Revista Matemática Iberoamericana
Vol. 11, N.° 3, 1995

Ondelettes et espaces de Besov

Gérard Bourdaud

1. Introduction.

Soit $(\psi_\varepsilon)_{\varepsilon \in E}$ une famille finie d'ondelettes telle que l'ensemble des fonctions

$$x \mapsto 2^{jn/2}\, \psi_\varepsilon(2^j x - k)\,,$$

où $\varepsilon \in E, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n$, constitue une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R}^n)$. L'un des traits caractéristiques des bases d'ondelettes, c'est d'être des bases non seulement de $L^2(\mathbb{R}^n)$ mais encore de "tous" les espaces fonctionnels usuels. Ainsi, pour la distribution

$$f = \sum_{\varepsilon, j, k} c_{\varepsilon,j,k}\, 2^{j(n/p-s)}\, \psi_\varepsilon(2^j(\cdot) - k)\,,$$

on peut espérer l'équivalence de normes

$$\|f\|_{\dot{B}^{s,q}_p(\mathbb{R}^n)} \approx \sum_\varepsilon \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |c_{\varepsilon,j,k}|^p\Big)^{q/p}\Big)^{1/q}\,, \tag{1}$$

où $\dot{B}^{s,q}_p(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace de Besov *homogène*. Si les fonctions ψ_ε appartiennent à la classe de Schwartz et ont tous leurs moments nuls, l'équivalence (1) est satisfaite quel que soit $s \in \mathbb{R}$. Par contre, si les ψ_ε sont des ondelettes à supports compacts, des ondelettes-splines, ou, plus généralement, des ondelettes r-régulières, au sens d'Yves Meyer [ME], l'équivalence (1) n'est satisfaite que pour $-r < s < r$. Il est dès lors naturel de rechercher les conditions de régularité minimales que doivent vérifier les ondelettes-mères ψ_ε de telle sorte qu'on ait l'équivalence (1) pour un s donné.

Nous nous proposons d'établir que ces conditions minimales sont l'appartenance de ψ_ε à certains espaces de Besov d'ordre $\pm s$. Il s'agira d'espaces de Besov construits à partir non plus de L^p mais d'un sous-espace $\mathcal{E}_p$ de L^p que nous mettrons en évidence.

Soyons plus précis: l'équivalence (1) comporte en fait deux volets: l'*analyse*, qui consiste à estimer les $c_{\varepsilon,j,k}$ à partir de la norme de f dans l'espace de Besov $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$, la *synthèse* qui permet de retrouver la norme de f connaissant la norme "amalgamée" de la suite $(c_{\varepsilon,j,k})$. Nous verrons que l'appartenance de ψ_ε à $\dot{B}^{s,1}(\mathcal{E}_p)$ permet la synthèse, alors que l'analyse est possible si ψ_ε appartient à $\dot{B}^{-s,1}(\mathcal{E}_{p'})$.

Ces considérations s'appliquent au cas $1 \leq p \leq +\infty$ et $1 \leq q \leq +\infty$, mais nous verrons qu'elles s'adaptent dans une certaine mesure aux cas $0 < p < 1$ ou $0 < q < 1$.

Equipés d'un tel critère, nous retrouverons aisément le théorème d'Yves Meyer sur les ondelettes r-régulières et les résultats plus ou moins classiques sur les splines ([CI], [O], [S]); nous en déduirons également une condition portant sur la transformée de Fourier de ψ_ε, qui conviendra aux ondelettes construites suivant l'algorithme de Mallat [MA] et Daubechies [D].

L'orthogonalité joue un rôle secondaire dans nos résultats, qui s'appliquent aussi bien à la transformation de Frazier-Jawerth ([FJ1], [FJ2]) qu'aux bases bi-orthogonales [CDF].

2. Inégalités d'échantillonnage.

2.1. Généralités.

Le calcul des coefficients d'ondelettes $c_{\varepsilon,j,k}$ peut s'interpréter comme la succession de deux opérations: un *filtrage* -la convolution avec une ondelette analysatrice de résolution 2^{-j}- puis un *échantillonnage*: le calcul des valeurs aux points du réseau $2^{-j}\mathbb{Z}^n$. On ne perdra pas de généralité en supposant $j = 0$, ce qui conduit à étudier l'opérateur

$$S_\psi(f) = \big((\psi * f)(k)\big)_{k\in\mathbb{Z}^n} \, .$$

Supposons ψ localement intégrable. Dès que f est continue, à support compact, $\psi * f$ est une fonction continue, dont les valeurs ponctuelles sont bien définies; cela signifie que S_ψ est un opérateur linéaire défini sur $C_c(\mathbb{R}^n)$, à valeurs dans l'espace des suites indexées par $\mathbb{Z}^n$. De la même façon

$$T_\psi(c) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k \psi(\cdot - k)$$

est un opérateur linéaire défini sur l'ensemble des suites à supports finis, à valeurs dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Les relations

$$\langle S_\psi(f), c\rangle = \langle f, T_{\tilde\psi}(c)\rangle = \langle \tilde f, T_\psi(\tilde c)\rangle \tag{2}$$

(où l'on a posé $\tilde f(x) = f(-x)$) sont vérifiées par toute fonction $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ et toute suite c à support fini.

Définition 1. *Pour $p \in]0,+\infty]$, on définit*

i) *$\mathcal{E}_p$ comme l'ensemble des fonctions $\psi \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ pour lesquelles il existe $C = C(\psi) > 0$ tel que*

$$\|T_\psi(c)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C\,\|c\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^n)}\,,$$

pour toute suite c à support fini,

ii) *$\mathcal{E}_p^*$ comme l'ensemble des fonctions $\psi \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ pour lesquelles il existe $C = C(\psi) > 0$ tel que*

$$\|S_\psi(f)\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^n)} \le C\,\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\,,$$

pour tout $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$.

La "norme" de ψ dans $\mathcal{E}_p$ (respectivement $\mathcal{E}_p^*$) est la plus petite constante C qui intervienne dans i) (respectivement ii)) (nous utilisons les guillemets pour rappeler qu'il s'agit seulement d'une quasi-norme, quand $p < 1$). L'espace fonctionnel $\mathcal{E}_p^*$ est l'objet d'un travail de T. Tararykova [TA].

2.2. Etude de $\mathcal{E}_p$.

Une première approche consiste à utiliser au mieux l'inégalité de Young:

Proposition 1.

i) *Pour $0 < p \le 1$ on a $\mathcal{E}_p = L^p$, avec égalité des "normes".*

ii) *Soit* $1 \leq p \leq +\infty$; *pour que* ψ *appartienne à* $\mathcal{E}_p$, *il suffit que la fonction* $\mathbb{Z}^n$*-périodique*

$$x \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\psi(x-k)|$$

appartienne à $L^p(\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n)$; *de plus la norme* $\|\psi\|_{\mathcal{E}_p}$ *est majorée par*

$$\Big(\int_{[0,1]^n} \Big(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\psi(x-k)|\Big)^p dx\Big)^{1/p}.$$

iii) *Pour que* ψ *appartienne à* $\mathcal{E}_\infty$, *il faut et il suffit que*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\psi(\cdot - k)|$$

appartienne à L^∞; *de plus*

$$\|\psi\|_{\mathcal{E}_\infty} = \Big\|\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\psi(\cdot - k)|\Big\|_\infty .$$

iv) *Il existe une fonction* ψ *telle que, pour tout* $p \in]1, +\infty[$, *on ait* $\psi \in \mathcal{E}_p$ *alors que*

$$\Big(\int_{[0,1]^n} \Big(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\psi(x-k)|\Big)^p dx\Big)^{1/p} = +\infty .$$

PREUVE. i) Le plongement de $\mathcal{E}_p \subset L^p$ étant clair, quel que soit $p > 0$, il suffit de prouver $L^p \subset \mathcal{E}_p$ pour tout $p \leq 1$; mais cela provient de l'inégalité

$$\Big\|\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k \psi(\cdot - k)\Big\|_p^p \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |c_k|^p \|\psi(\cdot - k)\|_p^p = \|\psi\|_p^p \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |c_k|^p .$$

ii) Supposons $p \geq 1$; on a

$$\Big\|\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k \psi(\cdot - k)\Big\|_p = \Big(\int_{[0,1]^n} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \Big|\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k \psi(x+m-k)\Big|^p dx\Big)^{1/p}.$$

On applique alors l'inégalité de Young $\ell^p * \ell^1 \subset \ell^p$ à x fixé; cela donne

$$\Big\| \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k\psi(\cdot - k)\Big\|_p \le \Big(\int_{[0,1]^n} \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |c_k|^p \Big) \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\psi(x-k)| \Big)^p dx \Big)^{1/p}.$$

iii) Supposons $\psi \in \mathcal{E}_\infty$ et, dans un premier temps, ψ *continue*; l'inégalité

$$\Big| \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k\psi(x-k)\Big| \le C \sup_k |c_k|$$

est alors vraie *quel que soit* $x \in \mathbb{R}^n$. Fixons $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et donnons-nous une partie finie Λ de $\mathbb{Z}^n$. On définit la suite $\{c_k\}$ par

$$c_k\,\psi(x_0 - k) = |\psi(x_0 - k)|$$

si $k \in \Lambda$ et $\psi(x_0 - k) \neq 0$, $c_k = 0$ sinon. On a alors $\sup |c_k| \le 1$, ce qui donne

$$\sum_{k\in\Lambda} |\psi(x_0 - k)| \le C\,.$$

Dans le cas général, où l'on a seulement $\psi \in L^\infty$, on considère une fonction $\theta \in C_c(\mathbb{R}^n)$, positive, d'intégrale 1 et on pose $\theta_j(x) = j^n\,\theta(jx)$ ($j \in \mathbb{N}^*$) puis $\psi_j = \theta_j * \psi$. On montre classiquement que ψ_j est une fonction continue telle que $\psi_j \to \psi$ (presque partout). On écrit ensuite

$$\begin{aligned} \Big| \sum_k c_k\,\psi_j(x-k)\Big| &\le j^n \int \theta(jy) \Big| \sum_k c_k\,\psi(x-y-k)\Big|\,dy \\ &\le \Big(\sup_k |c_k|\Big)\,\|\psi\|_{\mathcal{E}_\infty}\,. \end{aligned}$$

La continuité des ψ_j conduit à

$$\sum_k |\psi_j(x-k)| \le \|\psi\|_{\mathcal{E}_\infty}\,,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$; d'où l'on déduit aisément

$$\sum_k |\psi(x-k)| \le \|\psi\|_{\mathcal{E}_\infty}\,,$$

pour presque tout x.

iv) La fonction

$$\psi(x) = \frac{\sin \pi x}{x}$$

appartient à $\mathcal{E}_p$ pour $1 < p < +\infty$: c'est -comme l'observe Y. Meyer [ME, Chapitre I, Théorème 1]- une conséquence de la continuité ℓ^p de la transformation de Hilbert discrète; en revanche

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\psi(x-k)| = |\sin \pi x| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|x-k|}$$

est égal à $+\infty$ pour tout x non entier.

REMARQUE. La partie ii) de la proposition est un résultat de R. Jia et C. Micchelli [JM].

Proposition 2. *ψ appartient à $\mathcal{E}_2$ si et seulement si la fonction $2\pi\mathbb{Z}^n$-périodique*

$$\xi \mapsto \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\widehat{\psi}(\xi + 2k\pi)|^2 \Big)^{1/2}$$

appartient à L^∞; de plus la norme $\|\psi\|_{\mathcal{E}_2}$ n'est autre que la norme L^∞ de cette fonction.

PREUVE. A la suite $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$, à support fini, associons le polynôme trigonométrique

$$m(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k e^{-ik\cdot\xi} \ ;$$

il vient alors

$$\Big\| \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k \psi(\cdot - k) \Big\|_2^2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[0,2\pi]^n} |m(\xi)|^2 \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\widehat{\psi}(\xi + 2k\pi)|^2 \Big) \, d\xi \, .$$

En prenant la borne supérieure pour toutes les suites $\{c_k\}$ telles que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |c_k|^2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[0,2\pi]^n} |m(\xi)|^2 \, d\xi \leq 1 \, ,$$

on obtient précisément la norme L^∞ de la fonction

$$\xi \mapsto \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\widehat{\psi}(\xi + 2k\pi)|^2 \, .$$

Le théorème de Riesz-Thorin nous fournit une troisième méthode pour estimer la norme dans $\mathcal{E}_p$:

Proposition 3. *Pour tout $p > 1$, on a $\mathcal{E}_1 \bigcap \mathcal{E}_\infty \subset \mathcal{E}_p$ et*

$$\|\psi\|_{\mathcal{E}_p} \leq \|\psi\|_{\mathcal{E}_1}^{1/p} \|\psi\|_{\mathcal{E}_\infty}^{1-1/p} ;$$

autrement dit

$$\|\psi\|_{\mathcal{E}_p} \leq \|\psi\|_1^{1/p} \Big\| \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\psi(\,\cdot\, - k)| \Big\|_\infty^{1-1/p} .$$

Dès que $\psi \in \mathcal{E}_p$, l'opérateur T_ψ se prolonge par continuité à $\ell^p(\mathbb{Z}^n)$ (pour $p < +\infty$) et à $c_0(\mathbb{Z}^n)$ (pour $p = +\infty$); comme on peut s'y attendre, le prolongement continu de T_ψ est encore l'opérateur qui, à la suite $\{c_k\}$, associe

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k \psi(\,\cdot\, - k) ,$$

mais il convient de donner un sens précis à la somme infinie ci-dessus. Ce sera chose faite dans l'énoncé suivant, dont la preuve aisée est laissée au lecteur:

Proposition 4.

i) *Supposons $\psi \in \mathcal{E}_p$ $(p < +\infty)$. Alors, pour toute suite $\{c_k\} \in \ell^p(\mathbb{Z}^n)$, la famille $\{c_k\psi(\,\cdot\, - k)\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ est sommable dans $L^p(\mathbb{R}^n)$; l'opérateur*

$$\{c_k\} \mapsto \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k \psi(\,\cdot\, - k)$$

ainsi défini n'est autre que le prolongement continu de T_ψ.

ii) *Supposons $\psi \in \mathcal{E}_\infty$. Alors, pour toute suite $\{c_k\} \in \ell^\infty(\mathbb{Z}^n)$, la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k\, \psi(x - k)$ converge absolument pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$ et sa somme est une fonction essentiellement bornée; l'opérateur*

$$\{c_k\} \mapsto \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k \psi(\,\cdot\, - k)$$

ainsi défini est continu de $\ell^\infty(\mathbb{Z}^n)$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

2.3. Etude de $\mathcal{E}_p^*$.

Proposition 5.

i) *Pour tout* $p \in [1, +\infty]$, *on a* $\mathcal{E}_p^* = \mathcal{E}_{p'}$, *avec égalité des normes; de plus, si* $\psi \in \mathcal{E}_{p'}$, *alors, pour tout* $f \in L^p$, *la fonction* $\psi * f$ *est continue; l'opérateur qui à* $f \in L^p$ *associe la suite* $\{(f * \psi)(k)\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$ *est continu de* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *dans* $\ell^p(\mathbb{Z}^n)$ *et il prolonge l'opérateur* S_ψ.

ii) *Pour* $p < 1$, *on a* $\mathcal{E}_p^* = \{0\}$.

PREUVE. i) La première assertion est une conséquence immédiate de (2). Supposons $\psi \in \mathcal{E}_{p'}$; on a *a fortiori* $\psi \in L^{p'}$ et l'on sait que la convolution entre $\psi \in L^{p'}$ et $f \in L^p$ est une fonction continue. Supposons d'abord $p < +\infty$ et considérons une suite $\{f_j\}$ de fonctions continues à supports compacts telle que $f_j \to f$ dans L^p; alors la suite $S_\psi(f_j)$ converge dans ℓ^p vers une certaine suite $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$. Pour un $k \in \mathbb{Z}^n$ fixé, on a $(f_j * \psi)(k) \to c_k$; l'inégalité de Hölder

$$\|(f - f_j) * \psi\|_\infty \leq \|f - f_j\|_p \, \|\psi\|_{p'}$$

entraîne alors $c_k = (f * \psi)(k)$. Si $\psi \in \mathcal{E}_\infty^*$, autrement dit $\psi \in L^1$, on a aussitôt

$$|\psi * f(k)| \leq \|\psi\|_1 \, \|f\|_\infty \, ,$$

pour tout $f \in L^\infty$; on obtient donc un opérateur linéaire continu de L^∞ dans ℓ^∞ qui prolonge évidemment S_ψ.

ii) Soit $p < 1$; supposons l'existence de $C > 0$ tel que

$$\Big(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |f * \psi(k)|^p \Big)^{1/p} \leq C \, \|f\|_p \, ,$$

quel que soit $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$; en appliquant cette estimation à la fonction translatée $f(\,\cdot\, - a)$, on obtient *a fortiori*

$$|(f * \psi)(a)| \leq C \, \|f\|_p \, .$$

cela montre que $f \mapsto (f * \psi)(a)$ est une forme linéaire continue sur $L^p(\mathbb{R}^n)$; le Théorème de Day entraîne alors $(f * \psi)(a) = 0$. Ceci étant vrai quels que soient $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ et $a \in \mathbb{R}^n$, il vient $\psi = 0$.

2.4. L'échantillonnage pour $0 < p < 1$.

On vient de voir qu'il n'y pas d'opérateur d'échantillonnage S_ψ défini sur $L^p(p < 1)$. Nous tournerons cette difficulté en échantillonnant exclusivement des fonctions entières de type exponentiel. On dispose alors des inégalités classiques de Plancherel-Polya.

Donnons nous un nombre $\gamma \in]0, \pi[$ et une fonction $\theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\widehat{\theta}(\xi) = 1$ sur le cube $[-\gamma, \gamma]^n$ et que le support de $\widehat{\theta}$ soit inclus dans $]-\pi, \pi[^n$. Les différentes constantes C dépendront exclusivement de p, γ, θ et de la dimension n. On a alors classiquement

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f\Big(\frac{k}{R}\Big)\, \theta(Rx - k)\,, \tag{3}$$

pour toute fonction entière f telle que $\operatorname{supp}(\widehat{f}) \subset [-\gamma R, \gamma R]^n$.

Lemme 1. *Il existe des constantes positives C_1 et C_2 telles que, pour toute fonction f à spectre dans $[-\gamma, \gamma]^n$, on ait*

$$C_1 \, \|f\|_p \le \Big(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |f(k)|^p \Big)^{1/p} \le C_2 \, \|f\|_p \,.$$

PREUVE. On part de l'identité (3), avec $R = 1$; en translatant f, il vient

$$f(k) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} f(l + x)\, \theta(l - x - k)\,,$$

quels que soient $x \in [0,1]^n$ et $k \in \mathbb{Z}^n$; la décroissance rapide de θ conduit à l'inégalité

$$|\theta(k - x)|^p \le C\, (1 + |k|)^{-n-1}\,,$$

uniformément en $x \in [0,1]^n$; d'où

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |f(k)|^p &\le C \sum_{l,k} \Big(\int_{[0,1]^n + l} |f(x)|^p \, dx \Big)\, (1 + |l - k|)^{-n-1} \\ &\le C' \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx\,. \end{aligned}$$

Dans l'autre sens, on utilise directement (3):

$$|f(x)|^p \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |f(k)|^p \, |\theta(x-k)|^p \,,$$

d'où

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |f(k)|^p \, \|\theta\|_p^p \,.$$

Lemme 2. *Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toutes fonctions f et g, à spectres dans $[-\gamma,\gamma]^n$, on ait*

$$\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |f*g(k)|^p\Big)^{1/p} \leq C\, \|f\|_p \, \|g\|_p \,.$$

PREUVE. On écrit

$$(f*g)(k) = \sum_{l,m} f(l)\, g(m)\, c_{k+m-l} \,,$$

où $c_k = \int \theta(k-z)\,\theta(z)\,dz$; il vient alors

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |f*g(k)|^p \leq \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |f(k)|^p\Big)\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |g(k)|^p\Big)\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |c_k|^p\Big)\,.$$

On conclut en utilisant la décroissance rapide de la suite $\{c_k\}$ et le Lemme 1. Un simple changement d'échelle conduit alors au

Lemme 3. *Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $R > 0$ et toutes fonctions f et g, à spectres dans $[-\gamma R, \gamma R]^n$, on ait*

$$\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |f*g(\frac{k}{R})|^p\Big)^{1/p} \leq C\, R^{n(2/p-1)} \, \|f\|_p \, \|g\|_p \,.$$

On en arrive enfin au résultat principal de ce paragraphe:

Proposition 6. *Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $R > 0$ et toutes fonctions f et g, à spectres dans $[-\gamma R, \gamma R]^n$, on ait*

$$\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |f * g(k)|^p\Big)^{1/p} \leq C\, R^{n(2/p-1)} \sup\{R^{-n/p}, 1\}\, \|f\|_p\, \|g\|_p\,.$$

PREUVE. Admettons un instant l'inégalité

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \frac{1}{(1+R\,|x-k|)^{n+1}} \leq C\, \sup\{R^{-n}, 1\}\,, \tag{4}$$

uniforme par rapport à $x \in \mathbb{R}^n$. En remplaçant x par l/R dans (4), il vient

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \frac{1}{(1+|Rk-l|)^{n+1}} \leq C\, \sup\{R^{-n}, 1\}\,. \tag{5}$$

On écrit alors $(f * g)(k)$ suivant la formule (3) ce qui donne

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |f * g(k)|^p \leq \sum_{l,k} \big|(f * g)(\frac{l}{R})\big|^p\, |\theta(Rk-l)|^p\,.$$

La décroissance rapide de θ, l'inégalité (5) et le Lemme 3 permettent alors de conclure.

Il nous reste à prouver (4). Le premier membre de cette inégalité est une fonction $u_R(x)$, $\mathbb{Z}^n$-périodique, bornée. Si $R \geq 1$, il suffit d'écrire

$$u_R(x) \leq u_1(x) \leq \|u_1\|_\infty\,.$$

Supposons $R < 1$ et $x \in [0,1]^n$. Pour une constante $\alpha > 0$ convenable ($\alpha = 2\sqrt{n}$ par exemple), on a

$$|k| \geq \alpha R^{-1} \qquad \text{implique} \qquad |x-k| \geq \frac{|k|}{2}\ ;$$

cela donne

$$\sum_{|k|\geq\alpha R^{-1}} \frac{1}{(1+R\,|x-k|)^{n+1}} \leq \frac{2^{n+1}}{R^{n+1}} \sum_{|k|\geq\alpha R^{-1}} |k|^{-n-1} \leq \frac{C}{R^n}$$

et

$$\sum_{|k|<\alpha R^{-1}} \frac{1}{(1+R\,|x-k|)^{n+1}} \leq \sum_{|k|<\alpha R^{-1}} 1 \leq \frac{C}{R^n}\,.$$

3. Les espaces de Besov construits sur $\mathcal{E}_p$.

Le cadre naturel des espaces de Besov homogènes est celui des distributions *modulo les polynômes*, que nous rappellerons d'abord brièvement.

Pour un entier $\nu \in \mathbb{N}$, on désigne par $\mathcal{S}_\nu$, le sous-espace de $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ constitué des fonctions f telles que

$$\int f(x)\, x^\alpha\, dx = 0\,,$$

quel que soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leq \nu$; il est naturel de poser $\mathcal{S}_{-1} = \mathcal{S}$ et $\mathcal{S}_\infty = \cap_{\nu\in\mathbb{N}}\mathcal{S}_\nu$. Le dual topologique de $\mathcal{S}_\nu$, noté $\mathcal{S}'_\nu$, n'est autre que l'espace des distributions tempérées modulo les polynômes de degrés au plus ν (modulo *tous* les polynômes si $\nu = +\infty$).

La définition des espaces de Besov repose traditionnellement sur une partition dyadique de l'unité

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \widehat{\lambda}(2^j\xi) = 1 \qquad \xi \neq 0\,,$$

où la fonction $\widehat{\lambda}$ est supposée de classe C^∞, positive, radiale, à support compact, disons dans la couronne $1 \leq |\xi| \leq 3$; on définit alors les opérateurs Δ_j par

$$\widehat{\Delta_j f}(\xi) = \widehat{\lambda}\Big(\frac{\xi}{2^j}\Big)\widehat{f}(\xi)\,.$$

Δ_j est un opérateur linéaire continu de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}_\infty$ et de $\mathcal{S}'_\nu$ dans $\mathcal{S}'$. Pour tout $f \in \mathcal{S}'_\infty$, on a

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_j f\,,$$

la série convergeant dans $\mathcal{S}'_\infty$ -ce qui signifie que, quel que soit $g \in \mathcal{S}_\infty$, on a

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\langle \Delta_j f, g\rangle| < +\infty\,.$$

Soit E un sous-espace de $\mathcal{S}'_\nu$, muni d'une norme complète rendant continue l'injection canonique $E \hookrightarrow \mathcal{S}'_\nu$, invariant isométriquement par translations. Pour $s \in \mathbb{R}$ et $q \in]0, +\infty]$, l'espace de Besov $\dot{B}^{s,q}(E)$ ("construit" sur E) est l'ensemble des $f \in \mathcal{S}'_\infty$ telles que

$$\left\{2^{js} \|\Delta_j f\|_E\right\}_{j\in\mathbb{Z}} \in \ell^q(\mathbb{Z}).$$

L'invariance de E par translations a pour conséquence que l'espace de Besov ainsi défini ne dépend pas du choix spécifique de la fonction λ; on montre en effet l'énoncé suivant:

Proposition 7. *Pour toute fonction $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\left\|\{2^{js} \|g(2^{-j}D)f\|_E\}_{j\in\mathbb{Z}}\right\|_{\ell^q} \leq C \left\|\{2^{js} \|\Delta_j f\|_E\}_{j\in\mathbb{Z}}\right\|_{\ell^q} .$$

J. Peetre [P, Chapitre 11] a montré que cette définition s'étend au cas $E = L^p$ $(0 < p < 1)$, bien que E ne soit alors ni un espace de Banach, ni même un sous-espace de $\mathcal{S}'_\infty$. L'espace de Besov homogène usuel est $\dot{B}^{s,q}(L^p(\mathbb{R}^n))$, noté encore $\dot{B}^{s,q}_p(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 8. *Pour $s \in \mathbb{R}$, $p \in]0, +\infty]$, $q \in]0, +\infty]$, on définit l'entier $\nu = \nu(s, p, q, n)$ par*

$$\nu = \begin{cases} \sup\left\{[s - \frac{n}{p}], -1\right\}, & \text{si } q > 1 \text{ ou } s - \frac{n}{p} \notin \mathbb{N}, \\ s - \frac{n}{p} - 1, & \text{si } q \leq 1 \text{ et } s - \frac{n}{p} \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Alors, pour tout $f \in \dot{B}^{s,q}_p(\mathbb{R}^n)$, la série $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_j f$ converge dans $\mathcal{S}'_\nu$, de sorte que $\dot{B}^{s,q}_p(\mathbb{R}^n)$ s'identifie à un sous-espace, invariant par translations et par dilatations, de $\mathcal{S}'_\nu$.

PREUVE. Il s'agit d'établir

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\langle \Delta_j f, g\rangle| < +\infty, \tag{6}$$

quel que soit $g \in \mathcal{S}_\nu$. A cet effet, on introduit une fonction $\mu \in \mathcal{S}$ telle que $\widehat{\mu}$ soit positive, radiale, portée par la couronne $1/2 \leq |\xi| \leq 4$ et que $\widehat{\mu}\widehat{\lambda} = \widehat{\lambda}$. La suite d'opérateurs $\{M_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ est définie par

$$\widehat{M_j f}(\xi) = \widehat{\mu}(\frac{\xi}{2^j})\, \widehat{f}(\xi) \ ;$$

on a alors $\Delta_j M_j = \Delta_j$, ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} |\langle \Delta_j f, g\rangle| &= |\langle \Delta_j f, M_j g\rangle| \\ &\leq \|\Delta_j f\|_\infty \, \|M_j g\|_1 \\ &\leq C\, 2^{jn/p}\, \|\Delta_j f\|_p \, \|M_j g\|_1 \end{aligned}$$

-la dernière inégalité résulte classiquement du fait que le spectre de $\Delta_j f$ est inclus dans la boule $|\xi| \leq 3 \cdot 2^j$ (dans le cas $p < 1$, on se reportera au Paragraphe 2.4 ou à [P, Lemme 1, p. 234]).

Pour $j \geq 0$ et tout entier $N \geq 0$, on a

$$M_j g(x) = \int 2^{jn}\, \mu(2^j y) \Big(g(x-y) - \sum_{|\alpha|\leq N} \frac{1}{\alpha!} (-y)^\alpha\, g^{(\alpha)}(x) \Big)\, dy \ ; \tag{7}$$

l'hypothèse $g \in \mathcal{S}$ conduit alors à

$$\|M_j g\|_1 \leq C_N\, 2^{-j(N+1)}\,, \tag{8}$$

d'où

$$|\langle \Delta_j f, g\rangle| \leq C_N\, 2^{-j(N+1-n/p)}\, \|\Delta_j f\|_p$$

et il nous suffira de choisir N tel que $N + 1 + s - n/p > 0$.

Pour $j < 0$, les fonctions μ et g échangent leurs rôles:

$$\begin{aligned} M_j g(x) = 2^{jn} \int g(y) \Big(&\mu(2^j x - 2^j y) \\ &- \sum_{|\alpha|\leq \nu} \frac{1}{\alpha!} (-2^j y)^\alpha\, \mu^{(\alpha)}(2^j x) \Big)\, dy\,, \end{aligned} \tag{9}$$

égalité qui conduit à l'estimation

$$\|M_j g\|_1 \leq C\, 2^{j(\nu+1)} \ ; \tag{10}$$

pour en finir avec (6), il suffit de noter qu'on a $\nu + 1 + n/p - s > 0$ (l'inégalité large étant suffisante pour $q \leq 1$).

REMARQUE. On peut montrer que l'entier ν est le plus petit possible tel que $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ se "réalise" comme un sous-espace invariant par translations et par dilatations de $\mathcal{S}'_\nu$ [B].

En conclusion de ce paragraphe, on note que l'espace de Besov $\dot{B}^{s,q}(\mathcal{E}_p)$ est défini quels que soient $s \in \mathbb{R}$, $p, q \in]0, +\infty]$: pour $p \geq 1$, il suffit de faire $E = \mathcal{E}_p$ dans la définition générale de $\dot{B}^{s,q}(E)$, pour $p < 1$, on a (Proposition 1) $\mathcal{E}_p = L^p$, de sorte que $\dot{B}^{s,q}(\mathcal{E}_p)$ est l'espace de Besov $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ introduit par J. Peetre [P, Chapitre 11]. Le plongement $\mathcal{E}_p \subset L^p$ entraîne que $\dot{B}^{s,q}(\mathcal{E}_p)$ s'identifie naturellement à un sous-espace de $\mathcal{S}'_\nu$, suivant la Proposition 8.

4. Condition de synthèse.

Théorème 1. *Soit $s \in \mathbb{R}$, $p, q \in]0, +\infty]$, $u = \inf\{p, q, 1\}$. Quel que soit $\psi \in \dot{B}^{s,u}(\mathcal{E}_p)$ et quelle que soit la suite $\{c_{j,k}\}_{j\in\mathbb{Z},\, k\in\mathbb{Z}^n}$ telle que*

$$A = \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |c_{j,k}|^p\Big)^{q/p}\Big)^{1/q} < +\infty\,,$$

la série

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_{j,k} 2^{j(n/p-s)} \psi(2^j x - k)$$

converge dans $\mathcal{S}'_\nu$ (où $\nu = \nu(s,p,q,n)$ suivant la Proposition 8) et sa somme appartient à $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ avec une norme majorée par $A\,\|\psi\|_{\dot{B}^{s,u}(\mathcal{E}_p)}$.

PREUVE. Vérifions d'abord la convergence dans $\mathcal{S}'_\nu$. Il suffit, pour cela, de prendre $g \in \mathcal{S}_\nu$ et de vérifier que la famille de nombres complexes

$$\big\{c_{j,k}\, 2^{j(n/p-s)}\, \langle \psi(2^j(\,\cdot\,) - k), g\rangle\big\}_{j\in\mathbb{Z},\, k\in\mathbb{Z}^n}$$

est sommable; ou encore de trouver une constante $C = C(\psi, g) > 0$ telle que, pour tout ensemble fini $F \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^n$, la somme

$$\sum_{(j,k)\in F} c_{j,k}\, 2^{j(n/p-s)}\, \langle \psi(2^j(\,\cdot\,) - k), g\rangle \tag{11}$$

soit dominée par C. Ecrivons $F = \cup_{j\in\Lambda}(\{j\} \times \Lambda_j)$, où Λ est une partie finie de $\mathbb{Z}$ et chaque Λ_j une partie finie de $\mathbb{Z}^n$. D'après (6), on a

$$f = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \Delta_m f$$

dans $\mathcal{S}'_\nu$, quel que soit $f \in \dot{B}^{s,u}(\mathcal{E}_p)$, ce qui permet de réécrire la somme (11) sous la forme

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\Lambda}\sum_{k\in\Lambda_j}\langle c_{j,k}\,2^{j(n/p-s)}\Delta_m(\psi(2^j(\,\cdot\,)-k)), M_m g\rangle\,.$$

Ensuite on se sert de la relation

$$\Delta_m\left(\psi(2^j(\,\cdot\,)-k)\right) = (\Delta_{m-j}\psi)(2^j(\,\cdot\,)-k)\ ;$$

(11) se trouve alors dominé par

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\Lambda}2^{j(n/p-s-n)}\left|\left\langle\sum_{k\in\Lambda_j}c_{j,k}\,\Delta_{m-j}\,\psi(\,\cdot\,-k), M_m g((\,\cdot\,)\,2^{-j})\right\rangle\right|$$
$$\le\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\Lambda}2^{j(n/p-s)}\left\|\sum_{k\in\Lambda_j}c_{j,k}\,\Delta_{m-j}\,\psi(\,\cdot\,-k)\right\|_\infty\|M_m g\|_1\,.$$

Puisque $\Delta_{m-j}\psi(\,\cdot\,-k)$ est à spectre dans la couronne $2^{m-j}\le|\xi|\le 3\cdot 2^{m-j}$, on a

$$\left\|\sum_{k\in\Lambda_j}c_{j,k}\,\Delta_{m-j}\,\psi(\,\cdot\,-k)\right\|_\infty\le C\,2^{(m-j)n/p}\left\|\sum_{k\in\Lambda_j}c_{j,k}\,\Delta_{m-j}\,\psi(\,\cdot\,-k)\right\|_p,$$

de sorte que (11) est dominé par

$$C\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\Lambda}\left(2^{(m-j)s}\,\|\Delta_{m-j}\psi\|_{\mathcal{E}_p}\right)\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}|c_{j,k}|^p\right)^{1/p}2^{m(n/p-s)}\,\|M_m g\|_1\,.$$

Cette dernière expression est de la forme

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\Lambda}a_{m-j}\,b_j u_m\ ,$$

où, par hypothèse, $\{a_j\}\in\ell^{\inf\{q,1\}}(\mathbb{Z})$ et $\{b_j\}\in\ell^q(\mathbb{Z})$. Pour conclure, il suffit de prouver que la suite de terme général

$$u_m = 2^{m(n/p-s)}\,\|M_m g\|_1$$

appartient à $\ell^{\sup\{q,1\}'}(\mathbb{Z})$, mais cela est une conséquence immédiate des estimations (8) et (10).

On va maintenant estimer la "norme" $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ de la distribution

$$f(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_{j,k}\, 2^{j(n/p-s)}\, \psi(2^j x - k)\,.$$

La convergence de la série dans $\mathcal{S}'_\nu$ permet d'écrire

$$\Delta_m f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_{j,k}\, 2^{j(n/p-s)}\, (\Delta_{m-j}\psi)(2^j(\,\cdot\,) - k)\,.$$

A partir de là, il est commode de traiter séparément les cas $p \geq 1$ et $p < 1$. Dans le premier cas, on a

$$2^{ms}\,\|\Delta_m f\|_p \leq \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{(m-j)s}\,\|\Delta_{m-j}\psi\|_{\mathcal{E}_p}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |c_{j,k}|^p\Big)^{1/p},$$

autrement dit, la suite $\{2^{ms}\,\|\Delta_m f\|_p)_{m\in\mathbb{Z}}$ est majorée par la convolution entre les suites $\{a_j\}$ et $\{b_j\}$. On conclut alors à l'aide de l'inclusion

$$\ell^q * \ell^{\inf\{q,1\}} \subset \ell^q\,.$$

Pour $p < 1$, on a

$$\begin{aligned} 2^{ms}\,\|\Delta_m f\|_p &\leq \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{(m-j)sp}\,\|\Delta_{m-j}\psi\|_p^p\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |c_{j,k}|^p\Big)\Big)^{1/p} \\ &\leq \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} b_j^p\, a_{m-j}^p\Big)^{1/p}. \end{aligned}$$

Si $q \geq p$, on utilise l'inégalité de Young $\ell^{q/p} * \ell^1 \subset \ell^{q/p}$, ce qui donne

$$\begin{aligned} \Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}} (2^{ms}\,\|\Delta_m f\|_p)^q\Big)^{p/q} &\leq \Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}} \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} b_j^p\, a_{m-j}^p\Big)^{q/p}\Big)^{p/q} \\ &\leq \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} b_j^q\Big)^{p/q}\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j^p\Big) \\ &\leq \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |c_{j,k}|^p\Big)^{q/p}\Big)^{p/q}\,\|\psi\|^p_{\dot{B}_p^{s,p}(\mathbb{R}^n)}\,. \end{aligned}$$

Si $q < p$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{m\in\mathbb{Z}}(2^{ms}\,\|\Delta_m f\|_p)^q &\le \sum_{m\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} b_j^p\, a_{m-j}^p\Big)^{q/p}\\ &\le \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} b_j^q\, a_{m-j}^q\\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}|c_{j,k}|^p\Big)^{q/p}\,\|\psi\|^q_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)}\,.\end{aligned}$$

5. Condition d'analyse.

Théorème 2. *Pour tous $s \in \mathbb{R}$, $p \in [1,+\infty]$, $q \in]0,+\infty]$ et $u = \inf\{q,1\}$, il existe $C = C(s,n,p,q) > 0$ tel que, pour tout $\psi \in \dot{B}^{-s,u}(\mathcal{E}_{p'})$ et tout $f \in \dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$, la suite des coefficients*

$$c_{j,k} = 2^{j(s-n/p)}\langle 2^{jn}\,\psi(2^j(\,\cdot\,)-k), f\rangle \tag{12}$$

soit bien définie et qu'on ait

$$\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}|c_{j,k}|^p\Big)^{q/p}\Big)^{1/q} \le C\,\|\psi\|_{\dot{B}^{-s,u}(\mathcal{E}_{p'})}\|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)}\,.$$

PREUVE. L'hypothèse $\psi \in \dot{B}^{-s,u}(\mathcal{E}_{p'})$ entraîne *a fortiori*

$$\psi \in \dot{B}_{p'}^{-s,\sup\{q,1\}'}(\mathbb{R}^n)\,.$$

Or $\dot{B}_{p'}^{-s,\sup\{q,1\}'}(\mathbb{R}^n)$ n'est autre que le dual de $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$, si $p < +\infty$ et $q < +\infty$, et, dans les cas $p = +\infty$ ou $q = +\infty$, c'est un prédual de $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$; le crochet $\langle\psi, f\rangle$ est donc bien défini, pour tout $f \in \dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$.

Pour estimer les $c_{j,k}$, on introduit

$$\theta(x) = \overline{\psi}(-x) \qquad \text{et} \qquad \theta_j(x) = 2^{jn}\,\theta(2^jx)\ ;$$

alors

$$c_{j,k} = 2^{j(s-n/p)}\,(\theta_j * f)(k\,2^{-j})$$

$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}} 2^{j(s-n/p)} (\Delta_m \theta_j * M_m f)(k\, 2^{-j})$$
$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}} 2^{j(s-n/p)} (\Delta_{m-j} \theta_j * M_m f((\,\cdot\,)2^{-j}))(k)\,,$$

ce qui conduit, grâce à la Proposition 5, à

$$\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |c_{j,k}|^p\Big)^{1/p} \le \sum_{m\in\mathbb{Z}} 2^{js}\, \|\Delta_{m-j}\theta\|_{\mathcal{E}_{p'}}\, \|M_m f\|_p$$
$$\le \sum_{m\in\mathbb{Z}} (2^{(j-m)s}\, \|\Delta_{m-j}\theta\|_{\mathcal{E}_{p'}})\, (2^{ms}\, \|M_m f\|_p)\,.$$

Cette dernière expression n'est autre que la convolution entre les suites de termes généraux

$$a_j = 2^{-js}\, \|\Delta_j \theta\|_{\mathcal{E}_{p'}} \qquad \text{et} \qquad b_j = 2^{js}\, \|M_j f\|_p\,.$$

La Proposition 7 conduit à

$$\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |b_j|^q\Big)^{1/q} \le C\, \|f\|_{\dot B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)}$$

et, par hypothèse sur ψ, on a

$$\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}} \in \ell^{\inf\{q,1\}}(\mathbb{Z})\,.$$

L'inclusion $\ell^q * \ell^{\inf\{q,1\}} \subset \ell^q$ fournit alors l'inégalité annoncée.

Théorème 3. *Soit $s \in \mathbb{R}$, $0 < p < 1$, $q \in]0, +\infty]$ et $u = \inf\{q, p\}$. Soit ψ une fonction telle que la suite $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ définie par*

$$a_j = \begin{cases} 2^{j(2n/p-n-s)}\, \|\Delta_j \psi\|_p\,, & j \ge 0\,, \\ 2^{j(n/p-n-s)}\, \|\Delta_j \psi\|_p\,, & j < 0\,, \end{cases}$$

appartienne à $\ell^u(\mathbb{Z})$. Alors, pour tout $f \in \dot B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$, la suite des coefficients $\{c_{j,k}\}$ définie par (12) vérifie l'estimation

$$\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |c_{j,k}|^p\Big)^{q/p}\Big)^{1/q} \le C \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |a_j|^u\Big)^{1/u}\, \|f\|_{\dot B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)}\,.$$

PREUVE. On commence par s'assurer que $c_{j,k}$ est bien défini; autrement dit que la condition $\{a_j\} \in \ell^u$ entraîne que la fonction ψ appartient au dual de $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$. J. Peetre [P] a montré que le dual de $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ contient l'espace de Besov $\dot{B}_\infty^{n(1/p-1)-s,\sup\{q,1\}'}(\mathbb{R}^n)$. Or on a

$$\|\Delta_j\psi\|_\infty \leq C\, 2^{jn/p}\, \|\Delta_j\psi\|_p \ ;$$

l'hypothèse $\{a_j\} \in \ell^u$ entraîne alors $\psi \in \dot{B}_\infty^{n(1/p-1)-s,u}(\mathbb{R}^n)$; on conclut à l'aide de l'inégalité $u \leq \sup\{q,1\}'$.

Pour estimer $c_{j,k}$, on utilise la Proposition 6, ce qui donne

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |c_{j,k}|^p \\
&\qquad \leq \sum_{k,m} 2^{j(sp-n)}\, |(\Delta_{m-j}\theta * M_m f(2^{-j}(\,\cdot\,)))(k)|^p \\
&\qquad \leq C\Big(\sum_{m\geq j} 2^{j(sp-n)}\, 2^{(m-j)n(2-p)}\, \|\Delta_{m-j}\theta\|_p^p\, \|M_m f(2^{-j}(\,\cdot\,))\|_p^p \\
&\qquad\qquad + \sum_{m<j} 2^{j(sp-n)}\, 2^{(m-j)n(1-p)}\, \|\Delta_{m-j}\theta\|_p^p\, \|M_m f(2^{-j}(\,\cdot\,))\|_p^p\Big) \\
&\qquad = C\Big(\sum_{m\geq j} 2^{(m-j)(n(2-p)-sp)}\, \|\Delta_{m-j}\theta\|_p^p\, 2^{msp}\, \|M_m f\|_p^p \\
&\qquad\qquad + \sum_{m<j} 2^{(m-j)(n(1-p)-sp)}\, \|\Delta_{m-j}\theta\|_p^p\, 2^{msp}\, \|M_m f\|_p^p\Big)\,.
\end{aligned}$$

En posant $b_j = 2^{js}\|M_j f\|_p$, il vient

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |c_{j,k}|^p \leq C \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{m-j}^p\, b_m^p\ .$$

Exactement comme dans la preuve du Théorème 2, on en tire

$$\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |c_{j,k}|^p\Big)^{q/p}\Big)^{1/q} \leq C\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |a_j|^u\Big)^{1/u}\, \|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)}\ .$$

6. Le théorème d'Yves Meyer.

Une ondelette est r-régulière si elle est à décroissance rapide, ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre r. Il est facile -comme le fait P. Auscher [A]- d'étendre cette définition aux r non entiers:

Définition 2. *Soit r un nombre positif non entier. On dit que ψ est r-régulière si, quel que soit l'entier N, la fonction*

$$x \mapsto (1+|x|^2)^N \psi(x)$$

appartient à l'espace de Hölder $B_\infty^{r,\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Voici l'énoncé du théorème de Meyer, où le mot "base" signifie base inconditionnelle ou base inconditionnelle faible suivant que l'espace de Besov considéré est ou non séparable:

Théorème 4. *Soit $\{\psi_\varepsilon\}_{\varepsilon\in E}$ une famille finie de fonctions r-régulières telle que*

$$\{2^{jn/2}\,\psi_\varepsilon(2^j(\,\cdot\,)-k):\ \varepsilon\in E,\ k\in\mathbb{Z}^n,\ j\in\mathbb{Z}\} \tag{13}$$

soit une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R}^n)$. On suppose de plus:

i) $|s|<r$, *si* $p\in[1,+\infty]$,

ii) $n(2/p-1)-r<s<r$, *si* $0<p<1$.

Alors la famille (13) *est une base de l'espace de Besov $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$, quel que soit $q\in\,]0,+\infty]$. Plus précisément, il existe des constantes $C_j(r,s,p,q,n)>0$ $(j=1,2)$ telles que*

i) *pour toute suite $\{c_{\varepsilon,j,k}\}_{\varepsilon\in E,\,j\in\mathbb{Z},\,k\in\mathbb{Z}^n}$ de nombres complexes telle que le second membre de l'inégalité soit fini,*

$$\Big\|\sum_{\varepsilon,j,k} c_{\varepsilon,j,k}\,2^{j(n/p-s)}\,\psi_\varepsilon(2^j(\,\cdot\,)-k)\Big\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} \le C_2\sum_\varepsilon\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}|c_{\varepsilon,j,k}|^p\Big)^{q/p}\Big)^{1/q},$$

ii) *toute distribution $f\in\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ s'écrit d'une manière et d'une seule*

$$f=\sum_{\varepsilon,j,k} c_{\varepsilon,j,k}\,2^{j(n/p-s)}\psi_\varepsilon(2^j(\,\cdot\,)-k),$$

avec

$$\sum_\varepsilon\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}|c_{\varepsilon,j,k}|^p\Big)^{q/p}\Big)^{1/q}\le C_1\,\|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)}\,.$$

PREUVE. Désignons par m la partie entière de r. Le Théorème de Meyer sera une conséquence des théorèmes précédents et des inégalités

$$\|\Delta_j \psi\|_{\mathcal{E}_p} \leq C\, 2^{j(m+1-n(1/p-1)_+)}\,, \qquad j < 0\,, \tag{14}$$

$$\|\Delta_j \psi\|_{\mathcal{E}_p} \leq C\, 2^{-jr}\,, \qquad j \geq 0\,, \tag{15}$$

où ψ est l'une quelconque des ondelettes ψ_ε.

PREUVE DE (15). Admettons un instant les estimations

$$|\Delta_j \psi(x)| \leq C_N \Big(\frac{2^{-jr}}{(1+|x|)^N} + \frac{2^{-jm}}{(1+|2^j x|)^N}\Big)\,, \tag{16}$$

pour tout $j \geq 0$ et n'importe quel $N > 0$,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\Delta_j \psi(x-k)| \leq C\, 2^{-jr}\,, \qquad j \geq 0\,. \tag{17}$$

Commençons par prouver (15) pour $p \leq 1$. Il suffit d'élever (16) à la puissance p et de choisir $N > n/p$; il vient

$$\int |\Delta_j \psi(x)|^p\, dx \leq C\, (2^{-jrp} + 2^{-j(pm+n)})$$

et l'inégalité $m + n/p \geq r$ permet de conclure.

L'inégalité (17) s'écrit encore

$$\|\Delta_j \psi\|_{\mathcal{E}_\infty} \leq C\, 2^{-jr}\ ;$$

en interpolant entre les cas $p = 1$ et $p = +\infty$, suivant la Proposition 3, on obtient (15) quel que soit $p \in\,]1, +\infty[$.

Il nous faut maintenant vérifier (16) et (17). Supposons d'abord r entier, autrement dit $r = m$. On estime $\Delta_j \psi$ à l'aide de l'identité (7), qui nous donne

$$\begin{aligned} |\Delta_j \psi(x)| \leq \sum_{|\alpha|=m} \frac{m}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{m-1}\, dt \\ \cdot \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |y|^m\, |\psi^{(\alpha)}(x-ty)|\, 2^{jn}\, |\lambda(2^j y)|\, dy\Big)\,. \end{aligned} \tag{18}$$

La décroissance rapide de $\psi^{(\alpha)}$ conduit à

$$\begin{aligned}\int_{|y|\le\frac{|x|}{2}} |y|^m\,|\psi^{(\alpha)}(x-ty)|\,2^{jn}\,|\lambda(2^jy)|\,dy \\ &\le C_N\,(1+|x|)^{-N}\int |y|^m\,2^{jn}|\,\lambda(2^jy)|\,dy \\ &= C'_N\,(1+|x|)^{-N}\,2^{-jm}\ ;\end{aligned}$$

par ailleurs

$$\begin{aligned}\int_{|y|\ge\frac{|x|}{2}} |y|^m\,|\psi^{(\alpha)}(x-ty)|\,2^{jn}\,|\lambda(2^jy)|\,dy \\ &\le 2^{-jm}\,\|\psi^{(\alpha)}\|_\infty \int_{|y|\ge 2^{j-1}|x|} |y|^m\,|\lambda(y)|\,dy \\ &\le C_N\,(1+|2^jx|)^{-N}\,2^{-jm}\end{aligned}$$

-la dernière égalité résultant de la décroissance rapide de λ- et cela termine la preuve de (16). Pour obtenir (17), on utilise de nouveau (18), se ramenant ainsi à vérifier

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\psi^{(\alpha)}(x-k-ty)| \le C$$

quels que soient x et y dans $\mathbb{R}^n$ et $t\in[0,1]$; or cette inégalité équivaut à $\psi^{(\alpha)}\in\mathcal{E}_\infty$, propriété qui découle aussitôt de la décroissance rapide de $\psi^{(\alpha)}$.

Passons au cas où r n'est pas entier. L'identité (7) conduit alors à

$$|\Delta_j\psi(x)|\le \sum_{|\alpha|=m}\frac{m}{\alpha!}\int_0^1(1-t)^{m-1}\,dt$$

$$\cdot\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|y|^m\,|\psi^{(\alpha)}(x-ty)-\psi^{(\alpha)}(x)|\,2^{jn}\,|\lambda(2^jy)|\,dy\Big)\,. \tag{19}$$

L'hypothèse de r-régularité se traduit par les estimations

$$|\psi^{(\alpha)}(x+h)-\psi^{(\alpha)}(x)|\le C_N\,(1+|x|)^{-N}\,|h|^{r-m}\,, \tag{20}$$

pour $|\alpha| = m$, $|h| \le |x|/2$ et quel que soit $N > 0$; cela nous donne

$$\int_{|y|\le\frac{|x|}{2}} |y|^m \, |\psi^{(\alpha)}(x - ty) - \psi^{(\alpha)}(x)| \, 2^{jn} \, |\lambda(2^j y)| \, dy$$

$$\le C_N \, (1 + |x|)^{-N} \, 2^{-jr} \int |y|^r \, |\lambda(y)| \, dy \,,$$

puis

$$\int_{|y|\ge\frac{|x|}{2}} |y|^m \, |\psi^{(\alpha)}(x - ty) - \psi^{(\alpha)}(x)| \, 2^{jn} \, |\lambda(2^j y)| \, dy$$

$$\le 2 \, \|\psi^{(\alpha)}\|_\infty \, 2^{-jm} \int_{|y|\ge 2^{j-1}|x|} |y|^m \, |\lambda(y)| \, dy$$

$$\le \; C_N \, 2^{-jm} \, (1 + |2^j x|)^{-N} \,,$$

ce qui termine la preuve de (16). Pour obtenir (17), on combinera l'inégalité (19) avec

$$\text{(21)} \qquad \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\psi^{(\alpha)}(x - k - y) - \psi^{(\alpha)}(x - k)| \le C \, |y|^{r-m} \,,$$

estimation qu'il nous reste donc à établir. Notons d'abord que le premier membre de (21) est majoré par $2 \, \|\psi^{(\alpha)}\|_{\mathcal{E}_\infty}$, ce qui nous donne (21) dès qu'on a $|y| \ge 1$. Supposons maintenant $|y| < 1$: l'estimation (20) donne

$$\sum_{|x-k|\ge 2|y|} |\psi^{(\alpha)}(x - k - y) - \psi^{(\alpha)}(x - k)|$$

$$\le C \, |y|^{r-m} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \frac{1}{(1 + |x - k|)^{n+1}} \le C' \, |y|^{r-m} \,.$$

Pour estimer les termes restant, on suppose $x \in [0,1]^n$; alors $|x - k| < 2|y|$ entraîne $|k| \le 2 + \sqrt{n}$, d'où

$$\sum_{|x-k|<2|y|} |\psi^{(\alpha)}(x - k - y) - \psi^{(\alpha)}(x - k)|$$

$$\le (5 + 2\sqrt{n})^n \, \|\psi^{(\alpha)}\|_{\dot{B}^{r,\infty}_\infty(\mathbb{R}^n)} \, |y|^{r-m} \,.$$

PREUVE DE (14). L'inégalité (14) reflète le comportement de $\widehat{\psi}$ au voisinage de 0, autrement dit le degré d'oscillation de la fonction ψ. De ce fait on est conduit à utiliser le résultat suivant de Meyer ([ME, Chapitre III, Proposition 4]): sous les hypothèses du Théorème 4, on a

$$\int \psi_\varepsilon(x)\, x^\alpha\, dx = 0\,, \tag{22}$$

pour tout $\varepsilon \in E$ et $|\alpha| \leq m$. Nous allons voir que ces identités impliquent les estimations

$$|\Delta_j \psi(x)| \leq C_N\, (1 + |2^j x|)^{-N}\, 2^{j(n+m+1)} \tag{23}$$

(pour tout $j \leq 0$ et n'importe quel $N > 0$) et

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\Delta_j \psi(x-k)| \leq C\, 2^{j(m+1)}\,, \qquad j \leq 0\,. \tag{24}$$

On procède alors comme dans la preuve de (15): pour $p \leq 1$, l'inégalité (14) découle aussitôt de (23), (24) est précisément l'estimation $\mathcal{E}_\infty$ et le cas $1 < p < +\infty$ s'obtient en interpolant entre $p = 1$ et $p = +\infty$.

Pour terminer la preuve du Théorème 4, il nous reste à établir les estimations (23) et (24). Les oscillations de ψ nous permettent d'utiliser l'identité (9), qui donne

$$\begin{aligned} |\Delta_j \psi(x)| \leq 2^{j(n+m+1)} \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{m+1}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^m\, dt \\ \cdot \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |y|^{m+1}\, |\lambda^{(\alpha)}(2^j(x-ty))|\, |\psi(y)|\, dy \Big)\,. \end{aligned} \tag{25}$$

Pour $t \in [0,1]$, la décroissance rapide de $\lambda^{(\alpha)}$ conduit à

$$\begin{aligned} \int_{|y|<|x|/2} |\lambda^{(\alpha)}(2^j(x-ty))|\, |y|^{m+1}\, |\psi(y)|\, dy \\ \leq C_N\, (1 + |2^j x|)^{-N} \int |y|^{m+1}\, |\psi(y)|\, dy\,, \end{aligned}$$

et la décroissance rapide de ψ à

$$\int_{|y|\geq|x|/2} |\lambda^{(\alpha)}(2^j(x-ty))|\, |y|^{m+1}\, |\psi(y)|\, dy \leq C_N\, \|\lambda^{(\alpha)}\|_\infty\, (1 + |x|)^{-N}\,,$$

d'où l'inégalité (23). L'estimation (24) sera une conséquence de (25) et de

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\lambda^{(\alpha)}(2^j(x-ty-k))| \leq C\, 2^{-jn} ,$$

(pour x et y dans $\mathbb{R}^n$, $t\in[0,1]$, $j\leq 0$), inégalité qui résulte elle-même de la décroissance rapide de $\lambda^{(\alpha)}$ et de (4).

7. Les bases de splines tensoriels.

Rappelons brièvement la construction des ondelettes splines dans $\mathbb{R}$, puis dans $\mathbb{R}^n$.

L'entier $m\geq 0$ étant donné, il existe une fonction $\psi_1\in L^2(\mathbb{R})$ ayant les propriétés suivantes:

(26) ψ_1 est de classe C^{m-1} (pas de condition si $m=0$),

(27) sur chaque intervalle $]k,k+1[$ $(k\in\mathbb{Z})$,
ψ_1 coïncide avec un polynôme de degré m ,

(28) il existe des nombres $C>0$, $\gamma>0$, tels que,
pour tout $\alpha=0,\dots,m$ et presque tout $x\in\mathbb{R}$,

$$|\psi_1^{(\alpha)}(x)|\leq C\,e^{-\gamma|x|} ,$$

(29) $\{2^{j/2}\,\psi_1(2^j(\cdot)-k):\ j\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{Z}\}$
est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$.

Il s'agit dès lors d'une base d'ondelettes m-régulières, ce qui donne encore

$$\int \psi_1(x)\,x^\alpha\,dx=0 , \qquad \alpha=0,\dots,m. \tag{30}$$

Enfin l'ondelette ψ_1 est issue d'une fonction d'échelle ψ_0 possédant les propriétés (26), (27), (28).

En dimension $n>1$, on pose, pour tout $\varepsilon\in E=\{0,1\}^n\setminus\{0\}$,

$$\psi_\varepsilon(x)=\psi_{\varepsilon_1}(x_1)\cdots\psi_{\varepsilon_n}(x_n) ;$$

alors $\{2^{jn/2}\,\psi_\varepsilon(2^j(\cdot)-k)\ :\ j\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{Z}^n,\varepsilon\in E\}$ est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R}^n)$, que nous appellerons désormais "la" base des *splines tensoriels de degré m.*

Le Théorème 4 s'applique évidemment à cette base: pour $p \geq 1$, c'est une base inconditionnelle de $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$, dès que s appartient à l'intervalle $]-m, +m[$. Nous allons voir que cet intervalle peut être remplacé par $]-m-1/p', m+1/p[$; le résultat est d'autant plus intéressant qu'il est optimal:

Théorème 5. *La conclusion du Théorème 4 est vraie pour la base des splines tensoriels de degré m, pourvu que s vérifie les inégalités*

i) $-m - 1/p' < s < m + 1/p\,,$ *pour* $p \geq 1\,,$

ii) $-m + n(2/p - 1) - 1/p < s < m + 1\,,$ *pour* $p < 1\,.$

Pour $p, q \in [1, +\infty[$, ce résultat est optimal, en effet ψ_ε n'appartient ni à $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$, pour $s \geq m + 1/p$, ni au dual de $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ -pour $s < -m - 1/p'$ ou pour $s = -m - 1/p'$ et $q > 1$.

PREUVE. 1) LE CAS $n = 1$. La fonction ψ_1 satisfait encore les inégalités (14) et (15) (avec $r = m$ et $n = 1$); le point nouveau, c'est l'estimation

$$\|\Delta_j \psi_1\|_{\mathcal{E}_p} \leq C\, 2^{-j(m+1/p)}\,, \qquad j \geq 0\,. \tag{31}$$

En combinant (31), (14) et les Théorèmes 1, 2 et 3, on obtiendra aisément la conclusion annoncée.

Pour obtenir (31), on commence par prouver

$$\|\Delta_j \psi_1\|_p \leq C\, 2^{-j(m+1/p)}\,, \qquad j \in \mathbb{Z}\,. \tag{32}$$

L'inégalité (32) signifie encore $\psi_1 \in \dot{B}_p^{m+1/p,\infty}$; il nous suffira donc de prouver

$$\psi_1^{(m+1)} \in \dot{B}_p^{1/p-1,\infty}\ ;$$

or on a $\psi_1^{(m+1)}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\, \delta(x-k)$, où la suite $\{a_k\}$ est à décroissance exponentielle, et il est facile de vérifier que la mesure de Dirac δ appartient à $\dot{B}_p^{1/p-1,\infty}$.

(32) implique (31), immédiatement pour $p \leq 1$, par interpolation avec le cas $p = +\infty$ pour $p > 1$.

2) LE CAS $n > 1$. La décomposition de Littlewood-Paley usuelle, définie à partir de la fonction radiale λ, est mal adaptée aux estimations de produits tensoriels. Aussi allons-nous substituer à la fonction λ une suite

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de fonctions qui seront elles-mêmes des produits tensoriels de fonctions d'une seule variable.

Voici les détails de la construction: les fonctions $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ vérifient:

i) $\operatorname{supp} \widehat{u} = \{\xi \in \mathbb{R} : \ 1/\sqrt{n} \leq |\xi| \leq 3\}$, et $\widehat{u}(\xi)$ ne s'annule pas pour $1/\sqrt{n} < |\xi| < 3$.

ii) $\operatorname{supp} \widehat{v} = \{\xi \in \mathbb{R} : \ |\xi| \leq 3\}$, et $\widehat{v}(\xi)$ ne s'annule pas pour $|\xi| < 3$.

On pose

$$\lambda_k(x) = u(x_k) \prod_{l \neq k} v(x_l),$$

ce qui nous donne

i) $\operatorname{supp} \widehat{\lambda_k} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : \ 1/\sqrt{n} \leq |\xi| \leq 3\sqrt{n}\}$,

ii) $\sum_{k=1}^{n} |\widehat{\lambda_k}(\xi)| > 0$, pour $1 < |\xi| < 3$.

Sous ces conditions, on montre classiquement (voir [P], par exemple) que la "norme" $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ est équivalente à

$$\sum_{k=1}^{n} \|\{2^{js} \|\Delta_{j,k} f\|_p\}_{j \in \mathbb{Z}}\|_{\ell^q},$$

où les opérateurs $\Delta_{j,k}$ sont définis par

$$(\Delta_{j,k} f)\widehat{\ }(\xi) = \widehat{\lambda_k}(2^{-j}\xi)\widehat{f}(\xi).$$

Nous allons vérifier successivement

$$\|\Delta_{j,k} \psi_\varepsilon\|_p \leq C\, 2^{-j(m+1/p)}, \qquad j \geq 0, \tag{33}$$

$$\|\Delta_{j,k} \psi_\varepsilon\|_p \leq C\, 2^{j(m+1-n(1/p-1)_+)}, \qquad j < 0, \tag{34}$$

$$\|\Delta_{j,k} \psi_\varepsilon\|_{\mathcal{E}_\infty} \leq C\, 2^{-jm}, \qquad j \geq 0, \tag{35}$$

$$\|\Delta_{j,k} \psi_\varepsilon\|_{\mathcal{E}_\infty} \leq C\, 2^{j(m+1)}, \qquad j < 0. \tag{36}$$

Il en résultera

$$\|\Delta_{j,k} \psi_\varepsilon\|_{\mathcal{E}_p} \leq C\, 2^{-j(m+1/p)}, \qquad j \geq 0,$$

$$\|\Delta_{j,k} \psi_\varepsilon\|_{\mathcal{E}_{p'}} \leq C\, 2^{j(m+1)}, \qquad j < 0,\ p \geq 1,$$

et la démonstration du Théorème 5 sera achevée.

Nous prouverons (33)-(36) pour $k = 1$, ce cas étant entièrement typique. Il sera commode de considérer les opérateurs 1-dimensionnels U_j, V_j tels que

$$\widehat{U_j f}(\xi) = \widehat{u}(2^{-j}\xi)\,\widehat{f}(\xi)\,, \qquad \widehat{V_j f}(\xi) = \widehat{v}(2^{-j}\xi)\,\widehat{f}(\xi)\,,$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. Il vient alors

$$\Delta_{j,1}\psi_\varepsilon(x) = U_j\psi_{\varepsilon_1}(x_1)\,V_j\psi_{\varepsilon_2}(x_2)\cdots V_j\psi_{\varepsilon_n}(x_n)\,,$$

d'où

$$\|\Delta_{j,1}\psi_\varepsilon\|_p = \|U_j\psi_{\varepsilon_1}\|_p\,\|V_j\psi_{\varepsilon_2}\|_p\cdots\|V_j\psi_{\varepsilon_n}\|_p\,.$$

Les estimations (33) et (34) résulteront alors de

$$(37)\qquad \|U_j\psi_k\|_p \le C\,2^{-j(m+1/p)}\,, \qquad j \ge 0,\ k = 0,1\,,$$

$$(38)\qquad \|V_j\psi_k\|_p \le C\,, \qquad j \ge 0,\ k = 0,1\,,$$

$$(39)\qquad \|U_j\psi_1\|_p + \|V_j\psi_1\|_p \le C\,2^{j(m+1-(1/p-1)_+)}\,, \qquad j < 0\,,$$

$$(40)\qquad \|U_j\psi_0\|_p + \|V_j\psi_0\|_p \le C\,2^{-j(1/p-1)_+}\,, \qquad j < 0\,.$$

(37) est essentiellement l'estimation (31) -la fonction d'échelle ψ_0 vérifie également (31), car cette estimation n'utilise que les propriétés (26), (27) et (28). Pour prouver (38), on imite la démonstration de (16): il vient

$$|V_j\psi_k(x)| \le C_N\,(1+|x|)^{-N}\,,$$

d'où le résultat, en faisant $N > n/p$ (pour $p \ge 1$, (38) est aussi une conséquence immédiate de l'inégalité de Young: $\|V_j\psi_k\|_p \le \|v\|_1\,\|\psi_k\|_p$).

L'inégalité (39) est une version unidimensionnelle de (14) -on notera que, la preuve de (14) n'utilisant aucune propriété d'oscillation de la fonction λ, rien n'empêche de remplacer l'opérateur U_j par l'opérateur V_j. (40) s'obtient en faisant $m = -1$ dans l'estimation (39), puisque la fonction d'échelle ψ_0 n'a pas *a priori* de moment nul.

Pour démontrer les estimations (35) et (36), on note l'inégalité

$$\|\Delta_{j,1}\psi_\varepsilon\|_{\mathcal{E}_\infty} \le \|U_j\psi_{\varepsilon_1}\|_{\mathcal{E}_\infty}\,\|V_j\psi_{\varepsilon_2}\|_{\mathcal{E}_\infty}\cdots\|V_j\psi_{\varepsilon_n}\|_{\mathcal{E}_\infty}\ ;$$

on est alors ramené à prouver les estimations

(41) $$\|U_j\psi_k\|_{\mathcal{E}_\infty} \le C\,2^{-jm}\,, \qquad j \ge 0,\ k = 0,1\,,$$

(42) $$\|V_j\psi_k\|_{\mathcal{E}_\infty} \le C\,, \qquad j \ge 0,\ k = 0,1\,,$$

(43) $$\|U_j\psi_1\|_{\mathcal{E}_\infty} + \|V_j\psi_1\|_{\mathcal{E}_\infty} \le C\,2^{j(m+1)}\,, \qquad j < 0\,,$$

(44) $$\|U_j\psi_0\|_{\mathcal{E}_\infty} + \|V_j\psi_0\|_{\mathcal{E}_\infty} \le C\,, \qquad j < 0\,.$$

(41) et (43) sont des versions unidimensionnelles de (15) et (14), respectivement, alors que (42) et (44) sont des conséquences immédiates de $\psi_k \in \mathcal{E}_\infty$ $(k = 0,1)$.

3) OPTIMALITÉ. Nous allons prouver que ψ_ε n'appartient pas $\dot{B}_p^{s,q}$, pour $s > m + 1/p$ ou pour $s = m + 1/p$ et $q < +\infty$. Cela entraînera l'optimalité de la borne $m + 1/p$ et, par dualité, celle de la borne $-m - 1/p'$.

Le cas $\varepsilon = (1,0,\dots,0)$ est entièrement typique et nous montrerons, en fait, que la dérivée $\partial_1^{m+1}\psi_{(1,0,\dots,0)}$ n'appartient à $\dot{B}_p^{s,q}$ ni pour $s > 1/p - 1$, ni pour $s = 1/p - 1$ et $q < +\infty$.

Introduisons une fonction $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, portée par l'intervalle $[-1/2, 1/2]$, telle que
$$\int \theta(x)\,x^\alpha\,dx = 0\,,$$
pour $0 \le \alpha \le [s] + 1$, puis $\kappa \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\int \kappa(x)\,dx = 1$; posons
$$\rho(x) = \theta(x_1)\,\kappa(x_2)\cdots\kappa(x_n)\,,$$
$\rho_j(x) = 2^{jn}\rho(2^jx)$, $\theta_j(x) = 2^j\,\theta(2^jx)$ et de même pour κ_j. On a $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et
$$\int \rho(x)\,x^\alpha\,dx = 0\,,$$
pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \le [s]+1$, de sorte que $\partial_1^{m+1}\psi_{(1,0,\dots,0)} \in \dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ entraînerait

(45) $$\{2^{js}\,\|\rho_j * \partial_1^{m+1}\psi_{(1,0,\dots,0)}\|_p\}_{j\in\mathbb{Z}} \in \ell^q$$

(voir [P, Chapitre 8]). Or
$$\rho_j * \partial_1^{m+1}\psi_{(1,0,\dots,0)} = (\theta_j * \psi_1^{(m+1)}) \otimes (\kappa_j * \psi_0) \otimes \cdots \otimes (\kappa_j * \psi_0)\,,$$

ce qui donne

$$\|\rho_j * \partial_1^{m+1}\psi_{(1,0,\ldots,0)}\|_p = \|\theta_j * \psi_1^{(m+1)}\|_p \, \|\kappa_j * \psi_0\|_p^{n-1} \, .$$

Par construction de ψ_1, on a

$$\psi_1^{(m+1)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \, \delta(x-k)$$

et, quitte à translater ψ_1, on peut supposer $a_0 \neq 0$; on a alors, pour $j \geq 0$,

$$\theta_j * \psi_1^{(m+1)} = a_0 \, \theta_j(x) \, ,$$

ce qui donne

$$\|\theta_j * \psi_1^{(m+1)}\|_p = 2^{j(1-1/p)} \, |a_0| \, \|\theta\|_p \ ;$$

en outre $\|\kappa_j * \psi_0\|_p$ tend vers $\|\psi_0\|_p$ quand $j \to +\infty$; finalement il existe une constante $c > 0$ telle que, pour j assez grand

$$\|\rho_j * \partial_1^{m+1}\psi_{(1,0,\ldots,0)}\|_p \geq c \, 2^{j(1-1/p)} \, ,$$

mais cette estimation est incompatible avec (45).

8. Les ondelettes de Mallat et Daubechies.

Rappelons l'essentiel de la construction de ces ondelettes dans $L^2(\mathbb{R})$.

On part d'une fonction m, de classe C^∞, 2π-périodique, telle que $m(0) = 1$ et $|m(\xi)|^2 + |m(\xi+\pi)|^2 = 1$, pour tout réel ξ, ce qui conduit à la factorisation

$$m(\xi) = A(\xi) \, \cos^N \frac{\xi}{2} \, , \tag{46}$$

où A est une fonction de classe C^∞, 2π-périodique, et N un entier positif. On définit alors la transformée de Fourier de la fonction d'échelle φ par le produit infini

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \prod_{j\geq 1} m(2^{-j}\xi) \tag{47}$$

et l'ondelette ψ par la formule usuelle:

$$\widehat{\psi}(\xi) = e^{-i\xi/2}\,\overline{m}\big(\frac{\xi}{2}+\pi\big)\,\widehat{\varphi}\big(\frac{\xi}{2}\big)\,. \tag{48}$$

Une ultime condition sur m -mise en évidence par A. Cohen [CO]- garantit que $\{2^{j/2}\,\psi(2^j(\cdot\,)-k)\ :\ j\in\mathbb{Z},\, k\in\mathbb{Z}\}$ est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$. Nous souhaitons savoir s'il s'agit également d'une base inconditionnelle de $\dot{B}_2^{s,q}(\mathbb{R})$.

Théorème 6. *Soit* $\{2^{j/2}\,\psi(2^j(\cdot\,)-k)\ :\ j\in\mathbb{Z},\, k\in\mathbb{Z}\}$ *une base orthonormée de* $L^2(\mathbb{R})$ *obtenue suivant les formules* (46), (47) *et* (48). *On suppose* $\gamma=\log_2\|A\|_\infty<N-1/2$. *Alors* $\{2^{j/2}\,\psi(2^j(\cdot\,)-k)\ :\ j\in\mathbb{Z},\, k\in\mathbb{Z}\}$ *est une base inconditionnelle de* $\dot{B}_2^{s,q}(\mathbb{R})$ *pour*

$$|s|<N-\gamma-\frac{1}{2}\,.$$

On a, plus précisément, l'équivalence de normes (1) *pour* $p=2$, $n=1$, $q\in\,]0,+\infty]$.

PREUVE. La factorisation (46) nous donne

$$\widehat{\psi}(\xi)=O(|\xi|^N)\,,\qquad |\xi|\to 0\,,$$

et le lemme de Daubechies ([D, Lemme 3.2])

$$\widehat{\psi}(\xi)=O(|\xi|^{\gamma-N})\,,\qquad |\xi|\to +\infty\,.$$

Nous allons voir que ces deux estimations conduisent à

$$\psi\in\dot{B}^{\pm s,\inf\{q,1\}}(\mathcal{E}_2)\,.$$

On utilisera la description de $\mathcal{E}_2$ fournie par la Proposition 2, ce qui nous amène à estimer les fonctions 2π-périodiques

$$A_j(\xi)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{\Delta_j\psi}(\xi+2k\pi)|^2\,. \tag{49}$$

Le lemme suivant nous permet de conclure:

Lemme 4. *Soit $\alpha > 0$, $\beta > 1/2$ et ψ une fonction telle que*

$$\widehat{\psi}(\xi) = O(|\xi|^{\alpha}), \qquad |\xi| \to 0,$$

et

$$\widehat{\psi}(\xi) = O(|\xi|^{-\beta}), \qquad |\xi| \to +\infty.$$

Il existe alors une constante $C = C(\psi) > 0$ telle que les fonctions 2π-périodiques A_j définies suivant (49) *vérifient*

$$\|A_j\|_\infty \leq C\, 4^{j\alpha}, \qquad j \leq 0,$$

$$\|A_j\|_\infty \leq C\, 2^{j(1-2\beta)}, \qquad j > 0.$$

PREUVE DU LEMME. Il nous suffit de considérer $\xi \in [0, 2\pi]$. On écrit d'abord

$$A_j(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(\xi + 2k\pi)|^2\, |\widehat{\lambda}(2^{-j}(\xi + 2k\pi))|^2 .$$

Supposons $j \leq 0$; par hypothèse sur le support de $\widehat{\lambda}$, on a $\widehat{\lambda}(2^{-j}(\xi + 2k\pi)) = 0$ pour tout $k \neq 0$, d'où

$$A_j(\xi) = |\widehat{\psi}(\xi)\, \widehat{\lambda}(2^{-j}\xi)|^2 \leq C\, 4^{j\alpha} .$$

Supposons $j \geq 4$; alors $\widehat{\lambda}(2^{-j}(\xi + 2k\pi))$ est non nul seulement si l'on a $k \geq 2^{j-2}/\pi$, auquel cas $\xi + 2k\pi$ est de l'ordre de grandeur de k; cela nous donne

$$A_j(\xi) \leq C \sum_{k \geq 2^{j-2}/\pi} k^{-2\beta} \leq C\, 2^{j(1-2\beta)} .$$

Nous laissons le lecteur se convaincre que A_1, A_2 et A_3 sont des fonctions bornées ...

9. Conclusion et remarques.

1) Nous avons choisi de considérer les espaces de Besov *homogènes* car ils conduisent aux caractérisations les plus simples et les plus naturelles en termes d'ondelettes. Que peut-on dire à propos des espaces de Besov *inhomogènes*? Le point de départ est la décomposition

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} a_k \, \varphi(x-k) + \sum_{\varepsilon} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \sum_{j=0}^{\infty} c_{\varepsilon,j,k} \, 2^{j(n/p-s)} \, \psi_\varepsilon(2^j x - k) \, ,$$

où φ est une fonction d'échelle et $\{\psi_\varepsilon\}$ la famille finie d'ondelettes associée à φ. Le résultat escompté est l'équivalence de normes

$$\|f\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} \approx \Big(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |a_k|^p \Big)^{1/p} + \sum_{\varepsilon} \Big(\sum_{j \geq 0} \Big(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |c_{\varepsilon,j,k}|^p \Big)^{q/p} \Big)^{1/q} .$$

On peut l'obtenir de deux façons. La première consiste à reprendre pas -à -pas la méthode utilisée pour les espaces homogènes. La seconde -inapplicable au cas $s = 0$- consiste à utiliser directement les résultats "homogènes", grâce aux relations

$$B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n) = \dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n) \cap L^p \, , \qquad s > 0 \, ,$$

$$B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n) = \dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n) + L^p \, , \qquad s < 0 \, .$$

Le lecteur intéressé par cette question trouvera sans peine les bonnes conditions.

2) Nous avons souligné l'optimalité du Théorème 5. Il y a tout lieu de penser qu'il en est de même pour le Théorème de Meyer (Théorème 4); autrement dit, pour un réel positif r donné, on peut *conjecturer l'existence d'une base orthonormée d'ondelettes r-régulières qui ne soit une base de $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ ni pour $s \geq r$, ni pour $s \leq -r$.*

3) Nos résultats ne sont vraisemblablement pas optimaux dans le cas $p < 1$. En ce qui concerne les splines de degré m, DeVore et Popov [DVP] obtiennent l'intervalle de validité $0 < s < m+1$, alors que notre borne inférieure, $-m + n(2/p-1) - 1/p$ n'est pas toujours négative. On ignore toutefois si les espaces de Besov de DeVore et Popov coïncident avec ceux de Peetre et Triebel pour $s \leq n(1/p-1)_+$ (voir [TR, Théorème 2.6.1]).

References.

[A] Auscher, P., Thèse de Doctorat. Université Paris IX-Dauphine (1989).

[B] Bourdaud, G., Réalisations des espaces de Besov homogènes. *Arkiv Math.* **26** (1988), 41-54.

[CI] Ciesielski, Z., Constructive function theory and spline systems. *Studia Math.* **53** (1975), 277-302.

[CDF] Cohen, A., Daubechies, I., Feauveau, J. C., Biorthogonal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure Appl. Math.* **45** (1992), 485-560.

[CO] Cohen, A., Ondelettes, analyses multirésolution et filtres miroirs en quadrature. *Ann. Inst. H. Poincaré, Analyse Non linéaire* **7** (1990), 439-459.

[D] Daubechies, I., Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure Appl. Math.* **41** (1988), 909-996.

[DVP] Devore, R., Popov, V. A., Interpolation of Besov spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* **305** (1988), 397-414.

[FJ1] Frazier, M., Jawerth; B., Decomposition of Besov spaces. *Indiana Univ. Math. J.* **84** (1985), 777-799.

[FJ2] Frazier, M., Jawerth, B., A discrete transform and applications to distribution spaces. *J. Funct. Anal.* **93** (1990), 34-170.

[JM] Jia, R. Q., Micchelli C. A., Using the refinement equations for the construction of pre-wavelets II: Powers of two. *Curves and surfaces.* P. J. Laurent, A. Le Méhauté and L. L.Schumaker (Eds), 209-246. Academic Press, 1991.

[MA] Mallat, S., Multiresolution approximation and wavelets orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$. *Trans. Amer. Math. Soc.* **315** (1989), 69-87.

[ME] Meyer, Y., *Ondelettes et Opérateurs, I.* Hermann, 1990.

[O] Oswald, P., On the degree of non linear spline approximation in Besov-Sobolev spaces. *J. Approx. Theory* **61** (1990), 131-157.

[P] Peetre, J., *New thoughts on Besov spaces.* Duke Univ. Math. Series I, 1976.

[S] Sickel, W., Spline representation of functions in Besov-Triebel-Lizorkin spaces. *Forum Math.* **2** (1990), 451-475.

[TA] Tararykova, T. V., *Inequalities for integral and discrete norms of entire functions of exponential type.* Summer School on "Function Spaces, Differential Operators and Non Linear Analysis". Teubner, Leipzig, 1993.

[TR] Triebel, H., *Theory of Function Spaces II.* Birkhäuser, 1992.

Recibido: 20 de noviembre de 1.993
Revisado: 16 de abril de 1.994

Gérard Bourdaud
Université Paris VII
U.F.R. de Mathématiques
2 place Jussieu
75251 Paris Cedex 05, FRANCE
bourdaud@mathp7.jussieu.fr

and

Université Paris VI
Equipe d'Analyse, URA 754 du CNRS
4 place Jussieu
75252 Paris Cedex 05, FRANCE