Revista Matemática Iberoamericana
Vol. 10, N.° 3, 1994

Compacité par compensation pour une classe de systèmes hyperboliques de $p \geq 3$ lois de conservation

Sylvie Benzoni-Gavage et Denis Serre

Abstract. We are concerned with a strictly hyperbolic system of conservation laws $u_t + f(u)_x = 0$, where u runs in a region Ω of $\mathbb{R}^p$, such that two of the characteristic fields are genuinely non-linear whereas the other ones are of Blake Temple's type. We begin with the case $p = 3$ and show, under some more or less technical assumptions, that the approximate solutions $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ given either by the vanishing viscosity method or by the Godunov scheme converge to weak entropy solutions as ε goes to 0. The first step consists in using techniques from the Blake Temple systems lying in the separate works of Leveque-Temple and Serre. Then we apply a compensated compactness method and the theory of Di Perna on 2×2 genuinely non-linear systems. Eventually the proof is extended to the general case $p > 3$.

1. Introduction.

L'étude qui suit a été inspirée par des modèles d'écoulements diphasiques gaz/liquide en recherche pétrolière [1] constitués de systèmes hyperboliques 3×3 ayant deux champs caractéristiques vraiment non-linéaires et un champ de Blake Temple. L'exemple le plus simple est le système suivant

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho\, v)_x = 0\,, \\ (\rho\, c)_t + (\rho\, c\, v)_x = 0\,, \\ (\rho\,(1+c)\, v)_t + (\rho\,(1+c)\, v^2 + p)_x = 0\,, \end{cases}$$

où la fonction $p = p(\rho, c)$ est donnée par $p = a^2\, c\, \rho/(1-\rho)$, avec a constante. Dans ces lois de conservation, ρ représente la fraction massique de liquide ($0 < \rho < 1$), v la vitesse du gaz (supposée égale dans ce modèle à celle du liquide), et c s'apparente à une concentration: c'est le rapport

$$\frac{(\text{fraction massique} \times \text{densité})_{\text{gaz}}}{(\text{fraction massique} \times \text{densité})_{\text{liquide}}}\,.$$

On observe, grâce à la première équation, que la seconde s'écrit sous forme quasilinéaire

$$c_t + v\, c_x = 0\,,$$

ce qui signifie que c est un invariant de Riemann fort associé à la valeur propre v. De plus les surfaces de niveau de c sont clairement des plans en variables conservatives $(\rho, \rho\, c, \rho\,(1+c)\, v)$: le champ associé à v est donc de Temple. On vérifie enfin sans peine que les deux autres champs sont vraiment non-linéaires.

Ces propriétés sont a priori de deux types complètement différents. Cependant on sait que, d'une part, les systèmes 2×2 vraiment non-linéaires et, d'autre part, les systèmes dont tous les champs sont de Blake Temple admettent des solutions faibles entropiques obtenues comme limites de solutions approchées uniformément bornées dans L^∞ : le premier résultat est dû à Di Perna [3] grâce à la compacité par compensation et le second a été obtenu séparément par Leveque-Temple [6] et Serre [7] par une estimation a priori de la variation totale. L'objet de cet article est de démontrer, en combinant les différentes méthodes, un résultat semblable concernant les systèmes avec deux champs vraiment non-linéaires et les autres de Temple. Par souci de clarté le cas des systèmes 3×3 (donc avec un seul champ Temple) est traité intégralement avant de donner l'extension au cas général.

Soit un tel système

$$(1) \qquad u_t + f(u)_x = 0\,, \qquad t > 0\,,\ x \in \mathbb{R}\,,\ u(x,t) \in \mathbb{R}^3\,.$$

Il s'agît d'étudier l'existence de solutions faibles entropiques pour le problème de Cauchy associé à (1) avec une condition initiale $u(x,0) = u_0(x)$ où $u_0 \in VB(\mathbb{R})$.

On considère pour cela une suite solutions approchées $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ obtenue soit par la régularisation parabolique

$$u_t^\varepsilon + f(u^\varepsilon)_x = \varepsilon\, u_{xx}^\varepsilon\,, \qquad t>0\,,\ x\in\mathbb{R}\,, \tag{2}$$

soit par le schéma de Godunov [4] (avec $\varepsilon = \max\{\Delta x, \Delta t\}$).

Le problème principal est, dans les deux cas, de montrer que le passage à la limite est autorisé (à l'extraction d'une sous-suite près) malgré la non-linéarité. Comme rien ne permet ici d'affirmer que l'on aura des domaines invariants, on *doit supposer* au départ que la suite $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $L^\infty(\mathbb{R}\times[0,T])$. C'est cette hypothèse, essentielle, qui est un obstacle au traitement des systèmes diphasiques par la même méthode: car il faudrait que les solutions approchées restent dans un compact du domaine diphasique $0<\rho<1$, ce qu'on ne sait pas. On envisage donc des systèmes moins singuliers que les systèmes diphasiques, espérant que cette hypothèse soit satisfaite. De là on va montrer, lorsqu'il existe une entropie fortement convexe, que $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ admet une sous-suite convergeant presque partout vers une solution faible entropique du système (1).

La démarche est la suivante: dans un premier temps, à l'aide d'estimations en variation totale de $w^\varepsilon = w(u^\varepsilon)$ où w est un invariant de Riemann fort associé au champ de Blake Temple, on extrait une sous-suite fortement convergente de $(w^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$. Le système est alors partiellement découplé. On montre ensuite que la méthode de compacité par compensation [11], qui ne s'applique a priori qu'aux entropies (ce qui est particulièrement intéressant dans le cas d'un système riche [8]), s'étend ici à certains couples d'objets (E,F) où E n'est pas nécessairement une entropie. Ces objets sont construits en sorte que l'étude puisse être finalement ramenée à celle d'un système 2×2 vraiment non-linéaire et en nombre suffisant pour conclure d'après l'analyse de Di Perna.

Précisons les hypothèses, classiques [5], concernant le système (1): il sera supposé strictement hyperbolique, c'est-à-dire admettant trois valeurs propres réelles distinctes $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$, avec de plus un flux f assez régulier pour que ses éléments propres soient au moins de classe

C^2. On supposera par ailleurs qu'il existe une entropie de classe C^2 fortement convexe (généralement issue d'un principe physique).

L'hypothèse spécifique de notre étude est, comme annoncé plus haut, que deux des champs caractéristiques sont vraiment non-linéaires tandis que l'autre est de Blake Temple. Pour fixer les idées on supposera que le champ de Temple est le second. Toutefois la preuve ne dépend pas de l'ordre des valeurs propres. L'hypothèse concernant ce champ signifie que, si l désigne le vecteur propre à gauche associé, la famille des droites affines $u + \mathbb{R}\, l(u)$ est orthogonale à une famille à un paramètre d'(hyper)plans affines. Ces hyperplans définissent alors un feuilletage dans l'espace des états $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ (imposé par la physique) et les bords de ce dernier sont constitués de deux feuilles et de composante(s) connexe(s) tranverse(s) au feuilletage. Si le paramètre décrivant ces hyperplans est bien choisi, il fournit un invariant de Riemann fort w de classe C^2 et l'on peut ainsi prendre $l(u) = dw(u)$ pour tout $u \in \Omega$.

2. Approximation parabolique.

2.1. Découplage.

Lemme 2.1. *Soit $T > 0$. Si la solution du problème de Cauchy associé à (2), avec comme condition initiale $u^\varepsilon(x, 0) = u_0(x)$, reste dans un compact K de Ω, indépendant de ε, pour $t \leq T$, alors on a les estimations a priori suivantes*

i) *la suite $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $L^\infty(\mathbb{R} \times [0, T])$,*

ii) *la suite $(\sqrt{\varepsilon}\, u_x^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $L^2(\mathbb{R} \times [0, T])$,*

iii) *la suite $(w^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $L^\infty([0, \infty[; VB(\mathbb{R}))$, où $w^\varepsilon = w \circ u^\varepsilon$,*

iv) *la suite $(w_t^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $L^1(0, T; H_{\mathrm{loc}}^{-1}(\mathbb{R}))$.*

DÉMONSTRATION. Notons que le système parabolique (2) est régularisant: la solution u^ε est de classe C^∞.

Le point i) n'est que la traduction de l'hypothèse en termes d'espaces fonctionnels.

Le point ii) provient d'une estimation d'énergie: celle-ci se déduit de façon très classique [3] de l'équation vérifiée par l'entropie fortement convexe. Cela implique évidemment, par composition, une estimation analogue pour $(\sqrt{\varepsilon}\, w_x^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$.

Quant à iii), c'est un résultat général concernant les invariants de Riemann associés à des champs Temple [7]. Cette estimation signifie en particulier que $(w^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $L^\infty(\mathbb{R}\times[0,T])$ et que $(w_x^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $L^\infty([0,\infty[;L^1(\mathbb{R}))$. Notons que, dans le cas où tous les champs sont de Temple, on obtient ainsi la même propriété pour (u^ε) et on en déduit facilement une estimation sur (u_t^ε) (plus forte que iv)). Ce n'est pas le cas ici. Mais on montre l'estimation sur (w_t^ε) donnée au iv) comme suit.

Puisque dw est un vecteur propre à gauche de df, on a d'après (2),

$$w_t^\varepsilon + \lambda(u^\varepsilon)w_x^\varepsilon = \varepsilon\, dw(u^\varepsilon)\cdot u_{xx}^\varepsilon\,.$$

De plus, comme les surfaces de niveau de w sont affines, il existe une application $m:\Omega\longrightarrow(\mathbb{R}^3)'$ continue telle que $d^2w(u)=m(u)\otimes dw(u)$ pour tout $u\in\Omega$. On a donc

$$w_t^\varepsilon = -\lambda(u^\varepsilon)w_x^\varepsilon - \varepsilon\, m(u^\varepsilon)\cdot u_x^\varepsilon\, w_x^\varepsilon + \varepsilon\, w_{xx}^\varepsilon\,. \tag{3}$$

Or on a des estimations a priori pour chacun de ces trois termes. En effet, grâce à i) et iii), on constate que le premier terme est borné dans $L^\infty([0,\infty[;L^1(\mathbb{R}))$ tandis que i), ii) montrent que le second est borné dans $L^1(\mathbb{R}\times[0,T])$ et le dernier dans $L^2(0,T;H^{-1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}))$. Des injections classiques, en particulier $L^1(\mathbb{R})\hookrightarrow H^{-1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, permettent alors de conclure.

Théorème 2.1. *Soit $T>0$. Si la solution du système parabolique* (2) *reste dans un compact K de Ω pour $t\le T$, alors la suite $(w^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ admet une sous-suite convergeant presque partout dans $\mathbb{R}\times[0,T]$ lorsque $\varepsilon\to 0$.*

DÉMONSTRATION. Cela résulte des estimations du lemme précédent et du théorème de compacité suivant [10]:

Si X, B, Y sont des espaces de Banach tels que $X\hookrightarrow B$ avec injection compacte et $B\hookrightarrow Y$, si $\mathcal{F}\subset\mathcal{D}'(0,T;Y)$ est borné dans $L^p(0,T;X)$ pour un $p\in[1,\infty[$ avec $\partial_t\mathcal{F}=\{f_t: f\in\mathcal{F}\}$ borné dans $L^1(0,T;Y)$, alors $\mathcal{F}$ est relativement compact dans $L^p(0,T;B)$.

Si I est un intervalle borné de $\mathbb{R}$, ce théorème s'applique avec $X=VB(I)$, $B=L^1(I)$, $Y=H^{-1}(I)$ et $\mathcal{F}=\{w^\varepsilon:\varepsilon>0\}$: en effet, l'injection de X dans B est compacte d'après le théorème de Helly sur les fonctions à variation bornée et $\mathcal{F}$ satisfait l'hypothèse pour $p = \infty$ donc a fortiori pour tout p fini. Ceci permet d'extraire une sous-suite de $(w^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ convergeant presque partout dans $I \times [0,T]$.

Par le procédé diagonal on obtient ainsi une sous-suite convergeant presque partout dans $\mathbb{R} \times [0,T]$, que l'on désignera encore par $(w^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$. On notera $\overline{w}$ sa limite: on a évidemment $\overline{w} \in w(K)$ presque partout.

2.2. Compacité par compensation.

Rappelons [2] que toute suite (u^ε) bornée dans $L^\infty(\mathbb{R} \times [0,T])$ admet une sous-suite, encore notée (u^ε), pour laquelle il existe pour presque tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times[0,T]$ une mesure de probabilité $\nu_{(x,t)}$ à support compact telle que

$$g(u^\varepsilon) \rightharpoonup \langle \nu, g \rangle$$

dans L^∞-faible-$\star$, pour toute application continue $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. La méthode de compacité par compensation consiste à étudier la mesure ν (dite mesure de Young) afin de démontrer, si possible, qu'elle est presque partout réduite à une masse de Dirac. L'outil de base pour cela est le lemme divergence-rotationnel [11]:

Lemme 2.2. *Si on a des applications continues $E_i, F_i : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1,2$ satisfaisant les estimations a priori*

$$E_i(u^\varepsilon)_t + F_i(u^\varepsilon)_x \in \textit{compact de } H^{-1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R} \times [0,T])$$

alors elles vérifient la relation

$$\langle \nu, E_1F_2 - E_2F_1 \rangle = \langle \nu, E_1 \rangle \langle \nu, F_2 \rangle - \langle \nu, E_2 \rangle \langle \nu, F_1 \rangle .$$

Pour obtenir des informations sur ν, il s'agît donc d'exhiber des objets *suffisamment nombreux* satisfaisant les *estimations a priori* du lemme. Pour les systèmes 2×2 les couples entropie/flux conviennent généralement car il y en a un espace de dimension infinie. Ici on va utiliser une notion plus faible qui fait l'objet de la définition suivante.

Definition 2.1. *On dira qu'une application $E : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^2, est une sous-entropie de* (1) *s'il existe $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^2, et $h : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, continue, telles que*

$$dF - dE\, df = h\, dw .$$

REMARQUES.

1. Les couples sous-entropie/flux (E, F) ainsi définis sont caractérisés par

$$dF(u) - dE(u)\,df(u) \in \mathbb{R}\,l_2(u)\,, \qquad \text{pour tout } u \in \Omega\,,$$

ce qui équivaut du fait de la stricte hyperbolicité de (1) à

$$(dF - dE\,df)\,r_j \equiv 0\,, \qquad j = 1, 3\,.$$

Il y a donc autant d'équations que d'inconnues: cela permet d'espérer obtenir suffisamment de solutions.

2. De manière plus précise on devrait dire “sous-entropie relative au second champ caractéristique”. Car il y en a d'autres, associées à chaque champ caractéristique. Mais ce sont celles associées au champ de Temple qui sont utiles: on va en effet voir qu'elles satisfont l'hypothèse du Lemme 2.2.

Lemme 2.3. *Pour tout couple sous-entropie/flux (E, F) on a, sous les hypothèses du Lemme* 2.1 *concernant l'approximation parabolique*

$$E(u^\varepsilon)_t + F(u^\varepsilon)_x \in \textit{compact de } H^{-1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R} \times [0, T])\,.$$

DÉMONSTRATION. Si $dF - dE\,df = h\,dw$ on déduit immédiatement de (2)

$$E(u^\varepsilon)_t + F(u^\varepsilon)_x = \varepsilon\, E(u^\varepsilon)_{xx} - \varepsilon\, d^2E(u^\varepsilon)\cdot(u^\varepsilon_x,\, u^\varepsilon_x) + h(u^\varepsilon)\, w^\varepsilon_x\,. \tag{4}$$

Les estimations i), ii) et iii) du Lemme 2.1 montrent alors que $E(u^\varepsilon)_t + F(u^\varepsilon)_x \in$ compact de $H^{-1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R} \times [0, T])$ + borné de $L^1(\mathbb{R} \times [0, T])$.

Comme de plus $E(u^\varepsilon)_t + F(u^\varepsilon)_x$ est dans un borné de $W^{-1,\infty}_{\mathrm{loc}}$, cela suffit d'après le lemme de Murat [11] pour montrer que $E(u^\varepsilon)_t + F(u^\varepsilon)_x$ reste dans un compact de H^{-1}_{loc}.

On a ainsi démontré le résultat:

Théorème 2.2. *La mesure de Young $\nu_{(x,t)}$ vérifie, pour presque tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$ et pour tous couples sous-entropies/flux (E_i, F_i), $i = 1, 2$, l'équation de Tartar*

$$\langle \nu, E_1F_2 - E_2F_1 \rangle = \langle \nu, E_1 \rangle\, \langle \nu, F_2 \rangle - \langle \nu, E_2 \rangle\, \langle \nu, F_1 \rangle\,.$$

2.3. Conclusion.

Théorème 2.3. *Si la solution du système parabolique* (2) *reste dans un compact* K *de* Ω *pour* $t \leq T$*, alors la suite* $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *admet une sous-suite convergeant presque partout dans* $\mathbb{R} \times [0,T]$ *lorsque* $\varepsilon \to 0$ *et sa limite est solution faible entropique de* (1).

DÉMONSTRATION. La première partie de l'énoncé repose sur un théorème qui sera démontré au Paragraphe 4.

D'après le Théorème 2.1, on a une sous-suite de (w^ε) convergeant p.p. et d'après le Théorème 2.2, $\nu_{(x,t)}$ vérifie p.p. l'équation de Tartar pour tous les couples sous-entropies/flux. On verra que cela implique $\nu_{(x,t)} = \delta_{u(x,t)}$ p.p. et par conséquent $u^\varepsilon \longrightarrow u$ dans L^1_{loc}.

Le fait que u soit alors une solution faible entropique de (1) est très classique : puisque $g(u^\varepsilon) \rightharpoonup g(u)$ dans L^∞-faible-$\star$ dès que g est continue, le passage à la limite dans les intégrales contre une fonction test est autorisé. Notons que, s'il y a unicité de la solution faible entropique, c'est toute la suite qui converge vers u.

3. Schéma de Godunov.

On aimerait maintenant démontrer un résultat analogue pour une approximation *numérique* de (1). Le schéma se prêtant le mieux à ce genre de considérations est le schéma de Godunov. Comme il utilise de façon essentielle la résolution de problèmes de Riemann, on doit renforcer l'hypothèse sur le champ Temple: on le supposera ou bien linéairement dégénéré ou bien vraiment non-linéaire [5]. De plus, afin d'exploiter au mieux la structure de la solution numérique, on supposera que la valeur propre associée est de signe constant.

On désigne par Δx et Δt des pas d'espace et de temps respectivement. Sous la condition de Courant-Friedrichs-Lewy,

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \sup\{|\lambda_k(u)| : \ k = 1, 2, 3, \ u \in K\} \leq \frac{1}{2}\,,$$

la solution numérique est construite comme suit.

On définit les valeurs initiales par

$$u_j^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u_0(x)\, dx\,, \qquad j \in \mathbb{Z}\,,$$

où $x_{j+1/2} = (j + 1/2)\Delta x$.

Puis, pour $(x,t) \in [j\Delta x, (j+1)\Delta x[\times[n\Delta t, (n+1)\Delta t[$, $j \in \mathbb{Z}$, $n \in \{0, \dots, N-1\}$,

$$u^\varepsilon(x,t) = U_R\Big(\frac{x - x_{j+1/2}}{t - n\Delta t}\ ;\ u_j^n,\ u_{j+1}^n\Big)\,,$$

où l'application $(y,\tau) \longmapsto U_R(y/\tau; u_g, u_d)$ est la solution autosimilaire du problème de Riemann d'états à gauche et à droite respectivement u_g et u_d et, pour $x \in [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}[$,

$$u^\varepsilon(x,(n+1)\Delta t) = u_j^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u^\varepsilon(x,(n+1)\Delta t-)\, dx\,.$$

3.1. Découplage.

Lemme 3.1. *Soit $T = N\Delta t > 0$. Pour la solution numérique u^ε définie ci-dessus, on a*

i) *la suite $(w^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $L^\infty([0,\infty[; VB(\mathbb{R}))$, où $w^\varepsilon = w \circ u^\varepsilon$.*

ii) *la suite $(w_t^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $M_b(\mathbb{R}\times]0,T[)$.*

DÉMONSTRATION. Par construction u^ε est régulière par morceaux: dans les bandes $[\ n\Delta t,\ (n+1)\Delta t\ [$ elle est composée d'états constants séparés par des ondes élémentaires de discontinuité (ou de détente); elle est aussi discontinue aux instants $n\Delta t$ à cause du procédé de moyenne.

On commence par montrer le point i) à l'aide des propriétés spécifiques aux champs Temple: en particulier w ne peut varier qu'à travers les 2-ondes et cela impose à $VT(w^\varepsilon)$ d'être constante dans les bandes $[n\Delta t, (n+1)\Delta t[$, [7]; la question est de savoir si le procédé de moyenne est susceptible de faire augmenter cette variation totale. Le calcul suivant montre que c'est impossible: par construction, u_j^{n+1} appartient au convexe compris entre les plans d'équation

$$w(u) = \inf\{w^\varepsilon(x,(n+1)\Delta t-):\ x \in [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}[\,\}$$

et

$$w(u) = \sup\{w^\varepsilon(x,(n+1)\Delta t-) : \ x \in [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}[\,\}\,.$$

Si par exemple le signe de λ_2, supposé constant, est positif, les valeurs extremales de w^ε dans $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}[$ sont $w_{j-1}^n = w(u_{j-1}^n)$ et $w_j^n = w(u_j^n)$. Donc il existe $\theta_j \in [0,1]$ tel que $w_j^{n+1} = \theta_j\, w_j^n + (1-\theta_j)\, w_{j-1}^n$, de sorte que

$$w_{j+1}^{n+1} - w_j^{n+1} = \theta_{j+1}\,(w_{j+1}^n - w_j^n) + (1-\theta_j)\,(w_j^n - w_{j-1}^n)\,.$$

Par suite

$$\begin{aligned} VT(w^\varepsilon(x,(n+1)\Delta t)) &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} |w_{j+1}^{n+1} - w_j^{n+1}| \\ &\le \sum_{j\in\mathbb{Z}} |w_{j+1}^n - w_j^n| = VT(w^\varepsilon(x,n\Delta t))\,. \end{aligned}$$

Si $\lambda_2 < 0$ on a $w_j^{n+1} = \theta_j\, w_j^n + (1-\theta_j)\, w_{j+1}^n$ et le calcul est tout à fait analogue. On a donc, par récurrence, $VT(w^\varepsilon) \le VT(w \circ u_0)$.

Cela implique en particulier que $(w^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $L^\infty(\mathbb{R} \times [0,T])$ et que $(w_x^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $M_b(\mathbb{R}\times]0,T[)$: sa masse totale est

$$|||w_x^\varepsilon||| = \sum_{n=1}^{N-1} \Delta t \sum_{j\in\mathbb{Z}} |w_{j+1}^n - w_j^n| \le T\, VT(w \circ u_0)\,.$$

On obtient par la même méthode l'estimation en temps de ii), sans avoir recours à une estimation d'énergie:

$$|||w_t^\varepsilon||| = \sum_{n=1}^{N-1} \Delta x \sum_{j\in\mathbb{Z}} |w_j^{n+1} - w_j^n| = \sum_{n=1}^{N-1} \Delta x \sum_{j\in\mathbb{Z}} (1-\theta_j)\, |w_{j-1}^n - w_j^n|\,,$$

si $\lambda_2 > 0$. Dans tous les cas:

$$|||w_t^\varepsilon||| \le T\, \frac{\Delta x}{\Delta t}\, VT(w \circ u_0)\,,$$

d'où le résultat si les pas de temps et d'espace sont choisis en sorte que le rapport $\Delta x / \Delta t$, déjà minoré par la condition Courant-Friedrichs-Lewy, soit aussi majoré.

REMARQUE. Il est intéressant d'étudier le cas d'un système avec conditions aux limites afin de voir s'il y a encore de telles estimations.

Prenons par exemple un domaine spatial de la forme $]-\infty, b]$ où $b = (J + 1/2)\Delta x$. En affectant à la maille fictive $[x_{J+1/2}, x_{J+3/2}[$ la valeur $a_n = a(n\Delta t)$, où a est la condition au bord que l'on imposerait dans le système parabolique, on peut aussi calculer la valeur de u_J^{n+1} par le schéma de Godunov.

Notons que pour le système parabolique les estimations en variation totale sont toujours plus délicates à obtenir. Mais avec le schéma de Godunov on peut faire un calcul très proche de celui du lemme. On note $u_{J+1/2}^n = U_R(0; u_J^n, a_n)$ et l'on étudie

$$V_{n+1} = \sum_{j<J} |w_{j+1}^{n+1} - w_j^{n+1}| + |w_J^{n+1} - w(u_{J+1/2}^n)| \, .$$

La discussion est ici quelque peu différente selon le signe de λ_2. En effet, si λ_2 est positif, la deuxième caractéristique est sortante et w ne sera pas affecté par la condition au bord, alors qu'il le sera si λ_2 est négatif.

Plus précisément si $\lambda_2 > 0$ on a

$$w_j^{n+1} = \theta_j \, w_j^n + (1 - \theta_j) \, w_{j-1}^n \, , \qquad j \leq J \, ,$$

et

$$w(u_{J+1/2}^n) = w_J^n \, .$$

On en déduit aisément

$$V_{n+1} \leq \sum_{j<J} |w_{j+1}^n - w_j^n| \leq V_n \, .$$

Tandis que si $\lambda_2 < 0$ on a

$$w_j^{n+1} = \theta_j \, w_j^n + (1 - \theta_j) \, w_{j+1}^n \, , \qquad j < J \, ,$$

mais

$$w_J^{n+1} = \theta_J \, w_J^n + (1 - \theta_J) \, w(a_n) \, ,$$

puisque $w(u_{J+1/2}^n) = w(a_n)$.

On en déduit alors

$$V_{n+1} \leq \sum_{j<J} |w_{j+1}^n - w_j^n| + |w_J^n - w(a_n)| \, ,$$

puis finalement

$$V_{n+1} \leq V_n + |w(a_{n-1}) - w(a_n)| .$$

On a donc le résultat suivant, quel que soit le signe de λ_2.

Proposition 3.1. *Si $w \circ u_0 \in VB(]-\infty, b])$ et $w \circ a \in VB(0,T)$, alors la solution numérique u^ε fournie par le schéma de Godunov appliqué à (1) dans $]-\infty, b] \times [0,T]$, avec u_0 comme condition initiale et a comme condition au bord, vérifie*

$$VT(w \circ u^\varepsilon) \leq VT(w \circ u_0) + VT(w \circ a) .$$

Revenons au cas sans conditions aux limites. On déduit facilement du Lemme 3.1 la compacité voulue pour la suite (w^ε).

Théorème 3.1. *Soit $T = N\Delta t > 0$. La suite $(w^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ admet une sous-suite convergeant presque partout dans $\mathbb{R} \times [0,T]$ lorsque $\varepsilon \to 0$.*

DÉMONSTRATION. En effet le théorème de Helly s'applique à chaque instant dans un intervalle borné I de l'espace. On conclut comme dans le cas parabolique par le procédé diagonal. On notera également $(w^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ la sous-suite et $\overline{w}$ sa limite.

3.2. Compacité par compensation.

Il s'agît maintenant de montrer que les couples sous-entropie/flux satisfont l'hypothèse du Lemme 2.2 pour la solution numérique. La démonstration est un peu plus technique que dans le cas parabolique du fait de la présence de discontinuités. Elle est fondée sur deux résultats préliminaires.

Le premier est relativement classique [3] et regroupe les estimations tirées de l'entropie fortement convexe. Si celle-ci est choisie positive (ce qui est toujours possible quitte à lui ajouter une fonction affine) et notée $\mathcal{E}$, de flux $\mathcal{F}$, on montre

Lemme 3.2. *Soit $T = N\Delta t > 0$. Si u_0 est à support compact et si la solution numérique définie ci-dessus reste dans un compact K de Ω*

pour $t \le T$ *alors il existe deux constantes* C *et* C' *telles que, pour tout* $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n=1}^{N-1} \sum_j \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} |u^\varepsilon(x, n\Delta t-) - u_j^n|^2 \, dx \le C \,, \tag{5}$$

$$0 \le \int_0^T \sum_{\text{sauts}} (\sigma[\mathcal{E}(u^\varepsilon)] - [\mathcal{F}(u^\varepsilon)]) \, dt \le C' \,, \tag{6}$$

où $[\cdot]$ *désigne la valeur du saut et* σ *sa vitesse.*

Le second étudie $|\sigma[E(u^\varepsilon)] - [F(u^\varepsilon)]|$ pour les couples sous-entropie/flux (E, F) en fonction de la nature de la discontinuité.

Lemme 3.3. *Si la solution numérique reste dans un compact* K *de* Ω *et si* (E, F) *est un couple sous-entropie/flux alors il existe deux constantes* C_1 *et* C_2 *telle qu'à travers toute discontinuité de vitesse* σ *on ait*

$$|\sigma[E(u^\varepsilon)] - [F(u^\varepsilon)]| \le C_1 \, (\sigma[\mathcal{E}(u^\varepsilon)] - [\mathcal{F}(u^\varepsilon)]) \,,$$

si cette discontinuité est un 1*-choc ou un* 3*-choc,*

$$|\sigma[E(u^\varepsilon)] - [F(u^\varepsilon)]| \le C_2 \, |[w^\varepsilon]| \,,$$

si cette discontinuité est associée au second champ (Temple).

DÉMONSTRATION. La première estimation est vraie pour les entropies classiques. Sachant que w est constant à travers les 1-ondes et les 3-ondes, on va montrer par un développement limité que les sous-entropies se comportent en fait comme des entropies à travers ces discontinuités. Par contre, le long des 2-ondes, le terme prépondérant est précisément $|[w^\varepsilon]|$.

Soit en effet un état $u_g \in K$ et $\sigma \mapsto u_d(\sigma)$ la courbe de discontinuité issue à droite de u_g, associée à une valeur propre λ: on note $\sigma_0 = \lambda(u_g)$.

On étudie $G : \sigma \mapsto F(u_d(\sigma)) - F(u_g) - \sigma\,(E(u_d(\sigma)) - E(u_g))$. On a $G(\sigma_0) = 0$.

De plus, si $dF - dE\, df = h\, dw$, on obtient, en utilisant la relation de Rankine-Hugoniot

$$f(u_d) - f(u_g) - \sigma\,(u_d - u_g) \equiv 0$$

et par dérivations successives

$$\begin{aligned}
G'(\sigma_0) &= \Big(h \circ u_d \,\frac{d(w\circ u_d)}{d\sigma}\Big)(\sigma_0)\,,\\
G''(\sigma_0) &= \frac{d}{d\sigma}\Big(h \circ u_d \,\frac{d(w\circ u_d)}{d\sigma}\Big)(\sigma_0)\,,\\
G^{(3)}(\sigma_0) &= \frac{d^2}{d\sigma^2}\Big(h \circ u_d \,\frac{d(w\circ u_d)}{d\sigma}\Big)(\sigma_0) + d^2E(u_g)(r(u_g),r(u_g))\,.
\end{aligned}$$

Dans le cas d'un 1-choc ou d'un 3-choc, on a l'identité $w\circ u_d \equiv w(u_g)$. Donc

$$G'(\sigma_0) = 0\,, \qquad G''(\sigma_0) = 0\,,$$
$$G^{(3)}(\sigma_0) = d^2E(u_g)(r(u_g),r(u_g))\,.$$

Il en est de même pour l'entropie fortement convexe. On en déduit les inégalités, pour $\sigma \in \lambda(K)$,

$$|G(\sigma) - G(\sigma_0)| \le c\,\|r(u_g)\|^2|\sigma-\sigma_0|^3 \le C_1\,(\mathcal{G}(\sigma_0) - \mathcal{G}(\sigma))\,,$$

où $\mathcal{G}(\sigma) = \mathcal{F}(u_d(\sigma)) - \mathcal{F}(u_g) - \sigma\,(\mathcal{E}(u_d(\sigma)) - \mathcal{E}(u_g)) \le \mathcal{G}(\sigma_0) = 0$ par définition d'un choc, et C_1 dépend seulement de $E, \mathcal{E}$ et K.

Dans le cas d'une discontinuité associée au champ de Temple, on a

$$G'(\sigma_0) = -h(u_g)\,dw(u_g)\cdot r(u_g)$$

avec $dw(u_g)\cdot r(u_g) \neq 0$, d'où, pour $\sigma \in \lambda(K)$,

$$\begin{aligned}
|G(\sigma) - G(\sigma_0)| &\le c\,|dw(u_g)\cdot r(u_g)|\,|\sigma-\sigma_0|\\
&\le C_2\,|w\circ u_d(\sigma) - w(u_g)|\,.
\end{aligned}$$

On peut alors affirmer

Lemme 3.4. *Sous les hypothèses du Lemme 3.2, on a, pour tout couple sous-entropie/flux (E,F),*

$$E(u^\varepsilon)_t + F(u^\varepsilon)_x \in \textit{compact de } H^{-1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\times[0,T])\,.$$

DÉMONSTRATION. Sachant que $E(u^\varepsilon)_t + F(u^\varepsilon)_x = h(u^\varepsilon)\, w_x^\varepsilon$ en dehors des discontinuités, on décompose la mesure $\theta^\varepsilon = E(u^\varepsilon)_t + F(u^\varepsilon)_x$ en trois termes. On a, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times [0,T])$,

$$\langle \theta^\varepsilon, \varphi \rangle = V(\varphi) - \Sigma(\varphi) - L(\varphi)\,,$$

où

$$L(\varphi) = \sum_{n=1}^{N-1} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, n\Delta t)\,(E^\varepsilon(x, n\Delta t-) - E^\varepsilon(x, n\Delta t))\, dx$$

est traité exactement comme pour les vraies entropies. On montre [3], grâce à l'inégalité (5), que $L = L_1 + L_2$ avec $L_1 \in$ borné de $M_b(\mathbb{R} \times]0,T[)$ et $L_2 \in$ compact de $W^{-1,q}_{\mathrm{loc}}$ pour un $q < 2$. L'estimation des termes

$$\Sigma(\varphi) = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \sum_{1 \le k \le K_n} \varphi(x_k(t), t)\,(\sigma_k [E(u^\varepsilon)]_k - [F(u^\varepsilon)]_k)\, dt$$

et

$$V(\varphi) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{1 \le k \le K_n - 1} \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \int_{x_k(t)}^{x_{k+1}(t)} \varphi\, h(u^\varepsilon)\, w_x^\varepsilon \, dx\, dt\,,$$

où l'on a noté $t \longmapsto x_k(t)$, $1 \le k \le K_n$, les courbes de discontinuité dans la bande $[n\Delta t, (n+1)\Delta t[$, est obtenue grâce au Lemme 3.3 et à l'inégalité (6). Elle s'écrit

$$|V(\varphi) - \Sigma(\varphi)| \le c\, \|\varphi\|_\infty \Big(\int_0^T VT(w^\varepsilon)\, dt + C' \Big)\,,$$

d'où, avec le Lemme 3.1, $(V - \Sigma) \in$ borné de $M_b(\mathbb{R} \times]0,T[)$.

Donc $\theta^\varepsilon \in$ borné de M_b + compact de $W^{-1,q}_{\mathrm{loc}}$. Comme on a aussi $\theta^\varepsilon \in$ compact de $W^{-1,\infty}_{\mathrm{loc}}$, le Lemme de Murat permet de conclure.

Par conséquent on a

Théorème 3.2. *La mesure de Young $\nu_{(x,t)}$ associée à (u^ε) vérifie, pour presque tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T]$ et pour tous couples sous-entropies/flux (E_i, F_i), $i = 1, 2$, l'équation de Tartar*

$$\langle \nu, E_1 F_2 - E_2 F_1 \rangle = \langle \nu, E_1 \rangle \langle \nu, F_2 \rangle - \langle \nu, E_2 \rangle \langle \nu, F_1 \rangle\,.$$

3.3. Conclusion.

Théorème 3.3. *Soit $T = N\Delta t > 0$. Si u_0 est à support compact et si la solution numérique de Godunov reste dans un compact K de Ω pour $t \leq T$, alors la suite $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ admet une sous-suite convergeant presque partout dans $\mathbb{R} \times [0,T]$ lorsque $\varepsilon \to 0$ et sa limite est solution faible entropique de* (1).

DÉMONSTRATION. On conclut à la convergence, comme dans le cas parabolique, à l'aide des Théorèmes 3.1 et 3.2. On montre ensuite aisément, par des intégrations par parties semblables à celles faites dans l'étude de θ^ε, que la limite u est solution faible entropique de (1).

4. Réduction de ν.

L'objet de ce paragraphe est de démontrer le théorème utilisé plus haut, à savoir

Théorème 4.1. *Si une suite $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ de solutions approchées de* (1), *restant dans un compact K de Ω, est telle que*

$$w(u^\varepsilon) \to \overline{w}, \qquad p.p.,$$

et sa mesure de Young ν vérifie presque partout

$$\langle \nu, E_1F_2 - E_2F_1 \rangle = \langle \nu, E_1 \rangle \langle \nu, F_2 \rangle - \langle \nu, E_2 \rangle \langle \nu, F_1 \rangle$$

quels que soient les couples sous-entropies/flux (E_i, F_i), $i = 1, 2$, alors on a en fait pour presque tout (x,t)

$$\nu_{(x,t)} = \delta_{u(x,t)} ,$$

où $u(x,t) \in K$.

La méthode va consister à faire correspondre les sous-entropies de (1) aux entropies d'un système 2×2 vraiment non-linéaire dépendant régulièrement d'un paramètre.

Mais d'abord précisons ce qu'implique l'hypothèse sur $w(u^\varepsilon)$ pour la mesure de Young ν.

Lemme 4.1. *Sous les hypothèses du Théorème* 4.1, *on a*

$$\operatorname{supp} \nu_{(x,t)} \subset \{u \in K : \ w(u) = \overline{w}(x,t)\} , \qquad p.p.$$

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence facile de la définition de ν. En effet, si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times [0,T])$ on a en décomposant les termes

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} (w(u^\varepsilon)(x,t) - \overline{w}(x,t))^2 \varphi(x,t) \, dx \, dt \\ \qquad \longrightarrow \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \langle \nu_{(x,t)}, (w - \overline{w}(x,t))^2 \rangle \, \varphi(x,t) \, dx \, dt \, .$$

Or on a aussi, par le Théorème de Lebesgue

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} (w(u^\varepsilon)(x,t) - \overline{w}(x,t))^2 \varphi(x,t) \, dx \, dt \ \ \rightarrow \ 0 \, .$$

Il s'ensuit

$$\langle \nu_{(x,t)}, (w - \overline{w}(x,t))^2 \rangle = 0 \, , \qquad \text{p.p.} \, ,$$

d'où le résultat puisque l'argument est positif.

Soit maintenant $\Phi : u \longmapsto (v_1, v_3, w)$ un changement de variables de classe C^2. La mesure image de $\nu_{(x,t)}$ est pour presque tout (x,t) de la forme

$$\Phi^*(\nu_{(x,t)}) = \mu_{(x,t)} \otimes \delta_{\overline{w}(x,t)} \, .$$

Le problème revient donc à montrer que $\mu_{(x,t)}$ est presque partout une masse de Dirac. On va voir ce que signifie pour μ l'équation de Tartar en ν.

Pour cela on note $\dot{}$ la différentiation par rapport à w, δ celle par rapport à $v = (v_1, v_3)$ et l'on étudie la structure des sous-entropies dans ces nouvelles variables.

Proposition 4.1. *Il existe une application* $B : \Phi(\Omega) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *telle que, pour tout* w, $B(\cdot, w)$ *a ses deux champs caractéristiques vraiment non-linéaires et, pour des applications* $E, F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *de classe* C^2, *les assertions suivantes sont équivalentes, avec* $\eta = E \circ \Phi^{-1}, q = F \circ \Phi^{-1}$,

i) *L'application* E *est une sous-entropie de* (1) *associée au flux* F.

ii) *L'application $\eta(\cdot, w)$ est une entropie de $B(\cdot, w)$ associée au flux $q(\cdot, w)$, c'est-à-dire,*

$$\delta q - \delta\eta\, B \equiv 0\,.$$

DÉMONSTRATION. Cela résulte de quelques calculs élémentaires. Tout d'abord on remarque que, puisque $dw\, df = \lambda_2\, dw$,

$$dF - dE\, df = \delta q\, dv - \delta\eta\, dv\, df + (\dot q - \lambda_2\, \dot\eta)\, dw\,.$$

Or $I = \delta u\, dv + \dot u\, dw$, d'où

$$dv\, df = dv\, df\, \delta u\, dv + dv\, df\, \dot u\, dw\,.$$

Soit alors $B = dv\, df\, \delta u$. On a

$$dF - dE\, df = (\delta q - \delta\eta\, B)\, dv + (\dot q - \lambda_2\, \dot\eta - \delta\eta\, dv\, df\, \dot u)\, dw\,.$$

On en déduit l'équivalence entre i) et ii).

Il reste à montrer que B est vraiment-non linéaire à w fixé. Comme $dw\, r_j \equiv 0$, $j = 1, 3$, on déduit de la définition de B que

$$B\, dv\, r_j = dv\, df\, r_j = \lambda_j\, dv\, r_j\,, \qquad j = 1, 3\,,$$

avec un abus de notation évident, c'est-à-dire que les vecteurs propres de B sont $e_j = dv\, r_j$, $j = 1, 3$, associés aux valeurs propres $\mu_j = \lambda_j \circ \Phi^{-1}$, $j = 1, 3$. Or $d\lambda_j = \delta\mu_j\, dv + \dot\mu_j\, dw$. Donc

$$\delta\mu_j\, e_j = d\lambda_j\, r_j\,, \qquad j = 1, 3\,.$$

La vraie non-linéarité des premier et troisième champs de (1) impose donc aux deux champs de B d'être aussi vraiment non-linéaires.

Sachant que pour presque tout (x, t) on a d'une part $\Phi^*(\nu_{(x,t)}) = \mu_{(x,t)} \otimes \delta_{\overline{w}(x,t)}$ et d'autre part l'équation de Tartar pour $\nu_{(x,t)}$ et toutes les sous-entropies, on se place désormais en un point où ces deux propriétés ont lieu. On note $w_0 = \overline{w}(x, t)$.

On s'intéresse alors au problème inverse par rapport à la proposition précédente: est-il possible, à partir d'un couple entropie/flux (η_0, q_0) de $B(\cdot, w_0)$, de reconstruire un couple sous-entropie/flux (E, F) de (1) tel qu'en variables (v, w) on ait $\eta(\cdot, w_0) = \eta_0$ et $q(\cdot, w_0) = q_0$?

Un tel relèvement s'obtient assez facilement lorsque le changement de variables Φ est bien choisi. En effet, comme w est à la fois un invariant de Riemann *au sens de Lax* pour le premier *et* le troisième champ, on peut prendre pour v_1 un autre 3-invariant de Riemann au sens de Lax, indépendant de w, et pour v_3 un 1-invariant de Riemann au sens de Lax également indépendant de w. Ceci fournit bien un changement de variables car on a

$$\begin{pmatrix} dv_1 \\ dv_3 \\ dw \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 & r_3 & r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_3 & * \\ & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où les vecteurs e_1 et e_3 valent respectivement $\binom{dv_1 \cdot r_1}{0}$ et $\binom{0}{dv_3 \cdot r_3}$ par définition de v; ils ne s'annulent pas sinon dv_1 ou dv_3 serait liée à dw en un tel point, ce qui est contraire à la construction de v. Avec ce choix la matrice $B(v,w)$ est diagonale en tout point et vaut $\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_3 \end{pmatrix}$.

Par suite les couples (η, q) correspondant en variables (v,w) aux couples sous-entropie/flux (E,F) sont les solutions régulières par rapport à w du système linéaire

$$\text{(7)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial q}{\partial v_1} = \mu_1(v,w)\, \dfrac{\partial \eta}{\partial v_1}, \\[2ex] \dfrac{\partial q}{\partial v_3} = \mu_3(v,w)\, \dfrac{\partial \eta}{\partial v_3}. \end{cases}$$

Le lemme suivant répond finalement à la question.

Lemme 4.2. *Soient (η_0, q_0) un couple entropie/flux de classe C^2 de $B(\cdot, w_0)$. Alors il existe (η, q) de classe C^2, vérifiant le système (7) pour tout w, tel que $\eta(\cdot, w_0) = \eta_0$ et $q(\cdot, w_0) = q_0$.*

DÉMONSTRATION. Par hypothèse on a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial q_0}{\partial v_1} = \mu_1(v,w_0)\, \dfrac{\partial \eta_0}{\partial v_1}, \\[2ex] \dfrac{\partial q_0}{\partial v_3} = \mu_3(v,w_0)\, \dfrac{\partial \eta_0}{\partial v_3}. \end{cases}$$

Notons que l'élimination de q dans (7) conduit à l'équation pour η

$$\text{(8)} \qquad \frac{\partial^2 \eta}{\partial v_1 \partial v_3} = \frac{1}{\mu_3 - \mu_1} \left(\frac{\partial \mu_1}{\partial v_3} \frac{\partial \eta}{\partial v_1} - \frac{\partial \mu_3}{\partial v_1} \frac{\partial \eta}{\partial v_3} \right).$$

Cette équation est satisfaite par η_0 lorsque $w = w_0$ et ses coefficients sont de classe C^1 en v et de classe C^2 en w.

Le *problème de Goursat* associé à (8) avec les mêmes conditions sur les caractéristiques que celles vérifiées par η_0 admet donc une solution globale unique η de classe C^2 en w *et* en v, [1]. On a en particulier $\eta(\cdot, w_0) = \eta_0$.

On obtient alors q par quadrature, également de classe C^2 et tel que $q(\cdot, w_0) = q_0$.

Corollaire 4.1. *La mesure $\mu_{(x,t)}$ et, par suite, $\nu_{(x,t)}$ sont réduites à des masses de Dirac.*

DÉMONSTRATION. Soient deux couples entropies/flux (η_0^i, q_0^i), $i = 1, 2$, de $B(\cdot, w_0)$ où, rappelons-le, $w_0 = \overline{w}(x,t)$. Soient $(E_i, F_i) = (\eta^i \circ \Phi^{-1}, q^i \circ \Phi^{-1})$ où (η^i, q^i) sont associés à (η_0^i, q_0^i) par le lemme précédent.

La mesure $\nu_{(x,t)}$ vérifie l'équation de Tartar avec (E_i, F_i). Donc $\mu_{(x,t)}$ vérifie l'équation de Tartar avec (η_0^i, q_0^i).

D'après DiPerna [3] ceci impose $\mu_{(x,t)} = \delta_{v_0}$, où $v_0 \in \Phi(\{u \in K : w(u) = w_0\})$. On a ainsi $\nu_{(x,t)} = \delta_{u_0}$, où $u_0 = \Phi^{-1}(v_0, w_0)$.

Le Théorème 4.1 est alors démontré.

5. Cas des systèmes à p équations.

Soit un système strictement hyperbolique de p lois de conservation $(p > 3)$,

$$(9) \qquad u_t + f(u)_x = 0\,, \qquad t > 0\,,\ x \in \mathbb{R}\,,\ u(x,t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^p\,,$$

ayant deux champs vraiment non-linéaires et les $(p-2)$ autres de B. Temple. Soient $w_2, \ldots, w_{p-1}$ les invariants de Riemann forts associés. Pour chacun d'entre eux, si (9) admet une entropie fortement convexe, on a les estimations a priori du Lemme 2.1 pour l'approximation parabolique et du Lemme 3.1 pour le schéma de Godunov. La suite de solutions approchées, si elle reste dans un compact K de Ω, admet donc une sous-suite $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ telle que $(w_j^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, $j = 2, \ldots, p-1$ convergent presque partout dans $\mathbb{R} \times [0,T]$ vers $\overline{w}_j$. D'autre part la généralisation directe de la notion de sous-entropie est la suivante

Definition 5.1. *Deux applications $E, F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 forment un couple sous-entropie/flux si et seulement si*

$$dF(u) - dE(u)\, df(u) \in \bigoplus_{j=2}^{p-1} \mathbb{R}\, l_j(u)\,, \qquad \textit{pour tout } u \in \Omega\,.$$

Ceci équivaut encore au système de deux équations à deux inconnues

$$(dF - dE\, df)\, r_j \equiv 0\,, \qquad j = 1, p\,.$$

Dans les Lemmes 2.3 et 3.4 le terme en w est remplacé par une somme de termes en w_j, $j = 2, \ldots, p-1$ de même nature. Par conséquent on a aussi

$$E(u^\varepsilon)_t + F(u^\varepsilon)_x \in \text{compact de } H^{-1}_{\text{loc}}(\mathbb{R} \times [0, T])\,,$$

d'où l'équation de Tartar pour la mesure de Young associée à $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$

$$\langle \nu_{(x,t)}, E_1F_2 - E_2F_1 \rangle = \langle \nu_{(x,t)}, E_1 \rangle \, \langle \nu_{(x,t)}, F_2 \rangle - \langle \nu_{(x,t)}, E_2 \rangle \, \langle \nu_{(x,t)}, F_1 \rangle\,,$$

pour presque tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T]$ et pour tous couples sous-entropie/flux (E_i, F_i), $i = 1, 2$.

La réduction de ν peut alors se faire exactement comme au paragraphe 4, grâce au changement de variables

$$\Phi : u \longmapsto (v_1, v_p, w_2, \ldots, w_{p-1})\,,$$

où v_1 est un p-invariant de Riemann au sens de Lax indépendant de $w_2, \ldots, w_{p-1}$ et v_p est un 1-invariant de Riemann au sens de Lax également indépendant de $w_2, \ldots, w_{p-1}$. La mesure $\mu_{(x,t)}$ définie par

$$\Phi^*(\nu_{(x,t)}) = \mu_{(x,t)} \otimes \delta_{\overline{w}_2(x,t)} \otimes \cdots \otimes \delta_{\overline{w}_{p-1}(x,t)}$$

vérifie en effet l'équation de Tartar associée aux couples entropie-flux d'un système 2×2 vraiment non-linéaire et elle est donc réduite à une masse de Dirac.

Finalement on a démontré le théorème

Théorème 5.1. *Soit $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une suite de solutions approchées de (9) obtenues par la régularisation parabolique (2) ou le schéma de Godunov. Si $u^\varepsilon(x,t) \in K \subset \Omega$ p.p. dans $\mathbb{R} \times [0,T]$, où K est un compact indépendant de ε, alors $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ admet une sous-suite convergeant p.p. dans $\mathbb{R} \times [0,T]$ vers une solution faible entropique de (9).*

References.

[1] Benzoni-Gavage, S., Analyse numérique des modèles hydrodynamiques d'écoulements diphasiques instationnaires dans les réseaux de production pétrolière. Thèse. Univ. Lyon I, 1991.

[2] Dacorogna, B., *Weak continuity and weak lower semicontinuity of non-linear fonctionals.* Lecture Notes in Math. **922**, Springer-Verlag, 1982.

[3] DiPerna, R. J., Convergence of approximate solutions to conservation laws. *Arch. Rational Mech. Anal.* **82** (1983), 27-70.

[4] Godunov, S. K., A finite difference method for the numerical computation of discontinuous solutions of the equations of the fluid dynamics. *Math. Sb.* **47** (1959), 271-290.

[5] Lax, P. D., Hyperbolic systems of conservation laws: II. *Comm. Pure Appl. Math.* **10** (1957), 537-566.

[6] Leveque, R. and Temple, B., Stability of Godunov's method for a class of 2×2 systems of conservation laws. *Trans. Amer. Math. Soc.* **288** (1985), 115-123.

[7] Serre, D., Solutions à variation bornée pour certains systèmes hyperboliques de lois de conservation. *J. Diff. Equations* **68** (1987), 137-169.

[8] Serre, D., Systèmes hyperboliques riches de lois de conservation. Sém. Collège de France, "nonlinear PDEs and their applications", H. Brézis & J.-L. Lions eds., Pitman research notes in Math. Series **299** (1994), 248-281.

[9] Serre, D., *Richness and the classification of quasilinear hyperbolic systems.* IMA vol. in Math. and their appl. **29**. J. Glimm, A. Majda eds., Springer-Verlag (1991), 315-333.

[10] Simon, J., Compact sets in *$L^p(0,T;B)$. Annali Mat. pura ed applicata. IV* **146** (1987), 65-96.

[11] Tartar, L., *Compensated compactness and applications to partial differential equations.* Research notes in Math., Nonlinear analysis and mechanics: Heriot-Watt Symposium 4, ed. R.J. Knops, Pitman Press, 1979.

[12] Temple, B., Systems of conservation laws with invariant submanifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.* **280** (1983), 781-795.

Recibido: 24 de junio de 1.993

Sylvie Benzoni-Gavage
CNRS

et

Denis Serre
Institut Universitaire de France

Unité de Mathématiques Pures et Appliquées
CNRS, UMR 128
ENS Lyon
46, Allée d'Italie
69364 LYON Cedex 07, FRANCE