{A}'_{w-*}$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}_t$.

REMARQUE IV.2. Les hypothèses (34) et (35) ne sont pas fondamentales pour le résultat précédent. L'hypothèse (34) ne sert qu'à assurer l'existence de $\rho_\hbar(t)$ et peut donc être supprimée si on suppose que $\rho_\hbar(t)$ existe. Enfin, (35) ne sert qu'à formuler directement et simplement l'équation (de Wigner) (36) et peut donc être supprimée à condition d'interpréter (36) de manière un peu différente.

REMARQUE IV.3. Il est important de noter que l'hypothèse faite sur V à savoir $V \in C^1$ ne garantit pas l'unicité du flot Hamiltonien $\dot{x} = \xi$, $\dot{\xi} = -\nabla V(x)$. En fait, on peut donner des exemples de non-unicité de $f(t)$ (*i.e.* des limites de $f^\hbar(t)$) même si toute la suite $f_0^\hbar$ converge vers f_0. Par exemple, on peut choisir $N = 1$ et

$$V(x) \;=\; -|x|^{\theta+1} + \beta(x)\,,$$

où $\theta \in]0,1[$, $\beta \equiv 0$ sur $[1,+1]$, $\beta(x) \equiv |x|^2$ si $|x| \geq 2$, $\beta \in C^\infty(\mathbb{R} - \{0\})$, β paire, $\beta' \geq 0$ pour $x \geq 0$. Alors, en choisissant $f_0 = \delta_{(0,0)}$ $(= \delta_0(x)\delta_0(\xi))$, plusieurs solutions de (11) et (70) existent comme par exemple

$$f_\pm(t) = \delta_{x_\pm(t)}(x)\,\delta_{\dot{x}_\pm(t)}(\xi)\,,$$

avec pour $|t| \leq c_0^{-1/\mu}$,

$$\dot{x}_\pm(t) = \pm\, c_0\, |t|^{\mu-1}\, t\,,$$

avec

$$c_0 = \left(\frac{2(1+\theta)}{(1-\theta)^2}\right)^{-1/(1-\theta)}, \qquad \mu = \frac{2}{1-\theta}\,.$$

Ces deux solutions peuvent être approchées par une suite $f^\hbar(t)$ convenable. Il suffit pour cela de montrer l'existence de suites $f_0^\hbar$ convergeant vers f_0 telles que $f^\hbar(t)$ converge vers $f_+(t)$ ou vers $f_-(t)$. On obtient la non-unicité annoncée en alternant les deux suites ainsi construites. Dans le cas de $f_+(t)$ (par exemple), on observe que si on choisit x_ε de l'ordre de ε (petit) et ξ_ε de l'ordre de ε^α avec $0 < \alpha < \theta$

alors localement autour de $(x_\varepsilon, \xi_\varepsilon)$ il existe une solution de (11) avec $f_\varepsilon|_{t=0} = \delta_{x_\varepsilon}(x)\,\delta_{\xi_\varepsilon}(\xi)$. De plus, $(x_\varepsilon(t), \xi_\varepsilon(t)) \underset{\varepsilon}{\to} (x_+(t), \dot{x}_+(t))$ uniformément sur tout compact. On considère alors

$$f_{0,\varepsilon}^{\hbar} = W_\hbar\Big(\hbar^{-N/4}\, u\big(\frac{x - x_\varepsilon}{\hbar^{1/2}}\big)\, e^{i(\xi_\varepsilon/\hbar)\cdot x}\Big)\,,$$

avec $\|u\|_{L^2} = 1$ de sorte que

$$f_{0,\varepsilon}^{\hbar} \underset{\hbar \to 0_+}{\rightharpoonup} f_{0,\varepsilon} = \delta_{x_\varepsilon}(x)\,\delta_{\xi_\varepsilon}(\xi)$$

et donc

$$f_\varepsilon^\hbar(t) \underset{\hbar \to 0_+}{\rightharpoonup} \delta_{x_\varepsilon(t)}(x)\,\delta_{\xi_\varepsilon(t)}(\xi)\,.$$

Comme

$$\delta_{x_\varepsilon(t)}\,\delta_{\xi_\varepsilon(t)}(\xi) \underset{\varepsilon \to 0_+}{\rightharpoonup} \delta_{x_+(t)}(x)\delta_{\dot{x}_+(\xi)}\,,$$

on conclut aisément par une construction de suite diagonale.

Théorème IV.2. (Cas nonlinéaire: $V = V_0 * \rho$). *On suppose que V_0 est minoré, $V_0 \in C^1(\mathbb{R}^N)$, $\nabla V_0 \in C_b(\mathbb{R}^N)$, $\mathrm{Tr}\,(H_0 \rho_0^\hbar)$ et*

$$\iint_{\mathbb{R}^{2N}} V_0^+(x-y)\,\rho_0^\hbar(x)\,\rho_0^\hbar(y)\,dx\,dy$$

sont bornés indépendamment de $\hbar$ où $H_0 = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta$. On suppose enfin que $\nabla V_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$ ou que $\int_{\mathbb{R}^N} |x|^2\,\rho_0^\hbar(x)\,dx$ est borné indépendamment de $\hbar$.

1) *Alors, $f^\hbar$, après extraction éventuelle d'une sous-suite, converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathcal{A}'_{w-*}$ vers $f \in C_b(\mathbb{R}_t, \mathcal{M}w - *)$ vérifiant (70) et l'équation de Vlasov*

$$\text{(73)}\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial t} + \mathrm{div}_x(\xi f) - \mathrm{div}_\xi(\nabla V(x) f) \;=\; 0\,, \qquad \textit{dans } \mathcal{D}'\,,\\ &\qquad V = V_0 * \rho \quad , \quad \rho = \int_{\mathbb{R}^N} f\,d\xi\,. \end{aligned}$$

2) *D'autre part, si $V_0 \in C^{1,1}(\mathbb{R}^N)$, f est l'unique solution de (70) et (73) dans $C_b(\mathbb{R}_t, \mathcal{M}w - *)$ et f est donnée par le transport de f_0 par $(x, \xi) \mapsto (x(t), \xi(t))$ où $(x(t), \xi(t))$ est la solution de*

$$\dot{x}(t) = \xi(t)\,, \quad \dot{\xi}(t) = -\nabla V(t, x(t))\,, \quad x(0) = x\,, \quad \xi(0) = \xi\,.$$

REMARQUE IV.4. Rappelons que

$$\operatorname{Tr}(H_0\rho_0^\hbar) = \sum_j \frac{\hbar^2}{2}\lambda_j^\hbar \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\psi_{0,j}^\hbar|^2\, dx\,,$$

où

$$\rho_0^\hbar = \sum_j \lambda_j^\hbar\, \psi_{0,j}(x)\psi_{0,j}(y)^*\,, \quad \lambda_j^\hbar \geq 0\,, \quad \int_{\mathbb{R}^N} \psi_{0,j}\, \psi_{0,k}^*\, dx = \delta_{jk}\,.$$

REMARQUE IV.5. En fait, la résolution de l'équation de Liouville nonlinéaire à $\hbar > 0$ fixé n'est pas tout à fait évidente. Une manière simple de s'en convaincre consiste à réécrire le problème en diagonalisant $\rho_0 = \sum_{j\geq 1}^\infty \lambda_j\, \varphi_j^0(x)\, \varphi_j^{0*}(y)$ avec $\lambda_j \geq 0$, $\sum_{j\geq 1}^\infty \lambda_j < \infty$, $\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_j^0 \varphi_k^{0*}\, dx = \delta_{jk}$. Il faut alors résoudre le système suivant d'équations de Schrödinger pour tout $j \geq 1$

$$\begin{cases} i\hbar\,\frac{\partial\varphi_j}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2}\Delta\varphi_j + V\varphi_j\,, & \text{dans } \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N\,, \\ \varphi_j|_{t=0} &= \varphi_j^0\,, & \text{dans } \mathbb{R}^N\,, \end{cases}$$

et $V = V_0 * \rho$, $\rho(t,x) = \sum_{j\geq 1}^\infty \lambda_j |\varphi_j(t,x)|^2$. Ce système, bien qu'infini, est faiblement couplé et s'analyse simplement comme une équation de Schrödinger nonlinéaire (voir par exemple J. Ginibre et G. Velo [21], [22], Th. Cazenave et A. Haraux [7]). Le cas où $\lambda_j = 0$ si j est grand se réduit à un système fini standard et on peut construire une solution dans le cas général par un simple passage à la limite. C'est ainsi que sous les hypothèses faites sur V_0 dans le Théorème IV.2, on obtient l'existence de $\varphi_j \in C(\mathbb{R}_t; L^2(\mathbb{R}_x^N))$. De plus, si

$$\operatorname{Tr}(H_0\rho_0) + \iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} V_0^+(x-y)\, \rho^0(x)\, \rho^0(y)\, dx\, dy \leq C_0\,,$$
$$\left(\operatorname{Tr}(H_0\rho_0) = \sum_{j\geq 1}^\infty \lambda_j \frac{\hbar}{2}^2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi_j^0|^2\, dx\right),$$

on démontre que

$$\operatorname{Tr}((H_0+V)\rho)(t) \leq \operatorname{Tr}((H_0+V)\rho^0)\,, \qquad (\text{pour tout } \ t \in \mathbb{R})\,,$$

d'où

$$\sum_{j\geq 1}^{\infty} \lambda_j \frac{\hbar^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi_j(t,x)|^2 \, dx + \iint_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} V_0^+(x-y)\, \rho(t,x)\, dx\, dy$$
$$\leq C_0 + \big(\sup_{\mathbb{R}^N} V^-\big) \sum_{j\geq 1}^{\infty} \lambda_j \,,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

REMARQUE IV.6. Le système Hamiltonien dépendant du temps

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = \xi(t)\,, \qquad & \dot{\xi}(t) = -[\nabla V_0 * \rho(t)](x(t))\,, \\ x(0) = x\,, \qquad & \xi(0) = \xi\,, \end{aligned} \tag{74}$$

peut être réécrit comme une "évolution newtonienne"

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = \xi(t)\,, \quad \dot{\xi}(t) \; &= \; -\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \nabla V_0(x(t) - x(t,y,\eta))\, df_0(y,\eta)\,, \\ x(0) = x\,, \qquad & \xi(0) = \xi\,, \end{aligned} \tag{75}$$

où on note $x(t,y,\eta)$ la solution correspondant à des conditions initiales (y,η).

REMARQUE IV.7. Le résultat précédent est encore valable si on suppose que V_0 est minoré, $V_0 \in C^1(\mathbb{R}^N)$, $\nabla V_0 \in C_b(\mathbb{R}^N)$ et que $\mathrm{Tr}\,(\rho_0^\hbar)$ converge vers $\iint_{\mathbb{R}^{2N}} df_0$ (ou en d'autres termes que $f_0^\hbar$ converge étroitement vers f_0). Il faut alors légèrement modifier la démonstration du Théorème IV.2 que nous donnons ci-dessous. On introduit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\varphi \equiv 1$ sur $B(0,1)$, $\varphi \equiv 0$ sur $B(0,2)^c$ et on observe que, grâce à (67), on a pour tout $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iint_{\mathbb{R}^{2N}} & f^\hbar\, \varphi\big(\frac{x}{n}\big)\, \varphi\big(\frac{\xi}{n}\big)\, dx\, d\xi \\ &= \iint_{\mathbb{R}^{2N}} f^\hbar\, \frac{\xi}{n} \cdot \nabla\varphi\big(\frac{x}{n}\big)\, \varphi\big(\frac{\xi}{n}\big)\, dx\, d\xi \\ &\quad + \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \rho^\hbar\big(x + \frac{\hbar}{2} y\big) \Big(\frac{V(x+\frac{\hbar}{2}y) - V(x-\frac{\hbar}{2}y)}{\hbar}\Big) \\ &\qquad\qquad \cdot \varphi\big(\frac{x}{n}\big) \hat{\varphi}(ny)\, n^{-N}\, dx\, dy\,. \end{aligned}$$

Or le deuxième terme peut se majorer par C/n avec $C \geq 0$ indépendant de $\hbar$. En considérant comme dans la preuve du Théorème IV.2 la limite f de $f^\hbar$, on obtient $f \in C_b(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_{w-*})$ qui vérifie (au sens des distributions)

$$\left| \frac{d}{dt} \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \varphi(\frac{x}{n})\psi(\frac{\xi}{n})\, df(t) - \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{\xi}{n} \nabla\varphi(\frac{x}{n})\varphi(\frac{\xi}{n})\, df(t) \right| \leq \frac{C}{n} .$$

Et on voit que le deuxième terme tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ (car $\nabla\varphi \equiv 0$ pour $|x| \leq 1$). On déduit donc de cette inégalité que $\iint_{\mathbb{R}^{2N}} df(t) = \iint_{\mathbb{R}^{2N}} df_0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. D'autre part, on a déjà:

$$\mathrm{Tr}\,(\rho^\hbar(t)) = \mathrm{Tr}\,(\rho_0^\hbar) \underset{\hbar}{\rightarrow} \iint_{\mathbb{R}^{2N}} df_0$$

et on obtient donc que

$$\mathrm{Tr}\,(\rho^\hbar(t)) \underset{\hbar}{\rightarrow} \iint_{\mathbb{R}^{2N}} df(t)\,, \qquad (\text{pour tout } t \in \mathbb{R})\,.$$

D'après le Théorème III.2 cela entraîne que $\int_{\mathbb{R}^N} f^\hbar(t)\, d\xi$ converge étroitement vers $\rho = \int_{\mathbb{R}^N} df(t, \cdot, \xi)$. Et on peut alors aisément adapter la démonstration du Théorème IV.2.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME IV.1. Pour démontrer le point 1, il nous suffit, au vu des remarques faites au début de la Section III, de montrer que pour tout

$$\varphi \in \{\psi \in \mathcal{S} :\ \mathcal{F}_\xi \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_x^N \times \mathbb{R}_z^N)\}\,,$$

$\langle K_\hbar \underset{\xi}{*} f^\hbar\,,\, \varphi\rangle$ est borné indépendamment de $t \in \mathbb{R}$ et converge quand $\hbar$ tend vers 0_+ vers $\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \nabla V(x) \cdot \nabla_\xi \varphi(x, \xi)\, df(t)$. Or, nous avons

$$\begin{aligned} \langle K_\hbar \underset{\xi}{*} f^\hbar\,,\, \varphi\rangle = &\ \frac{i}{(2\pi)^N} \iint_{\mathbb{R}^{2N}} f^\hbar(x, \eta) \int_{\mathbb{R}^N} (\mathcal{F}_\xi \varphi)(x, y) \\ &\qquad \cdot e^{i\eta\cdot y} \frac{1}{\hbar} \left(V(x + \frac{\hbar}{2} y) - V(x - \frac{\hbar}{2} y) \right) dy\, dx\, d\eta \\ = &\ \frac{i}{(2\pi)^N} \langle f^\hbar, \psi^\hbar \rangle_{\mathcal{A}' \times \mathcal{A}}\,, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \psi^\hbar(x,\eta) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (\mathcal{F}_\xi\varphi)(x,y)\, e^{i\eta\cdot y} \frac{1}{\hbar} \Big(V(x+\frac{\hbar}{2}y) - V(x-\frac{\hbar}{2}y)\Big)\, dy \;\in\; \mathcal{A}\,, \end{aligned}$$

puisque

$$(\mathcal{F}_\eta\psi^\hbar)(x,z) \;=\; (2\pi)^N \frac{1}{\hbar} (F_\xi\varphi)(x,z)\Big(V(x+\frac{\hbar}{2}z) - V(x-\frac{\hbar}{2}z)\Big)$$

et $\mathcal{F}_\xi\varphi \in C_0^\infty$, $V \in C^1$. On voit en outre que $\psi^\hbar$ converge dans $\mathcal{A}$ vers $\int_{\mathbb{R}^N} (\mathcal{F}_\xi\varphi)(x,y)\, y \cdot \nabla V(x)\, e^{i\eta\cdot y}\, dy$. En effet, $\mathcal{F}_\eta\psi^\hbar$ converge vers $(2\pi)^N(\mathcal{F}_\xi\varphi)z \cdot \nabla V(x)$ dans $L^1(\mathbb{R}^N_z, C^0(\mathbb{R}^N_x))$. Et on conclut aisément puisque

$$\begin{aligned} &\frac{i}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} (\mathcal{F}_\xi\varphi)(x,y) y \cdot \nabla V(x)\, e^{i\eta\cdot y}\, dy \\ &\qquad = \nabla V(x)\cdot\nabla_\eta \left[\frac{1}{(2\pi)^N}\int (\mathcal{F}_\xi\varphi)(x,y)\, e^{i\eta\cdot y}\, dy\right] \\ &\qquad = \nabla V(x)\cdot \nabla_\eta\varphi(x,\eta)\,. \end{aligned}$$

Le point 2 est en fait une simple remarque sur (11). En effet, les hypothèses faites sur V assurent que le flot Hamiltonien H_t

$$\dot{x} \;=\; \xi\,, \qquad \dot{\xi} \;=\; -\nabla V(x)$$

est bien défini sur $\mathbb{R}^{2N}_{x,\xi}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et si $\psi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2N})$ alors $\psi(t,x,\xi) = \psi_0 \circ H_t(x,\xi)$ est à support compact en (x,ξ) pour tout $t \in \mathbb{R}$ uniforme pour t borné et est lipschitzienne sur $[-T,+T] \times \mathbb{R}^{2N}$ (pour tout $T \in]0,+\infty[$). De plus, on a (p.p.)

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} \;=\; \xi\cdot\nabla_x\psi - \nabla V(x)\cdot\nabla_\xi\psi\,.$$

Cela permet de déduire pour toute solution f de (11), (70) dans $C_b(\mathbb{R}_t; \mathcal{M}w - *)$ l'égalité (72) qui démontre le point 2). Néanmoins, cette déduction nécessite une intégration par parties qui doit être justifiée. Une démonstration possible consiste à régulariser f: on pose alors $f_\delta = f * \rho_\delta$ où $\rho_\delta = \delta^{-2N}\,\rho(x/\delta)\rho(\xi/\delta)$ avec $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\rho \geq 0$,

$\int_{\mathbb{R}^N} \rho(x)\,dx = 1$ et $\mathrm{Supp}\,(\rho) \subset B(0,1)$ (par exemple). Il suffit alors de montrer

$$\frac{\partial f_\delta}{\partial t} + \xi \cdot \nabla_x f_\delta - \nabla V(x) \cdot \nabla_\xi f_\delta \;=\; r_\delta \;, \tag{76}$$

où r_δ est borné dans $C_b(\mathbb{R}_t; L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{2N}))$, $r_\delta \underset{\delta}{\rightharpoonup} 0$ faiblement (par exemple au sens des mesures sur $[-T,+T[\times\mathbb{R}^{2N}$ pour tout $T \in]0,+\infty[$). Or, on a

$$\begin{aligned} r_\delta = &\iint \big(\frac{\xi-\eta}{\delta}\big) \cdot \frac{1}{\delta^N} \nabla\rho\big(\frac{x-y}{\delta}\big)\, \frac{1}{\delta^N}\rho\big(\frac{\xi-\eta}{\delta}\big)\, df_\delta(y,\eta) \\ &- \iint \Big(\frac{\nabla V(x) - \nabla V(y)}{\delta}\Big) \frac{1}{\delta^N} \nabla\rho\big(\frac{\xi-\eta}{\delta}\big)\, \frac{1}{\delta^N}\rho\big(\frac{x-y}{\delta}\big)\, df_\delta(y,\eta) \,, \end{aligned}$$

formule qui permet de vérifier les assertions énoncées ci-dessus pour r_δ.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME IV.2. La démonstration du point 2) du Théorème IV.2 est très semblable à celle du point 2) du Théorème IV.1. Aussi nous contenterons-nous de démontrer le point 1. Grâce à la démonstration du point 1) du Théorème IV.1, on peut supposer, après extractwion éventuelle d'une sous-suite, que $f^\hbar$ converge uniformément sur tout borné de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathcal{M}w - *$ vers $f \in C_b(\mathbb{R}_t; \mathcal{M}w - *)$. De plus, on déduit de la Remarque IV.5 les bornes suivantes

$$\begin{aligned} \sup_{t\in\mathbb{R}} \Big(&\iint_{\mathbb{R}^{2N}} f^\hbar |\xi|^2\, dx\, d\xi \\ &+ \iint_{\mathbb{R}^{2N}} V_0^+(x-y)\rho^\hbar(x)\rho^\hbar(y)\, dx\, dy \Big) \;\le\; C \end{aligned} \tag{77}$$

et donc

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \tilde{f}^\hbar\, |\xi|^2\, dx\, d\xi \;\le\; C \,, \tag{78}$$

où C désigne diverses constantes indépendantes de $\hbar$ (convention adoptée dans tout ce qui suit). Cela permet de démontrer grâce au Théorème III.1 (et à sa démonstration) que $\rho^\hbar$ converge uniformément sur les bornées de $\mathbb{R}_t$ dans $\mathcal{M}w-*$ vers $\rho \in C_b(\mathbb{R}_t; \mathcal{M}w-*)$ et $d\rho = \int_{\mathbb{R}^N} df(\cdot,\xi)$. Bien sûr, (77) implique

$$\begin{aligned} \sup_{t\in\mathbb{R}} \Big(&\iint_{\mathbb{R}^{2N}} |u|^2\, df(t) \\ &+ \iint_{\mathbb{R}^{2N}} V_0^+(x-y)\, d\rho^\hbar(t,x)\, d\rho^\hbar(t,y) \Big) < \infty \,. \end{aligned} \tag{79}$$

L'étape suivante consiste à étudier la limite de $V^\hbar = V_0 * \rho^\hbar$: bien sûr $\nabla V^\hbar$ est borné dans $C_b(\mathbb{R}^N)^N$. De plus, si $\nabla V_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)^N$, on voit aisément que $\nabla V_0 * \rho^\hbar$ converge, uniformément sur les bornées de $\mathbb{R}_t$, uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^N$ vers $\nabla V_0 * f$.

Dans le cas où $\int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 \rho_0^\hbar \, dx$ est borné indépendamment de $\hbar$, on obtient grâce à (38) et au fait que ∇V_0 est borné:

$$\left| \frac{d^2}{dt^2} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 \rho^\hbar \, dx \right| \leq C\left(1 + \int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 \rho^\hbar \, dx\right) . \tag{80}$$

De plus,

$$\frac{d}{dt}\Big(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 \rho^\hbar \, dx\Big)|_{t=0} = \sum_{j\geq 1} \lambda_j \ \mathrm{Im} \int_{\mathbb{R}^N} x(\hbar \nabla \varphi_j^0) \, \overline{\varphi_j^0} \, dx \, ,$$

d'où, d'après la borne sur $\mathrm{Tr}\,(H_0 \rho_0)$, une borne indépendante de $\hbar$ pour

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 \rho^\hbar \, dx|_{t=0} \, .$$

Cette borne associée à (80) implique la borne suivante

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 \rho^\hbar \, dx \leq C\,(1 + t^2) , \qquad \text{pour tout } \ t \in \mathbb{R} \, . \tag{81}$$

On déduit de cette estimation uniforme, la convergence étroite dans $\mathbb{R}^N$, uniforme pour t borné, de $\rho^\hbar$ vers ρ qui assure dans ce cas également la convergence uniforme pour t, x bornés de $\nabla V_0 * \rho^\hbar$ vers $\nabla V_0 * \rho$.

On peut alors facilement adapter la démonstration correspondante du Théorème IV.1 pour conclure la preuve du point 1) du Théorème IV.2.

Le deuxième type de résultats que nous présenterons concerne des situations très régulières où f_0, V sont réguliers et où la convergence de $f_0^\hbar$ vers f_0 est "régulière" au sens où on peut donner un développement asymptotique en puissances de $\hbar$ de $f_0^\hbar$. Pour simplifier (et alléger) la présentation, nous supposerons qu'il existe $N_0 \geq 1$ tel que

$$V \in C_b^\infty(\mathbb{R}^N) , \qquad i.e. \quad D^\alpha V \in C_b(\mathbb{R}^N) , \quad \text{pour tout } \ \alpha \, , \tag{82}$$

$$
(83) \quad \begin{cases} f_0^\hbar \;=\; f_0 + \hbar^{1/2} f_0^1 + \hbar f_0^2 + \cdots + \hbar^{N_0/2} f_0^{N_0} + \hbar g_0^\hbar \,, \\ \|g_0^\hbar\|_{L^2} \;\le\; C\,\hbar^{(N_0-1)/2}; \qquad f_0, f_0^1, \ldots, f_0^{N_0} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2N};\mathbb{R}) \,. \end{cases}
$$

Nous donnerons des exemples plus bas montrant que le développement en puissances de $\hbar^{1/2}$ est naturel pour $f_0^\hbar$. Il sera également clair que l'on peut économiser de la régularité pour V et les f_0^i suivant l'ordre d'approximation (en puissance de $\hbar$) souhaité. Nous nous contenterons aussi d'analyser le cas linéaire *i.e.* l'équation de Liouville (10). Il est par contre important de noter que (83) implique bien sûr que $f_0^\hbar$ est bornée dans $L^2(\mathbb{R}^{2N})$ et que cette seule hypothèse exclut essentiellement le cas de l'équation de Schrödinger (6). En effet, si $f_0^\hbar = W_\hbar(\psi_0^\hbar)$, alors $\|f_0^\hbar\|_{L^2} = (2\pi\hbar)^{-N/2}\,\|\psi_0^\hbar\|_{L^2}^2$. Donc, la borne dans L^2 de $f_0^\hbar$ implique que $\psi_0^\hbar$ converge fortement dans L^2 vers 0, cas qui n'est pas intéressant.

Théorème IV.3. *Sous les hypothèses* (82) *et* (83), *il existe* $f, f^1, f^2, \ldots, f^{N_0}$ *fonctions réelles régulières en* (t,x) *et à décroissance rapide* (*ainsi que toutes leurs dérivées*) *en* x *uniformément en* t *borné tels que*

$$
\begin{aligned} f \;&=\; f + \hbar^{1/2} f^1 + \cdots + \hbar^{\frac{N_0}{2}} f^{N_0} + g^\hbar \,, \\ \|g^\hbar\|_{C([-T,+T];L^2(\mathbb{R}^{2N}))} \;&\le\; C_T\,\hbar^{(N_0+1/2)} \,, \end{aligned}
$$

où T *est arbitraire dans* $]0,+\infty[$ *et* C_T *est une constante positive indépendante de* $\hbar$.

REMARQUE IV.8. La démonstration donne bien sûr des équations d'évolutions pour les f^i $(i \ge 1)$ qui sont toutes du type

$$
\frac{\partial f^i}{\partial t} + \xi \cdot \nabla_x f^i - \nabla V(x) \cdot \nabla_\xi f^i \;=\; \mathcal{A}_i(f^{i-4}, f^{i-8}, \ldots)\,, \quad f^i|_{t=0} = f_0^i \,,
$$

(en convenant que $f = f^0$) où $\mathcal{A}_i$ est un opérateur linéaire différentiel. En particulier, pour $i \le 3$, on a comme pour f

$$
\frac{\partial f^i}{\partial t} + \xi \cdot \nabla_x f^i - \nabla V(x) \cdot \nabla_\xi f^i \;=\; 0\,, \qquad f^i|_{t=0} = f_0^i \,.
$$

REMARQUE IV.9. Donnons tout d'abord un exemple permettant d'illustrer la condition (83). On reprend la construction de la fin de la Section III : soit $f_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2N})$, $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, on introduit

$$
\rho_0^\hbar \;=\; \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \hbar^{-N/2} u_0\Big(\frac{x - x_0}{\hbar^{1/2}}\Big) u_0^*\Big(\frac{y - x_0}{\hbar^{1/2}}\Big)
$$

$$\cdot\, e^{i(\xi_0/\hbar)\cdot(x-y)} f_0(x_0,\xi_0)\, dx_0\, d\xi_0 \,.$$

Alors, on a

$$f_0^\hbar = f_0 * W_0^\hbar\,, \qquad W_0^\hbar(x,\xi) = \hbar^{-N}\, W_0\Big(\frac{x}{\hbar^{1/2}}, \frac{\xi}{\hbar^{1/2}}\Big)\,,$$
$$W_0 = W(u_0) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2N})\,.$$

On voit bien qu'un tel choix de $\rho_0^\hbar$ conduit à un développement en puissances de $\hbar^{1/2}$ comme cela est supposé dans (83) et que ce développement n'est en puissances entières de $\hbar$ que si u_0 est paire (ou plus généralement si les moments d'ordre impair s'annulent jusqu'à un ordre convenable).

En fait, on peut également traiter des cas plus complexes où le développement se fait suivant $\hbar^{k\alpha+l(1-\alpha)}$ $(h, l \geq 0$ entiers) -la démonstration qui suit restant essentiellement inchangée . Un tel développement apparaît naturellement si on considère

$$\rho_0^\hbar \;=\; \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \hbar^{-N\alpha}\, u_0\Big(\frac{x-x_0}{\hbar^\alpha}\Big)\, u_0^*\Big(\frac{y-x_0}{\hbar^\alpha}\Big)$$
$$\cdot\, e^{i(\rho_0/\hbar)(x-y)} f_0(x_0,\xi_0)\, dx_0\, d\rho_0 \,.$$

On trouve alors que

$$f_0^\hbar = f_0 * W_0^\hbar\,, \qquad W_0^\hbar(x,\xi) = \hbar^{-N}\, W_0\Big(\frac{x}{\hbar^{\alpha}}, \frac{\xi}{\hbar^{1-\alpha}}\Big)\,,$$
$$W_0 = W(u_0) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2N})\,.$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME IV.3. En remarquant que l'on peut développer à tout ordre

$$\frac{1}{\hbar}\Big(V_0(x+\frac{\hbar y}{2}) - V_0(x-\frac{\hbar y}{2})\Big)$$
$$= y\cdot\nabla_V(x) + \sum_{n\geq 1} \hbar^{2n} \sum_{|\alpha|=2n+1} (\alpha!)^{-1} y^\alpha \cdot D^\alpha V(x)\,,$$

on obtient aisément grâce à (67) un développement formel de $f^\hbar$ qui conduit à l'identification de $f^1, f^2, \ldots$ (voir Remarque IV.8). De plus, si on pose $\overline{f}^{\hbar} = f + \hbar^{1/2} f^1 + \cdots + \hbar^{N_0/2} f^{N_0}$, on vérifie par des calculs fastidieux que $\overline{f}^{\hbar}$ vérifie

$$\frac{\partial \overline{f}^{\hbar}}{\partial t} + \xi \cdot \nabla_x \overline{f}^{\hbar} + K_{\hbar} * \overline{f}^{\hbar} = r^{\hbar} \in C(\mathbb{R}_t; L^2(\mathbb{R}^{2N})) \,, \tag{85}$$
$$\overline{f}^{\hbar}|_{t=0} = f_0^{\hbar} - \hbar g_0^{\hbar} \,,$$

et pour tout $T \in]0, +\infty[$

$$\sup_{t \in [-T, +T]} \|r^{\hbar}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^{2N})} \le C_T \, \hbar^{(N_0+1)/2} \,. \tag{86}$$

D'où en posant $g^{\hbar} = f^{\hbar} - \overline{f}^{\hbar}$,

$$\frac{\partial g^{\hbar}}{\partial t} + \xi \cdot \nabla_x g^{\hbar} + K_{\hbar} * g^{\hbar} = r^{\hbar} \,, \qquad g^{\hbar}|_{t=0} = g_0^{\hbar} \,.$$

D'après la Remarque II.3, on déduit alors

$$\frac{d}{dt} \iint_{\mathbb{R}^{2N}} |g^{\hbar}|^2 \, dx \, d\xi \le \iint_{\mathbb{R}^{2N}} r^{\hbar} g^{\hbar} \, dx \, d\xi$$

et on conclut aisément au vu de (86) et de (83).

Nous allons maintenant passer au troisième type de résultats énoncé dans l'Introduction où nous montrerons comment la régularité C^1 supposée pour V et V_0 peut être affaiblie de façon à atteindre des potentiels physiquement plus réalistes. Le prix à payer sera de faire des hypothèses supplémentaires sur $f_0^{\hbar}$. Nous traiterons tout d'abord le cas linéaire puis le cas nonlinéaire. Dans les deux cas, nous n'essaierons pas ici d'obtenir les résultats les plus généraux et nous nous contenterons d'illustrer une méthode par quelques exemples représentatifs. Une étude plus systématique reposant notamment sur des idées de "renormalisation de $\rho^{\hbar}$" permettant d'affaiblir encore plus les hypothèses de régularité sur V sera menée dans P. Gérard, P. L. Lions et T. Paul [20].

Nous supposerons que $f_0^{\hbar}$ et V vérifient

$$f_0^{\hbar} \quad \text{est bornée dans} \quad L^2(\mathbb{R}^{2N}) \,, \tag{87}$$
$$V \in H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N) \,. \tag{88}$$

Pour les raisons données plus haut, (87) n'a vraiment de sens que si l'on travaille sur l'équation de Liouville (10). Enfin, pour assurer que (6) ou (10) admettent des solutions, nous supposerons également

$$V^- \in K^N(\mathbb{R}^N) \tag{89}$$

de sorte que (34) est vérifiée. L'hypothèse (35) servant à assurer que (67) est faiblement interprétable au sens des distributions sera également faite mais, comme nous l'avons indiqué précédemment, elle peut être supprimée en interprétant (67) convenablement.

Théorème IV.4. *Sous les hypothèses* (35) *et* (87)-(89)*, $f^\hbar$, après extraction éventuelle d'une sous-suite, converge faiblement dans $L^\infty([-T,+T];L^2(\mathbb{R}^{2N}))_{w-*}$ (et dans $C([-T,+T];\mathcal{A}'_{w-*})$) pour tout $T\in]0,+\infty[$ vers $f\in C_b(\mathbb{R}_t;\mathcal{M}_{w-*})\cap L^\infty(\mathbb{R}_t;L^1\cap L^2(\mathbb{R}^{2N}))$ qui vérifie* (11) *au sens des distributions et* (70).

DÉMONSTRATION. D'après la Remarque II.3, on voit que $f^\hbar$ est bornée dans $L^\infty(\mathbb{R}_t;L^2(\mathbb{R}^{2N}))$. En utilisant cette borne et en adaptant la démonstration du Théorème IV.1, on peut supposer que $f^\hbar$, quitte à extraire une sous-suite, converge au sens précisé ci-dessus vers $f\in C_b(\mathbb{R}_t;\mathcal{M}_{w-*})\cap L^\infty(\mathbb{R}_t;L^1\cap L^2(\mathbb{R}^{2N}))$ qui vérifie bien sûr (70). Le seul point réellement nouveau est la vérification de (11) pour laquelle nous utiliserons (88).

En effet, avec les notations de la démonstration du Théorème IV.1, il nous suffit de démontrer que si $\psi=(\mathcal{F}_\xi\varphi)(x,z)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2N})$

$$\psi(x,z)\frac{1}{\hbar}\left(V(x+\frac{\hbar}{2}z)-V(x-\frac{\hbar}{2}z)\right)\underset{\hbar\to 0}{\rightarrow}\psi(x,z)z\cdot\nabla V(x)$$

dans $L^2(\mathbb{R}^{2N})$. Et cette convergence est immédiate au vu de (88).

Dans le cas nonlinéaire (où $V=V_0*\rho$), nous conservons bien sûr l'hypothèse (87) et nous ferons sur V_0 les hypothèses suivantes

$$\begin{aligned} &V_0^- \in L^{(N+4)/4,\infty}(\mathbb{R}^N)+L^\infty(\mathbb{R}^N), && \text{si } N\le 3\,,\\ &V_0^- \in L^r(\mathbb{R}^N)+L^\infty(\mathbb{R}^N), && \text{avec } r>\frac{N}{2} \text{ si } N\ge 4\,, \end{aligned}\tag{90}$$

$$\begin{gathered}\nabla V_0 \in L^{(2N+8)/(N+8)}(\mathbb{R}^N)+L^q(\mathbb{R}^N),\\ \text{avec } \frac{2N+8}{N+8}<q<\infty\,.\end{gathered}\tag{91}$$

Bien sûr, nous pouvons également considérer des situations où $V = V_0 * \rho + V_1$ auquel cas il faudrait supposer que V_1 vérifie (88) et (89).

Le cas de l'équation de *Wigner-Poisson* qui intervient dans les semi-conducteurs (voir les références données dans l'Introduction) correspond à $N = 3$, $V_0 = 1/|x|$ et (90) et (91) ont lieu puisque

$$V_0^- \equiv 0\,, \quad \nabla V_0 \in L^{3/2,\infty}(\mathbb{R}^3)\,, \quad \text{et} \quad \frac{2N+8}{N+8} = \frac{14}{11} < \frac{3}{2}\,,$$

si $N = 3$.

En fait, sous ces seules hypothèses, la résolution de l'équation de Liouville nonlinéaire n'est pas évidente et découle d'une part de la Remarque IV.5 et des estimations a priori que nous démontrons ci-dessous. Nous ne voulons pas développer ce point assez technique ici.

Théorème IV.5. *Sous les hypothèses* (87), (90), (91) *et si*

$$\operatorname{Tr}(H_0\rho_o^\hbar)\,, \qquad \iint_{\mathbb{R}^{2N}} V_0^+(x-y)\rho_0^\hbar(x)\rho_0^\hbar(y)\,dx\,dy$$

sont bornés indépendamment de $\hbar$, alors

$$\|f^\hbar\|_{L^2(\mathbb{R}^{2N})}\,, \qquad \operatorname{Tr}(H_0\rho^\hbar(t))\,,$$
$$\iint_{\mathbb{R}^{2N}} V_0^\pm(x-y)\,\rho^\hbar(t,x)\rho^\hbar(t,y)\,dx\,dy \quad \text{et} \quad \|\rho^\hbar(t)\|_{L^{(N+4)/(N+2)}(\mathbb{R}^N)}$$

sont bornés indépendamment de $\hbar$ et de $t \in \mathbb{R}$. De plus, $f^\hbar$, après extraction éventuelle d'une sous-suite, converge faiblement dans $L^\infty([-T,+T];L^2(\mathbb{R}^{2N})w-*$ (et dans $C([-T,+T];\mathcal{M}_{w-*})$) pour tout $T\in]0,+\infty]$ vers $f \in C_b(\mathbb{R}_t;\mathcal{M}_{w-*}) \cap L^\infty(\mathbb{R}_t, L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^N))$ qui vérifie l'équation de Vlasov (73) *et* (70).

REMARQUE IV.10. Exactement comme dans le Théorème IV.2, la solution trouvée de (73) vérifie

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\Big(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} f|\xi|^2\,dx\,d\xi + \iint_{\mathbb{R}^{2N}} V_0^\pm(x-y)\rho(x)\rho(y)\,dx\,dy\Big) < +\infty\,. \tag{92}$$

DÉMONSTRATION DE LA REMARQUE. En admettant provisoirement les bornes énoncées dans le Théorème IV.5 il est facile de conclure en adaptant les démonstrations des Théorèmes IV.2 et IV.4. En effet, la borne d'énergie cinétique $\mathrm{Tr}\,(H_0\rho^\hbar)$ assure que $\rho^\hbar$ est relativement compacte dans $C([-T,+T];\mathcal{M}_{w-*})$ (pour tout $T\in]0,+\infty[$). De plus $\rho^\hbar(t)$ étant borné uniformément en $\hbar$ et t dans $L^1\cap L^{(N+4)/(N+2)}(\mathbb{R}^N)$, on déduit de (91) que $\nabla V(t,x)=\nabla V_0*\rho^\hbar(t)$ est borné dans $C_b(\mathbb{R}_t;L^2(\mathbb{R}^N))$ et converge dans $C([-T,+T];L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N))$ (pour tout $T\in]0,+\infty[$) vers $\nabla V_0*\rho(t)$. Il est alors facile de conclure.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. La borne L^2 sur $f^\hbar$ provient de la Remarque II.3. Les autres bornes sont des conséquences des résultats énoncés dans l'appendice: en effet, il y est démontré qu'il existe une constante $C_0\geq 0$ telle que pour toute matrice densité ρ

$$\|\rho\|_{L^{(N+4)/(N+2)}(\mathbb{R}^N)}\ \leq\ C_0\left(\mathrm{Tr}\,(\rho^2)\right)^{\theta/2}\left(\mathrm{Tr}\,(\overline{H}\rho)\right)^{1-\theta}$$

où $\theta=4/(N+4)$, $\overline{H}=-\Delta$. Or $\mathrm{Tr}\,(\overline{H}\rho^\hbar)=(2/\hbar^2)\,\mathrm{Tr}\,(H_0\rho^\hbar)$ et

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\,(\rho^\hbar)^{1/2}\ &=\ \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}}|\rho^\hbar(x,y)|^2\,dx\,dy\right)^{1/2}\\ &=\ (2\pi\hbar)^{N/2}\,\|f^\hbar\|_{L^2(\mathbb{R}^{2N})}\ \leq\ C\,\hbar^{N/2}\,.\end{aligned}$$

Or $N\theta/2=2N/(N+4)=2(1-\theta)$ d'où

$$\|\rho^\hbar\|_{L^{(N+4)/(N+2)}(\mathbb{R}^N)}\ \leq\ C\left(\mathrm{Tr}\,(H_0\rho^\hbar)\right)^{N/(N+4)}\,. \tag{93}$$

De plus, les hypothèses faites sur V_0^-, à savoir (90), permettent alors de majorer

$$\iint_{\mathbb{R}^{2N}}V_0^-(x-y)\,\rho^\hbar(x)\,\rho^\hbar(y)\,dx\,dy\ \leq\ C\left(1+(\mathrm{Tr}\,(H_0\rho^\hbar))^\alpha\right), \tag{94}$$

pour une puissance $\alpha\in]0,1[$. Cela suffit à assurer que

$$\iint_{\mathbb{R}^{2N}}V_0^-(x-y)\,\rho_0^\hbar(x)\,\rho_0^\hbar(y)\,dx\,dy$$

est borné indépendamment de $\hbar$. En particulier, l'énergie totale

$$\mathrm{Tr}\,(H_0\rho_0^\hbar)+\iint_{\mathbb{R}^{2N}}V_0(x-y)\,\varphi_0^\hbar\,\varphi_0^\hbar(y)\,dx\,dy$$

est bornée. On déduit alors de la conservation de l'énergie totale et de (93)-(94) les bornes énoncées dans le Théorème IV.5.

REMARQUE IV.11. Nous avons donné dans l'Introduction diverses références concernant Wigner-Poisson. Signalons en outre l'étude récente de P. Markowich et N. Mauser [32] qui établit la limite semi-classique vers Vlasov-Poisson en partant d'un modèle de type Wigner-Poisson où le potentiel coulombien V_0 est un peu régularisé.

Signalons pour conclure que nous donnerons dans [20] de multiples extensions des résultats énoncés ci-dessus (Théorèmes IV.4-IV.5) portant sur l'affaiblissement des hypothèses sur V et sur V_0, mais aussi sur le type de solutions obtenues (renormalisées, régulières) et enfin nous étudierons le cas d'équations de Schrödinger avec potentiel-vecteur (correspondant par exemple à un champ magnétique).

APPENDICE. Amélioration des bornes semi-classiques pour des systèmes orthonormés.

Soit ρ un noyau définissant un opérateur positif ou nul, compact, hermitien sur $L^2(\mathbb{R}^N)$. On peut bien sûr diagonaliser l'opérateur et ainsi trouver une base orthonormée $\{\psi_j\}_{j\geq 1}$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, des réels positifs ou nuls $\{\lambda_j\}_{j\geq 1}$ tels que

$$\text{(A.1)} \qquad \rho(x,y) = \sum_{j\geq 1} \lambda_j \, \psi_j(x) \, \psi_j^*(y) \, ,$$

$$\text{(A.2)} \qquad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \, , \quad \lambda_j \to 0 \quad \text{si} \quad j \to +\infty \, .$$

Bien sûr, si $p \geq 1$, $\mathrm{Tr}\,(\rho^p) = \sum_{j\geq 1} \lambda_j^p$ et nous noterons

$$|\!|\!|\rho|\!|\!|_p = \Big(\sum_{j\geq 1} \lambda_j^p\Big)^{1/p} \quad \text{et} \quad \|\rho\|_\infty = \max_{j\geq 1} \lambda_j \, .$$

Nous noterons également

$$\text{(A.3)} \qquad \rho(x) = \sum_{j\geq 1} \lambda_j \, |\psi_j(x)|^2 \, , \qquad \text{p.p.} \quad x \in \mathbb{R}^N$$

et

$$(A.4)\qquad j(x) = \sum_{j\geq 1} \lambda_j \operatorname{Im}(\nabla\psi_j(x)\psi_j^*(x)), \qquad \text{p.p.} \quad x \in \mathbb{R}^N .$$

Cette dernière quantité n'est définie que sous certaines hypothèses sur ψ_j et λ_j, de même que l'intégrabilité de ρ (ou de puissances de ρ) n'est pas assurée automatiquement. En fait, les bornes que nous allons établir permettront aussi de définir ces quantités dans des cadres généraux.

Nous introduisons enfin "l'énergie cinétique" de ρ

$$(A.5)\qquad \operatorname{Tr}(\overline{H}\rho) = \sum_{j\geq 1} \lambda_j \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\psi_j(x)|^2\, dx .$$

Notre résultat principal est une variante d'un résultat classique de E. H. Lieb et W. Thirring [26] (traitant le cas de ρ pour $\lambda_j = 1$ pour $1 \leq j \leq M$, $\lambda_j = 0$ pour $j > M$).

Théorème. *Soit $p \in [1, +\infty]$. On suppose que $\operatorname{Tr}(\overline{H}\rho)$ et $|\!|\!|\rho|\!|\!|_p$ sont finis. Alors, les séries définissant ρ et j sont convergentes dans respectivement $L^q(\mathbb{R}^N)$, $L^r(\mathbb{R}^N)$ avec*

$$q = \frac{(N+2)p - N}{Np - (N-2)}, \qquad r = \frac{(N+2)p - N}{(N+1)p - (N-1)} .$$

De plus, il existe des constantes positives C_0, C_1 indépendantes de ρ telles que

$$(A.6)\qquad \|\rho\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C_0\, |\!|\!|\rho|\!|\!|_p^\theta \left(\operatorname{Tr}(\overline{H}\rho)\right)^{1-\theta},$$

avec $\theta = \dfrac{2p}{(N+2)p - N}$,

$$(A.7)\qquad \|j\|_{L^r(\mathbb{R}^N)} \leq C_1\, |\!|\!|\rho|\!|\!|_p^\theta \left(\operatorname{Tr}(\overline{H}\rho)\right)^{1-\theta},$$

avec $\theta = \dfrac{p}{(N+2)p - N}$.

REMARQUE. Le cas $p = 1$ est trivial. Aussi, nous supposerons $p > 1$ dans tout ce qui suit.

REMARQUE. Par transformée de Wigner (et de Husimi), on peut déduire de ces inégalités grâce aux inégalités prouvées en fin de Section III les inégalités suivantes d'interpolation (classiques dans l'analyse des équations de Vlasov). Si $f \geq 0 \in L^1(|\xi|^2\, dx\, d\xi) \cap L^p(\mathbb{R}^{2N})$ alors $\rho \in L^q(\mathbb{R}^N)$, $j = \int_{\mathbb{R}^N} \xi\, f(x,\xi)\, d\xi \in L^r(\mathbb{R}^N)$ et

$$\|\rho\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C_0' \, \|f\|^\theta_{L^p(\mathbb{R}^N)} \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} f|\xi|^2\, dx\, d\xi \right)^{1-\theta}, \tag{A.6'}$$

avec $\theta = \dfrac{2p}{(N+2)p - N}$,

$$\|j\|_{L^r(\mathbb{R}^N)} \leq C_1' \, \|f\|^\theta_{L^p(\mathbb{R}^N)} \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} f|\xi|^2\, dx\, d\xi \right)^{1-\theta}, \tag{A.7'}$$

avec $\theta = \dfrac{p}{(N+2)p - N}$.

DÉMONSTRATION. Nous commençons par le

Lemme. *Soit $V \in L^{N/2+\delta}(\mathbb{R}^N)$ avec $\delta > 0$ si $N \geq 2$, $\delta > 1/2$ si $N = 1$. Alors, si on note $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots$ les valeurs propres négatives de l'opérateur $(\overline{H} + V)$, on a*

$$\sum_j |\mu_j|^\delta \leq C(N,\delta) \int_{\mathbb{R}^N} |V^-|^{N/2+\delta}\, dx\,. \tag{A.8}$$

Ce résultat est dû à E. H. Lieb et W. Thirring [26] dans le cas où $N \geq 3$. Il suffit pour l'établir si $N = 1$ ou si $N = 2$ de reprendre la démonstration (présentée dans B. Simon [38] ou R. Dautray [9]) qui donne pour tout $\mu > 0$

$$\#\,\{j \,:\, \mu_j < -\mu\} \leq C \int_0^\infty e^{-\mu t/2}\, t^{-N/2-1}\, dt \int_{\mathbb{R}^N} f(tV^-(x))\, dx\,,$$

où $f(s) = (s-1)^+$, d'où

$$\begin{aligned}
\sum_{j \geq 1} |\mu_j|^\delta &= \delta \int_0^\infty s^{\delta-1} \left(\#\{j \,:\, \mu_j < -s\} \right) ds \\
&\leq C \int_0^\infty t^{-(1+\delta+N/2)}\, dt \int_{\mathbb{R}^N} f(tV^-(x))\, dx
\end{aligned}$$

$$= C \int_{\mathbb{R}^N} |V^-|^{N/2+\delta}\, dx\,,$$

où C désigne diverses constantes positives ne dépendant que de N et δ (la condition sur δ assure que $\int_0^\infty \sigma^{-(1+\delta+N/2)}\,(\sigma-1)^+\,d\sigma < \infty$).

A l'aide du lemme, nous allons tout d'abord démontrer (A.6) en s'inspirant de l'argument de E. H. Lieb et W. Thirring [26]. On considère l'opérateur $\overline{H}-t\rho^\alpha$ où $t>0$ est une constante qui sera déterminée dans la suite et où $\alpha = (2(p-1))/(2+N(p-1))$. Nous allons établir que

$$\text{(A.9)}\qquad \begin{aligned} \operatorname{Tr}\big((\overline{H}-t\rho^\alpha)\rho\big) &= \sum_{j\ge1}\lambda_j\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\psi_j|^2 - t\rho^\alpha|\psi_j|^2\,dx\right)\\ &\ge -\sum_{j\ge1}\lambda_j|\mu_j|\,, \end{aligned}$$

où μ_j sont les valeurs propres négatives par ordre croissant de l'opérateur $\overline{H}-t\rho^\alpha$. En admettant provisoirement (A.9), on voit que

$$t\int_{\mathbb{R}^N}\rho^{\alpha+1}\,dx \;\le\; \operatorname{Tr}(\overline{H}\rho) + \|\rho\|_p\left(\sum_{j\ge1}|\mu_j|^{p'}\right)^{1/p'},$$

d'où d'après le lemme précédent

$$t\int_{\mathbb{R}^N}\rho^{\alpha+1}\,dx \;\le\; \operatorname{Tr}(\overline{H}\rho) + \|\rho\|_p\, C\left(\int_{\mathbb{R}^N}(t\rho^\alpha)^{N/2+p'}\right)^{1/p'}.$$

On observe ensuite que

$$\begin{aligned} \alpha+1 &= \frac{2\,(p-1)}{2+N(p-1)}+1\\ &= \frac{(N+2)\,p-N}{Np-(N-2)}(=q) \;=\; \frac{N\alpha}{2}+\alpha\, p'\,, \end{aligned}$$

d'où

$$t\left(\int_{\mathbb{R}^N}\rho^q\,dx\right) \;\le\; \operatorname{Tr}(\overline{H}\rho) + C\|\rho\|_p\, t^{1+N/(2p')}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\rho^q\,dx\right)^{1/p'}.$$

On choisit alors

$$t^{N/(2p')} = (2C\|\rho\|_p)^{-1}\left(\int_{\mathbb{R}^N} \rho^q\, dx\right)^{1/p}$$

et on trouve

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} \rho^q\, dx\right)^{1+2p'/(Np)} \le C\,\|\rho\|_p^{2p'/N}\,\mathrm{Tr}\,(\overline{H}\rho)$$

et (A.6) est démontrée.

La preuve de (A.9) est un exercice élémentaire de réarrangement. En effet, si on note φ_k une collection (finie ou dénombrable) orthonormée de vecteurs propres associés aux μ_k et si on pose $p_{jk} = \int_{\mathbb{R}^N} \psi_j \varphi_k^*$, on voit que

$$\mathrm{Tr}\,((\overline{H} - t\rho^\alpha)\rho) \;\ge\; \sum_{j,k} |p_{jk}|^2\, \mu_k \lambda_j \; .$$

Or $\mu_1 \le \mu_2 \le \cdots < 0$, $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge 0$, $\sum_j |p_{jk}|^2 = 1$, $\sum_k |p_{jk}|^2 \le 1$. On déduit alors aisément (A.9) de ces informations.

Il reste à démontrer (A.7). Pour ce faire, on observe que $|j| \le \rho^{1/2} e^{1/2}$ p.p. où $e = \sum_{j\ge 1} \lambda_j |\nabla \psi_j|^2$. Et on déduit aisément (A.7) de (A.6) grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz en remarquant que

$$\frac{1}{r} = \frac{(N+1)p - (N-1)}{(N+2)p - N} = \frac{1}{2}\frac{Np - (N-2)}{(N+2)p - N} + \frac{1}{2}\, .$$

Références.

[1] Aizenman, M. et Simon, B., Brownian motion and Harnack's inequality for Schrödinger operators. *Comm. Pure Appl. Math.* **35** (1982), 209-271.

[2] Arnold, A., Degond, P., Markowich P. A. et Steinrück, H., The Wigner-Poisson problem in a crystal. *Appl. Math. Lett.* **2** (1989), 187-191.

[3] Arnold, A. et Markowich, P. A., Quantum transport models for semiconductors, in *Applied and Industrial Mathematics*, éd. R. Spigler, Kluwer, 1991.

[4] Arnold A. et Nier, F., The two-dimensional Wigner-Poisson problem for an electron gas in the charge neutral case. *Math. Methods Appl. Sci.* **14** (1991), 595-613.

[5] Arnold A. et Steinrück, A., The "electromagnetic" Wigner equation for an electron with spin. *Z.A.M.P.* **40** (1989), 793-815.

[6] Brezzi F. et Markowich, P. The three-dimensional Wigner-Poisson problem: existence, uniqueness and approximation. *Math. Methods Appl. Sci.* **14** (1991), 35-61.

[7] Cazenave, Th. et Haraux, A., *Introduction aux problèmes d'évolution semilinéaires.* Mathématiques et Applications, Ellipses, 1990.

[8] Córdoba A. et Fefferman, C., Fourier integral operators and propagation of wave packets. *Comm. Partial Diff. Equations* **3** (1978), 979.

[9] R. Dautray (éd.), *Méthodes probabilistes pour les équations de la Physique.* Collection CEA, Eyrolles, 1989.

[10] Degond, P. et Markowich, P., A mathematical analysis of quantum transport in three dimensional crystals. *Annali Mat. Pura Appl.* **160** (1991), 171-191.

[11] Degond, P. et Markowich, P., A quantum-transport model for semiconductors: the Wigner-Poisson problem on a bounded Brillouin zone. *RAIRO Mode. Math. Anal. Num.* **24** (1990), 697-710.

[12] DiPerna, R. J. et Lions. P. L., Solutions globales d'équations du type Vlasov-Poisson. *C.R. Acad. Sci. Paris* **307** (1988), 655-658.

[13] DiPerna R. J. et Lions, P. L., Global weak solutions of kinetic equations. *Sem. Mat. Torino* **46** (1988), 259-288.

[14] DiPerna, R. J. et Lions, P. L., Ordinary differential equations, Sobolev spaces and transport theory. *Invent. Math.* **98** (1989), 511-547.

[15] DiPerna. R. J. et Majda, A., Concentration regularizations for $2-D$ incompressible flow. *Comm. Pure Appl. Math.* **40** (1987), 301-345.

[16] DiPerna, R. J. et Majda, A., Reduced Hausdorff dimension and concentration-cancellation for $2-D$ incompressible flow. *J. Amer. Math. Soc.* **1** (1988), 59-95.

[17] Frensley, W. R., Wigner function model of a resonent-tunneling semiconductor device. *Phys. Rev. B* **36** (1987), 1570-1580.

[18] Gérard, P., Microlocal defect measures. *Comm. Partial Diff. Equations* **16** (1991), 1761-1794.

[19] Gérard, P., Mesures semi-classiques et ondes de Bloch, in *Séminaire EDP* 1990-1991, Ecole Polytechnique, Palaiseau, 1991.

[20] Gérard, P., Lions, P. L. et Paul, T., travail en préparation.

[21] Ginibre J. et Velo, G., On the global Cauchy problem for some nonlinear Schrödinger equations. *Ann. Inst. H. Poincaré. Analyse non linéaire* **1**

(1984), 309-323.

[22] Ginibre J. et Velo, G., On a class of nonlinear Schrödinger équations with nonlocal interaction. *Math. Z.* **170** (1980), 109-136.

[23] Grimwall, G., *The electron-phonon interaction in metals.* North-Holland, 1981,

[24] Kato, T., Schrödinger operators with singular potentials. *Israel J. Math.* **13** (1973), 135-148.

[25] Klauder, J. R. et Skagerstam, *Coherent states.* World scientific, 1981.

[26] Lieb, E. H. et Thirring, W., Inequalities for the moments of the eigenvalues of the Schrödinger Hamiltonian and their relation to Sobolev inequalities, in *Studies in Mathematical Physics, Essays in Honor of Valentine Bargmann,* E. H. Lieb, B. Simon, W. Thirring (éds), Princeton Univ. Press, 1976.

[27] Lions, P. L., The concentration-compactness principle in the Calculus of Variations. The locally compact case. I, *Ann. Inst. H. Poincaré, Analyse non linéaire* **1** (1984), 109-145; II, *Ann. Inst. H. Poincaré Analyse non linéaire* **I** (1984), 223-283.

[28] Lions, P. L., The concentration-compactness principle in the Calculus of Variations. The limit case. I, *Revista Mat. Iberoamericana* **1** (1985), 145-201; II, *Revista Mat. Iberoamericana* **1** (1985), 45-121.

[29] Lions, P. L. et Perthame, B., Propagation of moments and regularity for the 3-dimensional Vlasov-Poisson system. *Invent. Math.* **105** (1991), 415-430.

[30] Lions, P. L. et Perthame, B., Lemmes de moments, de moyenne et de dispersion. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* **314** (1992), 801-806.

[31] Markowich, P., Boltzmann distributed quantum steady states and their classical limit. Preprint.

[32] Markowich, P., On the equivalence of the Schrödinger and the quantum Liouville equation. *Math. Meth. Appl. Sci.* **11** (1989), 459-469.

[33] Markowich, P. et Mauser, N., communication personnelle.

[34] Markowich, P. et Ringhofer, C., An analysis of the quantum Liouville equation. *Z.A.M.M.* **69** (1989), 121-127.

[35] Maslov, V. P., Non-standard characteristics in asymptotical problems, in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians,* (ICM Warszawa 1982), Warsaw, 1983, Vol. I, North-Holland, 1984.

[36] Ravaioli, U., Osman, M. A., Pötz, W., Kluksdahl, N. et Ferry, D. K., Investigation of ballistic transport through resonant tunneling quantum wells using Wigner function approach. *Physica* **134B** (1985), 36-40.

[37] Schrödinger, E., Quantizierung als Eigenwertproblem. *Annalen der Physik* (1926), **79** 361-376 et 489-527, **80** 437-490 et **81** 109-139.

[38] Simon, B., *Functional integration and quantum physics.* Academic Press, 1979.

[39] Steinrück, H., The one-dimensional Wigner-Poisson problem and its relation to the Schrödinger-Poisson problem. *SIAM* (1990).

[40] Steinrück, H., The Wigner-Poisson problem in a crystal. Existence, uniqueness, semi-classical limit in the one-dimensional case. *Z.A.M.M.* (1990).

[41] Tartar, L., H-measures, a new approach for studying homogeneization, oscillations and concentration effects in partial differential equations. *Proc. Roy. Soc. Ed.* **115 A** (1990), 193-230.

[42] Tatarskii, V. I., The Wigner representation of quantum mechanics. *Sov. Phys. Usp.* **26** (1983), 311-327.

[43] Thirring, W. *Quantum Mechanics of large systems.* A course in Mathematical Physics, **4**. Springer, 1983.

[44] Weyl, H., *The theory of groups and quantum mechanics*, Dover, 1950 (orig.1931).

[45] Wigner, E., On the Quantum Correction for Thermodynamic Equilibrium. *Phys. Rev.* **40** (1932), 749-759.

[46] Yvon, J., Sur les rapports entre la théorie des mélanges et la statistique classique. *C. R. Acad. Sci. Paris* **223** (1946), 347-349.

[47] Yvon, J., Théorie quantique et classique, in *Mécanique Statistique*, éd. A. Blanc-Lapierre, Masson, 1967.

Recibido: 3 de diciembre de 1.992

Pierre Louis Lions et Thierry Paul
CEREMADE
Université Paris-Dauphine
Place de Lattre de Tassigny
75775 Paris Cedex 16, FRANCE