Revista Matemática Iberoamericana
Vol. 11, N.° 2, 1995

Comportement asymptotique dans l'algorithme de transformée en ondelettes. Lien avec la régularité de l'ondelette.

Loïc Hervé

Résumé. Nous faisons l'étude du comportement asymptotique dans l'arbre de filtrage d'une transformée en ondelettes, en particulier en fonction de l'ordre de régularité de l'ondelette.

Abstract. We study the asymptotic performance for a Wavelets Transform, in particular as a function of the regularity order of the wavelet.

1. Introduction.

Analyses multirésolutions et transformées en ondelettes. On note $L^2(\mathbb{R})$ l'espace de Lebesgue usuel, et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ son produit hilbertien. Rappelons qu'une analyse multirésolution ([10], [11]) est par définition une famille $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ de sous-espaces fermés de $L^2(\mathbb{R})$ tels que

$$\text{a)} \quad \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{\vec{0}\} \qquad \text{et} \qquad \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})\,.$$

b) $V_j \subset V_{j+1}$.

c) $f \in V_j$ est équivalent à $f(2^{-j}\cdot) \in V_0$.

d) Il existe une fonction $\phi \in V_0$, appelée *fonction d'échelle*, telle que la famille $\{\phi(\cdot + k) : k \in \mathbb{Z}\}$ forme une base de Riesz de V_0.

Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, le système $\{\phi_{j,k} = 2^{j/2}\phi(2^j \cdot -k) : k \in \mathbb{Z}\}$ est une base de Riesz de V_j. Comme $V_0 \subset V_1$, il existe une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ dans $\ell^2(\mathbb{Z})$ telle que

$$(1) \qquad \phi(\cdot) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n\, \phi(2\cdot + n) \qquad \text{(équation d'échelle)}.$$

Les analyses multirésolutions fournissent un cadre pour l'étude des algorithmes d'analyse-synthèse appelés codages en sous-bande [5] ou encore transformées en ondelettes [10]. Par commodité pour le lecteur, nous donnons en appendice un bref descriptif de l'algorithme dans le cas simple orthogonal (ϕ engendre par translation entière une base orthonormée de V_0). Dans ce travail, nous nous intéressons uniquement à la partie "analyse" de la transformée qui, dans tous les cas (orthogonal et non orthogonal), utilise l'itération de l'opérateur

$$(T_0 x)(n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k\, x(2n-k), \qquad n \in \mathbb{Z},\ x = (x(n))_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}).$$

Hypothèses et notations. La donnée principale d'une analyse multirésolution est la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. On peut d'ailleurs caractériser les suites (assez générales) qui dérivent d'une analyse multirésolution [3], [1], [7]. En outre, la régularité de ϕ peut être calculée à l'aide de $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ (voir [4] pour un exposé des différentes méthodes). Dans ce travail, on considère une analyse multirésolution $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ telle que $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ soit à support fini. Pour fixer les idées, on supposera que $h_n = 0$ pour tout $n \notin [0, N]$, où $N \in \mathbb{N}^*$. D'autre part, on pose

$$H_0(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N} h_k\, e^{2i\pi k\lambda}, \qquad \lambda \in [0,1].$$

On sait que $H_0(0) = 1$ et $H_0(1/2) = 0$, [11], [4]. Il existe donc $r \in \mathbb{N}^*$ et un polynôme trigonométrique v, avec $v(1/2) \neq 0$, tels que

$$(2) \qquad H_0(\lambda) = 2^{-r}(1 + e^{2i\pi\lambda})^r\, v(\lambda).$$

Le choix du filtre H_0 est une question importante dans la pratique. Sans donner une liste exhaustive de tous les types de filtres et de leurs avantages, citons le cas orthogonal, décrit en appendice, qui fournit des formules d'analyse-synthèse très simples, le cas biorthogonal ([1], [4]) qui, tout en conservant l'avantage précédent, permet d'obtenir par exemple des filtres symétriques. D'autre part, on observe dans la pratique que la régularité de ϕ joue un rôle important dans la transformée en ondelettes, mais essentiellement quand l'ordre de régularité est ≤ 1, [12]. Au delà de la classe C^1, la régularité de ϕ ne semble pas fournir de gains substanciels en efficacité pour la transformée en ondelettes. Nous nous proposons de démontrer une propriété sur les itérées de T_0 qui corrobore l'observation précédente. Plus précisément,

L'objet de ce travail est de faire une étude précise de la convergence des itérées de T_0 (en particulier de la vitesse de convergence) en fonction de la régularité de ϕ, et plus exactement en fonction du coefficient

$$s_1 = s_1(\phi) = \sup\left\{s \in \mathbb{R} : \int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda|^s \, |\hat{\phi}(\lambda)| \, d\lambda < +\infty\right\},$$

où $\hat{\phi}$ est la transformée de Fourier de ϕ. Rappelons que, si $s_1 > 0$, alors $\phi \in C^\alpha$ pour tout α tel que $0 < \alpha < s_1$. On a noté C^α l'ensemble des fonctions f telles que f est $[\alpha]$-fois dérivable et $f^{[\alpha]}$ est uniformément $(\alpha - [\alpha])$-hölderienne, où $[\alpha]$ est la partie entière de α. En outre on a

$$(3) \quad s_1 = \lim_{n\to+\infty} \left(r - \log_2 \frac{S_{n+1}}{S_n}\right), \qquad \text{où } S_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} \left|v\left(\frac{k}{2^n}\right) \cdots v\left(\frac{k}{2}\right)\right|,$$

la vitesse de convergence étant exponentielle, voir [7], [8]. Notons que le but de ce travail est, en un certain sens, opposé à celui de [13], [14], où l'on fait l'étude de la régularité de ϕ à l'aide de l'analyse spectrale (essentiellement calcul du rayon spectral) d'opérateurs du type de T_0.

Les résultats sont présentés dans le Paragraphe 2, le principal s'énonçant de la manière suivante (Théorème 2.2): si $s_1 > 0$, alors dans un certain sous-espace de $\ell^2(\mathbb{Z})$ (assez gros), la suite d'opérateurs $(2^{j/2} T_0^j)_{j\geq 1}$ converge en norme avec une vitesse de convergence exponentielle, de l'ordre de 2^{-js_1} si $s_1 < 1$, et de l'ordre de 2^{-j} si $s_1 \geq 1$ (dans ce dernier cas, ϕ est au moins de classe C^1). Ces estimations montrent que la suite $\{T_0^j : j \geq 1\}$, qui est à la base de l'analyse dans la transformée en ondelettes, admet un comportement asymptotique étroitement lié à l'ordre de régularité de ϕ, mais uniquement quand ce dernier est ≤ 1. Pour $s_1 \geq 1$, nous préciserons les résultats précédents en donnant un développement asymptotique de $T_0^j x$, où x est une suite assez générale.

Les preuves, regroupées dans le Paragraphe 3, utilisent les opérateurs de transfert notés P_w définis, à partir d'une fonction w, 1-périodique, par

$$P_w f(\lambda) = w\big(\frac{\lambda}{2}\big)\, f\big(\frac{\lambda}{2}\big) + w\big(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}\big)\, f\big(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}\big),$$

où f est une fonction 1-périodique. Sous l'hypothèse $w \geq 0$, ces opérateurs ont fait l'objet de nombreux travaux (voir par exemple [3], [9]) et ont été beaucoup utilisés dans la théorie des ondelettes: caractérisation des filtres dérivant d'une analyse multirésolution, étude de la régularité de ϕ. La difficulté de ce travail réside dans le fait que les opérateurs P_w mis en jeu ici (par exemple P_{H_0}, P_v) ne sont pas nécessairement positifs. En revanche, la propriété de quasi-compacité ([6], [9]) est conservée. Pour résumer les techniques utilisées dans le Paragraphe 3, indiquons que l'étude spectrale de T_0 est ramenée à celle P_{H_0}, qui elle-même se déduit de celle de P_v. Enfin les propriétés spectrales de P_v sont comparées à celles de $P_{|v|}$ dont dépend le coefficient s_1 (en effet on a $S_n = P_{|v|}^n(1)$).

2. Etude des itérées de T_0.

• **Etude sur** $\ell^2(\mathbb{Z})$ (Pour simplifier, on se place ici dans le cas orthogonal). On sait que, pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\lim_{j \to +\infty} \|\Pi_{-j} f\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0,$$

où l'on a noté Π_j la projection orthogonale sur V_j. Si en outre $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, on peut montrer que $\|\Pi_{-j} f\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C_\phi\, 2^{-j/2}\, \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$.

Soient $x = (x(n))_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ et $f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n)\, \phi(t-n)$. Rappelons que

$$(4) \qquad \langle f, \phi_{-j,k} \rangle = (T_0^j x)(k), \qquad \text{pour tous } j \in \mathbb{N}^*,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Comme $\{\phi_{j,k} = 2^{j/2}\phi(2^j \cdot - k) :\ k \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormée de V_j, on en déduit que

$$\lim_{j \to +\infty} \|T_0^j x\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} = 0,$$

et si f est intégrable sur $\mathbb{R}$, $\|2^{j/2}\, T_0^j x\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} \leq C_\phi \, \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$.

A l'exception de la constante C_ϕ, ces dernières propriétés sont communes à toutes les analyses multirésolutions. Par conséquent, nous limiterons l'étude des itérées de T_0 à des sous-espaces propres de $\ell^2(\mathbb{Z})$ (largement représentatifs en pratique). Nous utiliserons pour cela les notations suivantes: pour $1 \leq p \leq +\infty$, on désigne par $(L^p(\mathbb{T}), \|\cdot\|_p)$ l'espace de Lebesgue usuel pour les fonctions 1-périodiques, à valeurs dans $\mathbb{C}$. On note $(E^0, \|\cdot\|_\infty)$ le sous-espace de $L^\infty(\mathbb{T})$ des fonctions continues, et $(E^1, \|\cdot\|)$ le sous-espace de E^0 des fonctions uniformément lipschitziennes, muni de la norme

$$\|X\| = \|X\|_\infty + \sup_{\lambda \neq \lambda'} \frac{|X(\lambda') - X(\lambda)|}{|\lambda' - \lambda|} \, .$$

Pour $X \in L^1(\mathbb{T})$, on note $J(X)$ la suite des coefficients de Fourier de X

$$J(X)(n) = \int_0^1 X(\lambda)\, e^{-2i\pi n\lambda}\, d\lambda \, , \qquad n \in \mathbb{Z} \, .$$

Pour tout espace de Banach $(B, \|\cdot\|)$ inclus dans $L^1(\mathbb{T})$, on définit l'espace de Banach $(J(B), \|\cdot\|_{J(B)})$ des suites $x = J(X)$, où $X \in B$, avec $\|x\|_{J(B)} = \|X\|_B$.

• **Etude sur $\mathcal{S} = J(L^\infty(\mathbb{T}))$.** Ce premier résultat met en évidence le lien entre le comportement des itérées de T_0 et le coefficient s_1.

Théorème 2.1. *Soit $\mathcal{S} = J(L^\infty(\mathbb{T}))$ muni de la norme $\|x\|_{\mathcal{S}} = \|X\|_\infty$, pour $x = J(X) \in \mathcal{S}$. L'opérateur T_0 est borné sur $\mathcal{S}$, et les trois propriétés suivantes sont équivalentes*

i) *La suite $\{2^{j/2}\, T_0^j : \, j \geq 1\}$ est uniformément bornée dans $\mathcal{S}$.*

ii) *$\hat{\phi}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.*

iii) $s_1 > 0$.

EXEMPLE. $H_0(\lambda) = 2^{-1}(1 + e^{2i\pi\lambda})$ (filtre de Haar). On a

$$\hat{\phi}(\lambda) = e^{i\pi\lambda} \, \frac{\sin \pi\lambda}{\pi\lambda} \notin L^1(\mathbb{R}) \, .$$

Les itérées de T_0 ne sont donc pas uniformément bornées dans $\mathcal{S}$.

• Etude sur $\mathcal{S}^1 = J(E^1)$ et $\mathcal{S}^0 = J(E^0)$. On supposera désormais que $s_1 > 0$. On considère la matrice carrée suivante

$$A_0 = \left(\alpha_0(k,l)\right)_{k,\,l=0,\dots,N}\,, \qquad \text{où } \alpha_0(k,l) = h_{2k-\ell}\,,\ k,l = 0,\dots,N\,.$$

Les conditions $H_0(0) = 1$ et $H_0(1/2) = 0$, équivalentes à $\sum_n h_{2n} = \sum_n h_{2n+1} = 1$, assurent que la somme des coefficients sur chaque colonne de A_0 est égale à 1. D'où ${}^t\!A\vec{e} = \vec{e}$, avec $\vec{e} = {}^t[1,\dots,1]$. On en déduit que 1 est valeur propre de A_0.

Théorème 2.2. *Soit $\mu_0 = \sup\{|\mu| : \mu \in \operatorname{spect}(A_0),\ \mu \neq 1\}$. On a $\mu_0 < 1$, et il existe un unique vecteur $\gamma_0 = (\gamma_0(n))_{n=0}^N$ invariant par A_0 tel que $\sum_{n=0}^N \gamma_0(n) = 1$.*

Soit $\mathcal{S}^1 = J(E^1)$ muni de la norme $\|x\|_{\mathcal{S}^1} = \|X\|$, pour $x = J(X) \in \mathcal{S}^1$. L'opérateur T_0 est borné sur $\mathcal{S}^1$. Pour tout réel δ tel que $\delta > \max\{\mu_0, 1/2\}$, il existe une constante $C_\delta > 0$ telle que

$$\|2^{j/2}\,T_0^j x - X(0)\,\gamma_0\|_{\mathcal{S}^1} \leq C_\delta\,\delta^j\,\|x\|_{\mathcal{S}^1}\,, \tag{5}$$

pour tout $x = J(X) \in \mathcal{S}^1$, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$.

Dans (5), le vecteur γ_0 a été identifié à un élément de $\ell^2(\mathbb{Z})$. En outre, du fait que E^1 est dense dans E^0, on obtient le

Corollaire 2.3. *Soit $\mathcal{S}^0 = J(E^0)$ muni de la norme $\|x\|_{\mathcal{S}^0} = \|X\|_\infty$, pour $x = J(X) \in \mathcal{S}^0$. L'opérateur T_0 est borné sur $\mathcal{S}^0$, et si $x = J(X) \in \mathcal{S}^0$, alors la suite $\{2^{j/2}\,T_0^j x : j \geq 1\}$ converge dans $\mathcal{S}^0$ vers $X(0)\gamma_0$.*

Rappelons que l'un des objectifs de ce travail est d'étudier le lien entre la vitesse de convergence des itérées de T_0 et la régularité de ϕ. La proposition suivante fournit une réponse en comparant les réels δ de (5) et le coefficient s_1 défini dans l'introduction.

Proposition 2.4. *Soit δ_0 la borne inférieure des réels δ tels que* (5) *soit satisfait. On sait que $\delta_0 \leq \max\{\mu_0, 1/2\}$. Si en outre l'entier r dans* (2) *est tel que $r \geq 2$, alors $\delta_0 = \mu_0 \geq 1/2$, et*

$$\frac{1}{2} \leq \delta_0 \leq \max\left\{2^{-s_1}, \frac{1}{2}\right\}. \tag{6}$$

REMARQUES.

a) La formule (6) assure que δ_0 décroit jusqu'à $1/2$ quand s_1 croît dans $]0,1]$. En revanche, si $s_1 > 1$, on a $\delta_0 = 1/2$. Ceci est en accord avec les observations pratiques mentionnées dans l'introduction. Cependant, si $s_1 > 1$, il est possible de préciser l'estimation donnée par (5) (voir le développement asymptotique ci-dessous).

b) Pour $x = J(X)$, avec X suffisamment régulière, on obtient

$$\begin{aligned}\Big(\sum_n |x(n)|^2\Big)^{1/2} + 2\pi\Big(\sum_n |n\,x(n)|^2\Big)^{1/2} &\le \|X\|_\infty + \|X'\|_\infty \\ &= \|X\| = \|x\|_{S^1} \\ &\le \sum_n |x(n)| + 2\pi \sum_n |n\,x(n)|\,.\end{aligned}$$

c) La vitesse de convergence dans (5) dépend aussi de $\|x\|_{S^1}$. En pratique, x est une suite à support fini (éventuellement assez grand). On obtient, pour tout $j \ge 1$,

$$\begin{aligned}&\Big\|T_0^j x - 2^{-j/2}\Big(\sum_n x(n)\Big)\gamma_0\Big\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} \\ &\qquad\le C_\delta\, 2^{-j/2}\,\delta^j \Big(\sum_n |x(n)| + 2\pi \sum_n |n\,x(n)|\Big)\,,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&\Big(2\pi \sum_{n\notin\{0,\dots,N\}} |n\,(T_0^j x)(n)|^2\Big)^{1/2} \\ &\qquad\le C_\delta\, 2^{-j/2}\,\delta^j \Big(\sum_n |x(n)| + 2\pi \sum_n |n\,x(n)|\Big)\,.\end{aligned}$$

d) Le Théorème 2.2 se traduit également de la manière suivante: on suppose ici pour simplifier que $\{\phi(\cdot + k) : k \in \mathbb{Z}\}$ forme une base orthonormée de V_0. Soit $f \in V_0$. Sa transformée de Fourier $\hat{f}$ vérifie $\hat{f}(\lambda) = X(\lambda)\hat{\phi}(\lambda)$, où $X \in L^2(\mathbb{T})$. Supposons que $X \in E^1$. Rappelons qu'on a noté Π_j la projection orthogonale sur V_j. On obtient, grâce à (4), pour tout δ tel que $\delta > \max\{\mu_0, 1/2\}$,

$$\|2^{j/2}\,\Pi_{-j}(f) - X(0)\sum_{n=0}^{N}\gamma_0(n)\,\phi_{-j,n}\|_{L^2(\mathbb{R})} \le C_\delta\,\delta^j\,\|X\|\,,$$

pour tout $j \geq 1$.

• **Développement asymptotique de $T_0^j x$.** On note $M = [s_1]$, si $s_1 \notin \mathbb{N}$, et $M = [s_1] - 1$ sinon (on a $M < r \leq N$). Pour $m = 0, \ldots, r$, on définit

$$H_m(\lambda) = 2^{r-m}(1 + e^{2i\pi\lambda})^{r-m}\, v(\lambda) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-m} h_{m,k}\, e^{2i\pi k\lambda},$$

et on note $A_m = \big(\alpha_m(k,l)\big)_{k,l=0,\ldots,N-m}$ la matrice carrée définie par

$$\alpha_m(k,l) = h_{m,2k-\ell}, \qquad k,l = 0,\ldots,N-m.$$

Lemme 2.5. *Soit $\mu_M = \sup\{|\mu| : \mu \in \operatorname{spect}(A_M),\ \mu \neq 1\}$. On a $\mu_M < 1$. En outre, pour $m = 0,\ldots,M$, il existe un unique vecteur $\gamma_m = (\gamma_m(n))_{n=0}^{N-m}$ invariant par A_m tel que $\sum_{n=0}^{N-m}\gamma_m(n) = 1$.*

On notera $\Gamma_m(\lambda) = \sum_{n=0}^{N-m}\gamma_m(n)\, e^{2i\pi n\lambda}$. Pour simplifier (voir Remarque 1) ci-dessous), on considère dans l'énoncé du théorème suivant une suite $x = (x(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ à support fini, et on définit $X(\lambda) = \sum_n x(n)\, e^{2i\pi n\lambda}$. La fonction $X - X(0)\Gamma_0$ s'annule en 0, et est donc divisible par

$$S(\lambda) = \frac{e^{2i\pi\lambda} - 1}{2i} = e^{i\pi\lambda}\sin\pi\lambda.$$

On note α_m la suite des coefficients de Fourier de la fonction $S(\cdot)^m$

$$\alpha_m(n) = (2i)^{-m}(-1)^{m-n}\, C_m^n,$$

pour tout $n = 0,\ldots,m$, et $\alpha_m(n) = 0$ sinon. Itérant le raisonnement précédent, on définit pour $m = 1,\ldots,M-1$ le polynôme trigonométrique X_m par la formule de récurrence (où par convention $X_0 = X$)

$$S(\lambda)\, X_{m+1}(\lambda) = X_m(\lambda) - X_m(0)\,\Gamma_m(\lambda). \tag{7}$$

Théorème 2.6. *Pour tout réel δ tel que $\delta > \max\{\mu_M, 1/2\}$, il existe une constante $C_\delta > 0$, indépendante de x, telle que*

$$\|2^{j/2}\, T_0^j x - \sum_{m=0}^{M} 2^{-mj} X_m(0)\,(\alpha_m * \gamma_m)\|_{S^1} \leq C_\delta\, 2^{-Mj}\,\delta^j\, \|X_M\|. \tag{8}$$

En particulier, si x est de la forme $x = \alpha_M * y$ (i.e. $X(\lambda) = S(\lambda)^M Y(\lambda)$), alors

$$\|T_0^j(x)\|_{S^1} \leq C_\delta \, 2^{-j(M+1/2)} \, \delta^j \, \|y\|_{S^1} \, .$$

REMARQUES.

1) Si x est une suite de $\mathcal{S}^1$ telle que les formules (7) permettent de définir les fonctions X_m, avec $X_m \in E^1$, alors l'inégalité (8) est encore vérifiée. La preuve du Théorème 2.6 sera d'ailleurs donnée sous ces hypothèses.

2) Soit δ_M la borne inférieure des réels δ tels que l'inégalité (8) soit satisfaite pour tout $j \geq 0$, et tout $x \in \mathcal{S}^1$ satisfaisant à l'hypothèse de la remarque 1). On a $\delta_M \leq \max\{\mu_M, 1/2\}$. La démonstration du Théorème 2.6 montrera que, si $M \leq r - 2$, alors $\delta_M = \max\{\mu_M, 1/2\}$ et $1/2 \leq \delta_M \leq 2^{-s_1+M}$ (voir Remarque b) à la fin du Paragraphe 3). Dans la plupart des exemples classiques d'analyses multirésolutions, les réels μ_M et 2^{-s_1+M} sont très peu différents.

3) La propriété (8) permet de préciser les inégalités dans les remarques c) et d) ci-dessus.

3. Démonstrations.

3.1. Passage à un opérateur quasi-compact.

Les espaces fonctionnels utilisés ci-dessous, et l'application J, ont été définis dans le Paragraphe 2. Pour $w \in E^1$, on notera P_w l'opérateur defini sur $L^\infty(\mathbb{T})$ par

$$P_w f(\lambda) = w\left(\frac{\lambda}{2}\right) f\left(\frac{\lambda}{2}\right) + w\left(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}\right) f\left(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}\right) .$$

Il est clair que P_w est un opérateur linéaire borné sur $L^\infty(\mathbb{T})$, E^0, et E^1. On note $u = |H_0|$, et

$$P_0 = P_{H_0} \, , \qquad P_u = P_{|H_0|} \, .$$

Lemme 3.1. *Soit $x \in \mathcal{S}$ ($x = J(X)$ avec $X \in L^\infty(\mathbb{T})$). Alors*

$$\sqrt{2} \, T_0 x = J(P_0 X) \, .$$

En particulier T_0 est un opérateur borné sur $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}^0$, $\mathcal{S}^1$. En outre P_0 laisse invariant l'espace

$$\mathcal{T}_N = \mathrm{vect}\{1, e^{2i\pi\lambda}, \ldots, e^{2i\pi N\lambda}\},$$

et A_0 est la matrice de P_0 restreint à $\mathcal{T}_N$.

Dans la suite, l'étude de $\sqrt{2}\, T_0$ sur $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}^0$, et $\mathcal{S}^1$ sera systématiquement remplacée par celle de P_0 respectivement sur $L^\infty(\mathbb{T})$, E^0, et E^1. Par commodité, pour chaque résultat du Paragraphe 2, nous donnerons la version fonctionnelle correspondante.

PREUVE DU LEMME 3.1. Toutes les propriétés du lemme découlent de la formule

$$\begin{aligned}\int_0^1 (P_0 X)(\lambda)\, e^{-2i\pi n\lambda}\, d\lambda &= 2\int_0^1 X(\lambda)\, H_0(\lambda)\, e^{-2i\pi 2n\lambda}\, d\lambda \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k \int_0^1 X(\lambda)\, e^{-2i\pi(2n-k)\lambda}\, d\lambda \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k\, x(2n-k) = \sqrt{2}\, (T_0 x)(n).\end{aligned}$$

Rappels sur la quasi-compacité. On désigne par $|\cdot|_\infty$ et $|\cdot|$ les normes d'opérateurs vis-à-vis respectivement de $L^\infty(\mathbb{T})$ et E^1. Pour un opérateur S borné sur un espace de Banach B, on note $\rho(S, B)$ son rayon spectral.

Soit w une fonction quelconque dans E^1. On montre aisément par récurrence que

$$P_w^j f(\lambda) = \sum_{k=0}^{2^j-1} w\Big(\frac{\lambda+k}{2}\Big)\cdots w\Big(\frac{\lambda+k}{2^j}\Big)\, f\Big(\frac{\lambda+k}{2^j}\Big), \tag{9}$$

pour tout $j \geq 1$.

Soit α une fonction réelle, mesurable, et 1-périodique, telle que $w(\lambda) = |w(\lambda)|\, e^{2i\pi\alpha(\lambda)}$, et soit

$$A(\lambda) = \exp\{-2i\pi[\alpha(2^{j-1}\lambda) + \alpha(2^{j-2}\lambda) + \cdots + \alpha(\lambda)]\}.$$

Il est clair que $P_{|w|}^j(1) = P_w^j(A)$. On en déduit les propriétés suivantes

$$\begin{aligned}\|P_{|w|}^j 1\|_\infty = |P_{|w|}^j|_\infty &= |P_w^j|_\infty, \\ \rho(P_w, L^\infty(\mathbb{T})) &= \rho(P_{|w|}, L^\infty(\mathbb{T})).\end{aligned} \tag{10}$$

De plus on montre, à partir de (9), que

$$\|P_w^j f\| \leq 2^{-j} \, \|P_{|w|}^j 1\|_\infty \, \|f\| + R_j \, \|f\|_\infty \,,$$

pour tout $f \in E^1$, pour tout $j \geq 1$, où R_j est une constante positive. Cette dernière propriété est démontrée pour $w \geq 0$ dans [6], [9]; la preuve pour w de signe quelconque est identique. D'autre part, à l'aide de l'inégalité ci-dessus, on établit dans [6] que, si

$$\frac{1}{2}\,\rho(P_{|w|}, L^\infty(\mathbb{T})) < \rho(P_w, E^1)\,, \tag{11}$$

alors P_w est *quasi-compact sur* E^1, c'est-à-dire vérifie les propriétés suivantes

(A) *Soit* $\beta_w = \rho(P_{|w|}, L^\infty(\mathbb{T}))/2$. *L'ensemble* I *des valeurs spectrales* μ *de* P_w *sur* E^1, *telles que* $\beta_w \leq |\mu| \leq \rho(P_w, E^1)$ *est fini, et tout élément* $\mu \in I$ *est en fait une valeur propre d'indice fini* $\nu(\mu)$, *telle que* $\dim\ker(P_w - \mu\, I)^{\nu(\mu)} < +\infty$. *En outre on a*

$$E^1 = \Big(\bigoplus_{\mu \in I} \ker(P_w - \mu\, I)^{\nu(\mu)} \Big) \oplus \mathcal{F}\,, \tag{12}$$

où $\mathcal{F}$ *est un sous-espace fermé de* E^1, *stable par* P_w, *tel que* $\rho(P_{w|\mathcal{F}}, \mathcal{F}) < \beta_w$.

On rappelle que l'indice $\nu(\mu)$ d'une valeur propre μ est fini s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $\ker(P_w - \mu\, I)^n = \ker(P_w - \mu\, I)^{n+1}$, $\nu(\mu)$ étant le plus petit entier vérifiant cette dernière condition. Les propriétés de quasi-compacité ne suffiront pas pour prouver les résultats du Paragraphe 2. Nous utiliserons également des arguments de positivité. A cet effet, nous aurons besoin de la propriété suivante démontrée dans [6], [9].

(B) *Si* w *est à valeurs positives ou nulles, alors* P_w *est un opérateur positif* (*si* $f \geq 0$. *alors* $P_w f \geq 0$). *On a* $\rho(P_w, E^1) = \rho(P_w, L^\infty(\mathbb{T}))$. *Donc* P_w *est quasi-compact sur* E^1. *En outre,* $\rho(P_w, E^1)$ *est une valeur propre, d'indice maximal parmi les valeurs propres de module* $\rho(P_w, E^1)$, *et enfin il lui est associé une fonction propre à valeurs positives ou nulles.*

Le fait que la fonction d'échelle ϕ engendre par translations entières une base de Riesz de V_0 implique des conditions très précises sur les zéros de H_0. Sans entrer dans les détails, rappelons que ces conditions s'expriment par exemple en terme de compacts invariants (ou cycles périodiques) vis-à-vis de la transformation $\Delta(x) = 2x \pmod 1$ ([3], [8]). D'autre part, sous ces conditions, on démontre, dans [8] que, si $s_1 > 0$, alors $\rho(P_u, E^1) = 1$, et dans [9] que

(C) *l'espace des fonctions* 1*-périodiques continues* P_u*-invariantes est engendré par une fonction à valeurs strictement positives.*

3.2. Démonstration du Théorème 2.1.

En vertu du Lemme 3.1, l'énoncé du Théorème 2.1 est équivalent au suivant

i) *La suite* $\{P_0^j : j \geq 1\}$ *est uniformément bornée dans* $L^\infty(\mathbb{T})$.

ii) $\hat{\phi}$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}$.

iii) $s_1 > 0$.

L'équivalence entre ii) et iii) est démontrée dans [8]. En outre on sait que $\rho(P_u, E^1)$ est une valeur propre pour P_u, d'indice fini qu'on notera ν (voir (B)), et on montre dans [8] que la condition ii) est équivalente à

iv) $\rho(P_u, E^1) = 1$ *et* $\nu = 1$.

Prouvons que i) est équivalent à iv).

i) $\Rightarrow$ iv). Comme 1 est valeur propre de A_0 (voir Paragraphe 2), on a $1 \leq \rho(A_0) \leq \rho(P_0, L^\infty(\mathbb{T})) \leq 1$, la dernière inégalité résultant de i). Donc $\rho(P_0, L^\infty(\mathbb{T})) = 1$. Finalement on a $\rho(P_u, E^1) = \rho(P_u, L^\infty(\mathbb{T})) = \rho(P_0, L^\infty(\mathbb{T})) = 1$ (la première égalité découlant de (B), la deuxième de (10)). En outre, du fait que $|P_0^j|_\infty = |P_u^j|_\infty$, la suite $\{P_u^j,\ j \geq 1\}$ est uniformément bornée dans $L^\infty(\mathbb{T})$. Comme $\rho(P_u, E^1)$ est une valeur propre de P_u sur E^1, son indice ν (qui est fini d'après (A)) est nécessairement égal à 1.

iv) $\Rightarrow$ i). Si $\rho(P_u, E^1) = 1$ et $\nu = 1$, l'indice de chaque valeur propre de module 1 pour P_u sur E^1 est égal à 1 d'après (B), d'où $\sup_{j \geq 1} |P_u^j| < +\infty$. On conclut en remarquant que $|P_0^j|_\infty = |P_u^j|_\infty = \|P_u^j 1\|_\infty \leq \|P_u^j 1\| \leq |P_u^j|$.

3.3. Démonstration du Théorème 2.2.

On a supposé pour le Théorème 2.2 que $s_1 > 0$. Rappelons que A_0, définie dans le Paragraphe 2, est la matrice de P_0 restreint à $\mathcal{T}_N$, et qu'on a noté μ_0 la plus grande valeur parmi les modules des valeurs propres de A_0 différentes de 1. En vertu du Lemme 3.1, le Théorème 2.2 est un corolaire du résultat suivant

Théorème 3.2. *On a $\mu_0 < 1$. L'espace des fonctions de E^1 P_0-invariantes est engendré par un polynôme trigonométrique $\Gamma_0 \in \mathcal{T}_N$ tel que $\Gamma_0(0) = 1$. Pour tout réel δ tel que $\delta > \max\{\mu_0, 1/2\}$, il existe une constante $C_\delta > 0$ telle que l'on ait, pour tout $X \in E^1$ et tout entier $j \geq 1$,*

$$\|P_0^j X - X(0)\,\Gamma_0\| \leq C_\delta\, \delta^j\, \|X\|\,. \tag{13}$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.2. D'après ce qui précède (*cf.* condition iv)), on a $\rho(P_u, E^1) = 1$. D'autre part, on sait que

$$\rho(P_0, L^\infty(\mathbb{T})) = \rho(P_u, L^\infty(\mathbb{T})) \quad \text{et} \quad \rho(P_u, L^\infty(\mathbb{T})) = \rho(P_u, E^1)$$

(*cf.* (10) et (B)). Donc $\rho(P_0, L^\infty(\mathbb{T})) = 1$. D'autre part, comme $\rho(P_0, E^1) \geq \rho(A_0) \geq 1$, P_0 est quasi-compact sur E^1 en vertu de (11). Donc P_0 admet au moins une valeur propre μ de module $\rho(P_0, E^1)$. On a $|\mu| \leq \rho(P_0, L^\infty(\mathbb{T})) = 1$, d'où $\rho(P_0, E^1) = 1$, et $\rho(A_0) = 1$. La suite de la preuve repose sur le

Lemme 3.3. a) *Soit μ une valeur propre de P_0 sur E^1 telle que $1/2 < |\mu| \leq 1$, et soit f une fonction propre associée à μ. Alors $f \in \mathcal{T}_N$. En particulier, toutes les valeurs propres μ de P_0 sur E^1 telles que $1/2 < |\mu| \leq 1$ sont valeurs propres de A_0.*

b) *1 est l'unique valeur propre de module 1 de P_0 sur E^1. En outre l'espace des fonctions de E^1 P_0-invariantes est engendré par un polynôme trigonométrique $\Gamma_0 \in \mathcal{T}_N$ tel que $\Gamma_0(0) = 1$.*

Ce lemme (que nous admettons pour le moment) prouve que $\mu_0 < 1$. Soit $X \in E^1$. Du fait que $H_0(0) = 1$ et $H_0(1/2) = 0$, on a $(P_0^j X)(0) = X(0)$ pour tout $j \geq 0$. D'autre part, d'après le Lemme 3.3 et (12), X s'écrit sous la forme: $X = a\Gamma_0 + g$, avec $a \in \mathbb{C}$, $g \in E^1$ telle que $\lim_{j \to +\infty} \|P_0^j g\| = 0$. D'où $a = X(0)$. Plus précisément, toujours d'après le Lemme 3.3 et (12) (remarquer également que $\beta_{H_0} = 1/2$, *cf.* (A)), pour tout $\delta > \max\{\mu_0, 1/2\}$, il existe une constante $D_\delta > 0$ telle que $\|P_0^j g\| \le D_\delta\, \delta^j\, \|g\| \le D_\delta\, (1 + \|\Gamma_0\|)\, \delta^j\, \|X\|$, ce qui prouve (13). Il reste à donner la

DÉMONSTRATION DU LEMME 3.3. a) Nous allons prouver que $f \in C^\infty$, puis que $f \in \mathcal{T}_N$.

• *f est de classe C^∞.* Nous reprenons ici un raisonnement présenté dans [3]. La fonction f étant lipschitzienne, elle est dérivable presque partout. Plus précisément f est la primitive d'une fonction mesurable bornée, qu'on notera f' pour simplifier. Dérivant l'équation $P_0 f = \mu f$, il vient que $(2\mu - P_0)f' = P_{H_0'} f = \xi_0$. Comme $\rho(P_0, L^\infty(\mathbb{T})) = 1$ et $|2\mu| > 1$, $(2\mu - P_0)$ est inversible sur $L^\infty(\mathbb{T})$, et

$$f' = \sum_{k=0}^{+\infty} (2\mu)^{-(k+1)}\, P_0^k \xi_0 \,.$$

Mais puisque $\xi_0 \in E^1$ et $\rho(P_0, E^1) = 1$, cette dernière série converge également dans E^1 vers une fonction $g \in E^1$, égale à f' presque partout. Il en résulte que f est la primitive d'une fonction lipschitzienne. Donc f est de classe C^1, et sa dérivée (au sens classique), g, est lipschitzienne.

On note désormais $f' = g$. Pour prouver que f est de classe C^p, pour tout $p \ge 1$, on itère la démonstration précédente. Par exemple, si $p = 2$, on part de l'équation $f' = (2\mu)^{-1}(P_0 f' + \xi_0)$: les fonctions f' et ξ_0 étant lipschtitziennes, elles s'écrivent comme primitives de fonctions mesurables bornées, qu'on notera respectivement f'' et ξ_0'. Par dérivation, on obtient, dans $L^\infty(\mathbb{T})$, $f'' = (4\mu)^{-1} P_0 f'' + \xi_1$, avec $\xi_1 \in E^1$. On conclut comme précédemment en considérant la série $\sum_{k=0}^{+\infty} (4\mu)^{-k} P_0^k \xi_1$.

• *$f \in \mathcal{T}_N$.* Soit $x = (x(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite des coefficients de Fourier de f. En vertu du Lemme 3.1, l'équation $P_0 f = \mu f$ est équivalente à $\sqrt{2}\, T_0 x = \mu x$, c'est-à-dire à

$$\mu\, x(n) = \sum_{k=0}^{N} h_k\, x(2n - k)\,, \qquad \text{pour tout } \; n \in \mathbb{Z}\,.$$

Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$ quelconque, et $S_\ell = \sup_{n<0} |n^\ell\, x(n)|$ (on a $S_\ell < +\infty$ car f est de classe C^∞). Pour tout $n < 0$, on a

$$|\mu\, x(n)| \le \frac{C\, S_\ell}{2^\ell\, |n|^\ell}\,,$$

avec $C = \sum_{k=0}^{N} |h_k|$. Donc $S_\ell \leq C\,|\mu|^{-1}2^{-\ell}S_\ell$. Pour ℓ assez grand, cette dernière inégalité n'est possible que si $S_\ell = 0$, c'est- à -dire $x(n) = 0$ pour tout $n < 0$.

Soit maintenant $R_\ell = \sup_{n \geq N+1} |n^\ell\, x(n)|$. Pour tout $n \geq N+1$, on a

$$|\mu\, x(n)| \leq \frac{C\,R_\ell}{|2n - N|^\ell} \leq \frac{C\,R_\ell}{2^\ell\,|n|^\ell \left|1 - \dfrac{N}{2N+2}\right|^\ell}\,.$$

D'où

$$R_\ell \leq \frac{C}{|\mu|}\,2^{-\ell}\Big(\frac{2N+2}{N+2}\Big)^\ell R_\ell\,.$$

Pour ℓ assez grand, il vient que $R_\ell = 0$, c'est-à-dire $x(n) = 0$ pour tout $n \geq N+1$. Le a) du Lemme est démontré.

b) Soit $f \in E^1$ telle que $P_0 f = \mu f$, avec $|\mu| = 1, \mu \neq 1$ (on sait que $f \in \mathcal{T}_N$, mais cette propriété n'intervient pas ici). Démontrons que $f \equiv 0$: l'équation $P_0 f(\lambda) = \mu\, f(\lambda)$ appliquée avec $\lambda = 0$ donne $\mu\, f(0) = f(0)$, d'où $f(0) = 0$ (on a utilisé le fait que $H_0(0) = 1$ et $H_0(1/2) = 0$). En outre on a $|f| = |\mu f| = |P_0 f| \leq P_u(|f|)$. L'opérateur P_u étant positif, la suite $\{P_u^j(|f|)\ :\ j \geq 1\}$ est croissante. De la condition iv) et de la propriété sur l'indice des valeurs propres de module $\rho(P_u, E^1)$ pour P_u (*cf.* (B)), il vient que $\sup_{j\geq 1} |P_u^j| < +\infty$. Ainsi la suite de fonctions $\{P_u^j(|f|)\ :\ j \geq 1\}$ est relativement compacte (Théorème d'Ascoli): finalement elle converge vers une fonction $h \in E^1$ majorant $|f|$ et telle que $P_u h = h$. On a $(P_u^j(|f|))(0) = 0$ pout tout $j \geq 1$, d'où $h(0) = 0$. On déduit de la propriété (C) que h (et donc f) sont identiquement nulles, ce qui prouve la propriété annoncée, soit la première assertion du b).

On sait que 1 est valeur propre de A_0, donc de P_0. Démontrons que deux fonctions quelconques f_1 et f_2 de E^1 P_0-invariantes sont nécessairement proportionnelles. On peut toujours trouver a et $b \in \mathbb{C}$ tels que la fonction $g = af_1 + bf_2$ soit nulle en 0. On raisonne alors comme précédemment (remplacer $|f|$ par $|g|$) pour prouver que $g \equiv 0$, ce qui montre bien que f_1 et f_2 sont colinéaires. Par conséquent, l'espace des fonctions de E^1 P_0-invariantes est engendré par une fonction Γ de E^1 qui, d'après ce qui précède, appartient en fait à $\mathcal{T}_N$. Il reste à prouver que $\Gamma(0) \neq 0$. Or, si on avait $\Gamma(0) = 0$, le raisonnement ci-dessus (remplacer $|f|$ par $|\Gamma|$) montrerait que $\Gamma \equiv 0$, ce qui est absurde.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 2.4. Comme par hypothèse $r \geq 2$, $1/2$ est valeur propre de A_0 (cette propriété est bien connue [4];

nous y reviendrons à la fin de l'article). Donc $\mu_0 \geq 1/2$. On déduit de (12) ($\beta_{H_0} = 1/2$) et du Lemme 3.3 que $\delta_0 = \mu_0$. Il reste à démontrer (6): Si $\mu_0 = 1/2$, (6) est évident. Supposons que $\mu_0 > 1/2$. Soit f une fonction propre associée à une valeur propre μ de P_0 telle que $|\mu| = \mu_0$. On a nécessairement $f \in \mathcal{T}_N$ et $f(0) = 0$. Plus exactement, utilisant un développement limité dans l'équation $P_0 f = \mu f$, on prouve que f est de la forme: $f(\lambda) = 2^{-r}(1 - e^{2i\pi\lambda})^r g(\lambda)$, et un calcul simple montre que $P_v g = 2^r \mu g$, où v est le polynôme trigonométrique de la formule (2). On en déduit que $2^r \mu_0 \leq \rho(P_v, L^\infty(\mathbb{T})) = \rho(P_{|v|}, L^\infty(\mathbb{T}))$. Or on a $\rho(P_{|v|}, L^\infty(\mathbb{T})) = 2^{r-s_1}$ (voir [8]), d'où $\mu_0 \leq 2^{-s_1}$.

3.4. Démonstration du Théorème 2.6.

Pour simplifier les notations, donnons la preuve pour $M = 1$ (la généralisation pour $M \geq 2$ étant immédiate). Rappelons que

$$H_1(\lambda) = 2^{r-1}\,(1 + e^{2i\pi\lambda})^{r-1}\, v(\lambda) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1} h_{1,k}\, e^{2i\pi k\lambda}\,.$$

On a noté $A_1 = \big(\alpha_1(k,l)\big)_{k,l=0,\ldots,N-1}$ la matrice carrée définie par

$$\alpha_1(k,l) = h_{1,2k-\ell}\,, \qquad k,l = 0,\ldots,N-1\,,$$

et $\mu_1 = \sup\{|\mu| : \ \mu \in \mathrm{spect}(A_1),\ \mu \neq 1\}$. L'idée de la démonstration est de prouver que la suite $(h_{1,k})_k$ dérive d'une analyse multirésolution, et d'appliquer ensuite les résultats précédents au filtre H_1. A cet effet, on considère la fonction

$$\hat{\phi}_1(\lambda) = \prod_{k=1}^{+\infty} H_1\Big(\frac{\lambda}{2^k}\Big)\,, \qquad \lambda \in \mathbb{R}\,,$$

et

$$\tilde{s}_1 = s_1(\phi_1) = \sup\left\{ s \in \mathbb{R} : \int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda|^s\, |\hat{\phi}_1(\lambda)|\, d\lambda < +\infty \right\}.$$

En vertu de la propriété (3) appliquée à $\hat{\phi}_1$, et par définition de M, on a $\tilde{s}_1 = s_1 - 1 > 0$. Par conséquent, la transformée de Fourier inverse ϕ_1 de $\hat{\phi}_1$ est continue, à support compact, et satisfait à l'équation d'échelle

$$\phi_1(\cdot) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_{1,n}\, \phi_1(2\cdot + n)\,.$$

En outre, $\{\phi_1(\cdot + k) : k \in \mathbb{Z}\}$ est un système de Riesz: en effet les translatées entières d'une fonction $g \in L^2(\mathbb{R})$ forment un système de Riesz s'il existe deux constantes a, b, avec $0 < a \leq b < +\infty$, telles que $a \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{g}(\lambda + k)|^2 \leq b$ pour presque tout $\lambda \in [0,1]$ (*cf.* [11], [4]). Cette dernière condition étant satisfaite par hypothèse pour ϕ, l'est évidemment pour ϕ_1. Pour $j \in \mathbb{Z}$, on définit l'espace V_j^1 engendré par $\{2^{j/2}\phi_1(2^j \cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$. Alors la famille $(V_j^1)_{j\in\mathbb{Z}}$ est une analyse multirésolution [4]. Ainsi la suite $(h_{1,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ satisfait aux mêmes hypothèses que $(h_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, et le Théorème 2.2 s'applique à l'opérateur T_1 défini sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ par

$$(T_1 x)(n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_{1,k}\, x(2n - k)\,, \qquad n \in \mathbb{Z}\,,\ x \in \ell^2(\mathbb{Z})\,.$$

D'autre part, on démontre (comme pour le Lemme 3.1) que $T_1 \circ J = J \circ P_1$, où $P_1 = P_{H_1}$. Le Théorème 3.2, appliqué à P_1, s'énonce de la manière suivante:

On a $\mu_1 < 1$. L'espace des fonctions de E^1 P_1-invariantes est engendré par un polynôme trigonométrique $\Gamma_1 \in \mathcal{T}_{N-1}$ tel que $\Gamma_1(0) = 1$.

Pour tout réel δ tel que $\delta > \max\{\mu_1, 1/2\}$, il existe une constante $C_\delta > 0$ telle que l'on ait, pour tout $X \in E^1$ et tout entier $j \geq 1$,

$$\|P_1^j X - X(0)\,\Gamma_1\| \leq C_\delta\, \delta^j\, \|X\|\,. \tag{14}$$

Soit $X \in E^1$. On sait d'après le Théorème 3.2 que $\lim_{j\to+\infty} P_0^j X = X(0)\,\Gamma_0$ dans E^1. Notons que $X - X(0)\Gamma_0$ est nulle en 0. Supposons qu'il existe $X_1 \in E^1$ tel que

$$X(\lambda) - X(0)\,\Gamma_0(\lambda) = S(\lambda)\,X_1(\lambda)\,,$$

où $S(\lambda) = e^{i\pi\lambda} \sin \pi\lambda$ (la décomposition ci-dessus est presque toujours satisfaite, par exemple si X est un polynôme trigonométrique). L'énoncé du Théorème 2.6 (pour $M = 1$) est équivalent au suivant

Théorème 3.4. *Pour tout réel δ tel que $\delta > \max\{\mu_1, 1/2\}$, il existe une constante $C_\delta > 0$, indépendante de X, telle que*

$$\|P_0^j X - X(0)\,\Gamma_0 - 2^{-j} X_1(0)\, S \cdot \Gamma_1\| \leq C_\delta\, 2^{-j}\, \delta^j\, \|X_1\|\,. \tag{15}$$

PREUVE DU THÉORÈME 3.4. On a $P_0^j X - X(0)\,\Gamma_0 = P_0^j\,(X - X(0)\,\Gamma_0)$ $= P_0^j(SX_1)$. Or, grâce à la formule classique $\sin 2u = 2\sin u\cos u$, on établit facilement, par récurence sur j, l'égalité

$$P_0^j(SX_1)(\lambda) = 2^{-j}\,S(\lambda)(P_1^j X_1)(\lambda)\,,$$

d'où

$$\begin{aligned}\|P_0^j X - X(0)\,\Gamma_0 - 2^{-j}X_1(0)\,S\cdot\Gamma_1\| &= 2^{-j}\,\|S\cdot(P_1^j X_1 - X_1(0)\,\Gamma_1)\|\\ &\le C\,2^{-j}\,\|P_1^j X_1 - X_1(0)\,\Gamma_1\|\,.\end{aligned}$$

On déduit (15) en appliquant (14) à X_1.

REMARQUES. a) Pour prouver que $1/2$ est valeur propre de A_0 quand $r \geq 2$, on peut procéder de la manière suivante: rappelons que $P_1\Gamma_1 = \Gamma_1$. Soit $Z(\lambda) = S(\lambda)\,\Gamma_1(\lambda)$. Utilisant la formule $\sin 2u = 2\sin u\cos u$, il vient que $P_0 Z = Z/2$.

b) On suppose toujous $M = 1$. La Proposition 2.4 s'applique à μ_1, à savoir: soit δ_1 la borne inférieure des réels δ tels que (14), et donc (15), soient satisfaites. On a $\delta_1 \leq \max\{\mu_1, 1/2\}$. Si en outre l'entier r dans (2) est tel que $r \geq 3$, alors $\delta_1 = \mu_1 \geq 1/2$, et $1/2 \leq \delta_1 \leq \max\{2^{-\bar{s}_1}, 1/2\} = \max\{2^{-s_1+1}, 1/2\}$.

APPENDICE: Rappels des formules d'analyse-synthèse dans la transformée en ondelettes.

Pour simplifier on suppose ici que $\{\phi(\cdot + k)\ :\ k \in \mathbb{Z}\}$ forme une base orthonormée de V_0, et pour $j \in \mathbb{Z}$, on note W_j le sous-espace de V_{j+1} orthogonal à V_j. Soit

$$\tilde{h}_n = (-1)^n\,\overline{h_{1-n}}\,, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

L'ondelette ψ est définie par

$$\psi(\cdot) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{h}_n\,\phi(2\cdot + n)\,. \tag{16}$$

La fonction ψ est dans W_0 et $\{\psi(\cdot - k)\ :\ k \in \mathbb{Z}\}$ forme une base orthonormée de W_0. Le système $\{2^{j/2}\psi(2^j\cdot - k)\ :\ k \in \mathbb{Z}\}$ est alors une base orthonormée de W_j pour tout $j \in \mathbb{Z}$, et $\{2^{j/2}\psi(2^j\cdot - k)\ :\ j, k \in \mathbb{Z}\}$

une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$. Rappelons également que les fonctions ϕ et ψ sont à support compact et admettent la même régularité. On notera $g_{j,k}(\cdot) = 2^{j/2}g(2^j \cdot -k)$ pour $g = \phi$ et ψ. Pour $f \in V_0$, on considère les suites x, x_0, x_1 de $\ell^2(\mathbb{Z})$ définies par

$$
\begin{aligned}
x(n) &= \langle f, \phi(\cdot - n)\rangle\,, \qquad n \in \mathbb{Z}\,,\\
x_0(n) &= \langle f, \phi_{-1,n}\rangle\,, \qquad n \in \mathbb{Z}\,,\\
x_1(n) &= \langle f, \psi_{-1,n}\rangle\,, \qquad n \in \mathbb{Z}\,.
\end{aligned}
$$

Grâce à (1) et (16), on obtient les formules (dites d'analyse)

$$
\begin{aligned}
x_0(n) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k\, x(2n-k)\,,\\
x_1(n) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{h}_k\, x(2n-k)\,.
\end{aligned}
$$

On reconnait dans la première formule l'action de l'opérateur T_0. En retour, l'égalité

$$
f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n)\,\phi_{0,n} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_0(n)\,\phi_{-1,n} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_1(n)\,\psi_{-1,n}
$$

fournit la formule de synthèse (qu'on notera pour simplifier $x = \mathcal{S}(x_0, x_1)$)

$$
x(k) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} h_{2n-k}\, x_0(n) + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{h}_{2n-k}\, x_1(n)\right)\,.
$$

Si on oublie l'aspect fonctionnel dans la description ci-dessus, on remarque que, partant d'une suite x, on a construit par un procédé de filtrage-décimation deux suites x_0, x_1, qui grâce à la formule de synthèse, redonnent x. Soit $\tilde{T}_0$ l'opérateur défini sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ par

$$
(\tilde{T}_0 x)(n) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{h}_k\, x(2n-k)\,, \qquad n \in \mathbb{Z},\; x \in \ell^2(\mathbb{Z})\,.
$$

Soient $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$ et $j \in \mathbb{N}^*$. L'algorithme se décompose de la manière suivante

- *Analyse.* On calcule les $(j+1)$ suites $x_1 = \tilde{T}_0 x$, $x_2 = \tilde{T}_0 T_0 x$, ... , $x_j = \tilde{T}_0 T_0^{j-1} x$ et $y_j = T_0^j x$.

- *Synthèse.* Pour $m = j, j-1, \ldots, 1$, on itère la procédure $y_{m-1} = \mathcal{S}(y_m, x_m)$.

- On retrouve finalement $y_0 = x$.

Dans la pratique, la suite x analysée admet un support fini de longueur L (en général L est nettement supérieure à la taille N du filtre H_0). Les supports des suites $x_1, x_2, \ldots, x_j$ et y_j sont alors respectivement de longueur $L/2, L/4, \ldots, L/2^j$, et $L/2^j$ (noter que la somme est égale à L). On réduit ensuite la longueur de ces supports en effectuant une approximation $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_j, \tilde{y}_j$ de $x_1, x_2, \ldots, x_j, y_j$ (phase de compression des données). Enfin on applique l'algorithme de synthèse aux suites $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_j, \tilde{y}_j$, ce qui fournit une approximation de x.

References.

[1] Cohen, A., *Ondelettes, analyses multirésolutions et traitement numérique du signal.* Masson, 1992.

[2] Cohen, A., Daubechies, I. and Feauveau, J. C., Biorthogonal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure Appl. Math.* **45** (1992), 485-560.

[3] Conze, J.-P. et Raugi, A., Fonctions harmoniques pour un opérateur de transition et applications. *Bull. Soc. Math. France* **118** (1990), 273-310.

[4] Daubechies, I. *Ten Lectures on wavelets.* CBMS-NSF regional conference series in applied mathematics, SIAM, 1992.

[5] Esteban, D. and Galand, C., Application of quadradure mirror filters to spit-band voice coding schemes. *Proc. of ICASSP*, Hartford, Connecticut, 1977.

[6] Hennion, H., Sur un théorème spectral et son application aux noyaux lipschitziens. *Proc. Amer. Math. Soc.* **118** (1993), 627-634.

[7] Hervé, L., Régularité et conditions de bases de Riesz pour les fonctions d'échelle. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* **315** (1992), 1029-1032.

[8] Hervé, L., Construction et régularité des fonctions d'échelle. A paraître dans *SIAM J. Math. Anal.*.

[9] Hervé, L., Etude d'opérateurs quasi-compacts et positifs. Applications aux opérateurs de transfert. *Ann. Inst. H. Poincaré, Probabilités et Statistique.* **30** (1994), 437-466.

[10] Mallat, S., Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$. *Trans. Amer. Math. Soc.* **315** (1989), 69-88.

[11] Meyer, Y., *Ondelettes et opérateurs I.* Hermann, 1990.

[12] Rioul, O., Ondelettes régulières: Application à la compression d'images fixes. Thèse (1993), Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, 92131 Issy-les-Moulineaux.

[13] Rioul, O., Simple regularity criteria for subdivision schemes. *SIAM J. Math. Anal.* **23** (1992), 1544-1576.

[14] Villemoes, L. Wavelet analysis of two-scale difference equations. *SIAM J. Math. Anal.* **25** (1994), 1433-1460.

Recibido: 13 de enero de 1.994
Revisado: 30 de septiembre de 1.994

Loïc Hervé
I.R.M.A.R.-Université de Rennes 1
Laboratoire de Probabilités
Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex
FRANCE
herve@univ-rennes1.fr