Revista Matemática Iberoamericana
Vol. 11, N.° 1, 1995

Trajectoires de groupes à 1-paramètre de quasi-isométries

Volker Mayer

1. Introduction.

Un homéomorphisme $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est une $(L\text{-})$*quasi-isométrie* si pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{1}{L} \|x - y\| \leq \|g(x) - g(y)\| \leq L \|x - y\| .$$

Soit $G = \{g_t : t \in \mathbb{R}\}$ un groupe à 1-paramètre. Il est dit *quasi-isométrique* s'il existe $L \geq 1$ tel que tout élément de G est une L-quasi-isométrie.

Le point de départ de ce travail est l'étonnant exemple de P. Tukia [T2] d'un groupe quasi-isométrique du plan $\mathbb{R}^2$ n'étant pas quasi-isométriquement conjugable à un groupe d'isométries, *i.e.* il ne s'écrit pas sous la forme

$$G = f \circ \Phi \circ f^{-1} ,$$

où $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est une quasi-isométrie et Φ est un groupe d'isométries. La raison pour laquelle ceci n'a pas lieu est simple. Le groupe G de Tukia a une trajectoire $\Gamma = \{g_t(0) : t \in \mathbb{R}\}$ le "snowflake" ou encore la courbe de Von Koch. Cette trajectoire Γ n'est pas rectifiable; elle a même une dimension de Hausdorff strictement plus grande que un.

Le fait qu'un groupe quasi-isométrique peut agir transitivement sur une courbe fractale est remarquable et la question se pose: quelles sont les trajectoires d'un groupe à 1-paramètre quasi-isométrique en général ? On les appelle dans la suite *quasi-isométrique cercle* (QI-*cercle*) ou, plus précisément, L-QI-*cercle* si les éléments du groupe sont L-quasi-isométriques.

D. Sullivan [Su1] et P. Tukia [T1] ont montré qu'en dimension deux tout groupe quasiconforme est quasiconformément conjugué à un groupe conforme. Un groupe quasi-isométrique à 1-paramètre est alors le conjugué quasiconforme d'un groupe d'isométries à 1-paramètre parabolique ou elliptique; *cf.* la classification des applications conformes, par exemple dans Greenberg [4]. Par conséquent, les QI-cercles sont des quasicercles, c'est à dire les images d'une droite (ou d'un cercle) par une application quasi-conforme de $\mathbb{R}^2$.

Avant d'énoncer des caractérisations des QI-cercles fixons les notations necessaires. On note par $D(p,r)$ le disque ouvert centré en p de rayon $r > 0$. Dans tout le texte, disque signifie toujours disque ouvert. Le bord du disque $D(0,1)$ est noté $\mathbb{S}^1$. Le symbole $\Gamma(p,q)$ désigne un sous-arc demi-ouvert d'une courbe Γ, joignant p à q et contenant le point p mais pas q. Quand Γ est une courbe de Jordan on prend pour $\Gamma(p,q)$ le sous-arc avec le plus petit diamètre (s'il existe; sinon on choisit librement un des deux sous-arcs). Si $E \subset \Gamma$ est un sous-ensemble, $N(r,E)$ est le plus petit nombre de disques de rayon r necessaires pour couvrir E.

Théorème 1.1. *Une courbe Γ est un L-QI-cercle si et seulement si une des propriétés suivantes est vérifiée.*

(I) *Il existe $M \geq 1$ et $h : \mathbb{R} \longrightarrow \Gamma$ ou $h : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \Gamma$ un homéomorphisme tel que*

$$\|h(x+t) - h(x)\| \leq M \; \|h(y+s) - h(y)\| \;,$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{S}^1$ et pour tout $0 < t \leq s$.

(II) *Il existe une mesure ω de Γ non-triviale et σ-finie, i.e. $0 < \omega(\Gamma(p,q)) < \infty$ pour tout $p, q \in \Gamma$ distincts, vérifiant pour une constante $A \geq 1$,*

$$\omega(\Gamma(p_1,p_2)) \leq A\,\omega(\Gamma(q_1,q_2))\,,$$

pour tous $p_i, q_i \in \Gamma$ avec $\|p_1 - p_2\| = \|q_1 - q_2\|$.

(III) Γ *vérifie la propriété géométrique suivante: il existe une constante* $H \geq 1$ *telle que, si* $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \Gamma$ *sont deux paires de points telles que* $\|p_1 - p_2\| = \|q_1 - q_2\|$*, alors*

$$N(r, \Gamma(p_1, p_2)) \leq H\, N(r, \Gamma(q_1, q_2)), \qquad \textit{pour tout } r > 0 .$$

En plus, toutes les constantes dépendent l'une de l'autre. Quand l'une d'entre elle est égale à un, les autres peuvent aussi être prises égales à un.

Le fait qu'un QI-cercle doit être un quasicercle se reflète dans ce théorème. Si on remplace par exemple dans l'inégalité de (I) y par x on a précisement la condition qui dit que h est une quasi-symétrie et donc que Γ est un quasicercle. On va aussi voir que (II) aussi bien que la propriété géométrique (III) implique la propriété des trois points de Ahlfors: une courbe Γ est un quasicercle s'il existe une constante $c \geq 1$ telle que $\operatorname{diam} \Gamma(p, q) \leq c\, \|p - q\|$.

Remarquons encore que si Γ vérifie (II) ou (III) avec constante 1, alors Γ est forcément une droite ou un cercle (*cf.* Proposition 3.1).

Dans [FM] K.J. Falconer et T.D. Marsh étudient les "quasi-self-similar" cercles. Grâce à leur étude on peut dire que ce sont des courbes de Jordan Γ paramétrisables par un homéomorphisme $h : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \Gamma$ vérifiant

$$\frac{\|x - y\|^\alpha}{c} \leq \|h(x) - h(y)\| \leq c\, \|x - y\|^\alpha , \tag{1.1}$$

pour tous $x, y \in \mathbb{S}^1$, où $c \geq 1$ et $1/\alpha = \operatorname{Hdim}(\Gamma) \in [1, 2[$. Ceci et le Théorème 1.1 impliquent que toutes ces courbes sont des exemples de QI-cercles. En particulier les ensembles de Julia des fonctions $f_\lambda(z) = z^2 + \lambda$, λ appartenant à l'intérieur de la cardioïde principale de l'ensemble de Mandelbrot [Su2], aussi bien que les ensembles limites de certains groupes kleiniens [Bo].

Les "quasi-self-similar" cercles ont des jolies propriétés fractales. Par exemple, toutes les différentes dimensions (Box, Hausdorff) d'une telle courbe coïncident et, à une quasi-isométrie près, ils sont définis uniquement en fonction de leur dimension [FM]. Dans le Paragraphe 5 nous étudions comment étendre ces résultats aux QI-cercles.

Je tiens à remercier Michel Zinsmeister pour des nombreuses discussions et pour m'avoir aidé à clarifier ce travail. Je remerci également

le referee. La condition (II) du Théorème 1.1 est basée sur une idée à lui.

2. Étude de la propriété géométrique.

Nous résumons dans ce paragraphe quelques résultats importants pour la suite.

L'astuce suivante va être utilisée à plusieures reprises: il est clair que le nombre de disques de rayon $r > 0$ necessaires pour pouvoir couvrir un disque $D(p, R)$, $R \geq r$, se majore par une constante $\nu = \nu(R/r)$ dépendant que du rapport des rayons. Une conséquence immédiate de ceci est

$$N(r, \Gamma(p,q)) \leq \nu\left(\frac{R}{r}\right) N(R, \Gamma(p,q)), \tag{2.2}$$

quand $r \leq R$ et $p, q \in \Gamma$. Voyons pourquoi (II) et (III) sont des conditions plus fortes que la propriété des trois points de Ahlfors:

Lemme 2.1. *Toute courbe Γ vérifiant la propriété géométrique* (III) *est un $2H$-quasicercle, i.e.*

$$\operatorname{diam}\Gamma(p,q) \leq 2H\,\|p-q\|, \qquad \textit{pour tous } p, q \in \Gamma.$$

Quand une courbe Γ vérifie (II) *elle est un $2A$-quasicercle.*

PREUVE. Supposons le contraire dans le cas où Γ vérifie (III): il existe $p, q \in \Gamma$ tels que $\operatorname{diam}\Gamma(p,q) > 2H\|p-q\|$. Soit $r = \|p-q\|$. Il existe $a, b \in \Gamma(p,q)$ avec $\|a-b\| = r$ et $\|a-x\| < r$ pour tout $x \in \Gamma(a,b)$. D'où $N(r, \Gamma(a,b)) = 1$. Comme $\operatorname{diam}\Gamma(p,q) > 2Hr$, le nombre $N(r, \Gamma(p,q))$ est strictement plus grand que H. On a alors une contradiction avec (III).

Considérons maintenant une courbe Γ vérifiant (II). Soient $p, q \in \Gamma$ et $a, b \in \overline{\Gamma(p,q)}$ tel que $\operatorname{diam}\Gamma(p,q) = \|a-b\|$. On choisi $m \in \mathbb{N}$ de sorte que $(m+1)\|p-q\| \geq \|a-b\| \geq m\|p-q\|$. Alors, par (II), $\omega(\Gamma(a,b)) \geq m\,\omega(\Gamma(p,q))/A$. Or, $\Gamma(a,b) \subset \Gamma(p,q)$, et donc $m \leq A$. D'où, $\operatorname{diam}\Gamma(p,q) \leq (m+1)\|p-q\| \leq 2A\|p-q\|$.

Les nombres $N(r, \gamma)$ sont définis dans l'introduction. Nous aurons besoin d'une quantité analogue: on appelle r-ensemble de $\Gamma(p,q)$ un ensemble de points $\{x_0 = p, x_1, \ldots, x_n = q\} \subset \overline{\Gamma(p,q)}$ ordonné et maximal pour que $\|x_{i-1} - x_i\| = r$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. On note $n(r, \Gamma(p,q)) = n$.

Lemme 2.2. *Pour un K-quasicercle Γ les nombres $N(r,\Gamma(p,q))$ et $n(r,\Gamma(p,q))$ sont équivalents:*

$$N(r,\Gamma(p,q)) \leq n(r,\Gamma(p,q)) \leq \nu(4K)\, N(r,\Gamma(p,q))\,.$$

PREUVE. Choisissons un ensemble $\{x_0,\dots,x_n\} \subset \overline{\gamma}$, $\gamma = \Gamma(p,q)$, maximal pour la condition suivante: on prend $x_0 = p$ et successivement $x_i \in \Gamma(x_{i-1},q)$, $i = 1,\dots,n-1$, de sorte que $\|x_{i-1} - x_i\| = r$ et $\|x - x_{i-1}\| < r$ pour tout $x \in \Gamma(x_{i-1},x_i)$. Enfin on prend comme dernier point $x_n = q$. Ce choix assure que les disques $D(x_i,r)$, $i = 0,1,\dots,n-1$ couvrent γ. D'où $N(r,\gamma) \leq n \leq n(r,\gamma)$.

Partons maintenant d'un r-ensemble $\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ de $\gamma = \Gamma(p,q)$. Quand $n = 1$ tout est clair. Soit alors $n \geq 2$. Dans $\gamma_i = \Gamma(x_{i-1},x_i)$, $i = 1,\dots,n-1$, il existe un point p_i tel que $\min\{\|p_i - x_{i-1}\|, \|p_i - x_i\|\} \geq r/2$. Γ étant un K-quasicercle, $\|x - p_i\| \geq r/2K$ pour tout $x \in \gamma\backslash\gamma_i$. Un disque de rayon $r/4K$ contenant un des points p_i n'a pas de point en commun avec $\gamma\backslash\gamma_i$. D'où et par (2.2) on a bien

$$n(r,\gamma) \leq N\big(\frac{r}{4K},\gamma\big) \leq \nu(4K)\, N(r,\gamma)\,.$$

Lemme 2.3. *Soit Γ une courbe vérifiant* (III). *Alors, il existe une constante $\eta(H) > 0$ dépendant que de H telle que pour tout $p,q \in \Gamma$ et $0 < r \leq R \leq \|p-q\|$ ainsi que $a,b \in \Gamma$ avec $\|a-b\| = R$ on a*

$$\begin{aligned}\eta(H)\, n(R,\Gamma(p,q))\, N(r,\Gamma(a,b)) &\leq N(r,\Gamma(p,q)) \\ &\leq H\, n(R,\Gamma(p,q))\, N(r,\Gamma(a,b))\,.\end{aligned}$$

PREUVE. Notons $\gamma = \Gamma(p,q)$, $\{x_0,\dots,x_n\}$ un R-ensemble de γ, $\gamma_i = \Gamma(x_{i-1},x_i)$ et soit $a,b \in \Gamma$ avec $\|a-b\| = R$. Quand $n = n(R,\gamma) = 1$ necessairement $\|p-q\| = \|a-b\|$ et le lemme suit directement de (III). Supposons alors $n \geq 2$. À cause de (III) on a

$$N(r,\gamma) \leq \sum_{i=1}^{n} N(r,\gamma_i) \leq H\, n\, N(r,\Gamma(a,b))\,.$$

Pour voir l'autre inégalité considérons d'abord le cas $r \leq R/4H$. Cette restriction fait qu'un disque $D(x,r)$ a une intersection non vide avec au plus deux des arcs γ_i qui doivent être des arcs voisins. Sinon il existe $u, v \in \Gamma(p,q)$ avec $\|u-v\| < 2r$ et tel que $\gamma_i \subset \Gamma(u,v)$ pour un $i \in \{2,\dots,n-1\}$. Or, Γ est un $2H$-quasicercle et donc

$$\|u-v\| \geq \frac{1}{2H}\operatorname{diam}\Gamma(u,v) \geq \frac{1}{2H}R \geq 2r.$$

Il est alors possible d'extraire d'un recouvrement minimal de $\Gamma(p,q)$ de disques de rayon r un recouvrement de $\bigcup_{1\leq 2k+1\leq n}\gamma_{2k+1}$ tel que chaque disque a une intersection non vide avec qu'un seul arc γ_{2k+1}. D'où, $N(r,\Gamma(p,q)) \geq \sum_{1\leq 2k+1\leq n} N(r,\gamma_{2k+1})$. Le même raisonnement s'applique aux γ_i d'indice pair, ce qui implique

$$\begin{aligned} 2\,N(r,\Gamma(p,q)) &\geq \sum_{i=1}^{n} N(r,\gamma_i) \\ &\geq \frac{1}{H}(n-1)\,N(r,\Gamma(a,b)) \\ &\geq \frac{1}{2H}\,n(R,\gamma)\,N(r,\Gamma(a,b)). \end{aligned}$$

Il reste à voir le cas $R \geq r > R/4H$. Par les lemmes précédents et avec (2.2) on voit que

$$N(r,\Gamma(a,b)) \leq N\big(\frac{R}{4H},\Gamma(a,b)\big) \leq \nu(8H^2)\,N(2HR,\Gamma(a,b)) = \nu(8H^2)$$

et

$$n(R,\Gamma(p,q)) \leq \nu(8H)\,N(R,\Gamma(p,q)) \leq \nu(8H)\,N(r,\Gamma(p,q)).$$

La constante $\eta(H) = \min\{1/4H,\ 1/\nu(8H)\nu(8H^2)\}$ vérifie alors l'inégalité de gauche dans les deux cas.

Lemme 2.4. *Soit Γ une courbe vérifiant* (III). *Alors, pour toute constante $\tilde{H} \geq 1$ il existe $d > 0$ dépendant que de $\tilde{H}$ et de la constante H de* (III) *telle que si $N(r,\Gamma(p_1,p_2)) \leq \tilde{H}\,N(r,\Gamma(q_1,q_2))$ pour un $r > 0$ avec $r \leq \|q_1-q_2\|$ alors $\|p_1-p_2\| \leq d\,\|q_1-q_2\|$.*

PREUVE. Soit $\|p_1-p_2\| > \|q_1-q_2\| = R$. Par le Lemme 2.3 on a

$$N(r,\Gamma(p_1,p_2)) \geq \eta(H)\,n(R,\Gamma(p_1,p_2))\,N(r,\Gamma(q_1,q_2)).$$

En appliquant l'hypothèse on en déduit $\tilde{H}/\eta(H) \geq n(R, \Gamma(p_1, p_2))$, ce qui montre $\|p_1 - p_2\| \leq d\,\|q_1 - q_2\|$ avec $d = \tilde{H}/\eta(H)$.

3. Démonstration du Théorème 1.1.

(I) *implique* Γ *est un QI-cercle.* Cette preuve est fortement basée sur un argument utilisé par Tukia dans [T2].

a) Le cas non compact; on suppose que Γ est homéomorphe à $\mathbb{R}$. On cherche un groupe quasi-isométrique à 1-paramètre $G = \{g_t : t \in \mathbb{R}\}$ pour lequel Γ est une trajectoire: $\Gamma = \{g_t(p) : t \in \mathbb{R}\}$ avec $p \in \Gamma$ un point quelconque.

Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \Gamma$ une paramétrisation vérifiant (I) et notons par $H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'extension $K = K(M)$-quasiconforme de Beurling-Ahlfors-Tukia [T3] de h. On considére le groupe

$$G = H \circ \{x \longrightarrow x + t :\ t \in \mathbb{R}\} \circ H^{-1} = H \circ T \circ H^{-1}\,.$$

Ce groupe a Γ comme trajectoire. Afin de montrer que G est un groupe quasi-isométrique on va d'abord établir l'inégalité

$$\frac{\operatorname{dist}\{H(u_1, v), \Gamma\}}{\operatorname{dist}\{H(u_2, v), \Gamma\}} \leq L_1\,, \tag{3.3}$$

pour tous $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, pour une constante $L_1 = L_1(M) \geq 1$.

Il existe $t_i \in \mathbb{R}$ avec $\operatorname{dist}\{H(u_i, v), \Gamma\} = \|H(u_i, v) - h(t_i)\|$, $i = 1, 2$. Soit $s_1 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\|(u_1, v) - (s_1, 0)\| = \|(u_2, v) - (t_2, 0)\| = l$$

et utilisons le fait qu'une application quasiconforme de $\mathbb{R}^2$ est K'-quasisymétrique avec $K' = K'(K)$ est une constante dépendant que de K et donc que de M, [Ge2]. Alors,

$$\operatorname{dist}\{H(u_1, v), \Gamma\} \leq \|H(u_1, v) - h(s_1)\| \leq K'\,\|h(s_1 + l) - h(s_1)\|$$

et donc, avec (I),

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}\{H(u_1, v), \Gamma\} &\leq K'M\,\|h(t_2 + l) - h(t_2)\| \\ &\leq K'^2 M\,\|H(u_2, v) - h(t_2)\|\,.\end{aligned}$$

Par le choix de t_2, $\operatorname{dist}\{H(u_1,v),\Gamma\} \leq K'^2 M \operatorname{dist}\{H(u_2,v),\Gamma\}$ ce qui est précisément (3.3) avec $L_1 = K'^2 M$.

On conclut maintenant comme dans [T2] preuve du Lemme 1. Soient $U_1 = H(\{x_2 > 0\})$ et $U_2 = H(\{x_2 < 0\})$ les composantes connexes de $\mathbb{R}^2 \backslash \Gamma$. L'application H, étant l'extension de Beurling-Ahlfors-Tukia de h, est, restreinte à $\{x_2 > 0\}$ ou à $\{x_2 < 0\}$, difféomorphe et une quasi-isométrie hyperbolique. La constante de quasi-isométrie hyperbolique dépend aussi que de M [T3]. On définit sur U_j la métrique quasi-hyperbolique par $|dy|/\operatorname{dist}\{y,\Gamma\}$. Cette métrique étant équivalente à la métrique hyperbolique, il existe $L_2 = L_2(M) \geq 1$ tel que

$$\frac{1}{L_2}\,\frac{|dy|}{\operatorname{dist}\{y,\Gamma\}} \leq \frac{|dg_t(y)|}{\operatorname{dist}\{g_t(y),\Gamma\}} \leq L_2\,\frac{|dy|}{\operatorname{dist}\{y,\Gamma\}}\,,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $y \in U_j$, $j = 1,2$. Or, y et $g_t(y)$ sont dans une même courbe $H(\{(x_1,v) : x_1 \in \mathbb{R}\})$ pour un $v \neq 0$. L'inégalité (3.3) implique donc

$$\frac{1}{L_1 L_2}\,|dy| \leq |dg_t(y)| \leq L_1 L_2\,|dy|\,, \qquad \text{pour presque tout} \quad y \in \mathbb{R}^2\,.$$

Les g_t étant quasiconformes on en déduit que le groupe G est bien un groupe quasi-isométrique (pour la métrique euclidienne) et que sa constante bilipschitzienne dépend que de M.

b) Le cas compact. On suppose maintenant qu'il existe $h : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \Gamma$ vérifiant (I). Soit encore H l'extension de Beurling-Ahlfors-Tukia de h et $G = H \circ \mathcal{R} \circ H^{-1}$ où $\mathcal{R} = \{x \longmapsto Ux : U \text{ matrice orthogonale}\}$ le groupe des rotations euclidiennes fixant 0 et ∞. Ce groupe a Γ comme trajectoire. Pour montrer que G est un groupe quasi-isométrique on peut supposer, quitte à conjuguer G avec une translation, que 0 est un point fixe des éléments de ce groupe. Supposons pour l'instant aussi qu'il existe $p \in \Gamma$ avec $\|p\| = 1$. Ceci implique $\Gamma \subset A(K') = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1/K' \leq \|x\| \leq K'\}$ puisque l'application H est K'-quasisymétrique avec K' dépendant que de M et on a $H(0) = 0$; le groupe G fixe 0.

Notons $d_{\mathbb{S}}$ la métrique sphérique (définie par $\|dx\|/(1 + \|x\|^2)$). L'involution $i(x) = x/\|x\|^2$ est une isométrie pour cette métrique. La métrique euclidienne et la métrique sphérique étant équivalentes dans $A(K')$, l'application $\overline{h} = i \circ h : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \overline{\Gamma} = i(\Gamma)$ vérifie aussi l'inégalité de (I) pour une constante $\overline{M}$ dépendant que de M.

Soit C_1 la composante connexe de $\mathbb{R}^2 \backslash \Gamma$ contenant 0 et C_2 l'autre. On considère $G_1 = G|_{C_1}$ et $\overline{G}_2 = i \circ G|_{C_2} \circ i$. Comme dans le cas non compact on montre que G_1 et $\overline{G}_2$ sont quasi-isométriques -pour le groupe $\overline{G}_2$ on utilise que $\overline{h}$ vérifi (I) et que $\overline{H} = i \circ H \circ i$ est une extension quasiconforme de $\overline{h}$ ayant les propriétés de l'extension de Beurling-Ahlfors-Tukia.

Dans $C_1 \cup i(C_2) \subset D(0, K')$ la métrique euclidienne et la métrique sphérique sont équivalentes. G_1, $\overline{G}_2$ et donc aussi G sont alors des groupes quasi-isométriques pour la métrique sphérique. Or, un groupe de $\mathbb{R}^2$ dont tout élément fixe 0 est quasi-isométrique pour la métrique sphérique si et seulement s'il l'est pour la métrique euclidienne (*cf.* [T3], on peut le voir en utilisant l'expression infinitesimale de cette métrique). G est alors bien un groupe quasi-isométrique pour la métrique euclidienne et sa constante bilipschitzienne est contrôlé par M.

Quand aucun point $p \in \Gamma$ est à distance un de l'origine, le groupe $G^* = d_{1/r} \circ G \circ d_r$, avec $d_r(x) = rx$ et $r = \|p\|$ pour un $p \in \Gamma$ quelconque, est, par le précédent raisonnement, un groupe quasi-isométrique dont la constante bilipschitzienne dépend que de M. Il en est alors de même pour G puisque conjugaison d'un groupe quasi-isométrique par similitude ne change pas sa constante bilipschitzienne.

Γ *est un QI-cercle implique* (III). Il existe $G = \{g_t : t \in \mathbb{R}\}$ un groupe L-quasi-isométrique de $\mathbb{R}^2$ agissant transitivement sur Γ. La courbe Γ est un $K(L)$-quasicercle puisque G se conjugue quasiconformément en un groupe isométrique et on a un contrôle de la dilatation de l'application conjugant en fonction de L, voir [T1].

Soient $\gamma_1 = \Gamma(p_1, p_2)$ et $\gamma_2 = \Gamma(q_1, q_2)$ des sous-arcs de Γ avec $R = \|p_1 - p_2\| = \|q_1 - q_2\|$. On veut montrer $N(r, \gamma_2) \leq H\, N(r, \gamma_1)$ avec $H = H(L)$. Pour éviter un problème d'orientation on suppose que soit $g_t(\gamma_1) \subset \gamma_2$ soit $g_t(\gamma_1) \supset \gamma_2$ où $t \in \mathbb{R}$ tel que $g_t(p_1) = q_1$.

On prend $\{x_0 = q_1, x_1, \ldots, x_m\}$ ordonné et maximal de sorte que $x_i \in \gamma_2$ pour $i = 0, 1, \ldots, m-1$ et tel que $\|x_i - x_{i-1}\| = R/L$ ainsi que $\|x - x_{i-1}\| < R/L$ quand $x \in \Gamma(x_{i-1}, x_i)$. Le choix de ces points et le Lemme 2.2 impliquent $m \leq n(R/L, \gamma_2) \leq \nu(4K) N(R/L, \gamma_2)$. Γ est un K-quasicercle et donc $\gamma_2 \subset D(q_1, KR)$. Avec (2.2) on en déduit $m \leq \nu(4K)\, \nu(LK) = H_1$.

Pour conclure on majore les nombres $N(r, \Gamma(x_{i-1}, x_i))$ en fonction de $N(r, \gamma_1)$. Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $g_t(p_1) = x_{i-1}$. Par le choix des x_i et le fait que le groupe est L-quasi-isométrique $\Gamma(x_{i-1}, x_i) \subset g_t(\gamma_1)$. Prenons $D_j = D(y_j, r)$, $j = 1, \ldots, N$ un recouvrement minimal de γ_1. Or, $g_t(D_j) \subset D(g_t(y_j), Lr)$ et donc, encore avec (2.2), on a

$$\frac{1}{\nu(L)}\, N(r, \Gamma(x_{i-1}, x_i)) \leq N(Lr, \Gamma(x_{i-1}, x_i)) \leq N(r, \gamma_1)\,.$$

D'où

$$N(r,\gamma_2) \leq \sum_{i=1}^{m} N(r,\Gamma(x_{i-1},x_i)) \leq \nu(L)\, H_1\, N(r,\gamma_1)$$

ce qui termine la preuve. Remarquons que $H = H_1\,\nu(L)$ dépend que de L.

(III) *implique* (I). Par le Lemme 2.1 une courbe vérifiant (III) est un quasicercle. Elle est alors soit homéomorphe à $\mathbb{R}$ soit à $\mathbb{S}^1$.

a) Le cas non compact. Supposons d'abord que Γ est une courbe vérifiant (III) et homéomorphe à $\mathbb{R}$. On peut supposer que $0 \in \Gamma$. Notons Γ^+ l'une des composantes connexes de $\Gamma\setminus\{0\}$ et soit $\gamma = \Gamma(0,q) \subset \overline{\Gamma}^+$ choisi de sorte que $\|q\| = 1$.

Considérons un $m \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe un $r_m > 0$ avec $N(r_m,\gamma) = m$. A ce m on associe une application continue $h_m : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de la façon suivante: soit $\{p_i \in \Gamma : i \in \mathbb{Z}\}$ un ensemble de points ordonnés avec $p_0 = 0$, $p_1 \in \Gamma^+$ et $\|p_i - p_{i-1}\| = r_m$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. L'application h_m est alors définie par $h(i/m) = p_i$ et par

$$h_m\Big|_{[(i-1)/m,i/m]} : \left[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}\right] \longrightarrow [p_{i-1},p_i] \quad \text{affine.}$$

On montre que $\{h_m\}$ est equicontinue et que la limite d'une sous-suite convergente est bien un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur Γ satisfaisant (I). La preuve de ceci est basée sur les inégalités suivantes: il existe $C_1(H)$ tel que

$$\left\|h_m\Big(\frac{i+k}{m}\Big) - h_m\Big(\frac{i}{m}\Big)\right\| \leq C_1(H)\left\|h_m\Big(\frac{j+l}{m}\Big) - h_m\Big(\frac{j}{m}\Big)\right\|, \tag{3.4}$$

pour tous $i,j \in \mathbb{Z}$ et $0 < k \leq l$, et il existe $C_2(H)$ tel que

$$\left\|h_M\Big(\frac{i}{M}\Big)\right\| \leq C_2(H)\left\|h_m\Big(\frac{1}{m}\Big)\right\|, \tag{3.5}$$

quand $M \geq m$ et $i/M \leq 1/m$.

Montrons (3.4). Γ étant un $2H$-quasicercle

$$\|p_{j+l} - p_j\| \geq \frac{\operatorname{diam}\Gamma(p_j,p_{j+l})}{2H} \geq \frac{r_m}{2H}\,.$$

L'inégalité (3.4) est alors une conséquence du Lemme 2.4 s'il existe $\tilde{H}$ dépendant que de H tel que

$$N\Big(\frac{r_m}{2H},\Gamma(p_i,p_{i+k})\Big) \leq \tilde{H}\,N\Big(\frac{r_m}{2H},\Gamma(p_j,p_{j+l})\Big)\,. \tag{3.6}$$

Les disques $D(p_{i+\nu}, 2Hr_m)$, $\nu = 1, \dots, k$, couvrent $\Gamma(p_i, p_{i+k})$. De ceci et de (2.2) on tire

$$N\Big(\frac{r_m}{2H}, \Gamma(p_i, p_{i+k})\Big) \leq \nu(4H^2)\, N(2Hr_m, \Gamma(p_i, p_{i+k})) \leq \nu(4H^2)\, k\,.$$

D'autre part, $l \leq n(r_m, \Gamma(p_j, p_{j+l}))$ puisque $\{p_j, \dots, p_{j+l}\}$ est un r_m-ensemble de $\Gamma(p_j, p_{j+l})$ non nécessairement maximal. Par le Lemme 2.2 on a alors

$$l \leq \nu(8H)\, N(r_m, \Gamma(p_j, p_{j+l})) \leq \nu(8H)\, N(\frac{r_m}{2H}, \Gamma(p_j, p_{j+l}))\,.$$

Ces dernières estimations montrent bien que (3.6) a lieu avec $\tilde{H} = \nu(4H^2)\, \nu(8H)$.

De la même façon on montre (3.5): pour pouvoir appliquer le Lemme 2.4 on se convaint qu'il existe $\tilde{H}$ dépendant que de H tel que

$$N\Big(r_M, \Gamma\big(0, h_M(\frac{i}{M})\big)\Big) \leq \tilde{H}\, N\Big(r_M, \Gamma\big(0, h_m(\frac{1}{m})\big)\Big)\,, \tag{3.7}$$

quand $M \geq m$ et $i/M \leq 1/m$. On montre comme plus haut que

$$N\Big(r_M, \Gamma\big(0, h_M(\frac{i}{M})\big)\Big) \leq \nu(2H)\, N\Big(2Hr_M, \Gamma\big(0, h_M(\frac{i}{M})\big)\Big) \leq \nu(2H)\, i\,.$$

D'autre part, les Lemmes 2.2 et 2.3 font que

$$N(r_M, \gamma) \leq H\, \nu(8H)\, N(r_m, \gamma)\, N\Big(r_M, \Gamma\big(0, h_m(\frac{1}{m})\big)\Big)\,.$$

Comme $N(r_k, \gamma) = k$ on a alors

$$\frac{M}{m} \leq H\, \nu(8H)\, N\Big(r_M, \Gamma\big(0, h_m(\frac{1}{m})\big)\Big)\,.$$

Or, $i/M \leq 1/m$ et donc (3.7) est bien valable avec $\tilde{H} = H\, \nu(2H)\, \nu(8H)$.

En conséquence de (3.4) et (3.5) il est clair que $\{h_m\}$ est equicontinue. Par le Théorème d'Ascoli il est alors possible d'extraire une sous-suite de $\{h_m\}$ convergeant uniformément sur les compacts de $\mathbb{R}$. L'inégalité (3.4) implique que la limite h satisfait l'inégalité de (I) et que h est soit constante soit un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur Γ. Afin de voir que h n'est pas une application constante il suffit d'établir que

$\|h(1)\| > 0$; h fixe 0. Comme $\{h_m(i/m) : i = 0, \ldots, m\}$ est un r_m-ensemble de $\Gamma(0, h_m(1))$ on a

$$N(r_m, \gamma) = m \leq n(r_m, \Gamma(0, h_m(1))) \leq \nu(8H)\, N(r_m, \Gamma(0, h_m(1)))\,.$$

On peut alors appliquer le Lemme 2.4: il existe $d = d(H)$ tel que $\|h_m(1)\| \geq \|q\|/d = 1/d$. La fonction h est donc bien un homéomorphisme.

b) Le cas compact: Γ est homéomorphe à $\mathbb{S}^1$. Supposons que $1 \in \Gamma$. Soit $r > 0$ suffisament petit et $P = \{p_0 = 1, p_1, \ldots, p_{m-1}\}$ ordonné r-espacé et maximal sur Γ tel que $r/2 \leq \|p_{m-1} - p_0\| \leq 3r/2$. A partir de ce choix on conclut comme dans le cas non compact.

(II) *si et seulement si* (I). Soit d'abord Γ une courbe vérifiant (II) et paramétrons cette courbe à l'aide de la mesure ω: comme Γ est un quasicercle (Lemme 2.1) c'est une courbe homéomorphe soit à $\mathbb{R}$ soit à $\mathbb{S}^1$. Considérons d'abord le cas non compact. Soit $p \in \Gamma$ et notons Γ^+ et Γ^- les composantes connexes de $\Gamma \backslash \{p\}$. On définit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \Gamma$ par $h(x) = q \in \overline{\Gamma^+}$ le point avec $\omega(\Gamma(p,q)) = x$ quand $x \geq 0$ et par $h(x) = q \in \Gamma^-$ le point avec $\omega(\Gamma(p,q)) = -x$ quand $x < 0$. Quand Γ est homéomorphe à $\mathbb{S}^1$ on note λ la mesure de Lebesque du cercle normalisée de sorte que $\lambda(\mathbb{S}^1) = \omega(\Gamma)$. Pour définir $h : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \Gamma$ on prend $x \in \mathbb{S}^1$, $p \in \Gamma$ et on munit les deux courbes d'une orientation. Alors, l'image de $y \in \mathbb{S}^1$ soit $h(y) = q \in \Gamma$ le point tel que les segments joignant dans le sens positif x à y, p à q respectivement, ont une même longueur (mesuré avec λ, ω respectivement).

Dans les deux cas on obtient ainsi un homéomorphisme $h : \mathbb{R}$ ou $\mathbb{S}^1 \longrightarrow \Gamma$. Montrons pour Γ non compact que cette paramétrisation vérifie l'inégalité de (I). Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \Gamma$, $x, y \in \mathbb{R}$ et $s \geq t > 0$. On note $p_1 = h(x)$, $p_2 = h(x+t)$, $q_1 = h(y)$, $q_2 = h(y+s)$ et $R = \|q_2 - q_1\|$. Soit $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ un R-ensemble de $\Gamma(p_1, p_2)$. Quand $n = 1$, forcément $\|p_1 - p_2\| \leq \|q_1 - q_2\|$. Sinon, les hypothèses sur ω et la définition de h impliquent

$$\begin{aligned} t = \omega(\Gamma(p_1, p_2)) &= \sum_{i=1}^{n} \omega(\Gamma(a_{i-1}, a_i)) \\ &\geq \frac{n-1}{A}\, \omega(\Gamma(q_1, q_2)) \geq \frac{n}{2A}\, s \geq \frac{n}{2A}\, t\,. \end{aligned}$$

On en déduit que $\|p_1 - p_2\| \leq nR \leq 2A\, \|q_1 - q_2\|$.

Pour la réciproque on pose $\omega(E) = |h^{-1}(E)| = \int_{h^{-1}(E)} dx$ où $E \subset \Gamma$ est un ensemble mesurable. C'est une mesure non triviale et (σ-)finie, *i.e.* $\omega(\Gamma(p,q)) = \omega(\Gamma(h(x+t), h(x))) = t$. Montrons qu'elle vérifie bien l'inégalité de (II). Soit $R = \|p_1 - p_2\| = \|q_1 - q_2\|$ avec $p_i, q_i \in \Gamma$ et soit $0 < t = \omega(\Gamma(p_1,p_2)) < \omega(\Gamma(q_1,q_2)) = s$. Notons $y_i = h^{-1}(q_i)$ et $a_j = h(y_1 + jt)$; on suppose que $y_1 < y_2$. (I) implique $\|a_i - a_{i-1}\| \geq \|p_2 - p_1\|/M = R/M$.

Soit $k \in \mathbb{N}$ le plus petit entier tel que $y_1 + kt \geq y_2$, *i.e.* tel que $kt \geq s$. Γ est un $K = K(M)$-quasicercle ce qui implique $\|a_i - a_j\| \geq R/(KM)$ quand $i \neq j$. Par conséquent tout disque de rayon $R/(2KM)$ contient au plus un des points a_i et donc

$$k \leq N\Big(\frac{R}{2KM}, \Gamma(q_1,q_2)\Big) \leq \nu(2K^2M)\, N(KR, \Gamma(q_1,q_2)) = \nu(2K^2M)$$

ce qui montre bien

$$\omega(\Gamma(q_1,q_2)) \leq \sum_{i=1}^{k} \omega(\Gamma(a_{i-1},a_i)) \leq \nu(2K^2M)\,\omega(\Gamma(p_1,p_2)).$$

3.1. QI-cercles avec constante un.

Pour terminer la démonstration du Théorème 1.1 il suffit de préciser ce qui se passe quand une des constantes est égale à un. Or, dans le cas où le groupe est 1-quasi-isométrique c'est un groupe d'isométries et donc Γ est soit une droite soit un cercle. Si la constante de (I) est un, l'homéomorphisme h est une 1-quasisymétrie et [McKV] implique que h est une transformation de Möbius. Quand Γ vérifi (II) avec constante $A = 1$ il est clair que l'homéomorphisme obtenu par paramétrisation comme dans la preuve (II) implique (I) est égalément une 1-quasisymétrie. Le cas restant se trouve dans la

Proposition 3.1. *Soit* Γ *une courbe vérifiant* (III) *avec constante égale à un, alors il s'agit soit d'une droite soit d'un cercle.*

La preuve de ce fait est basée sur le résultat suivant.

Lemme 3.2. *Soit* Γ *une courbe vérifiant* (III) *et soient* $\gamma_i = \Gamma(p_i, q_i)$, $i = 1, \dots, k$, *des arcs disjoints. Alors*

$$\lim_{r\to 0} \frac{N(r,\gamma_1) + \cdots + N(r,\gamma_k)}{N(r, \gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_k)} = 1.$$

PREUVE. Il suffit de considérer deux arcs disjoints γ_1 et γ_2. Si $\overline{\gamma}_1 \cap \overline{\gamma}_2 = \varnothing$ tout est clair. Sinon, $\{p\} = \overline{\gamma}_1 \cap \overline{\gamma}_2$, on a toujours $N(r,\gamma_1)+N(r,\gamma_2) \geq N(r, \gamma_1 \cup \gamma_2)$.

Soit $\gamma_{i,r} = \gamma_i \backslash (\gamma_i \cap D(p, 10Hr))$ pour $i = 1,2$ et $r > 0$ petit par rapport à $\operatorname{diam} \gamma_i$, $i = 1,2$. Puisque Γ est un $2H$-quasicercle (Lemme 2.1) on a $\|x_1 - x_2\| \geq 10Hr/2H = 5r$ pour tout $x_i \in \gamma_{i,r}$, $i = 1,2$. Les disques de rayon r d'un recouvrement minimal de $\gamma_{1,r}$ sont alors disjoints des disques d'un tel recouvrement de $\gamma_{2,r}$. D'où

$$N(r, \gamma_{1,r}) + N(r, \gamma_{2,r}) \leq N(r, \gamma_1 \cup \gamma_2).$$

En réutilisant le fait que le disque $D(p, 10Hr)$ se couvre par au plus $\nu = \nu(10H)$ disques de rayon r, on en déduit

$$\begin{aligned} N(r,\gamma_1) + N(r,\gamma_2) &\leq N(r,\gamma_{1,r}) + N(r,\gamma_{2,r}) + 2\,\nu \\ &\leq N(r, \gamma_1 \cup \gamma_2) + 2\,\nu, \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve.

PREUVE DE LA PROPOSITION 3.1. Il suffit de reprendre la preuve de (III) implique (I) et de voir que la constante $C_1(H)$ dans (3.4) peut être prise égale à un quand $H = 1$. Dans ce cas, on obtient encore une 1-quasisymétrie envoyant la droite ou le cercle sur Γ.

Notons $p_i = h_m(i/m)$ et supposons qu'on puisse avoir $\|p_{i+k} - p_i\| > \|p_{j+l} - p_j\|$ avec $k \leq l$. Dans ce cas il existe $x \in \Gamma(p_i, p_{i+k})$ avec $\|x - p_i\| = \|p_{j+l} - p_j\| = R$. Alors, par le Lemme 3.2 et par (III) avec $H = 1$

$$\begin{aligned} 1 \geq \frac{k}{l} &= \lim_{r\to 0} \frac{\sum_{\nu=1}^{k} N(r, \Gamma(p_{i+\nu-1}, p_{i+\nu}))}{\sum_{\nu=1}^{l} N(r, \Gamma(p_{j+\nu-1}, p_{j+\nu}))} \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{N(r, \Gamma(p_i, x)) + N(r, \Gamma(x, p_{i+k}))}{N(r, \Gamma(p_j, p_{j+l}))}\,. \end{aligned}$$

Or, quand $\|p_{i+k} - x\| > R$ il est clair que $N(r, \Gamma(x, p_{i+k})) \geq N(r, \Gamma(p_i, x))$, $r < R$. Sinon on applique le Lemme 2.3,

$$n(\|p_{i+k} - x\|, \Gamma(p_i, x))\, N(r, \Gamma(x, p_{i+k})) \geq N(r, \Gamma(p_i, x)).$$

D'où, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$1 \geq 1 + \lim_{r\to 0} \frac{N(r, \Gamma(x, p_{i+k}))}{N(r, \Gamma(p_j, p_{j+l}))} \geq 1 + \varepsilon \lim_{r\to 0} \frac{N(r, \Gamma(p_i, x))}{N(r, \Gamma(p_j, p_{j+l}))} = 1 + \varepsilon,$$

ce qui est impossible.

4. Les QI-cercles et la géométrie fractale.

Comme on l'a remarqué dans l'introduction, les "quasi-self-similar" cercles sont des QI-cercles. Quasi-auto-similarité veut dire que des petits morceaux d'une courbe s'agrandissent par une similitude en des arcs d'une taille standart, lesquels se plongent quasi-isométriquement dans la courbe elle même. Une conséquence de ceci est que les sous-arcs d'une même taille sont quasi-isométriques; *cf.* (1.1). Cette dernière propriété est aussi valable pour les QI-cercles. On peut même dire qu'elle les caractérise. Par contre, il n'y a plus de rapport entre des sous-arcs de différentes tailles.

Cet affaiblissement des propriétés fait que les résultats des "quasi-self-similar" cercles ne se transmettent pas directement à des QI-cercles. Néanmoins, on peut montrer que pour un QI-cercle la dimension de Hausdorff coïncide avec la "lower Box-dimension". En plus il est possible d'étendre le théorème de Falconer et Marsh [FM] à des QI-cercles.

Pour pouvoir faire ceci nous aurons besoin de mieux connaître le comportement de certaines mesures sur un QI-cercle Γ. On lui associe d'abord une fonction ρ, appelée *fonction de dimension* canonique, de la façon suivante: quand Γ est compact on pose $\rho(r) = 1/N(r,\Gamma)$, $0 < r \leq \operatorname{diam}\Gamma$. Sinon on choisit $\gamma = \Gamma(a,b)$ un sous-arc quelconque de Γ avec $\|a-b\| = 1$ et $\gamma_r = \Gamma(a,x) \supset \gamma$ avec $\|a-x\| = r$ ainsi que $\|a-y\| < r$ pour tout $y \in \Gamma(b,x)$. Alors, on définit maintenant $\rho(r) = 1/N(r,\gamma)$ pour $0 < r \leq 1$ et $\rho(r) = N(1,\gamma_r)$ pour $r > 1$.

Lemme 4.1. *Sur un QI-cercle Γ il existe une mesure ω et des constantes C_3 et C_4 telles que*

$$(4.8) \qquad \frac{1}{C_3} \leq \frac{\omega(\Gamma(p,q))}{\rho(\|p-q\|)} \leq C_3\,, \qquad \textit{pour tous } \ p,q \in \Gamma\,,\ p \neq q\,,$$

et

$$(4.9) \qquad \omega(D(x,r)) \leq C_4\,\rho(r)\,, \qquad \textit{pour tous } \ x \in \mathbb{R}^2 \ \textit{ et } \ r > 0\,.$$

PREUVE. Soit ω la mesure de (II) du Théorème 1.1 normalisée par $\omega(\Gamma) = 1$ quand Γ est compact et par $\omega(\gamma) = 1$ sinon, γ étant l'arc de la définition de ρ.

Soit Γ non compact et considérons d'abord le cas $r = \|p-q\| \leq 1$, $p,q \in \Gamma$. Notons $\{x_0,\ldots,x_n\}$ un r-ensemble de γ. Alors l'inégalité de

(II) implique

$$1 = \omega(\gamma) = \sum_{i=1}^{n} \omega(\Gamma(x_{i-1}, x_i)) \leq A\, n\, \omega(\Gamma(p,q))$$

et aussi $n\,\omega(\Gamma(p,q))/2 \leq A$. L'inégalité (4.8) en résulte immédiatement puisque les nombres n et $N(r,\gamma)$ sont équivalents (Lemme 2.2).

Quand $r = \|p-q\| > 1$ on choisit $\{x_0, \ldots, x_n\}$ un 1-ensemble de γ_r et on applique encore l'inégalité de (II):

$$\omega(\Gamma(p,q)) \leq A\,\omega(\gamma_r) = A \sum_{i=1}^{n} \omega(\Gamma(x_{i-1}, x_i)) \leq A^2\, n\, \omega(\gamma) = A^2\, n$$

et $A^2 \omega(\Gamma(p,q)) \geq n/2$. Il suffit encore d'appliquer le Lemme 2.2 pour en déduire (4.8).

Quand Γ est compact on procède de la même façon.

De ces estimations on déduit (4.9). Effectivement, puisque Γ est un $2H$-quasicercle, avec H la constante de (III), l'ensemble $\Gamma \cap D(x, 5Hr)$ contient un arc $\sigma = \Gamma(u,v)$, $u, v \in \partial D(x, 5Hr)$, contenant l'ensemble $\Gamma \cap D(x,r)$. D'où $\omega(D(x,r)) = \omega(\Gamma \cap D(x,r)) \leq \omega(\sigma)$ et par (4.8) ceci devient $\omega(D(x,r)) \leq C_3\, \rho(\|u-v\|)$. On en déduit (4.9) puisque $\|u-v\| \leq 10\, Hr$.

La fonction ρ définie avant le lemme précédent est croissante et elle vérifie $\lim_{r\to 0} \rho(r) = 0$. A une telle fonction on peut associer la mesure de Hausdorff suivante

$$\text{(4.10)} \quad m_\rho(E) = \lim_{r\to 0} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \rho(r_i) : \; E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} D(x_i, r_i) \text{ avec } r_i < r \right\},$$

pour $E \subset \Gamma$.

Lemme 4.2. *Soit Γ un QI-cercle, ρ sa fonction de dimension canonique et m_ρ la mesure de Hausdorff associée. Alors, il existe une constante C_5 telle que*

$$\frac{1}{C_5}\, \rho(\|p-q\|) \leq m_\rho(\Gamma(p,q)) \leq C_5\, \rho(\|p-q\|)\,, \quad \textit{pour tous } p,q \in \Gamma\,.$$

PREUVE. L'inégalité de gauche est une conséquence du Lemme 4.1 et du lemme de Frostman. Effectivement, si $\Gamma(p,q) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} D(x_i, r_i)$ alors

$$\omega(\Gamma(p,q)) \le \sum_{i=1}^{\infty} \omega(D(x_i, r_i)) \le C_4 \sum_{i=1}^{\infty} \rho(r_i)$$

et donc $C_4\, C_3\, m_\rho(\Gamma(p,q)) \ge \rho(\|p-q\|)$.

Dans la preuve de l'autre inégalité on fait appel aux Lemmes 2.2 et 2.3. Quand $R = \|p-q\| > 1$ alors

$$\begin{aligned} m_\rho(\Gamma(p,q)) &\le \liminf_{r\to 0} \frac{N(r,\Gamma(p,q))}{N(r,\gamma)} \\ &\le H\, n(1,\Gamma(p,q)) \\ &\le H^2\, \nu(8H)\, \rho(\|p-q\|) \end{aligned}$$

et quand $R = \|p-q\| \le 1$ on a

$$m_\rho(\Gamma(p,q)) \le \liminf_{r\to 0} \frac{N(r,\Gamma(p,q))}{N(r,\gamma)} \le \frac{1}{\eta(H)} \frac{1}{n(R,\gamma)} \le \frac{\rho(\|p-q\|)}{\eta(H)} .$$

4.1. Les QI-cercles et les différentes dimensions.

Connaître le lien entre les différentes notions de dimensions a des avantages pratiques. Par exemple, la simple définition des "Box-dimensions" fait qu'elles s'évaluent facilement alors que l'estimation de la dimension de Hausdorff est souvent laborieuse et difficile.

Précisons ces termes pour un compact $K \subset \mathbb{R}^2$. Sa dimension de Hausdorff est $\mathrm{Hdim}(K) = \sup\{\delta > 0 : m_{r^\delta}(K) = +\infty\}$; m_{r^δ} est la mesure de Hausdorff de dimension δ. Les "Box-dimensions" sont données par

$$\underline{\mathrm{Bdim}}\,(K) = \liminf_{r\to 0} \frac{\log N(r,K)}{-\log r} ,$$

$$\overline{\mathrm{Bdim}}\,(K) = \limsup_{r\to 0} \frac{\log N(r,K)}{-\log r} .$$

On a toujours $\mathrm{Hdim}\,(K) \le \underline{\mathrm{Bdim}}\,(K) \le \overline{\mathrm{Bdim}}\,(K)$ et pour les "quasi-self-similar" cercles ces trois nombres coïncident.

Proposition 4.3. *Un QI-cercle Γ a toujours la dimension de Hausdorff égale à la "lower Box-dimension":* $\mathrm{Hdim}(\Gamma) = \underline{\mathrm{Bdim}}(\Gamma)$. *Par contre, il existe des exemples pour lesquels les différentes "Box-dimensions" sont distinctes:* $\underline{\mathrm{Bdim}}(\Gamma) < \overline{\mathrm{Bdim}}(\Gamma)$.

PREUVE DE $\mathrm{Hdim}(\Gamma) = \underline{\mathrm{Bdim}}(\Gamma)$. Il est suffisant de considérer $\gamma \subset \Gamma$ un arc quelconque puisque sur Γ agit un groupe quasi-isométrique transitif et les dimensions sont invariantes par quasi-isométrie. Prenons alors pour γ l'arc de la définition de la fonction de dimension canonique ρ quand Γ n'est pas compact et $\gamma = \Gamma$ sinon.

Pour tout

$$\beta < \delta = \underline{\mathrm{Bdim}}(\gamma) = \liminf_{r\to 0} \frac{\log \rho(r)}{\log r}$$

on a $\lim_{r\to 0} \rho(r)/r^\beta = 0$. Comme $m_\rho(\gamma) > 0$ (Lemme 4.2) il suit que $m_{r^\beta}(\gamma) = +\infty$.

Un exemple d'un QI-cercle ayant différents "upper" et "lower Box-dimension".

Utilisons la construction du "snowflake" et notons $T_{a,b}$ la transformation qui associe à un intervalle $I = [a,b]$ la première iterée du snowflake avec les extrémités a et b. Plus précisement, soient $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ ainsi que

$$x_1 = a + \frac{b-a}{3}, \qquad x_2 = \frac{a+b}{2} + (b_2 - a_2, a_1 - b_1)\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

et

$$x_3 = a + \frac{2(b-a)}{3}.$$

On associe à ces points quatre similitudes contractantes T_i , $i = 1, \ldots, 4$, envoyant $\overrightarrow{ab}$ sur $\overrightarrow{ax_1}$, $\overrightarrow{x_1x_2}$, $\overrightarrow{x_2x_3}$, $\overrightarrow{x_3b}$, respectivement. Notons

$$T_{a,b}(K) = \bigcup_{i=1}^{4} T_i(K), \qquad K \text{ compact de } \mathbb{R}^2.$$

Soit $J_0 = [a,b]$ avec $\|a-b\| = 1$ et $J_1 = T_{a,b}(J_0)$. J_1 consiste en quatre côtés de longueur $1/3$, ce qui correspond à une dimension $\delta_1 = \log 4/\log 3$. Soit $0 < \varepsilon < (\delta_1 - 1)/4$. Il existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$4\,k_1 \left(\frac{1}{3k_1}\right)^{\delta} = 1, \qquad \text{avec } 1 \le \delta \le 1 + \varepsilon.$$

En fait, on saute k_1 itérations de $T_{a,b}$ pour ramener la dimension proche de un. Partageons alors J_1 en $4\,k_1$ $[a_i,b_i]$ de longueur $1/(3\,k_1)$: $J_1 = \cup_{i=1}^{4k_1}[a_i,b_i]$. Maintenant on va effectuer k_2 itérations de $T_{a_ib_i}$ sur les intervalles $[a_i,b_i]$. Soit donc

$$J_2 = \bigcup_{i=1}^{4k_1} T_{a_ib_i}^{k_2}\left([a_i,b_i]\right) ,$$

où k_2 est choisi de sorte que

$$4^{k_2}4\,k_1\left(\frac{1}{3^{k_2}}\frac{1}{3k_1}\right)^{\delta} = 1\,,$$

avec cette fois ci $\delta_1 - \varepsilon < \delta \leq \delta_1$. Les prochaines k_3 itérations de $T_{a_ib_i}$ on les saute pour avoir de nouveau une dimension proche de un et ainsi de suite.

Soit $\Gamma(a,b)$ la limite de ce procédé. L'exemple cherché est

$$\Gamma = \Gamma\big((0,0),(1,0)\big) \cup \Gamma\Big((0,0),(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})\Big) \cup \Gamma\Big((\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}),(1,0)\Big)\,.$$

Clairement, Γ est un QI-cercle le critère géométrique (III) étant vérifié et on a

$$\underline{\mathrm{Bdim}}\,(\Gamma) < \overline{\mathrm{Bdim}}\,(\Gamma)\,.$$

4.2. Classification des QI-cercles par quasi-isométrie.

Si on veut établir un analogue du théorème de Falconer et Marsh [FM] pour les QI-cercles on est amené à prendre une notion plus forte que seulement la dimension, à cause de l'exemple du paragraphe précédent: ce sont les classes de fonctions de dimension.

On appelle une fonction $\rho : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ croissante et vérifiant $\lim_{r\to 0}\rho(r) = 0$ ainsi que $\lim_{r\to\infty}\rho(r) = +\infty$ *fonction de dimension.* Remarquons que pour les courbes compactes seul le comportement de ρ au voisinage de 0 est important. On se contente alors dans ce cas de définir la fonction de dimension au voisinage de 0. Deux fonctions de dimension ρ_1,ρ_2 sont équivalentes s'il existe $\alpha,\beta > 0$ tels que

$$\alpha \leq \frac{\rho_1(r)}{\rho_2(r)} \leq \beta\,, \qquad \text{pour tout } r > 0\,.$$

Au début de ce paragraphe nous avons associé à un QI-cercle Γ une fonction de dimension canonique ρ. L'ensemble de fonctions de dimensions équivalentes à ce ρ est appelé la classe de fonctions de dimension associée à Γ.

Théorème 4.4. *Soient Γ_1 et Γ_2 deux QI-cercles, tout deux compacts ou non. Il existe $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une quasi-isométrie identifiant les courbes, $\Phi(\Gamma_1) = \Gamma_2$, si et seulement si Γ_1 et Γ_2 ont la même classe de fonctions de dimension.*

REMARQUE. Ce théorème contient le résultat de Falconer et Marsh [FM]: si Γ est un "quasi-self-similar" cercle, sa classe de fonctions de dimension est celle qui contient la fonction constante $\delta(r) = \dim \Gamma$. D'où, pour deux telles courbes Γ_1 et Γ_2 il existe une quasi-isométrie $\varphi : \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_2$ si et seulement si les deux courbes ont la même dimension.

PREUVE. Montrons l'existence de la quasi-isométrie Φ sous l'hypothèse que les Γ_i ont la même classe de fonctions de dimension. On note ρ_1, ρ_2 les fonctions de dimension canoniques de Γ_1, Γ_2 respectivement et m_{ρ_i} les mesures de Hausdorff associées. Ces mesures permettent de paramétrer les courbes Γ_i; *cf.* la preuve (II) implique (I). Notons $h_i : \mathbb{R}$ ou $\mathbb{S}^1 \longrightarrow \Gamma_i$, $i = 1, 2$, ces paramétrisations. On montre que $\varphi = h_2 \circ h_1^{-1} : \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_2$ est une quasi-isométrie.

Par le Lemme 4.2 il existe $C_5 \geq 1$ tel que

$$\frac{\rho_i(\|u-v\|)}{C_5} \leq m_{\rho_i}(\Gamma_i(u,v)) \leq C_5\, \rho_i(\|u-v\|)\,, \quad u, v \in \Gamma_i\,.$$

Si $p_1, p_2 \in \Gamma_1$ et si $q_i = \varphi(p_i) \in \Gamma_2$, $i = 1, 2$, alors $m_{\rho_1}(\Gamma_1(p_1,p_2)) = m_{\rho_2}(\Gamma_2(q_1,q_2))$ et donc

$$\frac{1}{C_5^2} \leq \frac{\rho_1(\|p_1-p_2\|)}{\rho_2(\|q_1-q_2\|)} \leq C_5^2\,.$$

Par l'équivalence de ρ_1 et ρ_2 il existe $\alpha, \beta > 0$ telles que

$$\frac{\beta}{C_5^2} \leq \frac{\rho_1(\|p_1-p_2\|)}{\rho_1(\|q_1-q_2\|)} \leq \alpha\, C_5^2\,.$$

De cette condition il est facile à voir que φ est une quasi-isométrie. Il suffit d'expliciter $\rho_1(r)$ dans les différents cas et d'utiliser le Lemme 2.3.

On peut prolonger φ en une quasi-isométrie Φ du plan grâce à un résultat de Gehring [Ge1]. Une autre possibilité est de montrer, comme dans la preuve "(I) implique Γ est un QI-cercle", que $\Phi = H_2 \circ H_1^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, avec H_i les extensions quasiconformes de Beurling-Ahlfors-Tukia des quasisymétries h_i, est une quasi-isométrie du plan.

Soit maintenant Φ une L-quasi-isométrie de $\mathbb{R}^2$ telle que $\Phi(\Gamma_1) = \Gamma_2$ et notons encore ρ_1, ρ_2 les fonctions de dimensions canoniques de Γ_1 , Γ_2 respectivement. On doit montrer qu'elles sont équivalentes.

Considérons d'abord le cas Γ_1 et Γ_2 compact. Si $D(x_1, r), \ldots, D(x_N, r)$ est un recouvrement minimal de Γ_1, alors les ensembles $E_i = \Phi(D(x_i, r))$ couvrent Γ_2 et $E_i \subset D(\Phi(x_i), Lr)$. D'où et avec (2.2) il est clair que $N(r, \Gamma_1) \geq N(Lr, \Gamma_2) \geq N(r, \Gamma_2)/\nu(L)$. Par symétrie du problème il en résulte $1/\nu(L) \leq \rho_1(r)/\rho_2(r) \leq \nu(L)$.

Quand les Γ_i ne sont pas compacts on doit montrer qu'il existe $C \geq 1$ tel que

$$\frac{1}{C} \leq \frac{N(r, \gamma_1)}{N(r, \gamma_2)} \leq C, \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{C} \leq \frac{N(1, \gamma_{1,r})}{N(1, \gamma_{2,r})} \leq C$$

où les arcs viennent de la définition des ρ_i. Ce qui compte est que les extrémités des γ_i et des $\gamma_{i,r}$ sont à distance égale. D'où, la preuve de ceci est exactement le contenue de la preuve "QI-cercle implique (III)". Le rôle des g_t dans cette preuve prend ici $g_{2,t} \circ \Phi$ où $G_2 = \{g_{2,t} : t \in \mathbb{R}\}$ est le groupe quasi-isométrique de Γ_2 .

References.

[Bo] Bowen, R., Hausdorff dimension of quasi-circles. *Publ. Math. IHES* **50**, 259-273.

[Fa] Falconer, K. J., *Fractal Geometry.* Mathematical Foundations and Applications, John Wiley, 1990.

[FM] Falconer, K. J. and Marsh, T. D., Classification of quasi-circles by Hausdorff-dimension. *Nonlinearity* **2** (1989), 489-493.

[Ge1] Gehring, F. W., Injectivity of local quasi-isometries. *Comm. Math. Helv.* **57** (1982), 202-220.

[Ge2] Gehring, F. W., Characteristic properties of quasidiscs. Les presses de l'Université de Montréal (1982).

[Gr] Greenberg, L., Discrete subgroups of the Lorentz group. *Math. Scandinavica* **10** (1962), 85-107.

[McKV] McKemie, M. J. and Vaaler, J. D., Weakly quasisymmetric embeddings of $\mathbb{R}$ into $\mathbb{C}$. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.I.* **12** (1987), 163-170.

[Su1] Sullivan, D., On the ergodic theory at infinity of an arbitrary discrete group of hyperbolic motions. *Ann. of Math. Stud.* **97** (1981), 465-496.

[Su2] Sullivan, D., *Conformal dynamical systems.* Lecture Notes in Math. **1007** (1983), 725-752.

[T1] Tukia, P., On two-dimensional quasiconformal groups. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.I.* **5** (1980), 73-80.

[T2] Tukia, P., A quasiconformal group not isomorphic to a Möbius group. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.I.* **6** (1981), 149-160.

[T3] Tukia, P., Extension of quasisymmetric and Lipschitz embeddings of the real line into the plane. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.I.* **6** (1981), 89-94.

Recibido: 19 de mayo de 1.993
Revisión: 8 de abril de 1.994

Volker Mayer
CEREMAB. Université de Bordeaux I
351, Cours de la Libération
F-33405 Talence Cedex, FRANCE

and

U.R.A. 751 du C.N.R.S. "GAT"
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées
Université des Sciences et Technologies de Lille
59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, FRANCE
mayer@gat.univ-lille1.fr