Revista Matemática Iberoamericana
Vol. 10, N.° 2, 1994

Projecteurs invariants, matrices de dilatation, ondelettes et analyses multi-résolutions

Pierre-Gilles Lemarié-Rieusset

Résumé. On montre que les bases d'ondelettes (bi-orthogonales) associées à une matrice de dilatation compatible avec les translations entières proviennent en général d'analyses multi-résolutions. La démonstration se fait à l'aide de l'étude des projecteurs qui commutent avec les translations entières.

Abstract. We show that (bi-orthogonal) wavelet bases associated to a dilation matrix which is compatible with integer shifts are generally provided by a multi-resolution analysis. The proof is done by studying the projectors which commute with integer shifts.

Introduction.

Les premières bases d'ondelettes [3], [10], [14], [17] étaient des bases orthonormées de $L^2(\mathbb{R}^n)$ $(\psi_{\varepsilon,j,k})_{1\leq\varepsilon\leq 2^n-1,\, j\in\mathbb{Z},\, k\in\mathbb{Z}^n}$ engendrées par dilatation et translation dyadiques

$$\psi_{\varepsilon,j,k}(x) = 2^{jn/2}\psi_\varepsilon(2^j x - k) \tag{1}$$

à partir d'un ensemble fini de fonctions ψ_ε.

On note W_j l'espace des ondelettes d'échelle $1/2^j$ (W_j est le sous-espace vectoriel fermé de $L^2(\mathbb{R}^n)$ engendré par les $\psi_{\varepsilon,j,k}$, $1 \le \varepsilon \le 2^n-1$, $k \in \mathbb{Z}^n$). W_j est alors invariant par translation par un facteur $k/2^j$ ($k \in \mathbb{Z}^n$): $f \in W_j$ si et seulement si $f(x - k/2^j) \in W_j$. On note alors V_0 l'espace des grandes échelles

$$V_0 = \overline{\bigoplus_{j<0} W_j} \,.$$

Comme V_0 est orthogonal à $\oplus_{j\ge 0} W_j$, on voit que V_0 est invariant par translations entières: si $k \in \mathbb{Z}^n$, $f \in V_0$ si et seulement si $f(x - k) \in V_0$. En fait, dans la plupart des bases d'ondelettes, V_0 a une base orthonormée de la forme $(\varphi(x - k))_{k\in\mathbb{Z}^n}$. On est alors dans le cadre d'une *analyse multi-résolution* au sens de S. Mallat [18], [19] et φ est appelée *fonction d'échelle* associée aux *ondelettes* ψ_ε .

Cette première génération de bases d'ondelettes a été développée dans les années 1985-88 et les principales constructions et propriétés en ont été exposées dans le livre de Y. Meyer paru en 1990, [19]. Depuis 1989, de nouvelles notions de base d'ondelettes ont été développées, essentiellement pour des raisons pratiques (filtres à phase linéaire pour les bases bi-orthogonales [11], maillage en quinconce pour les matrices de dilatation [6], bases d'ondelettes à support compact polynomiales par morceaux pour les analyses multi-résolution multiples [1]).

Les bases d'ondelettes que nous allons considérer dans cet article seront des bases bi-orthogonales

$$(\psi_{\varepsilon,j,k})_{1\le\varepsilon\le E,\, j\in\mathbb{Z},\, k\in\mathbb{Z}^n} \,, \qquad (\psi^*_{\varepsilon,j,k})_{1\le\varepsilon\le E,\, j\in\mathbb{Z},\, k\in\mathbb{Z}^n} \,,$$

engendrées par translation et par l'opération d'une matrice de dilatation A. Une *matrice de dilatation* est un opérateur linéaire A de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ dont toutes les valeurs propres sont de module strictement plus grand que 1. Les fonctions $\psi_{\varepsilon,j,k}$ et $\psi^*_{\varepsilon,j,k}$ sont alors définies par

$$\begin{aligned} \psi_{\varepsilon,j,k}(x) &= |\det A|^{j/2}\, \psi_\varepsilon(A^j x - k)\,, \\ \psi^*_{\varepsilon,j,k}(x) &= |\det A|^{j/2}\, \psi^*_\varepsilon(A^j x - k)\,, \end{aligned} \tag{2}$$

et doivent définir *deux bases biorthogonales* de $L^2(\mathbb{R}^n)$, c'est-à-dire que l'on demande que les $\psi_{\varepsilon,j,k}$ et les $\psi^*_{\varepsilon,j,k}$ vérifient

(3.1) *complétude*: la famille $(\psi_{\varepsilon,j,k})_{1\le\varepsilon\le E,\, j\in\mathbb{Z},\, k\in\mathbb{Z}^n}$ est totale dans $L^2(\mathbb{R}^n)$

(3.2) *bi-orthogonalité*: $\langle \psi_{\varepsilon,j,k}, \psi^*_{\varepsilon',j',k'} \rangle = \delta_{\varepsilon,\varepsilon'}\,\delta_{j,j'}\,\delta_{k,k'}$ pour le produit scalaire de $L^2(\mathbb{R}^n)$

(3.3) *presque-orthogonalité*: il existe une constante C telle que pour toute suite presque nulle $(\lambda_{\varepsilon,j,k})$ on ait

$$\Big\| \sum_{\varepsilon=1}^{E} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \lambda_{\varepsilon,j,k}\, \psi_{\varepsilon,j,k} \Big\|_2^2 \le C \sum_{\varepsilon=1}^{E} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\lambda_{\varepsilon,j,k}|^2$$
$$\Big\| \sum_{\varepsilon=1}^{E} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \lambda_{\varepsilon,j,k}\, \psi^*_{\varepsilon,j,k} \Big\|_2^2 \le C \sum_{\varepsilon=1}^{E} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\lambda_{\varepsilon,j,k}|^2 .$$

L'application

$$(\lambda_{\varepsilon,j,k}) \to \sum_{\varepsilon=1}^{E} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \lambda_{\varepsilon,j,k}\, \psi_{\varepsilon,j,k}$$

est alors un isomorphisme de $\ell^2(\{1,\ldots,E\} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^n\}$ sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ et on a

$$\langle \sum_{\varepsilon=1}^{E} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \lambda_{\varepsilon,j,k}\, \psi_{\varepsilon,j,k} \,,\, \psi^*_{\varepsilon',j',k'} \rangle = \lambda_{\varepsilon',j',k'} \;.$$

Un cas important est lorsque la dilatation A et les translations par des éléments de $\mathbb{Z}^n$ vérifient la *relation de compatibilité*

$$A\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{Z}^n . \tag{4}$$

En effet, on note à nouveau W_j l'espace engendré par les $\psi_{\varepsilon,j,k}$ et on note W_j^* celui engendré par les $\psi^*_{\varepsilon,j,k}$. De même, on note

$$V_0 = \overline{\bigoplus_{j<0} W_j} \qquad \text{et} \qquad V_0^* = \overline{\bigoplus_{j<0} W_j^*} .$$

Alors V_0 et V_0^* sont invariants par translations entières: $f \in V_0$ si et seulement si $f(x-k) \in V_0$ (lorsque $k \in \mathbb{Z}^n$) et $f \in V_0^*$ si et seulement si $f(x-k) \in V_0^*$; en effet on a

$$V_0^\perp = \overline{\bigoplus_{j\ge 0} W_j^*} \qquad \text{et} \qquad V_0^{*\perp} = \overline{\bigoplus_{j\ge 0} W_j} ,$$

or W_j^* et W_j sont invariants par translation par un facteur $A^{-j}k$; comme $A^j\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{Z}^n$ lorsque $j \ge 0$, on voit que les W_j et W_j^* sont invariants par translation entière pour $j \geq 0$, d'où V_0 et V_0^* également. Cela peut s'exprimer à l'aide de l'opérateur de sommation partielle P_0 défini par

$$P_0 f = \sum_{\varepsilon=1}^{E} \sum_{j<0} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle f, \psi^*_{\varepsilon,j,k}\rangle\, \psi_{\varepsilon,j,k}\,. \tag{5}$$

P_0 est le projecteur de $L^2(\mathbb{R}^n)$ sur V_0 parallèlement à $(V_0^*)^\perp$ et l'invariance de V_0 et V_0^* par translations entières est équivalente à la commutation de P_0 avec les translations entières

$$P_0\big(f(x-k)\big) = \big(P_0 f\big)(x-k)\,, \tag{6}$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}^n$ et pour tout $f \in L^2$. En général, V_0 a une base de Riesz de la forme $(\varphi_\delta(x-k)_{1\leq\delta\leq D,\, k\in\mathbb{Z}^n}$; on parle alors d'*analyse multi-résolution de multiplicité* D et la relation entre le nombre E d'ondelettes ψ_ε et le nombre D de fonctions d'échelle φ_δ est la suivante:

$$E = (|\det A| - 1)D\,. \tag{7}$$

En particulier E est un multiple de $|\det A| - 1$.

Le but de cet article est triple:

i) on cherchera à donner des critères simples pour qu'un projecteur P_0 de $L^2(\mathbb{R}^n)$ commutant avec les translations entières vérifie que son image V_0 admet une base de Riesz de la forme $(\varphi_\delta(x-k))_{1\leq\delta\leq D,\, k\in\mathbb{Z}^n}$;

ii) on donnera un critère pour établir la propriété de presque-orthogonalité (3.3); ce critère s'appliquera plus généralement à des *vaguelettes*. C'est-à-dire qu'on considérera une famille $\psi_{j,k}$ de fonctions de $L^2(\mathbb{R}^n)$ telles que $(\det A)^{-j/2}\psi_{j,k}(A^{-j}(x+k))$ soit dans un ensemble fixé B ; on parlera alors de B-vaguelettes et le critère portera sur l'ensemble B. L'intérêt de ce lemme est qu'un opérateur qui transforme une base d'ondelettes en une famille de B-vaguelettes est automatiquement continu sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ si les B-vaguelettes sont presque-orthogonales (*cf.* [20, Chapitre VIII]).

iii) on donnera un critère simple pour qu'une base d'ondelettes provienne d'une analyse multi-résolution.

Les points ii) et iii) sont traités dans le cadre des matrices de dilatation et demandent une étude préalable de la géométrie attachée à cette dilatation. Cette étude est classique en analyse harmonique (elle se rattache par exemple aux groupes de Lie nilpotents de Folland et Stein [12] ou aux espaces de nature homogène de Coifman et Weiss [9]). La nouveauté des résultats que nous présentons ici ne résulte donc pas de l'utilisation des matrices de dilatation: le point iii) est déjà nouveau dans le cadre des bases d'ondelettes "traditionnelles".

Le plan de l'article est le suivant:

NOTATIONS. La transformée de Fourier $\hat{f}$ d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ est donnée par

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-ix\xi}\, dx\,.$$

I. Projecteurs invariants par translations entières.

On considère P_0 un projecteur de $L^2(R^n)$ invariant par translations entières, c'est-à-dire un opérateur linéaire continu de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même qui vérifie

i) $P_0 \circ P_0 = P_0$,

ii) pour tout $k \in \mathbb{Z}^n$ et pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$P_0\big(f(x-k)\big) = \big(P_0 f\big)(x-k)\,.$$

On note $V_0 = \operatorname{Im} P_0$ et $V_0^* = (\operatorname{Ker} P_0)^{\perp}$.

On rappelle qu'une famille $(f_k)_{k\in K}$ de fonctions de $L^2(\mathbb{R}^n)$ est une *base de Riesz* d'un sous-espace fermé V de $L^2(\mathbb{R}^n)$ si elle vérifie

- $(f_k)_{k\in K}$ engendre V: les combinaisons linéaires des f_k sont denses dans V,

- il existe deux constantes strictement positives A et B telles que pour toute suite presque nulle $(\lambda_k)_{k\in K}$ on ait

$$A\sum_{k\in K}|\lambda_k|^2 \le \Big\|\sum_{k\in K}\lambda_k f_k\Big\|_2^2 \le B\sum_{k\in K}|\lambda_k|^2. \tag{8}$$

Si $(f_k)_{k\in K}$ est une base de Riesz de V_0, il existe une base de Riesz $(g_k)_{k\in K}$ de V_0^* telle que $\langle f_k, g_{k'}\rangle = \delta_{k,k'}$ et on a alors

$$P_0 f = \sum_{k\in K}\langle f, g_k\rangle f_k\ .$$

La base $(g_k)_{k\in K}$ est appelée la *base duale* de la base $(f_k)_{k\in K}$ dans V_0^*. Si V_0 a une base de Riesz de la forme $(\varphi_{\delta,k} = \varphi_\delta(x-k)_{1\le\delta\le D,\, k\in\mathbb{Z}^n}$ alors la base duale $\varphi^*_{\delta,k}$ est de même type: $\varphi^*_{\delta,k}$ est défini comme l'unique élément de V_0^* solution de

$$\{\langle\varphi^*_{\delta,k},\varphi_{\delta',k'}\rangle = \delta_{\delta,\delta'}\delta_{k,k'}\ \text{ pour } 1\le\delta'\le D \text{ et } k'\in\mathbb{Z}^n\}\ ;$$

il est donc évident que

$$\varphi^*_{\delta,k}(x) = \varphi^*_{\delta,0}(x-k)\,.$$

Il n'est pas vrai en général qu'un sous-espace fermé V de $L^2(\mathbb{R}^n)$ invariant par translations entières ait une base de Riesz elle-même invariante par translations entières (c'est-à-dire de la forme $(\varphi_\delta(x-k))_{\delta\in\Delta,\, k\in\mathbb{Z}^n}$). Un contre-exemple simple est

$$V = \{f\in L^2(\mathbb{R}^n):\ \operatorname{supp}\hat f\subset[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}]^n\}$$

(*cf.* Contre-exemple numéro 1).

Nous allons donner un critère simple pour que V_0 admette une telle base: le projecteur P_0 que nous allons considérer aura un noyau $p(x,y)$ localement intégrable et suffisamment décroissant loin de la diagonale.

Definition 1. *Soit P_0 un opérateur linéaire continu sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ tel que P_0 est invariant par translations entières, et soit ω un poids symétrique sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, c'est-à-dire une fonction localement intégrable strictement positive et telle que $\omega(x) = \omega(-x)$ p.p. Alors P_0 aura un noyau ω-localisé $p(x,y)$ si $p(x,y)$ est une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ telle que*

$$\langle P_0 f, g\rangle = \iint p(x,y)\, f(y)\, \bar{g}(x)\, dx\, dy\,, \tag{9}$$

pour tout $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{x\in[0,1]^n} \int_{y\in\mathbb{R}^n} \omega(x-y)|p(x,y)|^2\, dx\, dy < +\infty\,, \tag{10}$$

et

$$\int_{y\in[0,1]^n} \int_{x\in\mathbb{R}^n} \omega(x-y)|p(x,y)|^2\, dx\, dy < +\infty\,. \tag{11}$$

Le choix du domaine d'intégration dans (10) et (11) s'explique par le fait que

$$\omega(x+k-y-k)\,|p(x+k,y+k)|^2 = \omega(x-y)\,|p(x,y)|^2 \quad \text{p.p.}$$

Le noyau $p(x,y)$ est entièrement caractérisé par (9) (d'après le théorème des noyaux-distributions de L. Schwartz par exemple).

Les poids que nous allons utiliser seront les poids introduits par A. Beurling dans [4].

Definition 2. *Une fonction $\omega : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est un poids de Beurling si elle vérifie les quatre conditions suivantes pour deux constantes C et M strictement positives:*

i) $\displaystyle \frac{1}{C} \le \omega(x) \le C\,(1+\|x\|)^M,$

ii) $\displaystyle \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{\omega(x)} < +\infty\,,$

iii) $\displaystyle \frac{1}{\omega} * \frac{1}{\omega} \le C\,\frac{1}{\omega}\,,$

iv) $\omega(x+y) \le C\,\omega(x)\,\omega(y)\,.$

Les principales propriétés des poids de Beurling que nous aurons à utiliser dans cet article sont décrites dans l'Annexe A.

Notre théorème principal est alors le suivant

Théorème 1. *Soit P_0 un opérateur linéaire continu sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ tel que*

i) *P_0 est un projecteur: $P_0 \circ P_0 = P_0$,*

ii) *P_0 est invariant par translations entières:*

$$P_0\big(f(x-k)\big) = \big(P_0 f\big)(x-k),$$

pour tout $f \in L^2$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}^n$.

On note $V_0 = \operatorname{Im} P_0$ et $V_0^* = (\operatorname{Ker} P_0)^\perp$. Soit enfin ω un poids de Beurling symétrique (i.e. $\omega(x) = \omega(-x)$). Alors

a) Si V_0 a une base de Riesz de la forme $(\varphi_\delta(x-k))_{1\le\delta\le D,\, k\in\mathbb{Z}^n}$ avec les $\varphi_\delta \in L^2(\omega\, dx)$ et si V_0^* a une base de Riesz de la forme $(\psi_\delta(x-k))_{1\le\delta\le D,\, k\in\mathbb{Z}^n}$ avec les $\psi_\delta \in L^2(\omega\, dx)$ alors la base duale $(\varphi_\delta^*(x-k))$ des $(\varphi_\delta(x-k))$ dans V_0^* vérifie que $\varphi_\delta^* \in L^2(\omega\, dx)$ et l'opérateur P_0 a un noyau ω-localisé $p(x,y)$.

b) Inversement, si P_0 a un noyau ω-localisé alors V_0 a une base de Riesz de la forme $(\varphi_\delta(x-k))_{1\le\delta\le D,\, k\in\mathbb{Z}^n}$. Le nombre D ne dépend pas du choix de la base de Riesz, mais se calcule à l'aide du "périodisé" $\tilde{p}(x,y)$ de $p(x,y)$ par les formules suivantes

$$\tilde{p}(x,y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} p(x, y-k), \tag{12}$$

$$D = \iint_{[0,1]^n\times[0,1]^n} \tilde{p}(x,y)\,\tilde{p}(y,x)\, dy\, dx. \tag{13}$$

(On montrera en particulier que $\tilde{p}(x,y)$ est une fonction $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n$-périodique de carré intégrable sur $[0,1]^n \times [0,1]^n$).

c) Si $n = 1$, on peut de plus choisir la base $(\varphi_\delta(x-k))_{1\le\delta\le D,\, k\in\mathbb{Z}^n}$ avec $\varphi_\delta \in L^2(\omega\, dx)$ si $p(x,y)$ est ω-localisé. Cela est faux en général pour $n \ge 2$ mais si V_0 a une base de Riesz

$$(\varphi_\delta(x-k))_{1\le\delta\le D,\ k\in\mathbb{Z}^n}$$

avec $\varphi_\delta \in L^2(\omega\, dx)$ et si $p(x,y)$ est ω-localisé alors la base duale $(\varphi^*_\delta(x-k))$ des $(\varphi_\delta(x-k))$ dans V^*_0 vérifie $\varphi^*_\delta \in L^2(\omega\, dx)$.

d) En particulier, si un sous-espace V_0 de L^2 a une base de Riesz de la forme $(\varphi_\delta(x-k))_{1\le\delta\le D,\, k\in\mathbb{Z}^n}$ avec $\varphi_\delta \in L^2(\omega\, dx)$ alors il a une base orthonormée $(\psi_\delta(x-k))_{1\le\delta\le D,\, k\in\mathbb{Z}^n}$ avec $\psi_\delta \in L^2(\omega\, dx)$.

Nous traiterons le cas $n = 1$ dans la section consacrée au cas de la dimension 1. Nous donnerons également un contre-exemple dans le cas $n = 2$ dans le Contre-exemple numéro 2.

Avant de démontrer le Théorème 1, nous allons démontrer une série de lemmes sur les bases de Riesz invariantes par translations entières.

I.1. Familles de Riesz invariantes par translations entières.

Pour deux fonctions f et g de $L^2(\mathbb{R}^n)$ nous définissons la *fonction de corrélation* $C(f,g)$ par

$$C(f,g)(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(\xi+2k\pi)\,\bar{\hat{g}}(\xi+2k\pi)\,. \tag{14}$$

La fonction $C(f,f)$ est appelée *fonction d'auto-corrélation* de f; la série qui la définit converge presque-partout vers une fonction $2\pi\mathbb{Z}^n$-périodique intégrable sur $[0,2\pi]^n$ et

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{[0,2\pi]^n} C(f,f)(\xi)\,d\xi = \|f\|_2^2\,.$$

Comme

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\hat{f}(\xi+2k\pi)|\,|\hat{g}(\xi+2k\pi)| \le \sqrt{C(f,f)(\xi)}\,\sqrt{C(g,g)(\xi)}$$

par Cauchy-Schwarz, on voit que $C(f,g)$ est définie presque-partout et est une fonction $2\pi\mathbb{Z}^n$-périodique intégrable sur $[0,2\pi]^n$.

Lemme 1. *La famille $(f(x-k))_{k\in\mathbb{Z}^n}$ est presque-orthogonale si et seulement si $C(f,f)\in L^\infty$.*

Le lemme est immédiat: pour $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}^n}$ une suite presque-nulle on a

$$\Big\| \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \lambda_k\, f(x-k)\Big\|_2^2 = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{[0,2\pi]^n} \Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \lambda_k\, e^{-ik\xi}\Big|^2 C(f,f)(\xi)\, d\xi\,.$$

Demander que $(f(x-k))$ soit presque orthogonale revient à demander que $\sqrt{C(f,f)}$ soit un multiplicateur de $L^2([0,2\pi]^n)$, et donc que $C(f,f)$ soit essentiellement borné.

Une *famille de Riesz* $(f_k)_{k\in K}$ de $L^2(\mathbb{R}^n)$ est une famille (f_k) qui est une base de Riesz du sous-espace fermé qu'elle engendre dans L^2.

Lemme 2. *La famille* $(f_\delta(x-k))_{1\le\delta\le D,\, k\in\mathbb{Z}^n}$ *est une famille de Riesz si et seulement si la matrice d'autocorrélation*

$$M(\xi) = (C(f_\delta, f_{\delta'}))_{1\le\delta,\delta'\le D}$$

vérifie

i) *les coefficients* $C(f_\delta, f_{\delta'})$ *sont essentiellement bornés,*

ii) *il existe* $C>0$ *tel que* $|\det M(\xi)| \ge C$ *p.p.*

Les conditions i) et ii) reviennent à dire que $M\in M_D(L^\infty)$ et que M est inversible dans $M_D(L^\infty)$, où $M_D(L^\infty)$ est l'algèbre des matrices $D\times D$ à coefficients dans $L^\infty([0,2\pi]^n)$.

Le lemme est immédiat. En effet, si $(f_\delta(x-k))$ est la base de Riesz d'un espace W et si $(f_\delta^*(x-k))$ est la base duale de $f_\delta(x-k))$ dans W, on a

$$f_\delta^* = \sum_k \sum_{\delta'} \langle f_\delta^*, f_{\delta'}^*(x-k)\rangle f_{\delta'}(x-k)\,,$$

d'où

$$\begin{aligned}\widehat{f_\delta^*}(\xi) &= \sum_{\delta'} \left(\sum_k \langle f_\delta^*, f_{\delta'}^*(x-k)\rangle e^{-ik\xi}\right) \widehat{f_{\delta'}}(\xi)\\ &= \sum_{\delta'} C(f_\delta^*, f_{\delta'}^*)(\xi)\, \hat f_{\delta'}(\xi)\end{aligned}$$

d'où

$$C(f_\delta^*, f_{\delta'}) = \sum_{\delta''} C(f_\delta^*, f_{\delta''}^*)\, C(f_{\delta''}, f_\delta)\,.$$

Comme

$$C(f_\delta^*, f_{\delta'}) = \sum_k \langle f_\delta^*, f_{\delta'}(x-k)\rangle e^{-ik\xi} = 1\,,$$

on voit que $M(\xi)$ a pour inverse la matrice d'auto-corrélation M^* des f_δ^*. Comme les f_δ et les f_δ^* engendrent des familles presque-orthogonales, leurs matrices d'auto-corrélation sont à coefficients dans L^∞ et en particulier

$$\det M(\xi) \geq \frac{1}{\|\det M^*\|_\infty}\,.$$

Inversement, si $M(\xi)$ vérifie $M \in M_D(L^\infty)$ et $\inf \operatorname{ess} \det M > 0$, alors presque partout $M(\xi)$ est une matrice hermitienne définie positive et donc

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)\, M(\xi) \begin{pmatrix} \bar\lambda_1 \\ \vdots \\ \bar\lambda_1 \end{pmatrix} \geq \gamma(\xi) \sum |\lambda_i|^2$$

pour $\gamma(\xi)$ la plus petite valeur propre de $M(\xi)$. Or on a

$$\gamma(\xi) \geq \frac{\det M(\xi)}{C(\xi)^{D-1}}$$

où $C(\xi)$ est la plus grande valeur propre de $M(\xi)$; on a

$$C(\xi) \leq D^{1/2} \Big(\sum_\delta C(f_\delta, f_\delta)(\xi)\Big)^{1/2}$$

$\gamma(\xi)$ est donc minoré indépendamment de ξ par une constante $\gamma > 0$ et on a, en posant $v_\delta = \sum_k \lambda_{k,\delta}\, e^{-ik\xi}$,

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \sum_\delta \lambda_{k,\delta}\, f_\delta(x-k) \Big\|_2^2 &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[0,2\pi]^n} (v_1, \ldots, v_D)\, M \begin{pmatrix} \bar v_1 \\ \vdots \\ \bar v_1 \end{pmatrix} d\xi \\ &\geq \frac{1}{(2\pi)^n} \gamma \int_{[0,2\pi]^n} \sum_\delta |v_\delta(\xi)|^2\, d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\, \gamma \sum_\delta \sum_k |\lambda_{k,\delta}|^2\,. \end{aligned}$$

La famille $(f_\delta(x-k))$ est donc bien une famille de Riesz.

Pour deux familles de fonctions $(f_\delta)_{1\leq\delta\leq D}$ et $(g_\varepsilon)_{1\leq\varepsilon\leq E}$, nous définissons la *matrice de corrélation* $M((f_\delta),(g_\varepsilon))$ comme la matrice

$$(C(f_\delta, g_\varepsilon))_{1\leq\delta\leq D,\, 1\leq\varepsilon\leq E}\,.$$

Enfin deux sous-espaces fermés V et W de L^2 seront dit *en dualité* si on a $L^2 = V \oplus W^\perp$; cela revient à demander qu'il existe un projecteur continu de L^2 sur V parallèlement à $W^\perp$.

Lemme 3. *Soit V et W deux sous-espaces fermés de $L^2(\mathbb{R}^n)$ tels que V a une base de Riesz $(f_\delta(x-k))_{1\leq\delta\leq D}$ et W une base de Riesz $(g_\varepsilon(x-k)_{1\leq\varepsilon\leq E}$. Soient par ailleurs $(\varphi_\eta)_{1\leq\eta\leq H}$ une famille de fonctions de V et $(\psi_\theta)_{1\leq\theta\leq T}$ une famille de fonctions de W. Alors*

a) $M((\varphi_\eta),(\psi_\theta)) = M((\varphi_\eta),(f_\delta^*))M((f_\delta),(g_\varepsilon))M((g_\varepsilon^*),(\psi_\theta))$ *où $(f_\delta^*(x-k))$ est la base duale des $(f_\delta(x-k))$ dans V et $(g_\varepsilon^*(x-k))$ la base duale des $(g_\varepsilon(x-k))$ dans W.*

b) *$(\varphi_\eta(x-k))_{1\leq\eta\leq H,\, k\in\mathbb{Z}^n}$ une base de Riesz de V si et seulement si $D = H$, $M((\varphi_\eta),(f_\delta^*)) \in M_D(L^\infty)$ et est inversible dans $M_D(L^\infty)$.*

c) *Si $N(\xi) = (N_{\delta,\delta'})$ est définie par $N(\xi) = (M(f_\delta),(f_\delta)))^{-1/2}$ et si*

$$\hat\varphi_\delta = \sum_{\delta'} N_{\delta,\delta'}(\xi)\,\hat f_{\delta'}(\xi)\,,$$

alors les $(\varphi_\delta(x-k))_{k\in\mathbb{Z}^n}$ forment une base orthonormée de V, ("Orthonormalisation de Gram").

d) *V et W sont en dualité si et seulement si $D = E$ et $M(f_\delta),(g_\varepsilon))$ est inversible dans $M_D(L^\infty)$. De plus la base duale $(\gamma_\delta^*(x-k))$ des $(f_\delta(x-k))$ dans W se calcule par $\hat\gamma_\delta^* = \sum_\varepsilon N_{\delta,\varepsilon}(\xi)\,\hat g_\varepsilon$ où la matrice N vérifie $M((f_\delta),(g_\varepsilon))^t\bar N = Id$, ou encore $N = M((g_\varepsilon),(f_\delta))^{-1}$.*

Le lemme est immédiat. Le point *a*) provient des identités

$$\hat\varphi_\eta = \sum_\delta C(\varphi_\eta, f_\delta^*)\,\hat f_\delta$$

et

$$\hat\psi_\theta = \sum_\varepsilon C(\psi_\theta, g_\varepsilon^*)\,\hat g_\varepsilon = \sum_\varepsilon \overline{C(g_\varepsilon^*,\psi_\theta)}\;\hat g_\varepsilon\,.$$

Si les $(\varphi_\eta(x-k))$ forment une base de Riesz de V, le rang de $M((\varphi_\eta),(\varphi_\eta))$ est H p.p.; or d'après la formule *a*) il est $\leq D$ p.p.

puisqu'on peut factoriser $M((f_\delta),(f_\delta))$. On obtient alors $H = D$. De plus le calcul du déterminant de $M((\varphi_\eta),(\varphi_\eta))$ donne

$$\det M((\varphi_\eta),(\varphi_\eta)) = \det M((f_\delta),(f_\delta))\, |\det M((\varphi_\eta),(f_\delta^*))|^2\,,$$

ce qui prouve que $|\det M((\varphi_\eta),(f_\delta^*))|$ se minore p.p. par une constante > 0. $M((\varphi_\eta),(f_\delta^*))$ s'inverse donc dans $M_D(L^\infty)$. La réciproque est immédiate par le Lemme 2 et $b)$ est démontré.

Pour vérifier $c)$, on remarque qu'il est immédiat que les $(\varphi_\delta(x-k))$ forment une base de Riesz de V puisque $M((\varphi_\delta),(f_\delta^*)) = N(\xi)$ et donc

$$\det M((\varphi_\delta),(f_\delta^*)) = \frac{1}{\sqrt{\det M((f_\delta),(f_\delta))}}\,.$$

Que $N(\xi)$ soit à coefficients L^∞ est évident: on a

$$N(\xi) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} (I + t^2 M(\xi))^{-1}\, dt\,.$$

Comme $M(\xi) \in M_D(L^\infty)$ et que

$$(1 + t^2\lambda(\xi))^D \le \det I + t^2 M(\xi) \le (1 + t^2\Lambda(\xi))^D$$

où $\lambda(\xi)$ et $\Lambda(\xi)$ sont les plus petites et plus grandes valeurs propres de $M(\xi)$, on obtient immédiatement

$$\|(I + t^2 M(\xi))^{-1}\|_{M_D(L^\infty)} \le C\,\frac{1}{1+t^2}$$

et donc $N(\xi) \in M_D(L^\infty)$. Pour vérifier que la famille $(\varphi_\delta(x-k))$ est orthonormée, il faut et il suffit de vérifier que $M((\varphi_\delta),(\varphi_\delta)) = I_D$; or par $a)$

$$M((\varphi_\delta),(\varphi_\delta)) = N(\xi)\, M((f_\delta),(f_\delta))\, N(\xi) = I\,.$$

Le point $c)$ est donc démontré.

Enfin $d)$ est évident car V et W sont en dualité si et seulement si W a une base de Riesz $(\gamma_\delta^*(x-k))_{1\le\delta\le D,\, k\in\mathbb{Z}^n}$ telle que $M((f_\delta),(\gamma_\delta^*)) = I_D$.

I.2. Projecteurs ω-localisés.

Nous pouvons maintenant passer à la démonstration du Théorème 1.

a) Cas où V_0 et V_0^* ont des bases de Riesz invariants par translations entières et dans $L^2(\omega\, dx)$.

Si V_0 a une base de Riesz $(\varphi_\delta(x-k))_{1\leq\xi\leq D,\, k\in\mathbb{Z}^n}$ et V_0^* une base de Riesz $(\psi_\delta(x-k))_{1\leq\delta\leq D,\, k\in\mathbb{Z}^n}$ avec φ_δ et ψ_δ dans $L^2(\omega\, dx)$, il est immédiat que la base duale $(\varphi_\delta^*(x-k))$ des $(\varphi_\delta(x-k))$ dans V_0^* vérifie également que $\varphi_\delta^* \in L^2(\omega\, dx)$: il suffit de remarquer que la matrice de corrélation $M((\varphi_\delta),(\psi_\delta))$ s'inverse dans $M_D(K_\omega)$ d'après le lemme de Wiener (démontré dans l'Annexe A.3).

Maintenant P_0 se calcule par

$$P_0 f = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \sum_{\delta=1}^{D} \langle f, \varphi_\delta^*(x-k)\rangle\, \varphi_\delta(x-k) \tag{15}$$

et il suffit de vérifier que lorsque φ et φ^* sont dans $L^2(\omega\, dx)$ la fonction

$$q(x,y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\varphi^*(y-k)|\,|\varphi(x-k)|$$

est localement intégrable dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et appartient à

$$L^2([0,1]^n \times \mathbb{R}^n, \omega(x-y)\, dx\, dy)\,.$$

Le noyau $p(x,y)$ de P_0 se calcule alors comme

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \sum_{\delta=1}^{D} \varphi_\delta^*(y-k)\, \varphi_\delta(x-k)$$

et sera ω-localisé. Or l'estimation sur $q(x,y)$ est immédiate

$$\begin{aligned}
&\iint_{\substack{x\in[0,1]^n\\ y\in\mathbb{R}^n}} \omega(x-y) \Big| \sum_k |\varphi^*(y-k)|\,|\varphi(x-k)| \Big|^2 dx\, dy \\
&\quad\leq \iint_{\substack{x\in[0,1]^n\\ y\in\mathbb{R}^n}} \Big(\sum_k |\varphi^*(y-k)|^2 \omega(y-k)\, |\varphi(x-k)|^2 \omega(x-k) \Big) \\
&\qquad\qquad \cdot \Big(\omega(x-y) \sum_k \frac{1}{\omega(x-k)}\, \frac{1}{\omega(y-k)} \Big)\, dx\, dy \\
&\quad\leq C \iint_{\substack{x\in[0,1]^n\\ y\in\mathbb{R}^n}} \sum_k |\varphi^*(y-k)|^2 \omega(y-k)\, |\varphi(x-k)|^2 \omega(x-k)\, dx\, dy \\
&\quad= C \int |\varphi^*(y)|^2 \omega(y)\, dy \int |\varphi(x)|^2 \omega(x)\, dx\,.
\end{aligned}$$

Le point i) du Théorème 1 est donc démontré.

b) Cas où P_0 a un noyau ω-localisé.

On commence par remarquer que la fonction $\tilde{p}(x,y)$ définie par

$$\tilde{p}(x,y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} p(x,y-k)$$

(qui est $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n$ périodique: cela est évident en y; pour la variable x il suffit de remarquer que $p(x+k,y) = p(x,y-k)$ par invariance de P_0) est de carré intégrable sur $L^2([0,1]^n \times [0,1]^n)$. Cela est immédiat puisque

$$\begin{aligned}
&\iint_{[0,1]^n\times[0,1]^n} \Big| \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |p(x,y-k)| \Big|^2 dx\,dy \\
&\qquad \le \iint_{[0,1]^n\times[0,1]^n} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |p(x,y-k)|^2 \omega(x-y+k) \\
&\qquad\qquad\qquad \cdot \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \frac{1}{\omega(x-y+k)}\, dx\,dy \\
&\qquad \le C \iint_{[0,1]^n\times[0,1]^n} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |p(x,y-k)|^2 \omega(x-y+k)|\, dx\,dy \\
&\qquad = C \int_{[0,1]^n} \int_{\mathbb{R}^n} |p(x,y)|^2 \omega(x-y)\, dx\,dy < +\infty
\end{aligned}$$

par hypothèse. En particulier, on peut définir un opérateur continu $\tilde{P}$ sur $L^2([0,1]^n)$ par

$$\tilde{P}f = \int_0^1 \tilde{p}(x,y)\, f(y)\, dy\,. \tag{16}$$

Lemme 4.

i) *Si* $f \in L^2(\omega\, dx)$ *alors* $\tilde{f} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(x-k) \in L^2([0,1]^n)$.

ii) *Si* $f \in L^2(\omega\, dx)$ *alors* $P_0 f \in L^2(\omega\, dx)$.

iii) *Si* $f \in L^2([0,1]^n)$*on a* $(P_0 f)^\sim = \tilde{P}(f)$.

iv) $\tilde{P}$ *est un projecteur de* $L^2([0,1]^n)$ *sur*

$$\tilde{V}_0 = \{\tilde{f} :\ f \in V_0 \cap L^2(\omega\, dx)\}\,.$$

Le lemme est facile à démontrer. En effet

$$\begin{aligned}
&\int_{[0,1]^n} |\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(x-k)|^2\,dx \\
&\quad\leq \int_{[0,1]^n} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |f(x-k)|^2\omega(x-k) \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \frac{1}{\omega(x-k)}\,dx \\
&\quad\leq C\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \frac{1}{\omega(k)} \|f\|^2_{L^2(\omega\,dx)}\,,
\end{aligned}$$

ce qui prouve i).

Pour vérifier le point ii), on écrit

$$\begin{aligned}
&\int \omega(x)\Big|\int_p(x,y)\,f(y)\,dy\Big|^2 dx \\
&\quad\leq \int \omega(x)\Big(\sum_k\Big(\int_{y\in k+[0,1]^n} |p(x,y)|^2dy\Big)^{1/2} \\
&\qquad\qquad \cdot\Big(\int_{y\in k+[0,1]^n} |f(y)|^2\,dy\Big)^{1/2}\Big)^2 dx \\
&\quad\leq \int\Big(\sum_k \int_{y\in k+[0,1]^n} |p(x,y)|^2\omega(x-k) \\
&\qquad\qquad \cdot\int_{y\in k+[0,1]^n} |f(y)|^2dy\,\omega(k)\Big)\Big(\sum_k \frac{\omega(x)}{\omega(k)\,\omega(x-k)}\Big)dx \\
&\quad\leq C\sum_k \int_{y\in k+[0,1]^n} |f(y)|^2dy\,\omega(k) \\
&\qquad\qquad \cdot\int_{x\in\mathbb{R}^n}\int_{y\in k+[0,1]^n} |p(x-k,y-k)|^2\omega(x-k)\,dy\,dx \\
&\quad\leq C'\int_{x\in\mathbb{R}^n}\int_{y\in[0,1]^n} |p(x,y)|^2\omega(x-y)\,dy\,dx \\
&\qquad \cdot\int |f(y)|^2\omega(y)\,dy < +\infty\,.
\end{aligned}$$

Pour vérifier le point iii), on remarque que $L^2([0,1]^n)$ se plonge dans $L^2(\omega\,dx)$ en prolongeant les fonctions de $L^2([0,1]^n)$ par 0 en dehors de $[0,1]^n$; si $f\in L^2([0,1]^n)$ on a alors $P_0f\in L^2(\omega\,dx)$ et $(P_0f)^\sim\in$

$L^2([0,1]^n)$. De plus, on a presque partout

$$\begin{aligned}\tilde{P}(f)(x) &= \int_{[0,1]^n} \tilde{p}(x,y)\, f(y)\, dy = \sum_k \int_{[0,1]^n} p(x-k,y)\, f(y)\, dy \\ &= \sum_k \int_{\mathbb{R}^n} p(x-k,y)\, f(y)\, dy = \sum_k P_0 f(x-k)\,,\end{aligned}$$

ce qui prouve iii).

Le point iv) est alors évident: si $f \in L^2([0,1]^n)$ $\tilde{P}(f) = (P_0 f)^\sim \in \tilde{V}_0$ et il suffit de vérifier que si $f \in V_0 \cap L^2(\omega\, dx)$ alors $\tilde{P}(\tilde{f}) = \tilde{f}$. Or

$$\begin{aligned}\tilde{P}(\tilde{f})(x) &= \int_{[0,1]^n} \sum_k p(x, y-k) \sum_p f(y-p)\, dy \\ &= \int_{[0,1]^n} \sum_k p(x+k, y) \sum_p f(y-p)\, dy \\ &= \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} \int_{[0,1]^n} \sum_k p(x'+k-p, y-p)\, f(y-p)\, dy \\ &= \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} \int_{[0,1]^n} \sum_k p(x+k, y-p)\, f(y-p)\, dy \\ &= \sum_k \int_{\mathbb{R}^n} p(x+k, y)\, f(y)\, dy \\ &= \sum_k (P_0 f)(x+k) \\ &= \tilde{f}(x)\,.\end{aligned}$$

Lemme 5. *$\tilde{V}_0$ est de dimension finie D où D est donnée par* (13).

En effet, comme $\tilde{p}(x,y) \in L^2([0,1]^n \times [0,1]^n)$, l'opérateur $\tilde{P}$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt et donc compact. La boule-unité $\tilde{B}$ de $\tilde{V}_0$ est bornée, donc $\tilde{P}(\tilde{B}) = \tilde{B}$ est relativement compacte; cela implique que $\dim \tilde{V}_0 < +\infty$. Si $(f_\delta)_{1\le\delta\le D}$ est une base de $\tilde{V}_0$ et (f_δ^*) la base duale de (f_δ) dans $(\operatorname{Ker}\tilde{P})^\perp$, alors on a

$$\tilde{p}(x,y) = \sum_{\delta=1}^{D} \bar{f}_\delta^*(y)\, f_\delta(x) \quad \text{p.p.} \tag{17}$$

et donc

$$\begin{aligned}\iint_{[0,1]^n\times[0,1]^n} \tilde p(x,y)\,\tilde p(y,x)\,dx\,dy &= \sum_{\delta=1}^{D}\sum_{\delta'=1}^{D}\langle f_\delta, f_{\delta'}\rangle^2 \\ &= \sum_{\delta}\sum_{\delta'}\delta_{\delta,\delta'} = D\,.\end{aligned}$$

Le Lemme 5 est donc démontré.

Bien entendu le Lemme 5 est insuffisant pour conclure que V_0 a une base de Riesz de la forme $(\varphi_\delta(x-k))_{1\le\delta\le D,\, k\in\mathbb{Z}^n}$. Cela peut être éclairé par la remarque suivante:

Lemme 6. *Soient $f_1,\dots,f_D \in L^2(\omega\,dx)$. Alors la matrice de Gram des vecteurs $(\tilde f_\delta)_{1\le\delta\le D}$ est la matrice d'auto-corrélation des f_δ $M((f_\delta),(f_\delta))$ en $\xi=0$.*

En effet, si on calcule le produit scalaire de $\tilde f_\delta$ et de $\tilde f_{\delta'}$ on obtient

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]^n} \tilde f_\delta(x)\,\bar{\tilde f}_{\delta'}(x)\,dx &= \int_{[0,1]^n}\Big(\sum_k f_\delta(x-k)\Big)\bar{\tilde f}_{\delta'}(x)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f_\delta(x)\,\bar{\tilde f}_{\delta'}(x)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f_\delta(x)\sum_k \bar f_{\delta'}(x-k)\,dx \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\langle f_\delta, f_{\delta'}(x-k)\rangle = C(f_\delta,f_{\delta'})|_{\xi=0}\,.\end{aligned}$$

Ne considérer que $\tilde V_0$ ne renseigne donc sur les matrices de corrélation des éléments de V_0 qu'en 0, alors qu'on a besoin d'un renseignement sur tout $[0,2\pi]^n$. On va donc faire "varier" $\tilde V_0$. Plus précisément on note V_ξ l'espace $V_\xi = \{e^{-ix\xi}f : f\in V_0\}$, $V_\xi^* = \{e^{-ix\xi}f : f\in V_0^*\}$, P_ξ le projecteur sur V_ξ parallèlement à $(V_\xi^*)^\perp$, p_ξ son noyau (qui est ω-localisé puisque $p_\xi(x,y) = p(x,y)e^{i\xi(y-x)}$) et enfin $\tilde V_\xi = \{\tilde f : f\in V_\xi\cap L^2(\omega\,dx)\}$.

Lemme 7. *La dimension de $\tilde V_\xi$ vaut D pour tout ξ.*

En effet P_ξ est un projecteur invariant par translations entières à noyau ω-localisé. La dimension de $\tilde{V}_\xi$ se calcule alors comme

$$\dim \tilde{V}_\xi = \iint_{[0,1]^n\times[0,1]^n} \tilde{p}_\xi(x,y)\,\tilde{p}_\xi(y,x)\,dx\,dy\,.$$

Par convergence dominée, on vérifie immédiatement que cette intégrale est une fonction continue du paramètre ξ. Comme elle prend des valeurs entières, elle est constante.

Nous pouvons maintenant montrer que V_0 a une base de Riesz de la forme $(\varphi_\delta(x-k))_{1\le\delta\le D,\ k\in\mathbb{Z}^n}$. En effet, nous savons que pour chaque $\xi_0\in[0,2\pi]^n$, $\dim\tilde{V}_{\xi_0}=D$; il existe donc D fonctions $f_1^{\xi_0},\dots,f_D^{\xi_0}$ dans $V_0\cap L^2(\omega\,dx)$ telles que $((e^{-ix\xi_0}f_\delta^{\xi_0})^\sim)_{1\le\delta\le D}$ soit une base de $\tilde{V}_\xi$; or la matrice de Gram des $(e^{-ix\xi_0}f_\delta^{\xi_0})^\sim$ n'est autre que la matrice d'autocorrélation des $(f_\delta^{\xi_0})$ en $\xi=\xi_0$. Cette matrice est à coefficients dans $A(\mathbb{T}^n)$; si son déterminant est non nul en $\xi=\xi_0$, il reste non nul et minoré par une constante $\gamma(\xi_0)>0$ et les coefficients de la matrice restent bornés par $1/\gamma(\xi_0)$ sur une boule $B(\xi_0,r(\xi_0))$. Comme $[0,2\pi]^n$ est compact, on peut extraire une famille finie $B(\xi_\alpha,r(\xi_\alpha))_{1\le\alpha\le A}$ qui recouvre $[0,2\pi]^n$. On note

$$B_\alpha=B(\xi_\alpha,r(\xi_\alpha))\cap[0,2\pi]^n\,,$$

$$C_\alpha=B_\alpha\setminus\bigcup_{\beta<\alpha}B_\beta$$

et

$$D_\alpha=\bigcup_{k\in2\pi\mathbb{Z}^n}C_\alpha+2k\pi\,.$$

Nous allons montrer que la famille $(\varphi_\delta)_{1\le\delta\le D}$ définie par

$$\hat{\varphi}_\delta(\xi)=\sum_{\alpha=1}^{A}\hat{f}_\delta^{\xi_\alpha}\chi_{D_\alpha}(\xi)$$

convient

- Si $\widehat{\varphi_{\delta,\alpha}}=\hat{f}_\delta^{\xi_\alpha}\chi_{D_\alpha}(\xi)$ alors $\varphi_{\delta,\alpha}\in V_0$ et donc $\varphi_\delta\in V_0$: d'abord $\hat{\varphi}_{\delta,\alpha}\in L^2$ car $\chi_{D_\alpha}\in L^\infty$; ensuite si $g\in(V_0)^\perp$ alors

$$C(\varphi_{\delta,\alpha},g)=\chi_{D_\alpha}(\xi)\,C(f_\delta^{\xi_\alpha},g)(\xi)=0$$

car

$$C(f_\delta^{\xi_\alpha}, g)(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle f_\delta^{\xi_\alpha}(x+k), g\rangle\, e^{-ik\xi} \quad \text{p.p.}$$

et g est orthogonal à tous les $f_\delta^{\xi_\alpha}(x+k)$. Comme

$$C(\varphi_{\delta,\alpha}, g) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle \varphi_{\delta,\alpha}(x+k), g\rangle\, e^{-ik\xi} \quad \text{p.p.,}$$

on conclut en particulier que $\langle \varphi_{\delta,\alpha}, g\rangle = 0$, et donc $\varphi_{\delta,\alpha} \in V_0$.

$$(\bullet) \qquad \begin{aligned} C(\varphi_\delta, \varphi_{\delta'}) &= \sum_\alpha \sum_\beta \chi_{D_\alpha}\, \chi_{D_\beta}\, C(f_\delta^{\xi_\alpha}, f_{\delta'}^{\xi_\beta}) \\ &= \sum_\alpha \chi_{D_\alpha}\, C(f_\delta^{\xi_\alpha}, f_{\delta'}^{\xi_\alpha})\,. \end{aligned}$$

On en conclut que les coefficients de la matrice d'auto-corrélation des (φ_δ) restent majorés par $\max_{1\leq\alpha\leq A} 1/\gamma(\xi_\alpha)$ et que son déterminant reste minoré par $\inf_{1\leq\alpha\leq A}\gamma(\xi_\alpha)$. La famille $(\varphi_\delta(x-k))_{1\leq\delta\leq D,\ k\in\mathbb{Z}^n}$ est donc une famille de Riesz de V_0 .

• Il reste à vérifier que les $\varphi_\delta(x-k)$ engendrent tout V_0. Or si $f \in V_0 \cap L^2(\omega\, dx)$, $(e^{-i\xi x} f)^\sim$ s'exprime comme une combinaison linéaire des $(e^{-i\xi x} f_\delta^{\xi_\alpha})^\sim$ si $\xi \in C_\alpha$ avec les coefficients bornés: ces coefficients $r_{\delta,\alpha}(\xi)$ sont solution de

$$M\left((f_\delta^{\xi_\alpha}), (f_\delta^{\xi_\alpha})\right)\Big|_\xi \begin{pmatrix} \bar r_{1,\alpha}(\xi) \\ \vdots \\ \bar r_{D,\alpha}(\xi)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(f_1^{\xi_\alpha}, f) \\ \vdots \\ C(f_D^{\xi_\alpha}, f)\end{pmatrix}.$$

Si

$$R_{\delta,\alpha}(\xi) = \sum_{k\in 2\pi\mathbb{Z}^n} r_{\delta,\alpha}(\xi + 2k\pi)\,,$$

alors on a

$$\hat f \chi_{D_\alpha} = \sum_\delta R_{\delta,\alpha}(\xi)\, \chi_{D_\alpha}(\xi)\, \hat f_\delta^{\xi_\alpha}\,,$$

et en fin de compte on obtient

$$\hat f = \sum_\delta \left(\sum_\alpha R_{\delta,\alpha}(\xi)\, \chi_{D_\alpha}(\xi)\right) \hat\varphi_\delta\,,$$

ce qui prouve que f se décompose sur les $\varphi_\delta(x - k)$. Comme $V_0 \cap L^2(\omega\, dx)$ est dense dans V_0 (puisque $V_0 \cap L^2(\omega\, dx) = P_0(L^2(\omega\, dx))$ et que $L^2(\omega\, dx)$ est dense dans L^2), les $(\varphi_\delta(x - k))_{1 \le \delta \le D,\, k \in \mathbb{Z}^n}$ forment une base de Riesz de V_0.

Le point ii) du Théorème 1 est donc démontré.

c) Fin de la démonstration. Rappelons que nous renvoyons à des sections ultérieures la démonstration du cas $n = 1$ et le contre-exemple. Le point *d*) est démontré dans l'Annexe A.3. De même, le Lemme 16 nous apprend que si V_0 a une base de Riesz $(\varphi_\delta(x-k))_{1 \le \delta \le D,\, k \in \mathbb{Z}^n}$ avec $\varphi_\delta \in L^2(\omega\, dx)$ alors la base duale $(\psi_\delta(x - k))$ des $(\varphi_\delta(x - k))$ dans V_0 vérifie également $\psi_\delta \in L^2(\omega\, dx)$. Or la base duale $(\varphi_\delta^*(x - k))$ des $(\varphi_\delta(x - k))$ dans V_0^* se calcule par la formule $\varphi_\delta^* = P_0^* \psi_\delta$,

$$\langle \varphi_\delta^*, \varphi_{\delta'}(x - k)\rangle = \langle P_0^* \psi_\delta, \varphi_{\delta'}(x - k)\rangle = \langle \psi_\delta, P_0(\varphi_{\delta'}(x - k)\rangle = \delta_{\delta,\delta'} \delta_{k,0} \,.$$

Si P_0 a un noyau ω-localisé, il en va de même pour P_0^* (qui a pour noyau $q(x, y) = \bar{p}(y, x)$) et donc $P_0^*(\psi_\delta) \in L^2(\omega\, dx)$ d'après le Lemme 4.

II. Le lemme des vaguelettes.

Nous allons donner ici un lemme des vaguelettes associé à une matrice de dilatation sur $\mathbb{R}^n$. La formulation est déjà nouvelle dans le cas classique des dilatations dyadiques.

Proposition 1. *Soit $(f_{j,k})_{j \in \mathbb{Z},\, k \in \mathbb{Z}^n}$ une famille de fonctions dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ telles que, pour un $\varepsilon > 0$ et un $\alpha > 0$, on ait*

i) $f_{j,k} \in L^2((1 + \|x\|)^{n+\varepsilon} dx)$ *et*

$$\int |f_{j,k}(x)|^2 \, (1 + \|x\|)^{n+\varepsilon} \, dx \le 1 \,.$$

ii) $f_{j,k} \in H^\alpha$ *(espace de Sobolev) et*

$$\int (1 + |\xi|^2)^\alpha \, |\hat{f}_{j,k}(\xi)|^2 \, d\xi \le 1 \,.$$

iii) $\displaystyle\int f_{j,k} \, dx = 0 \,.$

Alors la famille $(\psi_{j,k})_{j\in\mathbb{Z},\,k\in\mathbb{Z}^n}$ *définie par*

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{jn/2}\, f_{j,k}(2^j x - k)$$

est presque-orthogonale dans $L^2(\mathbb{R}^n)$*. Plus précisément, il existe une constante* $C(\varepsilon, \alpha)$ *ne dépendant que* ε *et de* α *(mais pas des* $f_{j,k}$*) telle que pour toute suite presque nulle* $(\lambda_{j,k})$ *on ait*

$$\Big\| \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \lambda_{j,k}\, \psi_{j,k} \Big\|_2 \leq C(\varepsilon,\alpha) \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\lambda_{j,k}|^2 \Big)^{1/2}. \tag{18}$$

Le lemme des vaguelettes "traditionnel" impose les conditions plus fortes aux $f_{j,k}$

$$\|(1+\|x\|)^{n+\varepsilon'} f_{j,k}\|_\infty \leq 1 \qquad \text{et} \qquad \sup_{x\neq y} \frac{|f_{j,k}(x) - f_{j,k}(y)|}{|x-y|^{\alpha'}} \leq 1$$

pour un ε' et un $\alpha' > 0$ (et $\int f_{j,k}dx = 0$). Il est facile de vérifier que si les $f_{j,k}$ sont de telles vaguelettes, alors il existe ε, α et $\gamma > 0$ tel que les $\gamma\, f_{j,k}$ vérifient i) et ii). Le lemme traditionnel ne suffit pas pour traiter le cas de bases d'ondelettes discontinues: le système de Haar par exemple, mais également des bases d'ondelettes bi-orthogonales à support compact qui peuvent être irrégulières au sens de Hölder mais sont toujours mieux que L^2 au sens Sobolev [7].

La Proposition 1 est un cas particulier du Théorème 2 que nous allons décrire ci-dessous. Nous considèrerons une matrice de dilatation A au lieu de la multiplication par 2. Nous allons remplacer la localisation $f \in L^2((1+\|x\|)^{n+\varepsilon}dx)$ (où la norme $\|\cdot\|$ est homogène pour la multiplication par 2: $\|2x\| = 2\|x\|$) par une condition adaptée à l'opération de A.

Definition 3. *Soit* A *une matrice de dilatation sur* $\mathbb{R}^n$*. Une pseudo-norme sur* $(\mathbb{R}^n, A)$ *est une fonction* ρ *définie sur* $\mathbb{R}^n$ *telle que*

- *a)* ρ *est* C^∞ *sur* $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ *et continue en* 0,
- *b) pour tout* $x \neq 0$, $\rho(x) > 0$ *et* $\rho(x) = \rho(-x)$,
- *c) pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$, $\rho(Ax) = |\det A|\, \rho(x)$.

Dans l'Annexe B, l'existence et les propriétés des pseudo-normes sont démontrées, en particulier les propriétés suivantes:

- *Unicité*: si ρ' est une autre pseudo-norme sur $\mathbb{R}^n$, alors on a pour deux constantes C et C' strictement positives et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$: $C\rho(x) \leq \rho'(x) \leq C'\rho(x)$.

- *Comparaison avec* $\|\cdot\|$: il existe deux constantes α_0 et α_1 $(0 < \alpha_0 < \alpha_1)$ et une constante $M_0 > 0$ telles que

$$\frac{1}{M_0}\|x\|^{\alpha_1} \leq \rho(x) \leq M_0\|x\|^{\alpha_0} \qquad \text{si } \|x\| \leq 1\,, \tag{19}$$

$$\frac{1}{M_0}\|x\|^{\alpha_0} \leq \rho(x) \leq M_0\|x\|^{\alpha_1} \qquad \text{si } \|x\| \geq 1\,. \tag{20}$$

- *Inégalité triangulaire*: il existe une constante C_1 telle que

$$\rho(x, y) \leq C_1(\rho(x) + \rho(y))\,. \tag{21}$$

- *Croissance de la norme*: il existe une constante C_2 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $\lambda \in [0, 1]$,

$$\rho(\lambda x) \leq C_2\,\rho(x)\,. \tag{22}$$

La pseudo-norme $\rho(x)$ se comporte comme $\|x\|^n$. En particulier, on a

- $\displaystyle\int_{\rho(x)\leq 1} \frac{1}{\rho(x)^\varepsilon}\,dx < +\infty$ si et seulement si $\varepsilon < 1$.
- $\displaystyle\int_{\rho(x)\geq 1} \frac{1}{\rho(x)^\varepsilon}\,dx < +\infty$ si et seulement si $\varepsilon > 1$.
- Pour $\varepsilon > 0$, $\omega(x) = (1 + \rho(x))^{1+\varepsilon}$ est un poids de Beurling sur $\mathbb{R}^n$.

Enfin comme la transformation de Fourier transforme l'opération de A en l'opération de $\tilde{A}^{-1}$ où $\tilde{A}$ est la transposée de A, il est naturel également d'associer à A une pseudo-norme $\tilde{\rho}$ sur $(\mathbb{R}^n, \tilde{A})$. Le Lemme des vaguelettes est alors le suivant:

Théorème 2 (Lemme des vaguelettes). *Soit A une matrice de dilatation sur $\mathbb{R}^n$, ρ une pseudo-norme sur $(\mathbb{R}^n, A)$ et $\tilde{\rho}$ une pseudo-norme sur $(\mathbb{R}^n, \tilde{A})$. Soit $(f_{j,k})_{j\in\mathbb{Z},\, k\in\mathbb{Z}^n}$ une famille de fonctions de $L^2(\mathbb{R}^n)$ telles que, pour un $\varepsilon > 0$ et un $\alpha > 0$, on ait*

i) $f_{j,k} \in L^2((1+\rho(x))^{1+\varepsilon}dx)$ *et*

$$\int |f_{j,k}(x)|^2 (1+\rho(x))^{1+\varepsilon}\, dx \leq 1\,,$$

ii) $\widehat{f_{j,k}} \in L^2((1+\tilde{\rho}(\xi))^{\alpha}d\xi)$ *et*

$$\int |\widehat{f_{j,k}}(\xi)|^2 (1+\tilde{\rho}(\xi))^{\alpha}\, d\xi \leq 1\,,$$

iii) $\displaystyle\int f_{j,k}\, dx = 0\,.$

Alors la famille $(\psi_{j,k})_{j\in\mathbb{Z},\, k\in\mathbb{Z}^n}$ *définie par*

$$\psi_{j,k}(x) = |\det A|^{j/2} f_{j,k}(A^j x - k)$$

est presque-orthogonale dans $L^2(\mathbb{R}^n)$*. Plus précisément, il existe une constante* $C(\varepsilon,\alpha)$ *ne dépendant que de* ε *et de* α *telle que pour toute suite presque nulle* $\lambda_{j,k}$) *on ait*

$$\Big\| \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \lambda_{j,k}\, \psi_{j,k} \Big\|_2 \leq C(\varepsilon,\alpha) \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\lambda_{j,k}|^2 \Big)^{1/2}. \tag{23}$$

DÉMONSTRATION. Le principe de la démonstration est très simple. On pose

$$F_j = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \lambda_{j,k}\, f_{j,k}(x-k)$$

et

$$G_j = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \lambda_{j,k} \psi_{j,k}\,.$$

Alors il est clair que $\|G_j\|_2 = \|F_j\|_2$ et que $\|F_j\|_2 \leq C\big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\lambda_{j,k}|^2\big)^{1/2}$ du fait que $(1+\rho(x))^{1+\varepsilon}$ est un poids de Beurling. Le Lemme des vaguelettes est donc un lemme de presque-orthogonalité entre échelles j. En fait, on va montrer qu'il existe α' et $\varepsilon' > 0$ tels que, en notant $I_{\alpha'}$ l'opérateur d'"intégration fractionnaire" $\widehat{I_{\alpha'} f}(\xi) = \tilde{\rho}(\xi)^{-\alpha'} \tilde{f}(\xi)$ et $D_{\alpha'}$ l'opérateur de "dérivation fractionnaire" $\widehat{D_{\alpha'} f}(\xi) = \tilde{\rho}(\xi)^{+\alpha'} \tilde{f}(\xi)$, on ait

- $I_{\alpha'} f_{j,k} \in L^2((1+\rho(x))^{1+\varepsilon'})$ et $\displaystyle\int |I_{\alpha'} f_{j,k}(x)|^2 (1+\rho(x))^{1+\varepsilon'} dx \leq C,$

- $D_{\alpha'} f_{j,k} \in L^2((1+\rho(x))^{1+\varepsilon'})$ et $\displaystyle\int |D_{\alpha'} f_{j,k}(x)|^2 (1+\rho(x))^{1+\varepsilon'} dx \le C,$

où la constante C ne dépend que de α, ε, α' et ε' (et de n et de A). On obtiendra alors

$$\|I_{\alpha'} F_j\|_2 \le C\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\lambda_{j,k}|^2\Big)^{1/2}$$

et de même

$$\|D_{\alpha'} F_j\|_2 \le C\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\lambda_{j,k}|^2\Big)^{1/2},$$

du fait que

$$I_{\alpha'}\big(f_{j,k}(x-k)\big) = \big(I_{\alpha'} f_{j,k}\big)(x-k)$$

et que

$$D_{\alpha'}\big(f_{j,k}(x-k)\big) = \big(D_{\alpha'} f_{j,k}\big)(x-k)$$

et que $(1+\rho(x))^{1+\varepsilon'}$ est encore un poids de Beurling. Maintenant il suffit de constater que les opérateurs $I_{\alpha'}$ et $D_{\alpha'}$ sont homogènes par rapport à la dilatation A

$$I_{\alpha'}(f(Ax)) = |\det A|^{-\alpha'} (I_{\alpha'} f)(Ax)\,, \tag{24}$$

$$D_{\alpha'}(f(Ax)) = |\det A|^{\alpha'} (D_{\alpha'} f)(Ax)\,. \tag{25}$$

On calcule alors, si $j \ge j'$, $\langle G_j, G_{j'}\rangle$ comme $\langle G_j, G_{j'}\rangle = \langle I_{\alpha'}\, G_j, D_{\alpha'}\, G_{j'}\rangle$ et donc

$$|\langle G_j, G_{j'}\rangle| \le C\,|\det A|^{-\alpha'|j-j'|}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\lambda_{j,k}|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\lambda_{j',k}|\Big)^{1/2}.$$

Cette dernière majoration suffit à assurer (23) puisque

$$\sum_j \sum_{j'} |\det A|^{-\alpha'|j-j'|} |\lambda_j|\,|\lambda_{j'}| \le \Big(1 + 2\frac{|\det A|^{-\alpha'}}{1-|\det A|^{-\alpha'}}\Big) \sum_j |\lambda_j|^2\,.$$

La démonstration du Théorème 2 est donc ramenée à celle du lemme suivant

Lemme 8. *Pour tout ε et $\alpha > 0$ il existe ε' et $\alpha' > 0$ et une constante $C > 0$ tels que*

i) *si* $f \in L^2((1+\rho(x))^{1+\varepsilon}dx)$ *et* $\tilde{f} \in L^2((1+\tilde{\rho}(\xi))^{\alpha}d\xi)$ *alors*

$$
\begin{aligned}
(26) \qquad & \int |D_{\alpha'} f(x)|^2 (1+\rho(x))^{1+\varepsilon'}\,dx \\
& \leq C\left(\int |f(x)|^2(1+\rho(x))^{1+\varepsilon}\,dx + \int |\hat{f}(\xi)|^2(1+\tilde{\rho}(\xi))^{\alpha}\,d\xi\right),
\end{aligned}
$$

ii) *si* $f \in L^2((1+\rho(x))^{1+\varepsilon}dx)$ *et* $\int f\,dx = 0$ *alors*

$$
(27) \qquad \int |I_{\alpha'} f(x)|^2(1+\rho(x))^{1+\varepsilon'}\,dx \leq C \int |f(x)|^2(1+\rho(x))^{1+\varepsilon}\,dx\,.
$$

Pour démontrer le lemme, on introduit les espaces fonctionnels L^2_η et H_η pour $\eta \geq 0$

$$
L^2_\eta = L^2((1+\rho(x))^{\eta}dx)
$$

et

$$
H_\eta = \{f \in L^2 : \text{ il existe } \ g \in L^2_\eta,\ f = \hat{g}\}
$$

muni des normes

$$
\|f\|_{L^2_\eta} = \left(\int (1+\rho(x))^{\eta}|f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}
$$

et

$$
\|f\|_{H_\eta} = \|g\|_{L^2_\eta} \qquad (f = \hat{g})\,.
$$

Pour $\eta > 1$, H_η est une algèbre de Beurling et on note M_η l'espace de ses multiplicateurs.

Désignons par $\tilde{\sigma}$ une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ qui coïncide avec $\tilde{\rho}$ lorsque $\tilde{\rho}(x) \geq 1$ et qui vérifie $\tilde{\sigma}(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ (y compris 0). On note $\tilde{\sigma}_\gamma$ la fonction $\tilde{\sigma}_\gamma(x) = \tilde{\sigma}(x)^\gamma$. Si $z \in \mathbb{C}$ vérifie $\operatorname{Re} z = 1$ alors $\tilde{\sigma}_{\alpha z}\hat{f}$ appartient à $L^2 = H_0$ si $\hat{f} \in L^2((1+\tilde{\rho}(\xi))^{\alpha}d\xi)$ et

$$
\|\tilde{\sigma}_{\alpha z}\hat{f}\|_{H_0} \leq C\,\|(1+\tilde{\rho}(\xi))^{\alpha/2}\hat{f}\|_2\,.
$$

Si $\operatorname{Re} z = 0$, on vérifie facilement que $\tilde{\sigma}_{\alpha z} \in M_{1+\varepsilon}$ et que

$$
\|\tilde{\sigma}_{\alpha z}\|_{M_{1+\varepsilon}} \leq C\,(1+|z|)^N\,, \qquad \text{pour un } N \in \mathbb{N}\,;
$$

il sisffit de remarquer que $\tilde{\sigma}_{\alpha z}$ est bornée ainsi que toutes ses dérivées et d'appliquer le critère d'appartenance à $M_{1+\varepsilon}$ démontré dans l'Annexe

A.2; pour contrôler les dérivées de $\tilde{\sigma}_{\alpha z}$, on remarque que pour $\tilde{\rho}(x) \leq |\det A|^2$ on a un contrôle immédiat de $|\partial^\beta \tilde{\sigma}_{\alpha z}(x)/\partial x^\beta|$ par $C(1+|z|)^{|\beta|}$; pour $\tilde{\rho}(x) > |\det A|^2$ on remarque que si $|\det A|^{j-1} < \tilde{\rho}(x) < |\det A|^{j+1}$, alors $\tilde{\sigma}_{\alpha z}(x) = |\det A|^{\alpha z j} \tilde{\sigma}_{\alpha z}(A^{-j}x)$, or les coefficients des matrices A^{-j} se majorent indépendamment de j pour $j \geq 3$ de sorte que les dérivées de $\tilde{\sigma}_{\alpha z}$ sur $\{\xi : \ |\det A|^{j-1} < \tilde{\rho}(\xi) < |\det A|^{j+1}\}$ se majorent indépendamment de j (pour $j \geq 3$) par les bornes des dérivées de $\tilde{\sigma}_{\alpha z}$ sur $\{\xi : \ \tilde{\rho}(x) \leq |\det A|^2\}$. On a donc pour $\operatorname{Re} z = 0$,

$$\|\tilde{\sigma}_{\alpha z} \hat{f}\|_{H_{1+\varepsilon}} \leq C\,(1+|z|)^N \|\hat{f}\|_{H_{1+\varepsilon}} \,.$$

On en conclut que pour $0 < \theta < 1$, $\tilde{\sigma}_{\alpha\theta}\hat{f} \in [H_{1+\varepsilon}, H_0]_{[\theta]} = H_{(1-\theta)(1+\varepsilon)}$. (Il est immédiat de déterminer l'interpolé complexe $[H_{1+\varepsilon}, H_0]_{[\theta]}$, puisque par transformation de Fourier on sa ramène à l'interpolé complexe $[L^2_{1+\varepsilon}, L^2_0]_{[\theta]}$, c'est-à-dire l'interpolé d'espaces L^2 à poids qui est donc bien connu). Si θ est suffisamment petit, $(1-\theta)(1+\varepsilon) > 1$.

On a donc montré que si η est suffisamment petit, $\tilde{\sigma}_\eta \hat{f} \in H_{1+\varepsilon(\eta)}$ avec $\varepsilon(\eta) > 0$ et

$$\|\tilde{\sigma}_\eta \hat{f}\|_{H_{1+\varepsilon(\eta)}} \leq C(\eta)\left(\|f\|_{L^2_{1+\varepsilon}} + \|(1+\tilde{\rho}(\xi))^{\alpha/2}\hat{f}\|_2\right).$$

On va montrer que $\widehat{D_\eta f} \in H_{1+\varepsilon(\eta)}$ quitte à diminuer $\varepsilon(\eta)$. En effet, on fixe φ et ψ C^∞ à support compact avec $\varphi \equiv 1$ pour $\tilde{\rho}(x) \leq 1$ et $\psi \equiv 1$ au voisinage du support de φ. Alors on a

$$\tilde{\rho}(\xi)^\eta \hat{f} = \tilde{\rho}(\xi)^\eta \varphi(\xi)\,\frac{1}{\tilde{\sigma}_\eta(\xi)}\,\psi(\xi)\,\tilde{\sigma}_\eta\,\hat{f} + (1-\varphi(\xi))\,\tilde{\sigma}_\eta(\xi)\,\hat{f}\,.$$

Les fonctions $\psi/\tilde{\sigma}_\eta$ et $1-\varphi$ sont bornées ainsi que toutes leurs dérivées et sont donc des multiplicateurs de l'algèbre de Beurling $H_{1+\varepsilon(\eta)}$. Par ailleurs la fonction $\tilde{\rho}(\xi)^\eta\varphi(\xi)$ est la transformée de Fourier d'une fonction Γ_η étudiée dans l'Annexe B.2: on montre que $|\Gamma_\eta(x)| \leq C(1+\rho(x))^{-1-\eta}$ de sorte que $\Gamma_\eta \in L^2_{1+\varepsilon(\eta)}$ si $\varepsilon(\eta)$ est choisi strictement inférieur à η. On obtient donc $\tilde{\rho}(\xi)^\eta \hat{f} \in H_{1+\varepsilon(\eta)}$ si $\eta = \theta\alpha$ avec $\theta < \varepsilon/(1+\varepsilon)$ et $\varepsilon(\eta) < \inf\{\eta, \varepsilon-\theta(1+\varepsilon)\}$. L'inégalité (26) est donc démontré avec $\alpha' < \varepsilon\alpha/(1+\varepsilon)$ et $\varepsilon' < \inf\{\alpha', \varepsilon - \alpha'(1+\varepsilon)/\alpha\}$.

Pour estimer $I_{\alpha'}f$, on remarque d'abord que quel que soit $\eta > 0$, $\tilde{\sigma}(\xi)^{-\eta}$ est un multiplicateur de $H_{1+\varepsilon}$ (*i.e.* $\tilde{\sigma}(\xi)^{-\eta} \in M_{1+\varepsilon}$) puisque c'est une fonction C^∞ bornée ainsi que toutes ses dérivées. On fixe à nouveau $\varphi \in C^\infty$ à support compact telle que $\varphi(\xi) = 1$ pour $\tilde{\rho}(\xi) \leq 1$. On a alors

$$\tilde{\rho}(\xi)^{-\eta}\hat{f} = \tilde{\rho}(\xi)^{-\eta}\varphi(\xi)\,\hat{f} + (1-\varphi(\xi))\,\tilde{\sigma}(\xi)^{-\eta}\,\hat{f}\,.$$

Pour $\eta < 1$, on définit la fonction Δ_η par $\hat{\Delta}_\eta = \tilde{\rho}(\xi)^{-\eta}\varphi$; enfin on désigne par g la fonction définie par $\hat{g} = (1-\varphi)\tilde{\sigma}^{-\eta}\hat{f}$. Il est clair que $I_\eta f = \Delta_\eta * f + g$, où $g \in L^2((1+\rho(x))^{1+\varepsilon}dx)$. Pour étudier $\Delta_\eta * f$, on remarque que, puisque $\int f\,dx = 0$, on a

$$\Delta_\eta * f = I_1(x) + I_2(x)$$

avec

$$I_1(x) = \int\limits_{\rho(y)<\rho(x)/2C_1} (\Delta_\eta(x-y) - \Delta(x)\,f(y)\,dt$$

et

$$I_2(x) = \int\limits_{\rho(y)>\rho(x)/2C_1} (\Delta_\eta(x-y) - \Delta(x))\,f(y)\,dy\,.$$

C_1 est la constante introduite dans l'inégalité triangulaire (21). De même α_0 sera l'exposant introduit dans les inégalités (19) et (20). Alors l'étude de la fonction Δ_η menée dans l'Annexe B.2 permet de majorer, pour tout $\gamma \leq \alpha_0$, par

$$|I_1(x)| \leq C\int \frac{1}{(1+\rho(x))^{1+\gamma-\eta}}\,\rho(y)^\gamma\,|g(y)|\,dy\,.$$

Or $\rho(y)^\gamma g(y) \in L^2((1+\rho(x))^{1+\varepsilon-2\gamma}) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ si $\gamma < \varepsilon/2$; si η est tel que $\eta < \inf\{1, \alpha_0, \varepsilon/2\}$, alors $I_1(x) \in L^2((1+\rho(x))^{1+\varepsilon(\eta)}dx)$ pour tout $\varepsilon(\eta) < \inf\{(\varepsilon - 2\eta)/3, \alpha_0 - \eta\}$.

Pour contrôler I_2, on écrit

$$|I_2| \leq \int\limits_{\rho(y)<\rho(x)/2C_1} (1+\rho(x))^{-1+\eta}\,|f(y)|\,dy + \int\limits_{\substack{\rho(y)>\rho(x)/2C_1\\ \rho(x-y)<\rho(x)/2C_1}} (1+\rho(x-y))^{-1+\eta}\,|f(y)|\,dy = J_1 + J_2\,.$$

Pour J_1, on remarque que si $\gamma < \varepsilon/2$ alors $\rho(y)^\gamma|f(y)| \in L^2((1+\rho(x))^{1+\varepsilon-2\gamma}dx) \subset L^1$ et donc

$$J_1 \leq C\,(1+\rho(x))^{-1+\eta-\gamma}\,,$$

de sorte que si $\eta < \varepsilon/2$ alors $J_1 \in L^2((1+\rho(x))^{1+\varepsilon(\eta)}dx)$ pour tout $\varepsilon(\eta) < (\varepsilon - 2\eta)/3$. Quant à J_2, on le majore par

$$J_2 \leq \int (1+\rho(x-y))^{-1+\eta-\gamma}(1+\rho(y))^{\gamma}\,|f(y)|\,dy$$

puisque $\rho(x-y) < \rho(y)$, et à nouveau

$$J_2 \in L^2((1+\rho(x))^{1+\varepsilon(\eta)}dx)$$

pour $\eta < \varepsilon/2$ et $\varepsilon(\eta) < (\varepsilon - 2\eta)/3$. (27) est donc démontré pour

$$\alpha' < \inf\{1, \alpha_0, \frac{\varepsilon}{2}\} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon' < \inf\{\frac{\varepsilon - 2\alpha'}{3}, \alpha_0 - \alpha'\}\,.$$

Le Lemme 8 et le Théorème 2 sont donc démontrés.

III. Bases d'ondelettes et analyses multi-résolutions.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème d'existence des analyses multi-résolution.

Théorème 3. *Soit A une matrice de dilatation sur $\mathbb{R}^n$ et*

$$(\psi_{\varepsilon,j,k})_{1\leq\varepsilon\leq E,\, j\in\mathbb{Z},\, k\in\mathbb{Z}^n}$$

une base de Riesz de $L^2(\mathbb{R}^n)$ de base duale $(\psi^*_{\varepsilon,j,k})$ telles que

i) $\psi_{\varepsilon,j,k}(x) = |\det A|^{j/2}\,\psi_\varepsilon(A^j x - k)\,,$

ii) $\psi^*_{\varepsilon,j,k}(x) = |\det A|^{j/2}\,\psi^*_\varepsilon(A^j x - k)\,,$

iii) *il existe $\eta > 1$ tel que $\psi_\varepsilon \in L^2((1+\rho(x))^\eta dx)$ (où ρ est une pseudonorme sur $(\mathbb{R}^n, A)$) et tel que $\psi^*_\varepsilon \in L^2((1+\rho(x))^\eta dx)$,*

iv) *il existe $\alpha > 0$ tel que $\hat{\psi}_\varepsilon \in L^2((1+\tilde{\rho}(x))^\alpha dx)$ (où $\tilde{\rho}$ est une pseudo-norme sur $(\mathbb{R}^n, \tilde{A})$) et tel que $\hat{\psi}^*_\varepsilon \in L^2((1+\tilde{\rho}(x))^\alpha dx)$,*

v) $A\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{Z}^n$.

Alors

a) $\int \psi_\varepsilon\,dx = \int \psi^*_\varepsilon\,dx = 0$ *(de sorte que les $\psi_{\varepsilon,j,k}$ satisfont les hypothèses du lemme des vaguelettes).*

b) Le projecteur de sommes partielles P_0 défini par

$$P_0 f = \sum_{j<0} \sum_{\varepsilon=1}^{E} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle f, \psi^*_{\varepsilon,j,k}\rangle \psi_{\varepsilon,j,k} \tag{28}$$

est invariant par translations entières et a un noyau ω-localisé pour le poids de Beurling $\omega = (1+\rho(x))^\eta$.

c) En particulier, $V_0 = \operatorname{Im} P_0$ a une base de Riesz de la forme $(\varphi_\delta(x-k))_{1\leq\delta\leq D,\, k\in\mathbb{Z}^n}$, où le nombre D vérifie

$$E = D(|\det A| - 1)\,. \tag{29}$$

REMARQUES.

i) Si $n=1$, on peut choisir $\varphi_\delta \in L^2(\omega\, dx)$ d'après le Théorème 1.

ii) La conclusion c) est fausse sous l'hypothèse $\psi_\varepsilon \in L^2((1+\rho(x))^\eta dx)$ pour un $\eta < 1$ comme le montrera le Contre-exemple numéro 3.

DÉMONSTRATION.

a) La nullité des intégrales $\int \psi_\varepsilon\, dx$ et $\int \psi^*_\varepsilon\, dx$ provient du lemme suivant:

Lemme 9. *Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ telle que la famille*

$$(f_{j,k} = |\det A|^{j/2} f(A^j x - k))_{j\in\mathbb{Z},\, k\in\mathbb{Z}^n}$$

soit presque-orthogonale. Alors, si $f \in L^1$, $\int f\, dx = 0$.

On raisonne par l'absurde. Si $\int f\, dx \neq 0$, il existe R_0, tel que

$$\int_{\rho(y)>R_0} |f(y)| dy \leq \frac{1}{4} \left| \int f\, dx \right|.$$

On note $B = \{y : \ \rho(y) \leq 1\}$ et χ_B sa fonction caractéristique. On a

$$\langle \chi_B, f_{j,k}\rangle = |\det A|^{-j/2} \int_{\rho(y+k)\leq |\det A|^j} f(y)\, dy\,.$$

Si $\rho(k) \le |\det A|^j/2C_1$ et si j est suffisamment grand pour que $R_0 C_1 \le |\det A|^j/2$, on obtient

$$|\langle \chi_B, f_{j,k}\rangle| \ge \frac{3}{4}\left|\int f\,dx\right| |\det A|^{-j/2}.$$

On obtient donc

$$\sum_j \sum_k |\langle \chi_B, f_{j,k}\rangle|^2 \\ \ge \frac{9}{16}\left|\int f\,dx\right|^2 \sum_{j\ge j_0} |\det A|^{-j}\, \#\{k \in \mathbb{Z}^n :\ \rho(k) \le \frac{1}{2C_1}|\det A|^j\}.$$

Maintenant si y vérifie $\rho(y) \le |\det A|^j/4C_1^2$, et si $k \in \mathbb{Z}^n$ est tel que $y \in k + [0,1]^n$, on a

$$\rho(k) \le C_1\left(\rho(y) + \rho(k-y)\right) \le \frac{1}{4C_1}|\det A|^j + C,$$

de sorte que si j est assez grand pour que $C \le |\det A|^j/4C_1$, on a $\rho(k) \le |\det A|^j/2C_1$. Cela prouve que pour j assez grand

$$\begin{aligned}\#\{k \in \mathbb{Z}^n :\ \rho(k) \le \frac{1}{2C_1}|\det A|^j\} &= \Big|\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n \\ \rho(k)\le|\det A|^j/2C_1}} k + [0,1]^n\Big| \\ &\ge \left|\{y :\ \rho(y) \le \frac{1}{4C_1^2}|\det A|^j\}\right| \\ &= |\det A|^j \left|\{y :\ \rho(y) \le \frac{1}{4C_1^2}\}\right|.\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\sum_j \sum_k |\langle \chi_B, f_{j,k}\rangle|^2 \\ \ge \frac{9}{16}\left|\int f\,dx\right|^2 \left|\{y :\ \rho(y) \le \frac{1}{4C_1^2}\}\right| \sum_{j\ge j_1} |\det A|^{-j}\,|\det A|^j = +\infty$$

ce qui contredit la presque-orthogonalité des $f_{j,k}$.

b) On note Q_j le projecteur

$$Q_j f = \sum_{\varepsilon=1}^{E} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle f, \psi^*_{\varepsilon,j,k}\rangle\, \psi_{\varepsilon,j,k},$$

de sorte que $I = \sum_j Q_j$ et $P_0 = \sum_{j<0} Q_j = I - \sum_{j\geq 0} Q_j$. Or Q_j est invariant par translation par $A^{-j}\mathbb{Z}^n$ de manière évidente. En particulier pour $j \geq 0$, $A^{-j}\mathbb{Z}^n \supset \mathbb{Z}^n$ et donc Q_j est invariant par translations entières. Comme $P_0 = I - \sum_{j\geq 0} Q_j$ on voit que P_0 est invariant par translations entières.

On note $q_j(x,y)$ le noyau de $Q_j(x,y)$. Comme $(1+\rho(x))^\eta$ est un poids de Beurling, on sait que

$$\int_{[0,1]^n}\int_{\mathbb{R}^n} |q_0(x,y)|^2 \rho(x-y)^\eta \, dx\, dy < +\infty .$$

Par ailleurs $q_j(x,y) = |\det A|^j \, q_0(A^j x, A^j y)$ de sorte que pour $j \geq 0$

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]^n}\int_{\mathbb{R}^n} &|q_j(x,y)|^2 \rho(x-y)^\eta \, dx\, dy \\ &= \int_{A^j[0,1]^n}\int_{\mathbb{R}^n} |q_0(x,y)|^2 \rho(x-y)^\eta \, |\det A|^{j(-\eta)} \, dx\, dy .\end{aligned}$$

Or la fonction $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} |q_0(x,y)|^2 \rho(x-y)^\eta \, dy$ est $\mathbb{Z}^n$-périodique et

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \chi_{A^j[0,1]^n}(x-k) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \chi_{[0,1]^n}(A^{-j}x - A^{-j}k) \\ &= \sum_{r\in A^{-j}\mathbb{Z}^n/\mathbb{Z}^n}\ \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \chi_{[0,1]^n}(A^{-j}x - k - r) \\ &= |\det A|^j\end{aligned}$$

(puisque $\mathbb{Z}^n \subset A^{-j}\mathbb{Z}^n$) de sorte que

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]^n}\int_{\mathbb{R}^n} &|q_j(x,y)|^2 \rho(x-y)^\eta \, dx\, dy \\ &= |\det A|^{j(1-\eta)} \int_{[0,1]^n}\int_{\mathbb{R}^n} |q_0(x,y)|^2 \rho(x-y)^\eta \, dx\, dy .\end{aligned}$$

Comme $\eta > 1$, on obtient

$$\sum_{j\geq 0} \|q_j(x,y)\|_{L^2([0,1]^n\times\mathbb{R}^n, \rho(x-y)^\eta\, dx\, dy)} < +\infty ,$$

de sorte que le noyau $p(x,y)$ de P_0 est en dehors de la diagonale $x = y$ une fonction de carré localement intégrable telle que

$$\int_{[0,1]^n}\int_{\mathbb{R}^n} |p(x,y)|^2 \rho(x-y)^\eta \, dx\, dy < +\infty . \tag{30}$$

Il ne nous reste plus qu'à estimer $\int_{[0,1]^n}\int_{[-1,2]^n} |p(x,y)|^2\, dx\, dy$ pour conclure que P_0 a un noyau ω-localisé. On commence par remarquer qu'il existe $r_0 > 2$ tel que $q_0(x,y)$ soit localement de puissance r_0-ième intégrable. En effet on sait qu'il existe α' et $\eta' > 0$ tel que $D_{\alpha'}\psi_\varepsilon \in L^2((1+\rho(x))^{1+\eta'}dx)$. On considère alors la famille de fonctions $\psi_{\varepsilon,z}$ définie par $\hat{\psi}_{\varepsilon,z} = (\tilde{\sigma}^{\alpha'}/\tilde{\sigma}^{\theta z})\hat{\psi}_\varepsilon$, où $\theta > 1/2$ (où $\tilde{\sigma}$ a été définie dans la preuve du Lemme 8). Pour $\operatorname{Re} z = 1$ on a $\hat{\psi}_{\varepsilon,z} \in L^1$ et donc $\psi_{\varepsilon,z} \in L^\infty((1+\rho(x))^{1+\eta'}dx)$; pour $\operatorname{Re} z = 0$ on a $\hat{\psi}_{\varepsilon,z} \in H_{1+\eta'}$ ou encore $\psi_{\varepsilon,z} \in L^2((1+\rho(x))^{1+\eta'}dx)$. Par interpolation complexe, on a $\psi_\varepsilon = \psi_{\varepsilon,\alpha'/\theta}$ (θ étant choisi $> \alpha'$) et donc $\psi_\varepsilon \in L^r((1+\rho(x))^{1+r'}dx)$ avec $r = 2\theta/(\theta-\alpha') > 2$. On fixe alors $r_0 \le r$, $r_0 > 2$ tel que $r_0/2 < 1+\eta'$. On a, pour un compact K fixé,

$$\iint_{K\times K} |\psi_\varepsilon(x-k)|^{r_0}|\psi_\varepsilon^*(y-k)|^{r_0}\, dx\, dy$$
$$\le C\frac{1}{(1+\rho(k))^{2+2\eta'}}\,\|\psi_\varepsilon\|^{r_0}_{L^{r_0}((1+\rho(x))^{1+\eta'}dx)}\,\|\psi_\varepsilon^*\|^{r_0}_{L^{r_0}((1+\rho(x))^{1+\eta'}dx)}$$

de sorte que

$$\sum_k \|\psi_\varepsilon(x-k)\,\psi_\varepsilon^*(y-k)\|_{L^{r_0}(K\times K)} \le C\sum_k \frac{1}{(1+\rho(k))^{2(1+\eta')/r_0}} < +\infty\,,$$

puisque $2(1+\eta')/r_0 > 1$.

Comme $q_j(x,y) = |\det A|^j q_0(A^jx, A^jy)$, on a pour tout compact K

$$\iint_{K\times K} |q_j(x,y)|^2\, dx\, dy = \iint_{A^{+j}K\times A^{+j}K} |q_0(x,y)|^2\, dx\, dy$$
$$\le \Big(\iint_{A^{+j}K\times A^{+j}K} |q_0(x,y)|^r\, dx\, dy\Big)^{2/r_0}$$
$$\cdot\, |\det A|^{j(1-2/r_0)}|K\times K|^{1-2/r_0}\,.$$

Pour $j \le 0$, $A^jK \times A^jK$ reste compris dans un compact $\tilde{K}\times\tilde{K}$ fixe et l'intégrabilité de $|q_0|^{r_0}$ sur $\tilde{K}\times\tilde{K}$ donne donc pour $j \le 0$

$$\|q_j\|_{L^2(K\times K)} \le C\,|\det A|^{j(r_0-2)/(2r_0)}$$

ce qui entraîne que $p_0 = \sum_{j\le 0} q_j$ est localement de carré intégrable.

Le projecteur P_0 est donc bien ω-localisé avec $\omega = (1+\rho(x))^{\eta}$.

c) Ce point est une simple application du Théorème 1. La relation entre D et E s'établit de la manière suivante. On pose $V_1 = \{f(Ax) : f \in V_0\}$. Alors V_1 dispose de deux bases de Riesz invariantes par translations entières:

- les $(\varphi(\delta(Ax-k))_{1\le\delta\le D,\, k\in\mathbb{Z}^n}$ engendrées par translations entières à partir des $|\det A|\, D$ fonctions $(\varphi_\delta(Ax-r)_{1\le\delta\le D,\, r\in\mathbb{Z}^n/A\mathbb{Z}^n}$
- les $(\varphi_\delta(x-k))_{1\le\delta\le D,\, k\in\mathbb{Z}^n}$ et les $(\psi_\varepsilon(x-k))_{1\le\varepsilon\le E,\, k\in\mathbb{Z}^n}$ engendrées à partir de $D+E$ fonctions.

Comme le nombre de fonctions génératrices ne dépend pas du choix de la base, on a $D+E = D\,|\det A|$.

IV. Le cas de la dimension 1.

Le cas de la dimension 1 se traite par le lemme suivant:

Lemme 10. *Soit ω un poids de Beurling sur $\mathbb{R}$ et $f_1,\dots,f_N$, N fonctions de $L^2(\omega\,dx)$ telles que pour tout $\xi \in [0,2\pi]$ il existe $i \in \{1,\dots,N\}$ avec $C(f_i,f_i)(\xi) \neq 0$. Alors il existe une suite presque nulle $(\lambda_{i,k})_{1\le i\le N,\, k\in\mathbb{Z}}$ telle que la fonction $f = \sum_{i=1}^{N}\sum_k \lambda_{i,k}\, f_i$ vérifie pour tout ξ, $C(f,f) \neq 0$.*

DÉMONSTRATION. Il s'agit de montrer qu'il existe N polynômes trigonométriques $P_1,\dots,P_N$ (avec $P_i = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_{i,k}\, e^{-ik\xi}$) tels que

$$(P_1(\xi),\dots,P_N(\xi))M(f_1,\dots,f_N)(\xi)\begin{pmatrix}\bar{P}_1(\xi)\\ \vdots \\ \bar{P}_N(\xi)\end{pmatrix} \neq 0, \tag{31}$$

pour tout $\xi \in [0,2\pi]$. Or la matrice $M(f_1,\dots,f_N)(\xi)$ est hermitienne positive

$$(\alpha_1,\dots,\alpha_N)\, M(f_1,\dots,f_N)(\xi)\begin{pmatrix}\bar{\alpha}_1\\ \vdots \\ \bar{\alpha}_N\end{pmatrix} \geq 0,$$

pour tout $(\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{C}^N$, ce qui entraîne:

$$\left|(\beta_1, \ldots, \beta_N)\, M(f_1, \ldots, f_N)(\xi) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix}\right|^2$$

$$\leq \left|(\beta_1, \ldots, \beta_N)\, M(f_1, \ldots, f_N)(\xi) \begin{pmatrix} \bar\beta_1 \\ \vdots \\ \bar\beta_N \end{pmatrix}\right| \cdot \left|(\alpha_1, \ldots, \alpha_N)\, M(f_1, \ldots, f_N)(\xi) \begin{pmatrix} \bar\alpha_1 \\ \vdots \\ \bar\alpha_N \end{pmatrix}\right|$$

pour tout $\xi \in [0, 2\pi]$, de sorte que (31) est équivalent à

$$M(f_1, \ldots, f_N)(\xi) \begin{pmatrix} \bar P_1(\xi) \\ \vdots \\ \bar P_N(\xi) \end{pmatrix} \neq 0\,,$$

ou encore

$$\sum_{i=1}^{N} \bar P_i(\xi) \begin{pmatrix} C(f_1, f_i)(\xi) \\ \vdots \\ C(f_N, f_i)(\xi) \end{pmatrix} \neq \vec 0\,.$$

Par densité des polynômes trigonométriques dans l'espace des fonctions continues 2π-périodiques, on voit que le Lemme 10 se réécrit en

Lemme 11. *Soit $\vec u_1, \ldots, \vec u_N$, N fonctions continues 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}^N$. Si pour tout $\xi \in [0, 2\pi]$ il existe i avec $\vec u_i(\xi) \neq \vec 0$, alors il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$, N fonctions continues 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telles que pour tout $\xi \in [0, 2\pi]$, $\sum_i \lambda_i(\xi) \vec u_i(\xi) \neq \vec 0$.*

En effet, quitte à réindexer (avec répétition ...) les $\vec u_i$, on peut supposer que $[0, 2\pi] = \bigcup_{i=1}^{N} [t_i, t_{i+1}]$ avec $t_1 = 0$, $t_{N+1} = 2\pi$, $t_i < t_{i+1}$ et $\vec u_i$ sans zéro sur $[t_i, t_{i+1}]$, et donc sur $[t_i - \alpha_i, t_{i+1} + \beta_i]$ pour des nombres α_i et $\beta_i > 0$. On fixe alors $\varphi_i \in C^\infty$, 2π-périodique tel que $\varphi_i \equiv 1$ sur $[t_i, t_{i+1}]$, $0 \leq \varphi_i < 1$ en dehors de $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ([t_i, t_{i+1}] + 2k\pi)$ et φ_i portée par

$$\left[t_i - \frac{\alpha_i}{2}, t_{i+1} + \frac{\beta_i}{2}\right] \cap \left[\frac{t_{i-1} + t_i}{2}, \frac{t_{i+1} + t_{i+2}}{2}\right]$$

modulo-2π (où on pose $t_{-1} = t_{N-1}$ et $t_{N+2} = t_1$). Enfin ω_i, $1 \leq i \leq N$, sont des fonctions C^∞ et 2π-périodiques à valeurs réelles que nous fixerons ensuite.

On pose $\lambda_j = e^{i\omega_j(x)}\varphi_j(x)/\|\vec{u}_j\|$. On voit alors que sur $]t_j, (t_j + t_{j-1})/2]$

$$\sum \lambda_k \vec{u}_k = \frac{\vec{u}_j}{\|\vec{u}_j\|}\, e^{i\omega_j} + \varphi_{j-1}(x)\, \frac{\vec{u}_{j-1}}{\|\vec{u}_{j-1}\|}\, e^{i\omega_{j-1}}$$

avec $\varphi_{j-1}(x) < 1$, de sorte que $\sum \lambda_k \vec{u}_k \neq 0$, et de même pour $[(t_j + t_{j+1})/2, t_{j+1}[$. Les seuls zéros possibles sont donc les points t_j où on a:

$$\sum \lambda_k\, \vec{u}_k(t_j) = \frac{\vec{u}_j}{\|\vec{u}_j\|}\, e^{i\omega_j(t_j)} + \frac{\vec{u}_{j-1}}{\|\vec{u}_{j-1}\|}\, e^{i\omega_{j-1}(t_j)}\,.$$

On impose $\omega_j(t_j) = 0$; la valeur de $\omega_j(t_{j+1})$ est alors arbitraire en dehors éventuellement de la valeur $\theta_j + 2\pi\mathbb{Z}$ où

$$\frac{\vec{u}_{j+1}}{\|\vec{u}_{j+1}\|} + e^{i\theta_j}\, \frac{\vec{u}_j}{\|\vec{u}_j\|} \neq 0\,.$$

On choisit une telle fonction ω_j et les lemmes 10 et 11 sont prouvés.

On a alors la proposition suivante

Proposition 2. *Soit V_0 un sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{R})$ invariant par translations entières et tel que $V_0 \cap L^2(\omega\, dx)$ soit dense dans V_0 pour un poids de Beurling ω. Pour $\xi \in [0, 2\pi]$, on note*

$$V_\xi = \{g \in L^2([0,1]) : \textit{il existe } f \in V_0 \cap L^2(\omega\, dx)\,,\ g = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-i\xi(x-k)} f(x-k)\}\,.$$

Alors les assertions suivantes sont équivalentes

i) *V_0 a une base orthonormée de la forme $(f_\delta(x-k))_{1\leq\delta\leq D,\, k\in\mathbb{Z}}$ avec $f_\delta \in L^2(\omega\, dx)$.*

ii) *Pour tout $\xi \in [0, 2\pi]$, $\dim V_\xi = D$.*

DÉMONSTRATION. i) implique ii) est immédiat car

$$g_{\delta,\xi} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} e^{-i(x-k)\xi} f_\delta(x-k)$$

est alors une base orthonormée de V_ξ.

ii) implique i) se démontre par récurrence sur D. Comme pour la démonstration du Théorème 1 en dimension n, on remarque que l'hypothèse ii) entraîne qu'il existe un recouvrement ouvert fini $(V_\alpha)_{\alpha\in A}$ de $[0,2\pi]$ et des fonctions $(f_{\alpha,\delta})_{1\leq\delta\leq D}$ dans $V_0\cap L^2(\omega\,dx)$ telles que la matrice $M(f_{\alpha,1},\ldots,f_{\alpha,N})$ soit inversible sur V_α. En particulier, $C(f_{\alpha,1},f_{\alpha,1})$ ne s'annule pas sur V_α. Le Lemme 10 implique alors qu'il existe $g_1\in V_0\cap L^2(\omega\,dx)$ telle que $C(g_1,g_1)$ ne s'annule en aucun point de $[0,2\pi]$. On note W_1 l'espace engendré par les $g_1(x-k)$, $k\in\mathbb{Z}$. Il admet comme base de Riesz la famille $(g_1(x-k))_{k\in\mathbb{Z}}$ avec $g_1\in L^2(\omega\,dx)$. On sait alors qu'il admet une base orthonormée $(f_1(x-k))_{k\in\mathbb{Z}}$ avec $f_1\in L^2(\omega\,dx)$. On pose alors $V_1=V_0\cap W_1^\perp$. On a les propriétés suivantes sur V_1 (en notant Q_1 le projecteur orthogonal sur W_1):

- $V_1=(I-Q_1)V_0$; en particulier $V_1\cap L^2(\omega\,dx)$ est dense dans V_1 ,
- pour $\xi\in[0,2\pi]$, $V_{1,\xi}$ est le complémentaire orthogonal de $W_{1,\xi}$ dans $V_{0,\xi}$:

- $W_{1,\xi}=\mathbb{C}\,f_{1,\xi}$ et $\int_0^1|f_{1,\xi}(x)|^2\,dx=1$,
- le projecteur orthogonal de $L^2([0,1])$ sur $W_{1,\xi}$ est donné par

$$Q_{1,\xi}(g)=\langle g,f_{1,\xi}\rangle_{L^2([0,1])}\,f_{1,\xi}=\langle\tilde g,e^{-i\xi x}f_1\rangle_{L^2(\mathbb{R})}\,f_{1,\xi}$$

en prolongeant g en $\tilde g$ par périodicité;
- en particulier, en notant $f_\xi=\sum_k e^{-i\xi(x-k)}f(x-k)$

$$Q_{1,\xi}(f_\xi)=\Big(\sum_k e^{i\xi k}\langle f(x-k),f_1\rangle\Big)f_{1,\xi}$$

d'où $Q_{1,\xi}(V_{1,\xi})=0$
- il est clair que, puisque $V_0=V_1\oplus W_1$ et que $Q_1(L^2(\omega\,dx))\subset L^2(\omega\,dx)$, que $V_{0,\xi}=V_{1,\xi}+W_{1,\xi}$; comme $Q_{1,\xi}(V_{1,\xi})=0$, cette somme est directe et $V_{0,\xi}=V_{1,\xi}\overset{\perp}{\oplus}W_{1,\xi}$, ce qui prouve que $\dim V_{1,\xi}=D-1$.

On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence à V_1 et exhiber une base orthonormée $(f_\delta(x-k))_{2\leq\delta\leq D,\,k\in\mathbb{Z}}$ de V_1 avec $f_\delta\in L^2(\omega\,dx)$. La Proposition 2 est donc démontrée.

Le Théorème 1 en dimension 1 est alors immédiat, puisque nous savons démontrer dans ce cas que $\dim V_\xi=\mathrm{C}^{\mathrm{te}}$. De plus, nous pouvons le préciser de la manière suivante

Proposition 3. *a) Soient V_0 et V_0^* deux sous-espaces fermés de $L^2(\mathbb{R})$ invariants par translations entières. On suppose que $L^2 = V_0 \oplus (V_0^*)^\perp$ et on note P_0 le projecteur de L^2 sur V_0 parallèlement à $(V_0^*)^\perp$ et $p(x,y)$ le noyau distribution de P_0. Alors*

• *Pour un poids de Beurling ω symétrique, V_0 admet une base de Riesz de la forme $(\varphi_\delta(x-k))_{1\leq\delta\leq D,\, k\in\mathbb{Z}}$ de base duale $(\varphi_\delta^*(x-k))$ dans V_0^* avec φ_δ et φ_δ^* dans $L^2(\omega\, dx)$ si et seulement si p est localement de carré intégrable et*

$$\int_{x\in[0,1]}\int_{y\in\mathbb{R}} \omega(x-y)\,(|p(x,y)|^2 + |p(y,x)|^2)\,dx\,dy < +\infty\,.$$

• *V_0 admet une base de Riesz $(\varphi_\delta(x-k))_{1\leq\delta\leq D,\, k\in\mathbb{Z}}$ de base duale $(\varphi_\delta^*(x-k))$ dans V_0^* telle que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $x^k\varphi_\delta \in L^2$ et $x^k\varphi_\delta^* \in L^2$ si et seulement si p est localement de carré intégrable et*

$$\int_{x\in[0,1]}\int_{y\in\mathbb{R}} |x-y|^k(|p(x,y)|^2 + |p(y,x)|^2)\,dx\,dy < +\infty\,,$$

pour tout $k\in\mathbb{N}$.

• *V_0 admet une base de Riesz $(\varphi_\delta(x-k))_{1\leq\delta\leq D,\, k\in\mathbb{Z}}$ de base duale $(\varphi_\delta^*(x-k))$ dans V_0^* telle que il existe $\varepsilon>0$, $e^{\varepsilon|x|}\varphi_\delta \in L^2$ et $e^{\varepsilon|x|}\varphi_\delta^* \in L^2$ si et seulement si p est localement de carré intégrable et il existe $\alpha>0$ telle que*

$$\int_{x\in[0,1]}\int_{y\in\mathbb{R}} e^{\alpha|x-y|}\,(|p(x,y)|^2 + |p(y,x)|^2)\,dx\,dy < +\infty\,.$$

• *V_0 admet une base de Riesz $(\varphi_\delta(x-k))_{1\leq\delta\leq D,\, k\in\mathbb{Z}}$ de base duale $(\varphi_\delta^*(x-k))$ dans V_0^* telle que φ_δ et φ_δ^* sont à support compact si et seulement si p est localement de carré intégrable et il existe $M>0$ telle que*

$$p(x,y) = 0\,, \qquad si\ |x-y| > M\,.$$

b) Mêmes conclusions dans le cas orthogonal ($V_0 = V_0^*$, $p(x,y) = \overline{p(y,x)}$) avec des bases orthonormées ($\varphi_\delta = \varphi_\delta^*$).

DÉMONSTRATION. Hormis le cas du support compact, tous les cas sont traitables par le Lemme 10 et en remarquant que ces conditions d'intégrabilité sont stables par orthogonalisation. Le cas du support compact est traité dans [16].

La Proposition 3 entraîne immédiatement l'existence de fonctions d'échelles φ_δ, φ_δ^* associée à des ondelettes bi-orthogonales ψ_ε, ψ_ε^*:

Proposition 4. *Soit A un entier ≥ 2 et*

$$(\psi_{\varepsilon,j,k} = A^{j/2}\psi_\varepsilon(A^j x - k))_{1\leq\varepsilon\leq E,\, j,k\in\mathbb{Z}}$$

une base d'ondelettes bi-orthogonales associée à A. Alors

i) *Si pour un $\alpha > 0$ les ondelettes ψ_ε et ψ_ε^* sont dans $L^2(|x|^{1+\alpha}dx)$ et dans l'espace de Sobolev H^α, alors E est divisible par $A-1$: $E = D(A-1)$ et l'espace V_0 associé à $(\psi_{\varepsilon,j,k})$ admet une base de Riesz de la forme $(\varphi_\delta(x-k))_{1\leq\delta\leq D,\, k\in\mathbb{Z}}$.*

ii) *De plus on peut choisir les fonctions d'échelles φ_δ et φ_δ^**

- *dans $L^2(|x|^{1+\beta}dx)$ si ψ_ε et ψ_ε^* sont dans $L^2(|x|^{1+\beta}dx)$ $(\beta > 0)$,*
- *à décroissance rapide si les ψ_ε et ψ_ε^* sont à décroissance rapide,*
- *à décroissance exponentielle si les ψ_ε et ψ_ε^* sont à décroissance exponentielle,*
- *à support compact si les ψ_ε et les ψ_ε^* sont à support compact.*

Ces résultats restent valables pour des bases orthonormées ($\varphi_\delta = \varphi_\delta^*$ pour $\psi_\varepsilon = \psi_\varepsilon^*$).

C'est une conséquence directe de la Proposition 3. L'existence des fonctions d'échelle a d'abord été démontré en 1991 dans le cas de la décroissance exponentielle ou du support compact en utilisant l'analyticité des transformées de Fourier [15], [16]. Ce résultat a été étendu à une base orthonormée d'ondelettes $(\psi_{j,k} = 2^{j/2}\psi(2^j x - k))$ générale par P. Auscher en 1992, [2], sous des hypothèses différentes de celles que nous avons choisies ($\hat{\psi}$ continue, $\hat{\psi} = O(|\xi|^\alpha)$ au voisinage de 0 avec $\alpha > 0$, $\hat{\psi} = O(|\xi|^{-1/2-\alpha})$ au voisinage de l'infini).

En particulier, les bases d'ondelettes orthonormées

$$(\psi_{j,k} = 2^{j/2}\,\psi(2^j x - k)_{j,k\in\mathbb{Z}}$$

ont une structure remarquable:

Théorème 4. *Soit $\psi \in L^2(\mathbb{R})$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

a) Les fonctions $\psi_{j,k} = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$, $j,k \in \mathbb{Z}$, forment une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$ et de plus ψ est à décroissance rapide (pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x^k\psi \in L^2$) et il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\psi \in H^\varepsilon$.

b) Il existe une fonction 2π-périodique m_0 de classe C^∞ telle que

- $|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi+\pi)|^2 = 1$,
- $m_0(0) = 1$,
- *m_0 vérifie la condition d'Albert Cohen: il existe un compact K tel que $\cup_{k\in\mathbb{Z}} K + 2k\pi = \mathbb{R}$ et tel que pour tout $\xi \in K$, pour tout $j \geq 1$, $m_0(\xi/2^j) \neq 0$,*

et il existe un entier $N \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\hat{\psi}(\xi) = e^{-i(N+1/2)\xi}\, \bar{m}_0(\frac{\xi}{2}+\pi) \prod_{j=2}^{+\infty} m_0(\frac{\xi}{2^j}). \tag{32}$$

Le nombre N est déterminé par $N + 1/2 = \int x\, |\psi(x)|^2\, dx$. La fonction m_0 est unique à un facteur $e^{iM\xi}$ près (avec $M \in \mathbb{Z}$).

DÉMONSTRATION. *a*) implique *b*): Nous savons qu'il existe une fonction d'échelle (orthogonale) φ_1 associée à ψ. On peut supposer $\hat{\varphi}_1(0) = 1$ et alors $\hat{\varphi}_1(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_1(\xi/2^j)$ où m_1 est la fonction C^∞ et 2π-périodique

$$m_1(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle 2\,\varphi(2x), \varphi(x-k)\rangle\, e^{-ik\xi}.$$

On dispose d'une autre ondelette associée à φ_1, ψ_1 définie par

$$\hat{\psi}_1(\xi) = e^{-i\xi/2}\, \bar{m}_1((\xi/2)+\pi)\hat{\varphi}_1(\xi/2).$$

On a alors

$$\hat{\psi}(\xi) = U(\xi)\,\hat{\psi}_1(\xi) \quad \text{avec } U \in C^\infty,\ 2\pi\text{-périodique et } |U(\xi)| = 1. \tag{33}$$

La fonction U s'écrit alors $U(\xi) = e^{i\theta(\xi)}$ où θ est C^∞ et vérifie

$$\theta(\xi + 2\pi) - \theta(\xi) = 2M\pi, \qquad \text{avec } M \in \mathbb{Z}.$$

Il existe une fonction γ, C^∞, 2π-périodique, à valeurs réelles telle que

$$\gamma(2\xi) - \gamma(\xi) - \gamma(\xi+\pi) = \theta(2\xi) - 2M\xi.$$

En effet, on écrit

$$\theta(\xi) = M\xi + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \theta_k\, e^{-ik\xi} \qquad \text{et} \qquad \gamma(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_k\, e^{-ik\xi}.$$

Or on a alors $\theta_k = \gamma_k - 2\gamma_{2k}$, d'où

$$\gamma_k = \sum_{j=0}^{\infty} 2^j \theta_{2^j k}$$

si $k \neq 0$ et $\gamma_0 = -\theta_0$. (En particulier, γ est unique). On pose $V(\xi) = e^{i\gamma(\xi)}$. On a alors

$$U(2\xi) = V(2\xi)\, \bar{V}(\xi)\, \bar{V}(\xi + \pi)\, e^{2iM\xi}.$$

On obtient

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(\xi) &= e^{-i\xi/2}\, e^{2iM\xi}\, \bar{m}_1(\frac{\xi}{2} + \pi)\, \bar{V}(\frac{\xi}{2} + \pi)\, V(\xi)\, \bar{V}(\frac{\xi}{2}) \prod_{j=2}^{\infty} m_1(\frac{\xi}{2^j}) \\ &= e^{-i\xi/2} e^{2iM\xi}\, \bar{m}_1(\frac{\xi}{2} + \pi)\, \frac{\bar{V}(\xi/2 + \pi)}{\bar{V}(\xi)} \prod_{j=2}^{\infty} m_1(\frac{\xi}{2^j})\, \frac{V(\xi/2^j)}{V(2\xi/2^j)}\,.\end{aligned}$$

On pose donc

$$m_0(\xi) = m_1(\xi)\, \frac{V(\xi)}{V(2\xi)}\,,$$

de sorte que

$$m_0(\xi + \pi) = m_1(\xi + \pi)\, \frac{V(\xi + \pi)}{V(2\xi)}$$

et on obtient

$$\hat{\psi}(\xi) = e^{-i\xi/2}\, e^{2iM\xi}\, \bar{m}_0(\frac{\xi}{2} + \pi) \prod_{j=1}^{\infty} m_0(\frac{\xi}{2^j})\,.$$

La fonction m_0 vérifie toutes les conditions de $b)$ parce que m_1 les vérifie (elle provient d'une fonction d'échelle φ_1) et que $|m_0(\xi)| = |m_1(\xi)|$. Cela prouve l'existence de m_0 et N.

Si m_1, N_1 est une autre solution de (32), les fonctions φ_1 définies par

$$\hat{\varphi}_1 = \prod_{j=1}^{\infty} m_1(\frac{\xi}{2^j})$$

et φ_0 définie par

$$\prod_{j=1}^{\infty} m_0(\frac{\xi}{2^j}) = \hat{\varphi}_0$$

sont deux fonctions d'échelle associées à ψ. On a donc $\hat{\varphi}_1 = V(\xi)\,\hat{\varphi}_0$ avec V 2π-périodique, C^∞ et $|V(\xi)| = 1$. On obtient alors

$$m_1(\xi)\,V(\xi) = V(2\xi)\,m_0(\xi)$$

d'une part en écrivant $\hat{\varphi}_1(2\xi)$ de deux manières différentes, et d'autre part

$$e^{-i\xi}\,e^{-2iN_1\xi}\,\bar{m}_1(\xi+\pi)\,V(\xi) = e^{-i\xi}\,e^{-2iN\xi}\,\bar{m}_0(\xi+\pi)$$

en écrivant $\hat{\psi}(2\xi)$ de deux manières différentes.

On a alors

$$V(2\xi)\,\bar{V}(\xi)\,\bar{V}(\xi+\pi)\,m_0(\xi) = \bar{V}(\xi+\pi)\,m_1(\xi) = e^{-2i(N_1-N)\xi}\,m_0(\xi)$$

et

$$V(2\xi)\,\bar{V}(\xi)\,\bar{V}(\xi+\pi)\,m_0(\xi+\pi) = e^{-2i(N_1-N)\xi}\,m_0(\xi+\pi)$$

d'où

$$V(2\xi)\,\bar{V}(\xi)\,\bar{V}(\xi+\pi) = e^{-2i(N_1-N)\xi}\,.$$

En écrivant $V(\xi) = e^{-iM\xi}e^{i\theta(\xi)}$ où θ est C^∞, 2π-périodique à valeurs réelles, on obtient

$$\theta(2\xi) - \theta(\xi) - \theta(\xi+\pi) = -2(N_1-N)\xi + 2K\pi$$

d'où nécessairement $N_1 = N$ et $\theta(\xi) = -2K\pi$, de sorte que $V = e^{-iM\xi}$ et $m_1 = e^{-iM\xi}m_0$.

L'unicité est donc prouvée. Changer m_0 en $m_0\,e^{-iM\xi}$ revient à changer φ_0 en $\varphi_0(x-M)$, ce qui est bien un "invariant" de la base $(\psi(x-k))_{k\in\mathbb{Z}}$. Le fait que $\int x\,|\psi(x)|^2\,dx = N+1/2$ est alors bien connu (*cf.* [22] par exemple).

b) implique *a*) est classique: le fait que ψ est alors l'ondelette d'une base orthonormée $(\psi_{j,k})$ est assuré par le Théorème d'Albert Cohen [5], le fait que ψ est C^∞ à décroissance rapide est démontré par exemple dans [19] et le fait que ψ est H^ε pour un $\varepsilon > 0$ peut être trouvé dans [13].

V. Contre-exemples.

Contre-exemple n° 1.

$$V = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp} \hat{f} \subset [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]^n\}$$

est stable par translation (puisque $\widehat{f(x-y)}(\xi) = e^{-iy\xi}\hat{f}(\xi))$, et donc en particulier par translation entière. Cependant il ne contient pas de fonction f telle que la famille $(f(x-k))_{k\in\mathbb{Z}^n}$ soit une famille de Riesz. En effet, il est clair que $C(f,f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\hat{f}(\xi + 2k\pi)|^2$ s'annule sur $[-\pi,\pi]^n \backslash [-\pi/2, +\pi/2]^n$. A fortiori V n'a pas de base de Riesz de la forme $(\varphi_\delta(x-k))_{\delta\in\Delta,\, k\in\mathbb{Z}^n}$.

On remarquera que la projecteur orthogonal sur V est l'opérateur P défini par $\widehat{Pf} = \chi_{[-\pi/2,\pi/2]^n}\hat{f}$ et donc

$$Pf(x) = p(x) * f(x)\,, \qquad \text{avec } p(x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\sin \pi x_i/2}{\pi x_i}\,.$$

En particulier

$$p(x) \in L^2\left((1+|x_1|)^{\alpha_1} \dots (1+|x_n|)^{\alpha_n}\right) dx$$

si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont tous < 1. Si on avait eu

$$p(x) \in L^2\left((1+|x_1|)^{\alpha_1} \dots (1+|x_n|)^{\alpha_n}\right) dx$$

avec $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 1$, le poids $\omega = \prod_1^N (1+|x_i|)^{\alpha_i}$ serait un poids de Beurling et V aurait eu une base de Riesz invariante par translations entières.

Contre-exemple n° 2.

On considère l'ondelette ψ et la fonction d'échelle associée φ de P. G. Lemarié et Y. Meyer [17]: φ et ψ sont dans la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, $\operatorname{supp}\hat{\varphi} \subset [-4\pi/3, 4\pi/3]$, $\hat{\varphi} = 1$ sur $[-2\pi/3, 2\pi/3]$ et est > 0 sur $]-4\pi/3, 4\pi/3[$ et enfin $\operatorname{supp}\hat{\psi} = [-8\pi/3, -2\pi/3] \cup [2\pi/3, 8\pi/3]$.

On considère alors la base d'ondelettes orthonormées de $L^2(\mathbb{R}^2)$

$$(\psi_{\varepsilon,j,k} = 2^j \psi_\varepsilon(2^j x - k))_{1\le\varepsilon\le 3,\, j\in\mathbb{Z},\, k\in\mathbb{Z}^2}$$

avec $\psi_1 = \psi \otimes \varphi$, $\psi_2 = \varphi \otimes \psi$ et $\psi_3 = \psi \otimes \psi$. La fonction $\varphi \otimes \varphi$ est une fonction d'échelle associée à cette base.

Maintenant on considère l'opérateur unitaire U défini par

$$\widehat{Uf}(\xi, \eta) = \frac{\xi + i\eta}{|\xi + i\eta|} \hat{f}(\xi, \eta). \tag{34}$$

U est un opérateur unitaire de L^2 qui vérifie: $U\big(f(x-h)\big) = \big(Uf\big)(x-h)$ pour tout $f \in L^2$ et tout $h \in \mathbb{R}^2$, et $U\big(f(\lambda x)\big) = \big(Uf\big)(\lambda x)$ pour tout $f \in L^2$ et tout $\lambda > 0$. En particulier, les fonctions $U\psi_\varepsilon$ sont les ondelettes d'une base d'ondelettes orthonormées de $L^2(\mathbb{R}^2)$ et $U(\varphi \otimes \varphi)$ en est une fonction d'échelle associée.

Y. Meyer a montré que, bien que les fonctions $U\psi_\varepsilon$ soient dans la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ des fonctions C^∞ à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées, elles n'admettent pas de fonction d'échelle associée Φ avec $\Phi \in L^1$.

En effet, si une telle fonction Φ existait, on aurait que $\hat{\Phi}$ est continue et que

$$\hat{\Phi} = m(\xi, \eta) \frac{\xi + i\eta}{|\xi + i\eta|} \hat{\varphi}(\xi) \hat{\varphi}(\eta) \qquad \text{p.p.}$$

avec

$$m(\xi, \eta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \Omega(\xi + 2k\pi, \eta + 2\ell\pi)$$

en posant

$$\Omega(\xi, \eta) = \hat{\Phi}(\xi, \eta) \frac{\xi - i\eta}{|\xi + i\eta|} \hat{\varphi}(\xi) \hat{\varphi}(\eta).$$

La fonction m devrait vérifier, pour que Φ soit fonction d'échelle,

$$\inf \operatorname{ess} |m(\xi, \eta)| > 0.$$

On pose alors

$$\theta(\xi, \eta) = \frac{m(\pi, \pi)}{m(\pi, \eta)\, m(\xi, \pi)} \frac{\hat{\Phi}(\xi, \eta)}{\hat{\varphi}(\xi) \hat{\varphi}(\eta)}. \tag{35}$$

Alors

i) θ est continue de $[-\pi, \pi]^2$ dans $\mathbb{C}$: cela vient de ce que m est continue en dehors de $2\pi\mathbb{Z}^2$ et que $\hat{\varphi}$ ne s'annule pas sur $[-\pi, \pi]$.

ii) θ ne s'annule pas sur $[-\pi,\pi]^2$: pour tout $(\xi,\eta)\in[-\pi,\pi]^2$,

$$\theta(\xi,\eta)\neq 0\,.$$

iii) $\theta(\xi,\eta)=\xi+i\eta/|\xi+i\eta|$ pour (ξ,η) sur le bord de $[-\pi,\pi]^2$.

Or il est facile de vérifier que les points i), ii) et iii) contredisent le Théorème de Brouwer: si

$$\gamma(\xi,\eta)=\frac{\xi+i\eta}{|\xi+i\eta|}\sup\left\{\frac{|\xi|}{\pi},\frac{|\eta|}{\pi}\right\}\,,$$

γ est un homéomorphisme de $[-\pi,\pi]^2$ sur le disque unité $\mathbb{D}$ de $\mathbb{C}$; on pose alors

$$\tilde{\theta}(z)=-\frac{\theta(\gamma^{-1}(z))}{|\theta(\gamma^{-1}(z))|}\;;$$

c'est une fonction continue de $\mathbb{D}$ dans $\partial\mathbb{D}$ qui vérifie $\tilde{\theta}(z)=-z$ sur $\partial\mathbb{D}$; elle ne peut donc pas avoir de point fixe, en contradiction avec le Théorème de Brouwer.

Il n'y a donc pas de fonction d'échelle intégrable associée aux $U\psi_\varepsilon$.

Contre-exemple n° 3.

L'idée de ce contre-exemple est due à J.-L. Journé. On définit

$$E=[-\frac{8\pi}{7},-\frac{4\pi}{7}]\cup[\frac{4\pi}{7},\frac{6\pi}{7}]\cup[\frac{24\pi}{7},\frac{32\pi}{7}]$$

et ψ définie par $\hat{\psi}=\chi_E(\xi)$. On vérifie immédiatement que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{\psi}(\xi+2k\pi)=1\qquad\text{p.p.}$$

Il est alors immédiat de vérifier que $(2^{j/2}\psi(2^jx-k))_{j,k\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de L^2.

Si V_0 est l'espace engendré par les $\psi_{\ell,k}$, $\ell<0$, il est immédiat qu'une fonction de V_0 a son support contenu dans l'adhérence de

$$\bigcup_{\ell<0}\operatorname{supp}\hat{\psi}(\frac{\xi}{2^\ell})\,,$$

et donc dans

$$[-\frac{4\pi}{7}, -\frac{4\pi}{7}] \cup [\frac{6\pi}{7}, \frac{8\pi}{7}] \cup [\frac{12\pi}{7}, \frac{16\pi}{7}] = F.$$

Or si $\operatorname{supp} \hat{f} \subset F$, on a

$$C(f,f) = \sum_{k \in 2\pi\mathbb{Z}} |\hat{f}(\xi + 2k\pi)|^2$$

nulle sur $[8\pi/7, 10\pi/7]$, de sorte que V_0 ne contient pas de famille de Riesz de la forme $(f(x-k))_{k\in\mathbb{Z}}$, et a fortiori n'a pas de base de Riesz invariante par translation entière.

On remarquera que $x^k\,\hat{\psi}$ est de carré intégrable pour tout k, tandis que $|x|^\varepsilon \psi$ n'est de carré intégrable que si $\varepsilon < 1/2$. Si $|x|^\varepsilon \psi$ avait été de carré intégrable pour un $\varepsilon > 1/2$, nos résultats auraient impliqué l'existence d'une fonction d'échelle φ associée à ψ. Notre critère est donc optimal.

Annexe A: Poids et algébres de Beurling.

Nous présentons dans cette annexe quelques résultats classiques sur les poids de Beurling.

Rappelons qu'un *poids de Beurling* [4] est une fonction positive ω sur $\mathbb{R}^n$ telle que pour deux constantes C et M positives on ait

i) pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $1C \leq \omega(x) \leq C\,(1 + \|x\|)^M$,

ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{\omega(x)} < +\infty$,

iii) pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\omega(x-y)}\,\frac{1}{\omega(y)}\,dy \leq C\,\frac{1}{\omega(x)}$,

iv) pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\omega(x+y) \leq C\,\omega(x)\,\omega(y)$.

On commencera par remarquer qu'on peut discrétiser ces conditions de la manière suivante:

Lemme 12. *ω est un poids de Beurling si et seulement si elle vérifie pour deux constantes C et M strictement positives*

j) *pour tout $k \in \mathbb{Z}^n$, $0 < \omega(k) \leq C\,(1 + \|k\|)^M$,* jj) $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \frac{1}{\omega(k)} < +\infty$,

jjj) *pour tout* $k \in \mathbb{Z}^n$, $\sum_{p\in\mathbb{Z}^n} \frac{1}{\omega(k-p)} \frac{1}{\omega(p)} \leq C \frac{1}{\omega(k)}$,

jv) *pour tout* $y \in [0,1]^n$, *pour tout* $k \in \mathbb{Z}^n$,

$$\frac{1}{C}\,\omega(k) \leq \omega(k+y) \leq C\,\omega(k).$$

Ce lemme est immédiat. Une suite $(\omega(k))_{k\in\mathbb{Z}^n}$ qui vérifie les conditions j) à jjj) sera appelée un *poids de Beurling sur* $\mathbb{Z}^n$.

A.1: Les algèbres de Beurling.

A un poids de Beurling ω sur $\mathbb{R}^n$ on associe les espaces fonctionnels suivants

- $L^2_\omega = L^2(\omega\,dx)$ muni de la norme $\|f\|_{L^2_\omega} = \|\sqrt{\omega} f\|_2$,
- $H_\omega = \{f \in L^2 :$ il existe $g \in L^2_\omega,\ f = \hat{g}\}$ muni de la norme

$$\|f\|_{H_\omega} = \|g\|_{L^2_\omega} \qquad (f = \hat{g}),$$

- $M_\omega = \{m \in L^\infty :$ pour tout $f \in H_\omega,\ mf \in H_\omega\}$ muni de la norme

$$\|m\|_{H_\omega} = \sup_{\|f\|_{H_\omega}\leq 1} \|mf\|_{H_\omega} .$$

Si $(\omega(k))_{k\in\mathbb{Z}^n}$ est un poids de Beurling sur $\mathbb{Z}^n$, on lui associe l'espace fonctionnel suivant (en notant $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n$):

- $K_\omega = \{f \in L^2(\mathbb{T}^n) :\ f = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k e^{-ikx},\ \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |a_k|^2\omega(k) < +\infty\}$,

muni de la norme

$$\|\sum_k a_k e^{-ikx}\|_{K_\omega} = \Big(\sum_k |a_k|^2\omega(k)\Big)^{1/2}.$$

Enfin on note $C^0(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}^n$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. C'est une algèbre de Banach pour la multiplication ponctuelle des fonctions. Les *algèbres de Wiener* $A(\mathbb{R}^n)$ et $A(\mathbb{T}^n)$ sont les sous-algèbres de $C^0(\mathbb{R}^n)$ définies par

- $A(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^0(\mathbb{R}^n) :$ il existe $g \in L^1,\ f = \hat{g}\}$

muni de la norme

$$\|f\|_{A(\mathbb{R}^n)} = \|g\|_1 \ ,$$

- $A(\mathbb{T}^n) = \{f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} a_k e^{-ikx} : \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |a_k| \leq +\infty\}$

muni de la norme

$$\| \sum_k a_k e^{-ikx} \|_{A(\mathbb{T}^n)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |a_k| \ .$$

Proposition 5.

a) Les espaces L^2_ω, H_ω, M_ω ou K_ω sont des espaces de Banach.

b) L^2_ω s'injecte continûment dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ et c'est une sous-algèbre de $L^1(\mathbb{R}^n)$ pour la convolution.

c) H_ω s'injecte continûment dans $A(\mathbb{R}^n)$ et c'est une sous-algèbre de $A(\mathbb{R}^n)$ pour la multiplication ponctuelle.

d) M_ω s'injecte continûment dans $C^0(\mathbb{R}^n)$ et c'est une sous-algèbre de $C^0(\mathbb{R}^n)$ pour la multiplication ponctuelle.

e) K_ω s'injecte continûment dans $A(\mathbb{T}^n)$ et c'est une sous-algèbre de $A(\mathbb{T}^n)$ pour la multiplication ponctuelle.

f) Si ω est un poids de Beurling sur $\mathbb{R}^n$, alors $K_\omega \subset M_\omega$ et les normes $\|\cdot\|_{K_\omega}$ et $\|\cdot\|_{M_\omega}$ sont équivalentes sur K_ω.

DÉMONSTRATION. *a)* Ce point est évident pour L^2_ω, H_ω et K_ω (qui sont des espaces de Hilbert). Pour le cas de M_ω, on commence par vérifier que si $m \in M_\omega$ alors d'une part $\|m\|_{M_\omega} < +\infty$ de sorte que $\|\cdot\|_{M_\omega}$ définit bien une norme sur M_ω et d'autre part que M_ω s'injecte continûment dans $C^0(\mathbb{R}^n)$.

En effet, si $m \in M_\omega$ alors l'application $f \mapsto mf$ est continue sur H_ω d'après le Théorème du Graphe Fermé: si $f_n \mapsto f$ dans H_ω et $mf_n \mapsto g$ dans H_ω alors $mf_n \mapsto mf$ dans L^2 et $mf_n \to g$ dans L^2, de sorte que $g = mf$ dans L^2 et donc dans H_ω. Cela montre que $\|m\|_{M_\omega} < +\infty$. Par ailleurs, si $\varphi \in C^\infty_C$ et $\varphi(0) = 1$, il suffit de remarquer que $\varphi(x - x_0) \in H_\omega$ quel que soit x_0, que $\|\varphi(x - x_0)\|_{H_\omega} = \|\varphi\|_{H_\omega}$, que

$L^2_\omega \subset L^1$ (*cf.* *b*)) et donc que $H_\omega \subset A(\mathbb{R}^n) \subset C^0(\mathbb{R}^n)$ pour conclure que

$$\begin{aligned} |m(x_0)| = |m(x_0)\varphi(0)| &\leq C\|m(x)\varphi(x-x_0)\|_{H_\omega} \\ &\leq C\|\varphi(x-x_0)\|_{H_\omega}\|m\|_{M_\omega} \\ &\leq C\|\varphi\|_{H_\omega}\|m\|_{M_\omega} \end{aligned}$$

et donc que M_ω s'injecte continûment dans $C^0(\mathbb{R}^n)$.

Pour vérifier que M_ω est complet, il suffit de vérifier que pour toute suite (m_n) de fonctions telle que $\sum_{m\in\mathbb{N}} \|m_n\|_{M_\omega} < +\infty$ la série $\sum_n m_n$ converge dans M_ω. D'après les remarques précédentes, on voit que $\sum_n m_n$ converge dans $C^0(\mathbb{R}^n)$; soit m sa limite dans $C^0(\mathbb{R}^n)$. Si $f \in H_\omega$, on a $mf = \sum_n m_n f$ avec

$$\sum_n \|m_n f\|_{H_\omega} \leq \|f\|_{H_\omega} \sum_{n\in\mathbb{N}} \|m_n\|_{M_\omega} \,.$$

Cela suffit pour conclure que $m \in M_\omega$ et que $\sum m_n$ converge dans M_ω.

b) Par Cauchy-Schwartz

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_{L^2_\omega} \Big(\int \frac{dx}{\omega(x)}\Big)^{1/2}$$

et donc $L^2_\omega \subset L^1$. Par ailleurs

$$\begin{aligned} &\int \Big| \int f(x-y)\, g(y)\, dy \Big|^2 \omega(x)\, dx \\ &\qquad \leq \iint |f(x-y)|^2\, \omega(x-y)\, |g(y)|^2\, \omega(y)\, dy \\ &\qquad\qquad \cdot \int \frac{1}{\omega(x-y)}\, \frac{1}{\omega(y)}\, dy\, \omega(x)\, dx \\ &\qquad \leq C \iint |f(x-y)|^2\, \omega(x-y)\, |g(y)|^2\, \omega(y)\, dy\, dx \\ &\qquad \leq C\, \|f\|^2_{L^2_\omega}\, \|g\|^2_{L^2_\omega} \end{aligned}$$

et donc $f * g \in L^2_\omega$ si $f, g \in L^2_\omega$.

c) est immédiat, les propriétés de H_ω se déduisant de celles de L^2_ω par trasformation de Fourier.

d) est immédiat puisque l'inclusion $M_\omega \subset C^0(\mathbb{R}^n)$ a déjà été établie et que M_ω est stable par multiplication ponctuelle par définition même de M_ω.

e) se montre de manière analogue à b):

$$\sum_k |a_k| \leq \Big(\sum_k |a_k|^2 \omega(k)\Big)\Big(\sum_k \frac{1}{\omega(k)}\Big)^{1/2}$$

de sorte que $K_\omega \subset A(\mathbb{T}^n)$. De plus,

$$\Big(\sum_k a_k\, e^{-ikx}\Big)\Big(\sum_k b_k\, e^{-ikx}\Big) = \sum_k \Big(\sum_p a_{k-p}\, b_p\Big) e^{-ikx}$$

et

$$\begin{aligned}\sum_k \Big|\sum_p a_{k-p}\, b_p\Big|^2 \omega(k) &\leq \sum_k \Big(\sum_p |a_{k-p}|^2 \omega(k-p)\, |b_p|^2 \omega(p)\Big) \\ &\quad \cdot \Big(\sum_k \frac{1}{\omega(k-p)}\, \frac{1}{\omega(p)}\Big)\omega(k) \\ &\leq C \sum_k \Big(\sum_p |a_{k-p}|^2 \omega(k-p)\, |b_p|^2 \omega(p)\Big) \\ &\leq \Big(\sum_k |a_k|^2\, \omega(k)\Big)\Big(\sum_k |b_k|^2\, \omega(k)\Big)\end{aligned}$$

de sorte que $fg \in K_\omega$ si $f, g \in K_\omega$.

Enfin f) est facile à vérifier. En effet, si $f \in L^2_\omega$ et $g = \sum_k a_k\, e^{-ikx} \in K_\omega$ il s'agit de vérifier que la fonction h, définie par $\hat{h}(\xi) = g(\xi)\hat{f}(\xi)$, est dans L^2_ω. On commence par remarquer que $\|f\|_{L^2(\omega)}$ est équivalente à

$$\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \Big(\int_{k+[0,1]^n} |f(y)|^2\, dy\Big)\, \omega(k)\Big)^{1/2}$$

puisque $\omega(k+y) \approx \omega(k)$ pour $y \in [0,1]^n$. Or $h(x) = \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} a_p\, f(x-p)$, de sorte que par Minkowski:

$$\Big(\int_{k+[0,1]^n} |h(y)|^2\, dy\Big)^{1/2} \leq \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} |a_p| \Big(\int_{k-p+[0,1]^n} |f(y)|^2\, dy\Big)^{1/2}.$$

La même démonstration qu'au point e) permet donc de conclure que $h \in L^2_\omega$. On obtient ainsi que K_ω s'injecte continûment dans M_ω.

Il reste alors à vérifier que la norme $\|\cdot\|_{K_\omega}$ se contrôle par la norme $\|\cdot\|_{M_\omega}$. Pour cela, on note χ la fonction caractéristique de $[0,1]^n$. On a $\chi \in L^2_\omega$ de sorte que si $\sum a_k e^{-ikx} \in K_\omega$ on a

$$\begin{aligned}\sum_k |a_k|^2 \omega(k) &\leq C \, \|\sum_k a_k \, \chi(x-k)\|^2_{L^2_\omega} \\ &\leq C \, \|\chi\|^2_{L^2_\omega} \, \|\sum_k a_k \, e^{-ikx}\|^2_{M_\omega}\end{aligned}$$

et la proposition est donc entièrement démontrée.

A.2: Un critère d'appartenance à $\mathbf{M}_\omega$.

Nous allons donner un critère simple d'appartenance à l'espace des multiplicateurs M_ω. Nous utiliserons pour cela la caractérisation de M_ω donnée dans le livre de Coifman et Meyer ([8, Chapitre I, Proposition 1]).

Lemme 13. *Soit ω un poids de Beurling sur $\mathbb{R}^n$ et φ une fonction C^∞ à support compact dans $\mathbb{R}^n$ telle que $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \varphi(x-k) = 1$. Alors pour une fonction m bornée les assertions suivantes sont équivalentes:*

i) $m \in M_\omega$.

ii) *Pour tout $k \in \mathbb{Z}^n$,*

$$m(x)\,\varphi(x-k) \in H_\omega \qquad \textit{et} \qquad \sup_{k\in\mathbb{Z}^n} \|m(x)\,\varphi(x-k)\|_{H_\omega} < +\infty\,.$$

De plus les normes $\|m\|_{M_\omega}$ et $\sup_{k\in\mathbb{Z}^n} \|m(x)\,\varphi(x-k)\|_{H_\omega}$ sont équivalentes.

Le critère que nous utiliserons sera alors le suivant:

Lemme 14. *Si M est un exposant tel que $\omega(x) \leq C\,(1+\|x\|)^M$ et si N est un nombre entier tel que $N > (n+M)/2$, alors une condition suffisante pour qu'une fonction m appartienne à M_ω est que m soit bornée ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre N. De plus, on a*

$$\|m\|_{M_\omega} \leq C \sum_{|\alpha|\leq N} \left\| \frac{\partial^\alpha m}{\partial x^\alpha} \right\|_\infty . \tag{36}$$

DÉMONSTRATION. Il s'agit d'estimer $\sup_k \|m(x)\,\varphi(x-k)\|_{H_\omega}$; or on a

$$\|m(x)\,\varphi(x-k)\|_{H_\omega} = \|m(x+k)\,\varphi(x)\|_{H_\omega}\,.$$

Si on pose $f_k \in L^2$ comme $\hat{f}_k = m(x+k)\,\varphi(x)$, on a $\operatorname{supp} \hat{f}_k \subset B(0,R)$ pour un R indépendant de k et de m et

$$\sum_{|\alpha|\le N} \left\|\frac{\partial^\alpha \hat{f}_k}{\partial x^\alpha}\right\|_\infty \le C \sum_{|\alpha|\le N} \left\|\frac{\partial^\alpha m}{\partial x^\alpha}\right\|_\infty$$

pour une constante C indépendante de k et de m.

On obtient alors par transformation de Fourier inverse

$$|f_k(x)| \le C\,(1+\|x\|)^{-N} \sum_{|\alpha|\le N} \left\|\frac{\partial^\alpha m}{\partial x^\alpha}\right\|_\infty$$

et le majorant est dans L^2_ω dès que $2N - M > n$.

A.3. Le Lemme de Wiener pour l'algèbre de Beurling K_ω.

Nous rappelons ici un calcul classique pour les sous-algèbres de $A(\mathbb{T}^n)$. Nous empruntons notre démonstration au livre de Rudin [21, Chapitre 11].

Lemme 15 (Lemme de Wiener). *Soit B un espace de Banach complexe de fonctions continues sur $[0,2\pi]^n$ tel que*

i) $B \subset A(\mathbb{T}^n)$ *et* $\|f\|_{A(\mathbb{T}^n)} \le C\,\|f\|_B$,

ii) *pour tout* $f \in B$, *pour tout* $g \in B$, $fg \in B$,

iii) *Les polynômes trigonométriques sont denses dans* B,

iv) *Ils existent* C, M, *telles que pour tout* $k \in \mathbb{Z}^n$,

$$\|e^{ikx}\|_B \le C\,(1+\|k\|)^M\,.$$

Dans ces conditions, si $f \in B$ *et si pout tout* $x \in [0,2\pi]^n$, $f(x) \neq 0$ *alors* $1/f \in B$.

DÉMONSTRATION. On commence par remarquer que B est une algèbre de Banach commutative. En effet, à g fixé, l'application $f \mapsto fg$ est continue d'après le Théorème du Graphe Fermé (si $f_n \to f$ dans B et $f_n g \to h$ dans B, alors $f_n g \to fg$ dans $A(\mathbb{T}^n)$ et $f_n g \to h$ dans $A(\mathbb{T}^n)$, d'où $f = fg$ dans $A(\mathbb{T}^n)$ donc dans B); comme l'application $g \mapsto fg$ est également continue, on en conclut que

$$\sup\{\|fg\|_B : \ \|g\|_B \leq 1\} < +\infty$$

pour tout f et donc que les applications $f \mapsto fg$, $g \in B$ et $\|g\|_B \leq 1$ sont équicontinues d'après le Théorème de Banach-Steinhaus. Cela nous permet de conclure que, pour une constante C indépendante de f et de g,

$$\|fg\|_B \leq C \, \|f\|_B \, \|g\|_B \, .$$

D'après un théorème général sur les algèbres de Banach complexes commutatives, on sait que f est inversible dans B si et seulement si pour tout homomorphisme complexe h de B dans $\mathbb{C}$ on a $h(f) \neq 0$. Le lemme de Wiener se ramène alors à montrer que tout homomorphisme h est de la forme $h(f) = f(x_0)$ pour un $x_0 \in [0, 2\pi]^n$.

Pour cela, on note g_r l'exponentielle $g_r(x) = e^{ix_r}$ $(x = (x_1, \ldots, x_n))$ pour $r = 1, \ldots, n$. On a

$$|h(g_r)|^n = |h(g_r^n)| \leq C \, \|g_r^n\|_B \leq C'(1+n)^M \, ;$$

cela entraîne que $|h(g_r)| \leq 1$; on a de même $|h(1/g_r)| \leq 1$ et donc $|h(g_r)| = 1$. Il existe alors $y_r \in [0, 2\pi]$ tel que $h(g_r) = e^{iy_r}$. Si on pose $x_0 = (y_1, \ldots, y_n)$ on a $h(g_r) = g_r(x_0)$ pour $r = 1, \ldots, n$. Cette propriété passe aux polynômes trigonométriques pour des raisons algébriques puis à toute fonction de B par densité des polynômes trigonométriques dans B. Le Lemme de Wiener est alors démontré.

Le Lemme de Wiener s'applique en particulier à l'algèbre $B = K_\omega$, où ω est un poids de Beurling sur $\mathbb{Z}^n$. En corollaire, on obtient

Lemme 16. *Soit ω un poids de Beurling sur $\mathbb{R}^n$ tel que $\omega(x) = \omega(-x)$. Soit $(f_\delta)_{1 \leq \delta \leq D}$ une famille de fonctions dans L^2_ω. Alors*

i) *la famille $(f_\delta(x-k))_{1 \leq \delta \leq D,\, k \in \mathbb{Z}^n}$ est presque-orthogonale dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ et la matrice d'auto-corrélation de f_δ, $1 \leq \delta \leq D$, est à coefficients dans K_ω,*

ii) *si la famille* $(f_\delta(x-k))_{1\le\delta\le D,\, k\in\mathbb{Z}^n}$ *est une base de Riesz d'un sous-espace* V *de* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *alors la base duale* $(f_\delta^*(x-k))$ *de* $(f_\delta(x-k))_{1\le\delta\le D,\, k\in\mathbb{Z}^n}$ *dans* V *et la base orthonormée* $(\psi_\delta(x-k))$ *de* V *obtenue à partir de* $(f_\delta(x-k))$ *par le procédé d'orthonormalisation de Gram du Lemme 3 vérifient* $f_\delta^* \in L^2_\omega$ *et* $\psi_\delta \in L^2_\omega$.

DÉMONSTRATION. Pour vérifier le point i), on note

$$\varepsilon_p(f) = \left[\int_{p+[0,1]^n} |f(x)|^2\,dx\right]^{1/2}$$

et on remarque comme précédemment que la norme $\|f\|_{L^2_\omega}$ est équivalente à

$$\Big(\sum_{p\in\mathbb{Z}^n} \varepsilon_p(f)^2\,\omega(p)\Big)^{1/2}.$$

Or on a

$$\begin{aligned}|\langle f_\delta, f_{\delta'}(x-k)\rangle| &\le \sum_{p\in\mathbb{Z}^n}\int_{p+[0,1]^n} |f_\delta(x)|\,|f_{\delta'}(x-k)|\,dx\\ &\le \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} \varepsilon_p(f_\delta)\,\varepsilon_{p-k}(f_{\delta'})\,.\end{aligned}$$

Comme les coefficients de la matrice d'auto-corrélation sont donnés par

$$C(f_\delta, f_{\delta'}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle f_\delta, f_{\delta'}(x-k)\rangle\, e^{-ik\xi}\,,$$

on voit que ces coefficients sont bien dans K_ω (d'après la démonstration du point *e*) de la Proposition 5). En particulier, ils sont bornés et la famille $(f_\delta(x-k))_{1\le\delta\le D,\, k\in\mathbb{Z}^n}$ est presque-orthogonale dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Le point ii) est alors immédiat. La matrice d'auto-corrélation M des f_δ est à coefficients dans l'algèbre K_ω; de plus son déterminant s'inverse dans K_ω d'après le Lemme de Wiener. On en conclut que l'inverse de cette matrice est à coefficients dans K_ω. On vérifie de même que la racine carrée inverse de M est à coefficients dans K_ω, puisque

$$M^{-1/2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} (I + t^2 M)^{-1}\,dt\,.$$

Comme K_ω est inclus dans M_ω, on obtient finalement $f_\delta^* \in L^2_\omega$ et $\psi_\delta \in L^2_\omega$. Le lemme est alors démontré.

Annexe B: Géométrie des dilatations.

Pour étudier la géométrie introduite par l'opération d'une dilatation A sur $\mathbb{R}^n$, nous avons introduit la notion de pseudo-norme; rappelons que selon la Définition 3 une *pseudo-norme* sur $(\mathbb{R}^n, A)$ est une fonction ρ définie sur $\mathbb{R}^n$ telle que

a) ρ est C^∞ sur $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ et continue en 0,

b) pour tout $x \neq 0$, $\rho(x) > 0$ et $\rho(x) = \rho(-x)$,

c) $x \in \mathbb{R}^n$, $\rho(Ax) = |\det A|\, \rho(x)$.

Nous commençons par vérifier que les pseudo-normes existent et sont uniques à un ordre de grandeur près de sorte qu'on pourra parler de "la" pseudo-norme de $(\mathbb{R}^n, A)$.

Lemme 17.

i) *Il existe des pseudo-normes sur* $(\mathbb{R}^n, A)$.

ii) *Si* ρ_1 *et* ρ_2 *sont deux pseudo-normes sur* $(\mathbb{R}^n, A)$, *il existe une constante* $C > 0$ *telle que pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$ *on ait*

$$\frac{1}{C}\, \rho_1(x) \leq \rho_2(x) \leq C\, \rho_1(x)\,.$$

En effet, si $1 < \alpha < \beta$ sont tels que les valeurs propres de A aient leurs modules dans l'intervalle $]\alpha, \beta[$, il existe une constante $C_0 > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $k \geq 0$,

$$\frac{1}{C_0}\, \alpha^k \|x\| \leq \|A^k x\| \leq C_0\, \beta^k \|x\|\,. \tag{37}$$

Si $k \leq 0$, on a alors

$$\frac{1}{C_0}\, \beta^k \|x\| \leq \|A^k x\| \leq C_0\, \alpha^k \|x\|\,.$$

On fixe une fonction $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\varphi(x) = \varphi(-x)$,

$$\operatorname{supp} \varphi \subset \{x :\ D_1 \leq \|x\| \leq D_2\}$$

et $\varphi \equiv 1$ sur $\{x :\ C_1 \leq \|x\| \leq C_2\}$ où $C_2 > \beta C_1 C_0$.

La fonction

$$\rho(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\det A|^{-k} \varphi(A^k x)$$

est alors une somme localement finie sur $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ de fonctions C^∞ (car $\lim_{k\to-\infty} A^k x = 0$ et $\lim_{k\to+\infty} A^k x = +\infty$ d'après (37)), de sorte qu'elle est C^∞ sur $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$; elle est continue en 0 car elle est normalement sommable au voisinage de 0. Il est immédiat que $\rho(Ax) = |\det A|\, \rho(x)$. Elle vérifie $\rho(x) = \rho(-x)$. Il ne reste qu'à vérifier que $\rho(x) \neq 0$. Si $x \neq 0$, il existe k tel que $\|A^k x\| \leq C_1$ puisque $A^k x \to 0$ quand $k \to -\infty$, et pour k assez grand $\|A^k x\| > C_1$ puisque $A^k x \to +\infty$ quand $k \to +\infty$. Si

$$k_0 = \max\{k :\ \|A^k x\| \leq C_1\},$$

on a

$$C_1 < \|A^{k_0+1} x\| \leq C_0\, \beta \|A^{k_0} x\| \leq C_0\, \beta\, C_1 < C_2$$

et donc

$$\rho(x) \geq |\det A|^{-k_0-1} > 0.$$

Si ρ_1 est une autre pseudo-norme sur $(\mathbb{R}^n, A)$, on remarque que

$$\{x \in \mathbb{R}^n :\ 1 \leq \rho(x) \leq |\det A|\}$$

est fermé (puisque ρ est continue) et borné (puisque si $\|x\| > \beta^2 C_1 C_0$ on a $\|A^{-2}x\| > C_1$ de sorte que $k_0(x) \leq -3$ et $\rho(x) \geq |\det A|^2$) donc compact; en particulier puisque ρ_1 est continue et > 0 sur ce compact, on a pour $1 \leq \rho(x) \leq |\det A|$,

$$\frac{1}{C} \leq \rho_1(x) \leq C,$$

d'où si x est quelconque $\neq 0$ et si k est tel que $|\det A|^k \leq \rho(x) \leq |\det A|^{k+1}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{C}\,\rho(x) &= \frac{1}{C}\,|\det A|^k \rho(A^{-k}x)\\ &\leq |\det A|^{k+1} \rho_1(A^{-k}x)\\ &= |\det A| \rho_1(x)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\rho_1(x) &= |\det A|^k \rho_1(A^{-k}x)\\ &\leq C\,|\det A|^k\\ &\leq C\,|\det A|^k \rho(A^{-k}x)\\ &= C\,\rho(x)\,.\end{aligned}$$

Le Lemme 17 est donc démontré.

EXEMPLE 1. Si $A = \lambda I$ avec $\lambda > 1$, la pseudo-norme est $\rho(x) = \|x\|^n$.

B.1. Propriétés de la pseudo-norme.

- Comparaison avec la norme usuelle:

Lemme 18. *Il existe deux constantes α_0 et α_1 telles que $0 < \alpha_0 < \alpha_1$ et une constante M_0 telle que*

i) $\dfrac{1}{M_0}\,\|x\|^{\alpha_1} \leq \rho(x) \leq M_0\,\|x\|^{\alpha_0}$ si $\|x\| \leq 1$,

ii) $\dfrac{1}{M_0}\,\|x\|^{\alpha_0} \leq \rho(x) \leq M_0\,\|x\|^{\alpha_1}$ si $\|x\| \geq 1$.

En effet, sur $K = \{x :\ 1 \leq \|x\| \leq \beta\}$ la norme ρ est bornée et atteint ses bornes $m \leq \rho(x) \leq M$. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ il existe k_0 tel que $\|A^{k_0}x\| \leq 1$ et $\|A^{k_0+1}x\| > 1$ ($k_0 = \max\{k :\ \|A^k x\| \leq 1\}$) et alors

$$\|A^{k_0+1}x\| \leq \beta\,\|A^{k_0}x\| \leq \beta\,,$$

de sorte que l'on a

$$\begin{aligned}m\,|\det A|^{-k_0-1} &\leq |\det A|^{-k_0-1}\rho(A^{k_0+1}x)\\ &= \rho(x)\\ &\leq M\,|\det A|^{-k_0-1}\,.\end{aligned}$$

Si $k_0 \geq 0$, on a

$$\|A^{k_0+1}x\| \in \left[\frac{1}{C_0}\,\alpha^{k_0+1}\|x\|\,,\ C_0\,\beta^{k_0+1}\|x\|\right]$$

et donc
$$\frac{1}{C_0}\,\alpha^{k_0+1}\|x\| \leq \beta \qquad \text{et} \qquad C_0\,\beta^{k_0+1}\|x\| \geq 1\,,$$
d'où
$$m\left(\frac{1}{\beta C_0}\|x\|\right)^{(\log|\det A|)/\log\alpha} \leq \rho(x) \leq M\,(C_0\,\|x\|)^{(\log|\det A|)/\log\beta}$$
tandis que si $k_0 \leq -1$,
$$\|A^{k_0+1}x\| \in \left[\frac{1}{C_0}\,\beta^{k_0+1}\|x\|\,,\ C_0\,\alpha^{k_0+1}\|x\|\right]$$
et donc
$$\frac{1}{C_0}\,\beta^{k_0+1}\|x\| \leq \beta \qquad \text{et} \qquad C_0\,\alpha^{k_0+1}\|x\| \geq 1\,,$$
d'où
$$m\left(\frac{1}{\beta C_0}\,\|x\|\right)^{(\log|\det A|)/\log\beta} \leq \rho(x) \leq M\,(C_0\,\|x\|)^{(\log|\det A|)/\log\alpha}$$
et le lemme est démontré avec
$$\alpha_0 = \frac{\log|\det A|}{\log\beta} \qquad \text{et} \qquad \alpha_1 = \frac{\log|\det A|}{\log\alpha}\,.$$

- Intégrale de Riemann:

Lemme 19.

a) $\displaystyle\int_{\rho(x)\geq 1} \frac{dx}{\rho(x)^\varepsilon} < +\infty$ *si et seulement si* $\varepsilon > 1$.

b) $\displaystyle\int_{\rho(x)\leq 1} \frac{dx}{\rho(x)^\varepsilon} < +\infty$ *si et seulement si* $\varepsilon < 1$.

En effet
$$\begin{aligned}\int_{|\det A|^{k_0}\leq\rho(x)\leq|\det A|^{k_1+1}} \frac{dx}{\rho(x)^\varepsilon} &= \sum_{k_0}^{k_1} \int_{|\det A|^{k}\leq\rho(x)\leq|\det A|^{k+1}} \frac{dx}{\rho(x)^\varepsilon} \\ &= \left(\sum_{k_0}^{k_1} |\det A|^{(1-\varepsilon)k}\right) \int_{1\leq\rho(x)\leq|\det A|} \frac{dx}{\rho(x)}\,.\end{aligned}$$

- Inégalité triangulaire:

Lemme 20. *Il existe une constante* C_1 *telle que pour tous* $x, y \in \mathbb{R}^n$,
$$\rho(x+y) \leq C_1\,(\rho(x) + \rho(y))\,. \tag{38}$$

En effet supposons $\rho(x) \geq \rho(y)$ et $|\det A|^k \leq \rho(x) \leq |\det A|^{k+1}$. Alors

$$\rho(x+y) = |\det A|^k \rho(A^{-k}x + A^{-k}y) \leq \rho(x)\,\rho(A^{-k}x + A^{-k}y)\,.$$

Or

$$\rho(A^{-k}x) \leq |\det A| \qquad \text{et} \qquad \rho(A^{-k}y) \leq \rho(A^{-k}x) \leq |\det A|\,.$$

Comme $K = \{(z,w) :\ \rho(z) \leq |\det A| \text{ et } \rho(w) \leq |\det A|\}$ est compact, ρ est majorée sur K par une constante C_1. On obtient donc

$$\rho(x+y) \leq C_1 \rho(x) \leq C_1\,(\rho(x) + \rho(y))\,.$$

- Croissance de la norme:

Lemme 21. *Il existe une constante C_2 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$,*

$$\rho(\lambda x) \leq C_2\,\rho(x)\,. \tag{39}$$

A nouveau, on fixe k tel que $|\det A|^k \leq \rho(x) \leq |\det A|^{k+1}$; alors

$$C_2 = \sup\left\{\rho(\lambda z) :\ \rho(z) \leq |\det A|,\ 0 \leq \lambda \leq 1\right\};$$

C_2 est bien défini puisque

$$\left\{z :\ \rho(z) \leq |\det A|\right\} \times [0,1]$$

est compact.

- Poids de Beurling:

Lemme 22. *Si $\varepsilon>1$, $\omega(x)=(1+\rho(x))^\varepsilon$ est un poids de Beurling sur $\mathbb{R}^n$.*

En effet, $1 \leq \omega(x)$ et $\omega(x) \leq C\,(1+\|x\|)^{\alpha_1\varepsilon}$ d'après le Lemme 18. $\int(1/\omega)\,dx < +\infty$ d'après le Lemme 14. D'après le Lemme 20, on a

$$\omega(x+y) \leq C\,(\omega(x) + \omega(y)) \leq 2\,C\,\omega(x)\omega(y)\,.$$

Enfin on a

$$\inf\left\{\frac{1}{\omega(y)}, \frac{1}{\omega(x-y)}\right\} \leq 2\,C\,\frac{1}{\omega(x)}\,,$$

et donc
$$\int \frac{1}{\omega(y)}\,\frac{1}{\omega(x-y)}\,dy \le 4\,C \int \frac{dy}{\omega(y)}\,\frac{1}{\omega(x)}\,.$$

B.2. Pseudo-norme et transformation de Fourier.

Nous rappelons quelques propriétés classiques de la transformée de Fourier des distributions homogènes par dilatation. Remarquons d'abord que la transformation de Fourier transforme l'action de la matrice de dilatation A en celle de la transposée $\tilde{A}$ de A

$$\widehat{f(Ax)}(\xi) = |\det A|^{-1} \hat{f}(\tilde{A}^{-1}\xi)\,. \tag{40}$$

$\tilde{A}$ est également une matrice de dilatation et nous appellerons $\tilde{\rho}$ une pseudo-norme associée à $\tilde{A}$.

Une fonction f est homogène de degré λ pour la dilatation A si $f(Ax) = |\det A|^{\lambda} f(x)$. Une distribution T est homogène de degré λ si on a pour tout $\varphi \in C_c^\infty$,

$$\langle T, |\det A|^{-1}\varphi(A^{-1}x)\rangle = |\det A|^{\lambda}\langle T, \varphi\rangle\,.$$

On voit par (21) que la transformée de Fourier d'une distribution homogène de degré λ pour A est une distribution homogène de degré $-1-\lambda$ pour $\tilde{A}$ (et réciproquement, A et $\tilde{A}$ jouant des rôles symétriques).

Nous fixons maintenant une fonction $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ valant 1 au voisinage de 0. Pour $\varepsilon \in]0,1[$ nous notons $\gamma_\varepsilon(x) = \tilde{\rho}(x)^\varepsilon\,\varphi(x)$ et $\delta_\varepsilon(x) = \tilde{\rho}(x)^{-\varepsilon}\,\varphi(x)$. Ce sont deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}^n$ et on note Γ_ε et Δ_ε leurs transformées de Fourier inverses.

Notons α_0 et α_1 les exposants associés à ρ par le Lemme 18 et C_1 et C_2 les constantes associées à ρ par les Lemmes 20 et 21. On a alors le résultat suivant:

Lemme 23. *Pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, il existe une constante C_ε telle que*

i) *pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $|\Gamma_\varepsilon(x)| \le C_\varepsilon\,(1+\rho(x))^{-1-\varepsilon}$,*

ii) *pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $|\Delta_\varepsilon(x)| \le C_\varepsilon\,(1+\rho(x))^{-1+\varepsilon}$,*

iii) *pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ tels que $\rho(y) \le \rho(x)/2C_1$*

$$|\Delta_\varepsilon(x+y) - \Delta_\varepsilon(x)| \le C_\varepsilon\,\rho(y)^{\alpha_0}(1+\rho(x))^{-1+\varepsilon-\alpha_0}\,.$$

DÉMONSTRATION. Les estimations i), ii) et iii) sont évidentes lorsque $\rho(x) \leq 1$. En effet, Γ_ε et Δ_ε sont des fonctions C^∞ bornées ainsi que toutes leurs dérivées (parce qu'elles sont transformées de Fourier de fonctions intégrables à support compact) de sorte que $|\Gamma_\varepsilon(x)| \leq \|\Gamma_\varepsilon\|_\infty$, $|\Delta_\varepsilon(x)| \leq \|\Delta_\varepsilon\|_\infty$ et

$$|\Delta_\varepsilon(x+y) - \Delta_\varepsilon(x)| \leq M_0\, \rho(y)^{\alpha_0} \|\vec{\nabla}\Delta_\varepsilon\|_\infty$$

pour $\|y\| \leq 1$.

Pour vérifier i) avec $\rho(x) > 1$, on introduit la suite $F(N)$, $N \geq 0$, définie par

$$F(N) = |\det A|^{N(1+\varepsilon)} \sup\{|\Gamma_\varepsilon(x)| : \ |\det A|^{N-1} \leq \rho(x) \leq |\det A|^N\}.$$

Montrer i) équivaut à montrer que $F(N)$ reste bornée quand $N \to +\infty$. Or on a la propriété de "presque-homogénéité"

$$\Gamma_\varepsilon(Ax) = |\det A|^{-1-\varepsilon}\Gamma_\varepsilon(x) + \theta_\varepsilon(Ax),$$

avec

$$\theta_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi}\int \tilde{\rho}(z)^\varepsilon\, (\varphi(z) - \varphi(\tilde{A}z))\, e^{izx}\, dz.$$

θ_ε est la transformée de Fourier d'une fonction C^∞ à support compact; c'est donc une fonction C^∞ à décroissance rapide et on a pour tout $Q > 0$

$$|\Gamma_\varepsilon(Ax)| \leq |\det A|^{-1-\varepsilon}|\Gamma_\varepsilon(x)| + C_Q\, \rho(Ax)^{-Q},$$

d'où si $Q > 1 + \varepsilon$

$$F(N+1) \leq F(N) + C_Q\, |\det A|^{N(1+\varepsilon-Q)}$$

ce qui entraîne

$$F(N) \leq F(0) + C_Q\, \frac{1}{1 - |\det A|^{1+\varepsilon-Q}}.$$

On a donc montré i).

La majoration de $|\Delta_\varepsilon(x)|$ par $C_\varepsilon\,(1+\rho(x))^{-1+\varepsilon}$ se démontre de manière analogue.

Si $\rho(y) \leq 2C_1\rho(x)$, on a

$$\rho(x) \leq C_1\,(\rho(x+y) + \rho(y)) \leq C_1\,\rho(x+y) + \frac{1}{2}\,\rho(x)$$

de sorte que

$$|\Delta_\varepsilon(x+y)| \leq C_\varepsilon\,(1+\rho(x+y))^{-1-\varepsilon} \leq C'_\varepsilon\,(1+\rho(x))^{-1-\varepsilon}\,.$$

iii) se déduit donc immédiatement de ii) si $\rho(y)$ n'est pas trop petit,

$$\rho(y) \geq \frac{1}{2C_1C_2|\det A|}\,\rho(x)\,,$$

par exemple. Nous allons donc démontrer iii) en supposant de plus que

$$\rho(y) \leq \frac{1}{2C_1C_2|\det A|}\,\rho(x)\,.$$

Pour démontrer iii), on fixe N tel que $|\det A|^{N-1} \leq \rho(x) \leq |\det A|^N$ et on pose $v = A^{-N}y$; alors

$$\rho(v) = |\det A|^{-N}\rho(y) \leq \frac{\rho(y)}{\rho(x)} \leq \frac{1}{2C_1C_0|\det A|}\,.$$

L'inégalité

$$|\Delta_\varepsilon(x+y) - \Delta_\varepsilon(x)| \leq C_\varepsilon\,\frac{\rho(y)^{\alpha_0}}{\rho(x)^{\alpha_0}}\,(1+\rho(x))^{-1+\varepsilon}$$

se réécrit en

$$|\Delta_\varepsilon(x+A^Nv) - \Delta_\varepsilon(x)| \leq C'_\varepsilon\,\rho(v)^{\alpha_0}(1+\rho(x))^{-1+\varepsilon}\,,$$

et c'est cette égalité-là que nous allons démontrer.

Plus précisément, pour $v \in \mathbb{R}^n$ et $N \geq 0$, on pose

$$F(N,v) = |\det A|^{N(1-\varepsilon)} \sup\big\{|\Delta_\varepsilon(x+A^Nv) - \Delta_\varepsilon(x)| : \\ |\det A|^{N-1} \leq \rho(x) \leq |\det A|^N\big\}\,.$$

Il s'agit de démontrer qu'il existe une constante D_ε telle que, pour tout $N \geq 0$ et tout v tel que

$$\rho(v) \leq \frac{1}{2C_1C_2|\det A|}\,,$$

on a

$$|F(N,v)| \leq D_\varepsilon\,\rho(v)^{\alpha_0}\,.$$

On sait déjà que $|F(0,v)| \leq C\,\rho(v)^{\alpha_0}$. Par ailleurs, on sait que

$$\Delta_\varepsilon(Ax) = |\det A|^{-1+\varepsilon}\Delta_\varepsilon(x) + \zeta_\varepsilon(Ax)$$

avec

$$\zeta_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi}\int \tilde{\rho}(z)^{-\varepsilon}\,(\varphi(z) - \varphi(\tilde{A}z))\,e^{izx}\,dz\,.$$

On a donc pour tout $Q > 0$

$$\begin{aligned}|\zeta_\varepsilon(Ax + A^{N+1}v) &- \zeta_\varepsilon(Ax)| \\ &\leq \|A^{N+1}v\|\,C_Q \sup_{\lambda\in[0,1]} \rho(Ax + \lambda A^{N+1}v)^{-Q}\,.\end{aligned}$$

D'après le Lemme 13, on a

$$\begin{aligned}\|A^{N+1}v\| &\leq M_0 \sup\{\rho(A^{N+1}v)^{\alpha_0}, \rho(A^{N+1}v)^{\alpha_1}\} \\ &\leq M_0\,|\det A|^{(N+1)\alpha_1}\rho(v)^{\alpha_0}.\end{aligned}$$

Par ailleurs, si $\rho(Ax) \geq |\det A|^N$, on a

$$\begin{aligned}\rho(Ax) &\leq C_1\,(\rho(Ax + \lambda A^{N+1}v) + \rho(\lambda A^{N+1}v)) \\ &\leq C_1\,\rho(Ax + \lambda A^{N+1}v) + C_1\,C_2\,|\det A|^{N+1}\rho(v) \\ &\leq C_1\,\rho(Ax + \lambda A^{N+1}v) + \frac{1}{2}\,\rho(Ax)\end{aligned}$$

de sorte que si $Q > 1 + \alpha_1 - \varepsilon$ on obtient

$$F(N+1,v) \leq F(N,v) + D\,\rho(v)^{\alpha_0}|\det A|^{N(1+\alpha_1-\varepsilon-Q)}$$

et enfin

$$F(N,v) \leq F(0,v) + D\,\rho(v)^{\alpha_0}\frac{1}{1 - |\det A|^{1+\alpha_1-\varepsilon-Q}} \leq D_\varepsilon\,\rho(v)^{\alpha_0}$$

et le lemme est donc démontré.

References.

[1] Alpert, B., Sparse representation of smooth linear operators. Ph. D. Thesis, Yale University, 1990.

[2] Auscher, P., Toute base d'ondelettes régulières de $L^2(\mathbb{R})$ est issue d'une analyse multi-résolution régulière. *C. R. Acad. Sci. Paris* **315** (1992), 1127-1230.

[3] Battle, G., A block spin construction of ondelettes, Part I: Lemarié functions. *Comm. Math. Phys.* **110** (1987), 601-615.

[4] Beurling, A., Construction and analysis of some convolution algebras. *Ann. Inst. Fourier Grenoble* **14** (1964), 1-32.

[5] Cohen, A., Ondelettes, analyses multirésolutions et traitement numérique du signal. Thèse, Paris IX, 1990.

[6] Cohen, A. and Daubechies, I., Non-separable bidimensional wavelet bases. *Revista Mat. Iberoamericana* **9** (1993), 51-137.

[7] Cohen, A. and Daubechies, I., A stability criterion for biorthogonal wavelet bases and their related subband codding schemes. *Duke Math. J.* **68** (1992), 313-335.

[8] Coifman, R. et Meyer, Y., Au delà des opérateurs pseudo-différentiels. *Astérisque* **57** (1978), 1-185.

[9] Coifman, R. and Weiss, G., Extensions of Hardy spaces and their uses in analysis. *Bull. Amer. Math. Soc.* **83** (1977), 569-645.

[10] Daubechies, I., Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure Appl. Math.* **41** (1988), 909-996.

[11] Feauveau, F. C., Analyse multi-résolution par ondelettes non orthogonales et base de filtres numériques. Thèse, Paris-Sud (Orsay), 1990.

[12] Folland, G. B. and Stein, E., *Hardy spaces on homogeneous groups.* Math. Notes **28**, Princeton Univ. Press, 1982.

[13] Hervé, L., Méthodes d'opérateurs quasi-compacts en analyse multi-résolution, applications à la construction de bases d'ondelettes et à l'interpolation. Thèse, Rennes I, 1992.

[14] Lemarié, P. G., Ondelettes à localisation exponentielle. *J. Math. Pures et Appl.* **67** (1988), 227-236.

[15] Lemarié-Rieusset, P. G., Sur l'existence des analyses multi-résolutions en théo- rie des ondelettes. *Revista Mat. Iberoamericana.* **8** (1992), 457-474.

[16] Lemarié-Rieusset, P. G., Ondelettes généralisées et fonctions d'échelle à support compact. *Revista Mat. Iberoamericana.* **9** (1993), 333-371.

[17] Lemarié, P. G. et Meyer, Y., Ondelettes et bases hilbertiennes. *Revista Mat. Iberoamericana* **2** (1986), 1-18.

[18] Mallat, S., Multiresolution approximation and wavelets. *Trans. Amer. Math. Soc.* **315** (1989), 69-88.

[19] Meyer, Y., *Ondelettes et opérateurs, I: Ondelettes.* Hermann, 1990.

[20] Meyer, Y., *Ondelettes et opérateurs, II: Opérateurs de Calderón-Zygmund* Hermann, 1990.

[21] Rudin, W., *Functional analysis.* McGraw-Hill, 1973.

[22] Villemoes, L. E., Energy moments in time and frequency for two-scale difference equation solutions and wavelets. To appear in *SIAM J. Math. Anal.*

Recibido: 3 de diciembre de 1.992

Pierre Gilles Lemarié-Rieusset
Département de Mathématiques
Université de Paris-Sud
91405 Orsay, FRANCE