

Générateurs infinitésimaux et propriétés géométriques pour certaines équations complètement non linéaires

Rabah Tahraoui

Introduction.

Nous nous proposons, dans ce travail, d'étudier certaines propriétés géométriques telles que diverses symétries et diverses concavités radiales, directionnelles etc . . . , pour des équations complètement non linéaires, par exemple, du type

$$(*) \quad \begin{cases} F(x, u, \nabla u, \Delta u) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u > 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Nous nous attacherons en premier lieu à mettre en évidence des hypothèses aussi simples que possibles, applicables à des situations concrètes pour des solutions classiques. Dans l'étude de certains problèmes de contrôle optimal, les données ne sont pas suffisamment régulières pour permettre l'obtention de solutions classiques. Aussi notre deuxième souci sera d'adapter notre méthode à des problèmes où interviennent des données discontinues. Notre exemple modèle sera le suivant: étudier les points critiques de la solution de

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) & \text{dans } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} & \text{à préciser,} \end{cases}$$

où $f(x) \in \{\alpha, \beta\}$ presque pour tout $x \in \Omega$. Ce type de question à données discontinues ne semble pas avoir été abordé. Notre méthode, comme beaucoup d'autres méthodes, nécessite l'utilisation du principe du maximum [1], [2], combinée à une idée qui nous semble nouvelle dans ce cadre: l'utilisation de générateurs infinitésimaux, de leurs itérés et de leurs commutateurs avec les opérateurs différentiels intervenant dans l'équation (*).

Le sujet a connu des développements importants depuis les travaux de [3] et [4] utilisant une méthode efficace: la méthode des plans mobiles [24] doublée du principe du maximum; rappelons que dans [3] et [4] on trouve des résultats de symétries [4], de symétries radiales [3], [4], et de localisation des points critiques [4]. Pour des équations moins générales que (*), l'étude de la concavité -ou quasiconcavité- a également connu un développement important depuis le "principe du maximum de concavité" de N. Korevaar [5], [6], appliqué aux surfaces capillaires de \mathbb{R}^{n+1} . Par une approche différente, Caffarelli et Spruck [7] ont également abordé diverses questions de convexité dont un résultat classique de [8] concernant la première fonction propre de Δ . Kenmington [9] et Kawhol [10] ont obtenu divers résultats sur le sujet en utilisant le principe de N. Korevaar. D'autres méthodes intéressantes ont été introduites par divers auteurs. Citons à titre d'exemples les résultats de [11], [12], [13], [14]. Un point commun à la plupart de ces méthodes est l'utilisation de solutions classiques. Enfin signalons que la liste de travaux cités ci-dessus ne prétend pas être exhaustive, et que nous renvoyons à [10] pour une liste plus complète.

I. Notations et position du problème.

On se donne un ouvert Ω borné (non nécessaire) régulier dont les propriétés géométriques seront précisées plus loin, et une fonction $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \ni (x, r, t, s) \longrightarrow F(x, r, t, s) \in \mathbb{R}$ de classe C^1 ou C^2 , selon le besoin, par rapport à tous ses arguments $x = (x_1, \dots, x_n)$, $r, t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ et s . On suppose que les dérivées de F vérifient les hypothèses suivantes:

$$(1.1) \quad \frac{\partial F}{\partial s} \geq \gamma_0 > 0, \quad F(x, r, t, 0) \geq 0, \quad \left| \frac{\partial F}{\partial t} \right| \leq K.$$

Dans toute la suite, pour ne pas alourdir le texte, nous ne considérerons que l'opérateur Δ ou son itéré Δ^2 : il est possible d'utiliser

des opérateurs du type

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

en s'entourant de quelques précautions.

Nous dirons que Ω est fortement étoilé par rapport à x_0 si et seulement si Ω est étoilé par rapport à x_0 et $(\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \vec{\nu} > 0$ pour tout $x \in \partial\Omega$, $\vec{\nu}$ étant la normale en x à $\partial\Omega$, orientée extérieurement.

1) Objet de ce travail: Etant donnée une solution classique u des équations

$$(1.2) \quad \begin{cases} F(x, u, \nabla u, \Delta u) = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u > 0 \quad \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

posées dans un ouvert Ω possédant certaines symétries ou autres propriétés géométriques, il s'agit d'étudier l'incidence de cette géométrie sur celle de u : propriété d'être étoilé, symétrique par rapport à un hyperplan, radialement concave, concave dans une direction etc... Bien entendu nous nous fixons pour but de dégager des hypothèses aussi simples que possible sur F . Pour mener cette étude nous aurons besoin de la notion suivante:

2) Générateur infinitésimal d'une propriété géométrique: On se donne une famille d'opérateurs $S(t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continus tels que

$$(P) \quad \begin{cases} S(0) = I = \text{identité}, \\ S(t)\Omega \subset \Omega, \quad \text{pour tout } t \neq 0, \end{cases}$$

où t appartient à une partie adéquate I de \mathbb{R} .

Nous dirons que Ω possède la propriété géométrique (P). On se donne une fonction dérivable sur Ω et pour tout $x \in \Omega$ on pose

$$(1.3) \quad Gu = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(S(t)x) - u(x)}{t};$$

il est clair que G est un opérateur linéaire ne dépendant que de S .

Définition. On appelle *générateur infinitésimal de la propriété (P) de Ω* (ou plus simplement de Ω) l'opérateur G défini par (1.3).

Si $S(\lambda) = (s_{ij}(\lambda))$ est une famille de matrices telles que $S(0) = I$ et $S(\lambda)\Omega \subset \Omega$, alors

$$G = {}^T x \cdot \frac{dS}{d\lambda}(0) \cdot \nabla$$

où

$${}^T x = (x_1, \dots, x_n) \quad \text{et} \quad {}^T \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right).$$

Donnons quelques exemples de générateurs:

- i) dérivation radiale: Ω est étoilé, $G = x \cdot \nabla = \sum_i x_i \partial/\partial x_i$,
- ii) dérivation perpendiculairement à un hyperplan (π) qui est orthogonal à un vecteur de base e_{i_0} : $G = x_{i_0} \partial/\partial x_{i_0}$,
- iii) dérivation dans une direction d : Ω est convexe,

$$G = d \cdot \nabla = \sum_i d_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

- iv) la dérivation angulaire: pour $n = 2$, Ω étant un secteur circulaire,

$$G = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}.$$

Deux questions naturelles motivant notre travail se posent:

- 1) que doit vérifier F pour que la solution u de (1.2) vérifie

$$u(S(t)x) - u(x) \geq 0, \quad \text{pour tout } x \in \Omega, \text{ pour tout } t \in I?$$

- 2) peut-on répondre à la même question pour avoir

$$u(S^2(t)x) - 2u(S(t)x) + u(x) \geq 0, \quad \text{pour tout } x \in \Omega, \text{ pour tout } t \in I?$$

Ceci fait apparaître l'idée d'itérer les opérateurs définis précédemment *i.e.* d'utiliser les itérés de générateurs et de donner leur signification. Cette idée est nouvelle.

3) Quelques itérés de générateurs et propriétés géométriques: Pour la convexité radiale, $G^2 = (x \cdot \nabla)^2$; pour la convexité perpendiculairement à un hyperplan (π) , $G^2 = (x_{i_0} \partial/\partial x_{i_0})^2$; le générateur de la convexité dans une direction d est

$$G^2 = (d \cdot \nabla)^2 = \sum_{ij} d_i d_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \text{etc ...}$$

4) Commutateurs d'opérateurs: Précisons ici que les commutateurs de ces générateurs et des opérateurs différentiels intervenant dans (1.2) jouent un rôle crucial: de la facilité de leur calcul et de leur simplicité dépend la finalité de la réponse. Dans le cas de l'opérateur Δ on a

$$(1.4) \quad \begin{cases} \Delta(x \cdot \nabla) - x \cdot \nabla(\Delta) = 2 \Delta, \\ (x \cdot \nabla)^2 \Delta - \Delta(x \cdot \nabla)^2 = 4 \Delta - 4 \Delta(x \cdot \nabla), \\ \Delta(d \cdot \nabla)^2 - (d \cdot \nabla)^2 \Delta = 0. \end{cases}$$

C'est grâce à ces relations que l'on pourra montrer que les fonctions auxiliaires $v = x \cdot \nabla u$, $w_1 = (x \cdot \nabla)^2 u$ et $w_2 = (d \cdot \nabla)^2 u$ satisfont des équations, exploitables, pour lesquelles a lieu le principe du maximum. On rencontre, dans la littérature, d'autres fonctions auxiliaires associées à la géométrie de Ω , comme par exemple dans [2] avec $v = |\nabla u|^2$ et dans [6] avec à la place de w_2 la fonction C définie sur $\Omega \times \Omega$ par

$$C(x, y) = u\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{1}{2} u(x) - \frac{1}{2} u(y).$$

Il nous semble que ces deux types de fonctions associées à la géométrie de Ω ne soient pas adaptées aux équations du type (*):

i) par exemple, partant de

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u), & \text{dans } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

l'équation satisfaite par $v = |\nabla u|^2$ est

$$-\Delta(|\nabla u|^2) = -2 \sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial u}(x, u) |\nabla u|^2 + \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, u).$$

La présence, dans cette équation, du terme

$$\sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, u)$$

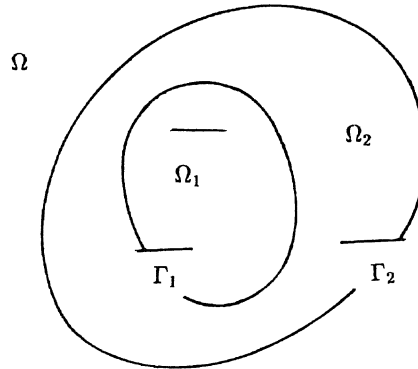
ne permet pas de l'exploiter par application du principe du maximum.

ii) La méthode utilisée dans [6], [9], [10], utilisant $C(x, y)$ ne permet pas de traiter des équations du type (*) du fait que $C(x, y)$ est une fonction de $2 \times n$ variables définie sur $\Omega \times \Omega \subset (\mathbb{R}^n)^2$ (cf. preuve dans [10]). L'idée que nous présentons ici a l'avantage d'être systématique pour établir des équations convenables pour l'application du principe du maximum.

II. Résultats pour équations complètement non linéaires à données régulières.

A. Localisation des points critiques.

Nous nous proposons de mettre en œuvre cette idée générale dans un cadre simple: considérons par exemple $x \cdot \nabla$ sur Ω un ouvert régulier tel que $\Omega = \Omega_2 \setminus \bar{\Omega}_1$ où Ω_1 et Ω_2 sont fortement étoilés par rapport à un même point, par exemple, 0. On dira que Ω est "un 2-connexe fortement étoilé". Dans Ω ,



on suppose que les équations

$$(2.1) \quad \begin{cases} F(x, u, \nabla u, \Delta u) = 0, & u > 0, & \text{dans } \Omega \\ u|_{\Gamma_1} = c_1, & u|_{\Gamma_2} = c_2, & c_1 > c_2 \geq 0. \end{cases}$$

possèdent une solution $u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, et que F satisfait l'inégalité

$$(2.2) \quad x \cdot \frac{\partial F}{\partial x} - 2 \frac{\partial F}{\partial s} s - \frac{\partial F}{\partial t} \cdot t \leq 0, \quad \text{pour tout } (x, r, t, s).$$

Pour pouvoir appliquer le principe du maximum nous supposons que l'on a

$$(2.2.1) \quad -m \leq \frac{\partial F}{\partial r} \leq M(\Omega),$$

où m est une constante positive et $M(r)$ une constante positive convexe, cf. [1].

REMARQUE 2.1. L'opérateur $x \cdot \nabla$ associé à Ω étoilé intervient naturellement dans les identités de type Pohozaev [16].

Nous avons alors le résultat suivant:

Théorème 2.1. *On suppose F de classe C^1 vérifiant (1.1) et (2.2); et on suppose que (2.1) possède une solution $u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ satisfaisant: il existe, dans Ω , deux voisinages $\mathcal{V}(\Gamma_1)$ et $\mathcal{V}(\Gamma_2)$ tels que*

$$(2.3) \quad \begin{cases} c_1 = \sup\{u(x) : x \in \mathcal{V}(\Gamma_1)\}, \\ c_2 = \inf\{u(x) : x \in \mathcal{V}(\Gamma_2)\}. \end{cases}$$

Alors $c_1 = \sup\{u(x) : x \in \bar{\Omega}\}$, $c_2 = \inf\{u(x) : x \in \bar{\Omega}\}$ et les ensembles de niveau $E(t) = \{x \in \Omega : u(x) > t\}$ sont "des 2-connexes fortement étoilés", de plus u ne possède pas de point critique dans Ω .

DÉMONSTRATION. L'utilisation de la première relation (1.4) est essentielle. La fonction $v(x) = x \cdot \nabla u(x)$ vérifie au sens des distributions l'équation suivante

$$(2.4) \quad -\frac{\partial F}{\partial s} \Delta v - \frac{\partial F}{\partial t} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial r} v = x \cdot \frac{\partial F}{\partial x} - 2 \frac{\partial F}{\partial s} \Delta u - \frac{\partial F}{\partial t} \cdot \nabla u$$

où

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial s} &= \frac{\partial F}{\partial s}(x, u, \nabla u, \Delta u), & \frac{\partial F}{\partial r} &= \frac{\partial F}{\partial r}(x, u, \nabla u, \Delta u), \\ \frac{\partial F}{\partial t} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} &= \sum_i \frac{\partial F}{\partial t_i}(x, u, \nabla u, \Delta u) \frac{\partial v}{\partial x_i} \\ x \cdot \frac{\partial F}{\partial x} &= \sum_i x_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(x, u, \nabla u, \Delta u). \end{aligned}$$

D'après (1.1) u vérifie une équation du type

$$\begin{cases} -\Delta u = g, & g \geq 0, & \text{dans } \Omega, \\ u|_{\Gamma_i} = c_i, & i = 1, 2. \end{cases}$$

L'hypothèse (2.3) et le principe du maximum de Hopf entraînent que l'on a $v|_{\Gamma} = x \cdot \nabla u|_{\Gamma} < 0$. Comme l'équation (2.4) obéit au principe du maximum classique grâce aux hypothèses (2.2) et (1.1), il s'ensuit que l'on a $v(x) = x \cdot \nabla u(x) < 0$ dans $\bar{\Omega}$; ce qui prouve que u ne possède pas de point critique dans Ω et que pour tout t , $c_2 < t < c_1$ l'ensemble $\{x \in \Omega : u(x) > t\}$ est un 2-connexe.

REMARQUE 2.2. Nous montrerons plus loin (cf. Propositions 3.2 et 3.3) que l'hypothèse (2.3) est nécessaire *i.e.* que le résultat ne peut être vrai pour toutes constantes c_1 et c_2 telles que $c_2 < c_1$.

Application: équation du 4ème ordre et système. Supposons qu'il existe une fonction u régulière solution de l'équation

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f(x, \Delta u, u) & \text{dans } \Omega = \Omega_2 \setminus \bar{\Omega}_1, \\ u|_{\Gamma_1} = 0, \quad \Delta u|_{\Gamma_1} = 0, \\ u|_{\Gamma_2} = -1, \quad \Delta u|_{\Gamma_2} = 1, \end{cases}$$

où $f(x, t, r)$ est une fonction régulière, négative.

Posons

$$v = x \cdot \nabla u, \quad -\Delta u = \omega, \quad s = 2\omega + x \cdot \nabla \omega.$$

Un calcul élémentaire montre que ces fonctions vérifient les deux systèmes suivants

$$(S_1) \quad \begin{cases} -\Delta u = \omega, \\ u|_{\Gamma_1} = 0, \quad u|_{\Gamma_2} = -1, \\ -\Delta \omega = f(x, -\omega, u), \\ \omega|_{\Gamma_1} = 0, \quad \omega|_{\Gamma_2} = -1, \end{cases}$$

$$(S_2) \quad \begin{cases} -\Delta s = 4f + x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} - 2 \frac{\partial f}{\partial t} \omega + \frac{\partial f}{\partial r} \cdot v - \frac{\partial f}{\partial t} s, \\ -\Delta v = s, \end{cases}$$

où

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = \sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, -\omega, u), \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t}(x, -\omega, u),$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial r}(x, -\omega, u).$$

Le principe du maximum de Hopf appliqué à (S_1) entraîne que l'on

a

$$\frac{\partial u}{\partial \eta_2} \Big|_{\Gamma_2} < 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta_1} \Big|_{\Gamma_1} > 0,$$

où $\partial/\partial \eta_i$ représente la dérivée dans la direction η_i , normale extérieure à Γ_i . Comme Ω_1 et Ω_2 sont fortement étoilés par rapport à 0, la fonction $v(x) = x \cdot \nabla u$ possède une trace négative sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. De même la fonction $x \cdot \nabla \omega$ possède une trace négative sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Ainsi la trace de $s = 2\omega + x \cdot \nabla \omega$ est négative puisque ω est négatif par le principe du maximum classique.

Pour conclure positivement nous faisons les hypothèses suivantes sur la fonction f :

$$\begin{cases} 4f(x, -t, r) + x \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, -t, r) - 2t \frac{\partial f}{\partial t}(x, -t, r) \leq 0, \\ \frac{\partial f}{\partial r}(x, -t, r) \geq 0, \end{cases}$$

pour tout (x, t, r) . Nous sommes alors dans les conditions d'application du résultat de [19] concernant le principe du maximum des systèmes *i.e.* que l'on a

$$s < 0, \quad v < 0, \quad \text{dans } \Omega.$$

Ainsi u ne possède pas de points critiques dans $\Omega = \Omega_2 \setminus \bar{\Omega}_1$.

B. Concavité radiale, concavité perpendiculairement à un hyperplan, concavité, symétrie radiale partielle.

Dans cette section nous travaillons sous les hypothèses (1.1) et (2.2.1).

1) *Concavité radiale*: considérons le générateur $(x \cdot \nabla)^2$ associé à la propriété d'être étoilé de Ω . On pose $v = (x \cdot \nabla)^2 u$; pour simplifier

la présentation, on particularise l'équation (*) par

$$(2.4.1) \quad \begin{cases} -\Delta u = f(x, u), & u > 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

i.e. on prend $F(x, r, t, s) = s + f(x, r)$.

REMARQUE 2.2.1. Lorsque Ω est une boule de centre 0, pour toute fonction radiale u définie sur Ω , on a

$$(x \cdot \nabla)^2 u = \left(r \frac{d}{dr}\right)^2 u = r \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr}\right).$$

Si on suppose que $u \in C^4(\Omega)$, la fonction $v = (x \cdot \nabla)^2 u$ vérifie l'équation suivante, établie à l'aide de (1.4):

$$-\Delta v = A(x, u)(x \cdot \nabla u)^2 + B(x, u)(x \cdot \nabla u) + C(x, u),$$

où

$$\begin{aligned} A(x, r) &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(x, r), \\ B(x, r) &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(x, r) + x \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial r}(x, r) + 5 \frac{\partial f}{\partial r}(x, r), \\ C(x, r) &= 5x \frac{\partial f}{\partial x}(x, r) + x \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, r) \cdot x + 4f(x, r). \end{aligned}$$

On suppose que f vérifie les hypothèses suivantes:

$$(2.4.2) \quad \begin{aligned} A(x, r) &\leq 0, & C(x, r) &\leq 0, \\ B^2(x, r) &\leq 4A(x, r) \cdot C(x, r), & & \text{pour tout } (x, r). \end{aligned}$$

Théorème 2.1.1. *On suppose que u solution de (2.4.1) est C^4 , que f vérifie (2.4.2) et Ω fortement étoilé par rapport à 0. Alors la fonction concavité radiale $v = (x \cdot \nabla)^2 u$ ne peut atteindre son maximum à l'intérieur de Ω .*

La preuve de ce résultat est semblable à celle du Théorème 2.1. Signalons que, à notre connaissance, cette notion de concavité partielle ne semble pas avoir été abordée auparavant.

2) *Concavité*: On se donne Ω convexe. Ici la situation est plus complexe: on travaille avec une famille de générateurs de concavité *i.e.* on considère

$$(\alpha \times \nabla)^2 = \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j},$$

pour toute direction α de dérivation. On suppose que l'équation

$$(2.5) \quad \begin{cases} F(x, u, \nabla u, \Delta u) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u > 0, \end{cases}$$

possède une solution u .

Définition 2.1. *Pour toute direction α on pose*

$$\omega(\alpha, u) = \omega_\alpha = \omega = (\alpha \times \nabla)^2 u.$$

Nous appellerons $\omega(\alpha, u)$ fonction de concavité (ou convexité suivant le cas).

Nous allons chercher, à partir de (2.5), l'équation satisfaite par la famille de fonctions ω_α . Vu le commutateur correspondant (*cf.* (1.4)) les résultats sont, en définitive, simples.

On pose $G(x) = F(x, u(x), \nabla u(x), \Delta u(x))$. Nous utiliserons la notation classique suivante

$$\frac{\partial G(x)}{\partial x_i} = \frac{d}{dx_i} [F(x, u(x), \nabla u(x), \Delta u(x))]$$

ce qui donne

$$(\alpha \times \nabla)^2 G(x) = (\alpha \times D)^2 F(x, u(x), \nabla u(x), \Delta u(x))$$

où

$$\alpha \times D = \sum_i \alpha_i \frac{d}{dx_i}.$$

Pour simplifier, nous écrivons

$$(\alpha \times \nabla)^2 G = (\alpha \times D)^2 F.$$

Proposition 2.1.

$$(\alpha \times D)F = \alpha \cdot \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial r} (\alpha \times \nabla u) \\ + \frac{\partial F}{\partial t} \cdot \nabla(\alpha \times \nabla u) + \frac{\partial F}{\partial s} \Delta(\alpha \times \nabla u)$$

où

$$\alpha \cdot \frac{\partial F}{\partial x} = \sum_i \alpha_i \frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial F}{\partial t} \cdot \nabla = \sum_j \frac{\partial F}{\partial t_j} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

La preuve est élémentaire.

Proposition 2.2. *L'équation dérivée de (1), vérifiée par $\omega(\alpha, u) = \omega$ est*

$$-\frac{\partial F}{\partial s} \Delta \omega - \frac{\partial F}{\partial t} \cdot \nabla \omega - \frac{\partial F}{\partial r} \omega \\ = (\alpha, a, b, c)^t \cdot \text{Hess } F_{(x, u, \nabla u, \Delta u)} \cdot (\alpha, a, b, c)$$

où $\text{Hess } F_{(x, u, \nabla u, \Delta u)}$ est la matrice Hessienne de $F(x, r, t, s)$ évaluée au point $(x, u(x), \nabla u(x), \Delta u(x))$ et

$$a = \alpha \cdot \nabla u, \quad b = \nabla(\alpha \cdot \nabla u), \quad c = \Delta(\alpha \cdot \nabla u).$$

DÉMONSTRATION. $(\alpha \times D)^2 F = (\alpha \times D)(\alpha \times D)F$. On applique la proposition précédente aux différents termes de $(\alpha \times D)F$.

Théorème 2.2. *On suppose que u solution de (2.5) appartient à $C^4(\bar{\Omega})$ et $\text{Hess } H_{(x, r, t, s)}$ est négative. Alors pour toute direction α la fonction $\omega(\alpha, u)$ ne peut atteindre son maximum à l'intérieur de Ω .*

La preuve de ce résultat découle d'une version du principe du maximum classique donnée dans [1].

REMARQUES 2.3. 1) On peut remplacer l'opérateur Δ par tout opérateur $A = \sum a_{ij} \partial^2 / \partial x_i \partial x_j$ elliptique uniformément, à coefficients constants.

2) Si u est concave au voisinage du bord $\partial\Omega$ alors le théorème précédent dit que u est concave sur Ω .

REMARQUE 2.4. En réalité nous avons

$$(\alpha, a, b, c)^t \cdot \text{Hess } F_{(x, u, \nabla u, \Delta u)} \cdot (\alpha, a, b, c) = Q(x, u)(\alpha, \alpha),$$

où $Q(x, u)(\cdot, \cdot)$ est une forme quadratique dépendant de x et u . La condition optimale de validité du théorème est donc

$$Q(x, u)(\alpha, \alpha) \leq 0, \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{R}^n;$$

elle dépend a priori de la solution u . La condition du Théorème 2.2 retenue ci-dessus est suffisante.

Comparaison avec les résultats existants. Prenons l'exemple suivant

$$(2.6) \quad \begin{cases} F(x, r, t, s) = s + f(x, r), \\ -\Delta u = f(x, u) & \text{dans } \Omega, \quad f(x, r) \leq 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u < 0. \end{cases}$$

L'équation dérivée de (2.6) est

$$\begin{aligned} -\Delta\omega - \frac{\partial f}{\partial r} \omega &= {}^t\alpha \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \alpha + 2\alpha \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial r} \cdot (\alpha \cdot \nabla u) \\ &\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} (\alpha \cdot \nabla u)^2 \\ &= Q(x, u)(\alpha, \alpha). \end{aligned}$$

Posons pour tout $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$q_{ij}(x, u) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x, u) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial r}(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}.$$

Si la solution u de (2.6) vérifie la condition

$$(2.7) \quad \begin{cases} \text{la forme quadratique } Q = (q_{ij}(x, u)) \text{ est positive,} \\ \text{non identiquement nulle,} \end{cases}$$

le théorème précédent est valide *i.e.* la fonction de convexité $\omega(\alpha, u) = (\alpha \cdot \nabla)^2 u$ ne peut atteindre son minimum à l'intérieur de Ω .

Si on pose

$$R = \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \bar{\Omega}} \|\nabla u(x)\|,$$

une condition suffisante assurant (2.7) est

$$(2.8) \quad \begin{cases} \text{pour tout } (x, r, t) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^- \times B(0, R), \\ \text{la forme quadratique } Q = (q_{ij}(x, r, t))_{ij} \text{ est positive} \end{cases}$$

avec

$$q_{ij}(x, r, t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x, r) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial r}(x, r) t_j + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(x, r) t_i t_j.$$

Le premier résultat de ce type est dû à N. Korevaar ([5], [6]) qui a introduit un principe de concavité en définissant sur $\Omega \times \Omega$ la fonction de concavité suivante

$$C(x, y) = u\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{1}{2}u(x) - \frac{1}{2}u(y).$$

Cette idée a ensuite été utilisée par divers auteurs, *cf.* [10], [9] par exemple.

Cette fonction ne peut atteindre un maximum positif dans $\Omega \times \Omega$ si $-f(x, r)$ est strictement croissante par rapport à r et si

$$(2.9) \quad -\frac{1}{f(x, r)} \text{ est convexe en } (x, r).$$

Notre résultat ne nécessite pas la stricte croissance par rapport à r . Ce qui autorise, par exemple, des équations de la forme $f(x, \nabla u) = -\Delta u$, exclues dans [9]. La comparaison de (2.8) et (2.9) semble difficile. Cependant il convient de remarquer que si $-f(x, r)$ est concave alors (2.8) et (2.9) sont vérifiées simultanément. Enfin la méthode utilisée ne semble pas s'adapter aux équations complètement non linéaires, *cf.* la preuve dans [10, p. 116].

REMARQUE 2.5. Pour les équations du type (2.6) le résultat le plus général semble appartenir à [9]; la preuve de ce résultat a été améliorée par [10]; et c'est à cette dernière que l'on se réfère.

REMARQUE 2.6. Lorsque $f(x, r)$ n'est pas strictement monotone par rapport à r , dans [9] A. U. Kennington s'y ramène en faisant le changement de fonction puissance $v = u^\alpha$, $\alpha > 0$. En opérant de la sorte la méthode de Korevaar-Kennington-Kawohl perd de l'information dans le cas des solutions régulières comme le montrent les exemples qui suivent.

EXEMPLE 1. $\Omega =$ Boule unité de \mathbb{R}^2 .

$$\begin{cases} -\Delta u = -16k(x^2 + y^2) + 1, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \quad 0 < k < \frac{1}{32}. \end{cases}$$

La solution $u(x, y) = -k(1 - (x^2 + y^2)) + (1 - (x^2 + y^2))/2$ est concave. La méthode citée ci-dessus que nous désignerons par commodité par méthode K donne que \sqrt{u} est concave.

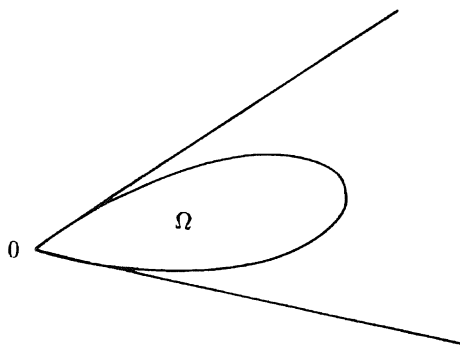
EXEMPLE 2. $\Omega =$ Ellipse de grand axe porté par l'axe \vec{Ox} et d'excentricité $1/2$.

$$\begin{cases} -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 1, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

La méthode K entraîne que $(u)^\alpha$ est concave avec $\alpha = 1/2$, puissance optimale -pour la méthode- alors que la solution $u(x, y) = (1 - x^2 - 4y^2)/2$ est concave.

Par contre si Ω n'est pas régulier, par exemple si Ω présente un point anguleux, le résultat obtenu dans [9] est optimal:

$$\begin{cases} -\Delta u = 1, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$



La solution u n'est pas C^2 au voisinage de 0 , elle n'est pas concave

et $(u)^\alpha$ est concave, où $\alpha = 1/2$ est une puissance optimale. Ainsi la méthode K perd de l'information dans le cas régulier quand f n'est pas strictement monotone par rapport à u .

REMARQUE 2.7. De la même façon on peut étudier la concavité dans une direction d . Nous ne le ferons pas afin d'éviter de se répéter.

3. Groupe de symétrie: une remarque sur la symétrie radiale partielle:

On se donne un ouvert Ω de \mathbb{R}^n possédant un groupe de symétrie:

$$\text{pour tout } x \in \Omega, \quad y = R \cdot x \in \Omega,$$

pour toute transformation orthogonale R appartenant à un groupe G (fini ou pas).

Soit une fonction $F(x, r, t, s)$ de $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} telle que

$$(2.10) \quad \begin{cases} \text{pour tous } x \in \Omega, (r, t, s) \in \mathbb{R}^{n+2}, R \in G, \\ F(R \cdot x, r, R \cdot t, s) = F(x, r, t, s). \end{cases}$$

Soit u une solution de l'équation

$$(2.11) \quad \begin{cases} F(x, u, \nabla u, \Delta u) = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (\text{Dirichlet}) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \quad (\text{Neumann}). \end{cases}$$

Théorème 2.3. *Supposons que u est solution unique de (2.11); alors u vérifie $u(R \cdot x) = u(x)$, pour tous $x \in \Omega$, $R \in G$, i.e. u possède le même groupe de symétrie que Ω .*

DÉMONSTRATION. On montre aisément que

$$\nabla(u(R \cdot x)) = {}^t R \nabla u(R \cdot x), \quad \text{pour tout } x \in \Omega,$$

où ${}^t R$ est la transposée de $R = (R)^{-1}$. Cette relation entraîne que la condition de Neumann est invariante par R ,

$$\Delta[u(R \cdot x)] = (\Delta u)(R \cdot x), \quad \text{pour tout } x \in \Omega.$$

Comme l'équation (2.11) s'écrit aussi

$$F(R \cdot x, u(R \cdot x), \nabla u(R \cdot x), (\Delta u)(R \cdot x)) = 0,$$

puisque $R\Omega = \Omega$, on obtient

$$F(R \cdot x, u(R \cdot x), R \cdot \nabla(u(R \cdot x)), \Delta[u(R \cdot x)]) = 0,$$

soit en utilisant l'hypothèse (2.10)

$$F(x, u(R \cdot x), \nabla(u(R \cdot x)), \Delta[u(R \cdot x)]) = 0,$$

i.e. $v(x) = u(R \cdot x)$ est aussi une solution de (2.11); l'unicité entraîne que

$$u(R \cdot x) = u(x), \quad \text{pour tous } x \in \Omega, R \in G.$$

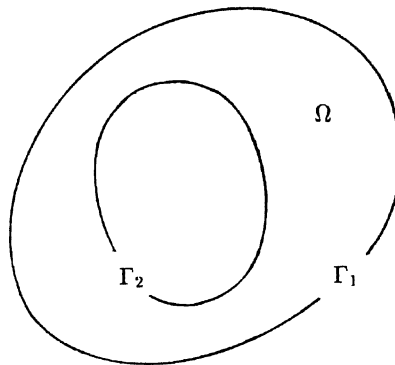
III. Problème semi-linéaire à donnée peu régulière.

A. f dépend de u .

Considérons le problème

$$(3.0) \quad \begin{cases} -\Delta u = f(x, u) & \text{dans } \Omega = \Omega_1 \setminus \overline{\Omega}_2, \\ u|_{\Gamma_1} = c_1 = 0, \quad u|_{\Gamma_2} = c_2, \quad c_2 > 0, \end{cases}$$

où Ω_1 et Ω_2 sont deux ouverts bornés réguliers connexes tels que $\overline{\Omega}_2 \subset \Omega_1$ et $\Gamma_i = \partial\Omega \cap \partial\Omega_i$



On suppose que $f(x, t)$ est de Carathéodory, positive, bornée:

$$(3.1) \quad 0 \leq f(x, t) \leq M,$$

presque pour tout $x \in \Omega$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. Il est connu [26] qu'il existe α , $0 < \alpha < 1$ tel que la solution u de (3.0) soit dans $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$.

On suppose que cette solution u vérifie

$$(3.2) \quad 2f(x, u) + \sum_i x_i \frac{d}{dx_i} [f(x, u)] \leq a$$

au sens de $H^{-1}(\Omega)$, où $a \in L^2(\Omega)$, est négative, non nulle;

$$(3.2.1) \quad \sup \{u(x) : x \in \bar{\Omega}\} = c_2 .$$

REMARQUE 3.1. Lorsque f est indépendant de t (3.2) se réduit à

$$2f(x) + \sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \leq a \quad \text{dans } H^{-1}(\Omega) .$$

Un exemple intéressant d'une telle fonction sera donné plus tard.

Théorème 3.1. *On suppose que Ω est un 2-connexe fortement étoilé par rapport à un point, $0 \in \Omega_2$, par exemple. Alors si u et f satisfont (3.1) à (3.2.1), les ensembles de niveau de u sont 2-connexes. De façon plus précise on a*

$$(3.3) \quad \inf \{\|\nabla u(x)\| : x \in \bar{\Omega}\} > 0 .$$

REMARQUE 3.2. Par le principe du maximum de Hopf (cf. [1]) on a

$$(3.3.1) \quad x \cdot \nabla u|_{\Gamma} < 0, \quad \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 ,$$

en utilisant (3.2.1).

DÉMONSTRATION. Nous allons précéder par régularisation. On se donne $f_n(x, t)$ une suite de fonctions régulières telles que

$$0 \leq f_n(x, t) \leq M+1, \quad f_n(x, t) \rightarrow f(x, t),$$

presque pour tout $x \in \Omega$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, et on considère les deux problèmes suivants:

$$(3.4) \quad \begin{cases} -\Delta u_n = f_n(x, u), \\ u_n|_{\Gamma_1} = c_1, \quad u_n|_{\Gamma_2} = c_2; \end{cases}$$

$$(3.5) \quad \begin{cases} -\Delta v_n = 2 f_n(x, u) + \sum_i x_i \frac{d}{dx_i} [f_n(x, u)], \\ v_n|_{\Gamma} = x \cdot \nabla u_n|_{\Gamma}, \quad \text{où } \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2. \end{cases}$$

La fonction u_n étant régulière, par un calcul élémentaire de $\Delta(x \cdot \nabla u_n)$, en utilisant (1.4) on voit à partir de (3.4) que la fonction $x \cdot \nabla u_n$ est également solution de (3.5). L'unicité du problème de Dirichlet (3.5) entraîne que

$$(3.6) \quad v_n = x \cdot \nabla u_n.$$

Il s'agit maintenant de passer à la limite dans (3.4), (3.5) et (3.6). Il est aisé de voir que, à une sous-suite près, le problème (3.4) tend vers le problème

$$(3.9) \quad \begin{cases} -\Delta u = f(x, u), \\ u|_{\Gamma_1} = c_1, \quad u|_{\Gamma_2} = c_2, \end{cases}$$

grâce à l'unicité du problème de Dirichlet. D'autre part la distribution

$$h_n = 2 f_n(x, u) + \sum_i x_i \frac{d}{dx_i} [f_n(x, u)]$$

appartient à un borné de $H^{-1}(\Omega)$. Par conséquent le problème (3.5) possède une unique solution v_n bornée dans $H^1(\Omega)$ si on montre que $v_n|_{\Gamma}$ est borné dans $L^\infty(\Gamma)$; ce que nous ferons plus loin. Par conséquent à une sous-suite près $v_n = x \cdot \nabla u_n$ tend dans $H^1(\Omega)$ fort vers $v = x \cdot \nabla u$ solution de

$$(3.10) \quad \begin{cases} -\Delta v = 2 f(x, u) + \sum_i x_i \frac{d}{dx_i} [f(x, u)], \\ v|_{\Gamma} = x \cdot \nabla u|_{\Gamma} < 0. \end{cases}$$

Considérons alors la solution ω du problème suivant:

$$(3.11) \quad \begin{cases} -\Delta \omega = a & \text{dans } \Omega, \\ \omega|_{\Gamma} = v|_{\Gamma} < 0; \end{cases}$$

elle satisfait, grâce au principe du maximum fort [22],

$$(3.12) \quad \omega < 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

Enfin, grâce à (3.2) on peut appliquer le principe de comparaison [22] dans $H_0^1(\Omega)$ i.e. on a

$$(3.13) \quad v - \omega \leq 0$$

au sens de $H_0^1(\Omega)$, [22]; (3.12) et (3.13) entraînent que

$$(3.14) \quad x \cdot \nabla u(x) < 0 \quad \text{dans } \bar{\Omega}.$$

Ainsi la preuve du théorème sera achevée si on montre que la trace de v_n sur Γ est bornée par exemple dans $L^\infty(\Gamma)$. Pour cela nous aurons besoin d'un résultat d'estimations établi dans [26, Théorème 14.1, p. 337]: puisque Ω est régulier, il satisfait la condition de la sphère extérieure en tout point de $\partial\Omega$; soit $r_0 > 0$ le rayon de cette sphère; la condition (14.9) de [26] est trivialement satisfaite dans le cas de l'équation (3.4). Ainsi nous obtenons l'estimation escomptée

$$\|\nabla u_n(x)\| \leq C, \quad \text{pour tout } x \in \Gamma,$$

où C est une constante ne dépendant que de r_0, M et c_2 .

B. f est indépendant de u .

Ici nous avons besoin d'un résultat préliminaire de trace.

1. Un résultat de trace. Considérons l'espace fonctionnel

$$E = \{g \in L^2(\Omega) : x \cdot \nabla g(x) \in L^2(\Omega)\},$$

où $x \cdot \nabla g = \sum_i x_i \partial g / \partial x_i$ s'entend au sens des distributions. Muni de sa structure naturelle E est un espace de Hilbert. Nous avons le résultat suivant.

Lemme 3.1. *Supposons que Ω soit un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^n , fortement étoilé. Alors pour tout g de E , on peut définir une trace sur le bord $\Gamma = \partial\Omega$, au sens de $H^{-1/2}(\Gamma)$.*

La preuve de ce résultat nécessite deux étapes.

1ÈRE ÉTAPE: UN RÉSULTAT DE DENSITÉ. Ici Ω n'est pas nécessairement borné.

Lemme 3.2. $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans E .

Pour la démonstration de ce résultat de densité nous utiliserons le résultat suivant dû à Friedrichs [28].

Lemme 3.3. Soit $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, $\rho \geq 0$ tel que $\int_{\mathbb{R}^m} \rho dx = 1$; soit $v \in L^2(\mathbb{R}^m)$ à support compact, et $b \in C^1$ dans un voisinage du support de v . Alors on a, pour tout $k = 1, \dots, m$,

$$b \frac{\partial}{\partial x_k} (v * \rho_n) - \left(b \frac{\partial v}{\partial x_k} \right) * \rho_n$$

tend vers 0 dans $L^2(\mathbb{R}^m)$ fort quand $n \rightarrow +\infty$, avec

$$w * \rho_n(x) = \int_{\mathbb{R}^m} w \left(x - \frac{1}{n} y \right) \rho(y) dy$$

pour tout w dans $L^2(\mathbb{R}^m)$.

DÉMONSTRATION DU LEMME 3.2. Soit g appartenant à E ; le Lemme 3.3 entraîne que

$$x \cdot \nabla(g * \rho_n) - (x \cdot \nabla g) * \rho_n \rightarrow 0$$

dans $L^2(\Omega)$ fort; or par définition de E

$$(x \cdot \nabla g) * \rho_n \rightarrow x \cdot \nabla g$$

dans $L^2(\Omega)$ fort; par conséquent

$$x \cdot \nabla(g * \rho_n) \rightarrow x \cdot \nabla g$$

dans $L^2(\Omega)$ fort. Ainsi la suite $g_n = g * \rho_n$ appartient à $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ et tend vers g dans E pour la topologie de ce dernier.

REMARQUE 3.3. Quand Ω n'est pas \mathbb{R}^n le produit de convolution peut être défini comme dans [27].

2ÈME ÉTAPE: DÉMONSTRATION DU LEMME 3.1. Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, posons

$$p_i(x) = x_i f(x).$$

Il est clair que par définition $p = (p_1, \dots, p_n) \in (L^2(\Omega))^n$. De plus par définition de E , $\operatorname{div} p \in L^2(\Omega)$.

Par conséquent, d'après [27], pour tout $R > 0$, $\vec{p} \cdot \vec{\nu} = f(x) \cdot (\vec{x} \cdot \vec{\nu}(x))$ possède sur $\partial\Omega \cap B(0, R)$, une trace dans $H^{-1/2}(\Gamma)$, où $\vec{\nu}$ représente la normale unitaire à $\partial\Omega$, orientée extérieurement. De plus on a

$$\|\vec{p} \cdot \vec{\nu}\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq C (\|x f\|_{L^2(\Omega)} + \|\operatorname{div}(x f)\|_{L^2(\Omega)}).$$

Avant de conclure il nous faut construire un relèvement de $\vec{p} \cdot \vec{\nu}$. Pour cela considérons le problème aux limites suivant:

$$\begin{cases} -\Delta w = 0, \\ w|_{\partial\Omega} = a(x), \end{cases}$$

où $a(x) = \vec{x} \cdot \vec{\nu}(x)$. Comme Ω est régulier, étoilé et borné, $a(x)$ est $C^\infty(\partial\Omega) \cap L^\infty(\partial\Omega)$ telle que

$$a_1 \geq a(x) \geq a_0 > 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

Des résultats classiques de régularité des problèmes elliptiques [26], [28] on déduit que $w \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Posons alors

$$h(x) = \frac{f(x)}{w(x)}.$$

Il est clair que $h \in E$ et que d'après ce qui précède on peut définir $h \cdot (\vec{x} \cdot \vec{\nu})$ sur $\Gamma = \partial\Omega$ i.e.

$$\begin{aligned} (\vec{x} \cdot \vec{\nu}) h|_{\partial\Omega} &= (\vec{x} \cdot \vec{\nu}) \left(\frac{f}{w} \right) \Big|_{\partial\Omega} \\ &= \left(\frac{f(x)}{w(x)} \right) a(x)|_{\partial\Omega} = \vec{p} \cdot \vec{\nu}|_{\partial\Omega} \in H^{-1/2}(\Gamma) \end{aligned}$$

avec $p = x(f/w)$, et d'après [27]

$$\|(\vec{x} \cdot \vec{\nu}) h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq C \left(\left\| x \frac{f}{w} \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \operatorname{div} \left(x \frac{f}{w} \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \right).$$

Comme par le principe du maximum on a

$$\inf \{w(x) : x \in \overline{\Omega}\} \geq a_0 > 0,$$

il s'ensuit, moyennant quelques estimations élémentaires, que

$$\|(\vec{x} \cdot \vec{\nu}) h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq C (\|x f\|_{L^2(\Omega)} + \|x \cdot \nabla f\|_{L^2(\Omega)})$$

i. e.

$$\|(\vec{x} \cdot \vec{\nu}) h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq C \|f\|_E.$$

Considérons alors l'application linéaire suivante définie sur $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ pour

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_0 : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) &\longrightarrow H^{-1/2}(\Gamma) \\ f &\longrightarrow \tilde{\gamma}_0 f = \left(\frac{f}{w}\right) \cdot (\vec{x} \cdot \vec{\nu})|_{\partial\Omega}. \end{aligned}$$

Il est clair que pour tout $f \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ on a $\tilde{\gamma}_0 f = f|_{\partial\Omega}$ (au sens de la restriction) et que $\tilde{\gamma}_0$ est continue. Le Lemme 3.2 et le Théorème de Hahn-Banach entraînent que $\tilde{\gamma}_0$ se prolonge de façon unique à E en une application linéaire continue telle que (*cf.* [20])

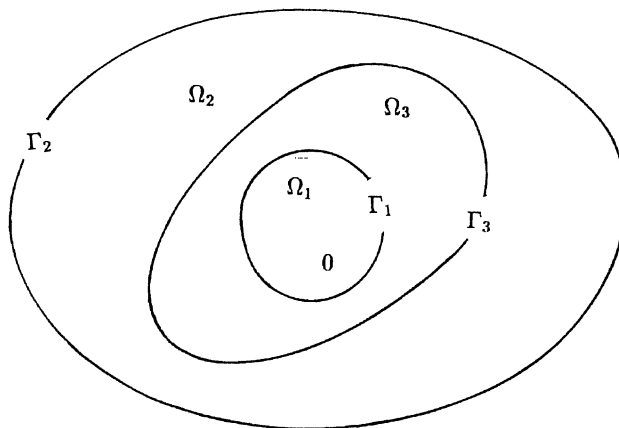
$$\|\tilde{\gamma}_0 f\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq C \|f\|_E, \quad \text{pour tout } f \in E.$$

On écrira, pour simplifier les notations,

$$\tilde{\gamma}_0 f = f|_{\partial\Omega}.$$

2. Un résultat de connexité adapté aux problèmes de contrôle.

Considérons trois ouverts Ω_i , ($i = 1, 2, 3$), possédant les propriétés suivantes: ils sont fortement étoilés par rapport à 0, réguliers tels que $\Omega_2 \supset \overline{\Omega}_3$, $\Omega_3 \supset \overline{\Omega}_1$. On pose



$$D = \Omega_3 \setminus \overline{\Omega}_1, \quad \Omega = \Omega_2 \setminus \overline{\Omega}_1 .$$

$$\Gamma_i = \partial\Omega_i, \quad i = 1, 2, 3 .$$

On se donne une fonction f appartenant à $L^\infty(\Omega)$ telle que

$$(3.15) \quad f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{si } x \in D \text{ presque partout,} \\ f_2(x), & \text{si } x \in \Omega \setminus \overline{D} \text{ presque partout,} \end{cases}$$

$$(3.16) \quad T_1 = \sum_i x_i \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \geq 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(D),$$

$$(3.17) \quad T_2 = \sum_i x_i \frac{\partial f_2}{\partial x_i} \geq 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega \setminus \overline{D}),$$

$$(3.18) \quad T_1 \in L^2(D), \quad T_2 \in L^2(\Omega \setminus \overline{D}).$$

$$(3.19) \quad f_1|_{\partial D} \leq f_2|_{\partial D},$$

au sens suivant des traces

$$\langle f_2 - f_1, \varphi \rangle_{H^{-1/2}(\partial D) \times H^{1/2}(\partial D)} \geq 0, \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}).$$

Proposition 3.1. *On suppose les hypothèses (3.15) à (3.19). Alors la distribution $T = \sum_i x_i (\partial f / \partial x_i)(x)$ appartient à $H^{-1}(\Omega)$ et vérifie*

$$T = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \geq 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

DÉMONSTRATION. Rappelons que d'après le Lemme 3.1 les traces de f_1 et f_2 sur ∂D et $\partial(\Omega \setminus \overline{D})$ respectivement sont bien définies.

On peut donc, après régularisation, faire des intégrations par parties et passer à la limite. Posons

$$p_i = x_i f, \quad \text{pour tout } i = 1, 2, \dots, n;$$

on a

$$p = (p_1, \dots, p_n) = x f = \begin{cases} x f_1 & \text{sur } D, \\ x f_2 & \text{sur } \Omega \setminus \overline{D}. \end{cases}$$

Nous avons au sens des distributions

$$(3.20) \quad \operatorname{div} p = n f + \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Soit p_k une suite régulière telle que l'on ait [27]

$$\begin{aligned} p_k &\rightarrow p && \text{dans } (L^2(D))^n \text{ fort,} \\ \operatorname{div} p_k &\rightarrow \operatorname{div} p && \text{dans } L^2(D). \end{aligned}$$

Pour tout $\varphi \geq 0$ appartenant à $\mathcal{D}(\Omega)$, nous avons

$$(3.21) \quad \begin{aligned} \int_D p_k \cdot \nabla \varphi \, dx &= -\langle p_k \cdot \nu_1, \varphi \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_3) \times H^{1/2}(\Gamma_3)} \\ &+ \int_D \operatorname{div} p_k \varphi \, dx. \end{aligned}$$

On passe à la limite dans (3.21) en utilisant le résultat de continuité [27] suivant:

$$p_k \cdot \nu_1|_{\Gamma_3} \rightarrow p \cdot \nu_1|_{\Gamma_3} = f_1(x \cdot \nu_1)|_{\Gamma_3}$$

dans $H^{-1/2}(\Gamma_3)$, i.e. que l'on obtient

$$(3.22) \quad \begin{aligned} \int_D p \cdot \nabla \varphi \, dx &= -\langle f_1(x \cdot \nu_1), \varphi \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_3) \times H^{1/2}(\Gamma_3)} \\ &+ \int_D \operatorname{div} p \varphi \, dx. \end{aligned}$$

De même nous obtenons

$$(3.23) \quad \begin{aligned} - \int_{\Omega \setminus \overline{D}} p \cdot \nabla \varphi \, dx &= -\langle f_2(x \cdot \nu_2), \varphi \rangle_{H^{1/2}(\Gamma_3) \times H^{1/2}(\Gamma_3)} \\ &+ \int_{\Omega \setminus \overline{D}} \operatorname{div} p \varphi \, dx. \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $\varphi \geq 0$, dans $\mathcal{D}(\Omega)$ on a

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{div} p, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)} &= -\langle p, \nabla \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)} \\ &= -\int_D p \cdot \nabla \varphi \, dx - \int_{\Omega \setminus \bar{D}} p \cdot \nabla \varphi \, dx \\ &= \langle (f_2 - f_1)(x \cdot \nu), \varphi \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_3) \times H^{1/2}(\Gamma_3)} \\ &\quad + \int_D \operatorname{div} p \, \varphi \, dx + \int_{\Omega \setminus \bar{D}} \operatorname{div} p \, \varphi \, dx \end{aligned}$$

où $\nu_2 = -\nu_1 = -\nu$, ν étant la normale unitaire à ∂D orientée extérieurement. Or par (3.18) nous avons

$$\begin{aligned} \operatorname{div} p &= n f_1 + T_1 \in L^2(D) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(D), \\ \operatorname{div} p &= n f_2 + T_2 \in L^2(\Omega \setminus \bar{D}) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega \setminus \bar{D}), \end{aligned}$$

d'où

$$(3.24) \quad \begin{aligned} \langle \operatorname{div} p, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)} &= \int_{\partial D} (f_2 - f_1)(x \cdot \nu) \varphi \, d\sigma + \int_{\Omega} n f \varphi \, dx \\ &\quad + \int_D T_1 \varphi \, dx + \int_{\Omega \setminus \bar{D}} T_2 \varphi \, dx; \end{aligned}$$

mais on a

$$\int_{\partial D} (f_2 - f_1)(x \cdot \nu) \varphi \, d\sigma \geq 0$$

par (3.19) et puisque D est fortement 2-étoilé. Ainsi (3.17) et (3.24) entraînent que l'on a

$$(3.25) \quad \langle \operatorname{div} p, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)} \geq n \int_{\Omega} f \varphi \, dx,$$

pour tout $\varphi \geq 0$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$; la conclusion vient de (3.25) et (3.20).

REMARQUE 3.3.1. Si dans (3.16), (3.17) et (3.19) les inégalités sont inversées la proposition précédente donne

$$T = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \leq 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Théorème 3.2. *Soit $\Omega = \Omega_2 \setminus \overline{\Omega}_1$ un 2-connexes fortement étoilé par rapport à 0, régulier. Soit f une fonction positive, dans $L^\infty(\Omega)$, définie par (3.15) et telle que $-f_1$ et $-f_2$ vérifient (3.16), (3.17) et (3.19). On suppose de plus que l'on a*

$$2 f_1 + \sum x_i \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \leq 0 \quad \text{dans } H^{-1}(D),$$

$$2 f_2 + \sum x_i \frac{\partial f_2}{\partial x_i} \leq 0 \quad \text{dans } H^{-1}(\Omega \setminus \overline{D}).$$

Alors si la solution u de

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega = \Omega_2 \setminus \overline{\Omega}_1, \\ u|_{\Gamma_2} = c_2, \quad u|_{\Gamma_1} = c_1, \end{cases}$$

satisfait

$$(3.26) \quad c_2 = \inf\{u(x) : x \in \overline{\Omega}\}, \quad c_1 = \sup\{u(x) : x \in \overline{\Omega}\},$$

les ensembles de niveaux de u sont des 2-connexes fortement étoilés. De façon plus précise on a l'estimation

$$\inf\{\|\nabla u(x)\| : x \in \overline{\Omega}\} > 0.$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de voir que l'on peut appliquer le Théorème 3.1. En effet (3.1) et (3.2) sont satisfaits i.e. on a

$$0 \leq f(x) \leq M = \text{supess } f,$$

puisque $f \in L^\infty(\Omega)$, et on a

$$2 f + \sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \leq 0 \quad \text{dans } H^{-1}(\Omega)$$

par application de la Proposition 3.1.

3. Exemples.

EXEMPLE 1: intervenant en contrôle de domaines [18].

Etant données deux constantes α_1 et α_2 telles que $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2$, on pose

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \alpha_1, & \text{sur } D, \\ f_2(x) &= \alpha_2, & \text{sur } \Omega \setminus \overline{D}, \\ f(x) &= \begin{cases} \alpha_1, & \text{si } x \in D, \\ \alpha_2, & \text{si } x \in \Omega \setminus \overline{D}. \end{cases} \end{aligned}$$

La Proposition 3.1 montre que l'on a

$$\left\langle \sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)} = (\alpha_2 - \alpha_1) \int_{\Gamma_3} \varphi \vec{x} \cdot \vec{\nu} \, d\sigma \geq 0,$$

pour tout $\varphi \geq 0$, dans $\mathcal{D}(\Omega)$ puisque

$$(f_2 - f_1)|_{\Gamma_3} = \alpha_2 - \alpha_1 > 0.$$

Si dans (3.26) on inverse le rôle de c_1 et c_2 i.e. si $c_1 = \inf u$ et $c_2 = \sup u$ alors on aura

$$2f + x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \geq 0 \quad \text{dans } H^{-1}(\Omega)$$

et le Théorème 3.2 est applicable i.e. que l'on a $x \cdot \nabla u(x) > 0$, pour tout $x \in \Omega$. Donc u n'a pas de points critiques dans Ω .

EXEMPLE 2: Ω est défini comme précédemment.

Cet exemple montre réellement la généralité du Théorème 3.2. Dans ce cas f dépend de x et de u à travers les ensembles de niveau de u . On se donne deux fonctions $f_1(x, t)$, $f_2(x, t)$ positives, de Caratheodory sur $\Omega \times \mathbb{R}^+$ telles que l'on ait

$$(3.27) \quad M \geq f_1(x, t) > f_2(x, t) > 0,$$

presque pour tout $x \in \Omega$, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$. On suppose que $\partial f_1/\partial t$ et $\partial f_2/\partial t$ sont de Caratheodory, la dérivation étant prise au sens des distributions.

On définit la fonction f par

$$(3.28) \quad f(x, t) = \begin{cases} f_1(x, t), & \text{pour tous } x \in \Omega, t > t_0, \\ f_2(x, t), & \text{pour tous } x \in \Omega, t < t_0. \end{cases}$$

Nous allons montrer d'abord que l'équation

$$(3.29) \quad \begin{cases} -\Delta u = f(x, u) & \text{dans } \Omega = \Omega_2 \setminus \overline{\Omega}_1, \\ u|_{\Gamma} = 0, \quad u > 0, \end{cases}$$

possède une solution. La difficulté est liée à la discontinuité de f en t pour donner un sens au terme $f(x, u(x))$.

Proposition 3.1.1. *L'équation (3.29) possède une solution u .*

DÉMONSTRATION. On procède par régularisation. Soit f_n régulière telle que

$$\begin{cases} M \geq f_n(x, t) \geq (f_2) * \rho_n(x, t), & \text{pour tous } x, t, \\ f_n(x, t) \longrightarrow f(x, t), & \text{presque pour tout } x, \text{ pour tout } t \neq t_0, \end{cases}$$

où ρ_n est un noyau régularisant; et soit u_n une solution de

$$(3.30) \quad \begin{cases} -\Delta u_n = f_n(x, u_n) & \text{dans } \Omega, \\ u_n|_{\Gamma} = 0, \quad u_n > 0; \end{cases}$$

elle vérifie les estimations suivantes:

$$\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C, \quad \|u_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C.$$

A une sous-suite près nous avons les convergences suivantes:

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u && \text{dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible,} \\ u_n &\rightarrow u && \text{dans } L^p(\Omega) \text{ fort, pour tout } p < +\infty, \\ u_n(x) &\rightarrow u(x) && \text{dans } \Omega \text{ presque partout,} \\ f_n(x, u_n(x)) &\rightharpoonup g(x) && \text{dans } L^p(\Omega) \text{ faible, pour tout } p < +\infty, \\ (f_2) * \rho_n(x, u_n) &\rightarrow f_2(x, u) && \text{dans } L^p(\Omega) \text{ fort, pour tout } p < +\infty, \end{aligned}$$

car

$$f_2 * \rho_n(x, \cdot) \rightarrow f_2(x, \cdot), \quad \text{presque pour tout } x,$$

uniformément sur tout compact de \mathbb{R} . La fonction u vérifie ainsi

$$(3.31) \quad \begin{cases} -\Delta u = g(x), & 0 < f_2(x, u(x)) \leq g(x) \leq M, \\ u|_{\Gamma} = 0, & u > 0, \quad u \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}), \quad 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

on voit aisément que $E = \{x \in \Omega : u(x) = t_0\}$ est de mesure nulle. Il suffit donc de montrer que

$$g(x) = f(x, u(x)), \quad \text{presque pour tout } x \in \Omega.$$

Pour cela on pose

$$F_n = \{x \in \Omega : u_n(x) = t_0\},$$

$$F = \bigcup_n F_n, \quad \tilde{\Omega} = \Omega \setminus (F \cup E).$$

Cet ensemble F est de mesure nulle car il est facile de voir que

$$|F_n| = 0, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Par le théorème d'Egorof on a: *pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe un mesurable $G \subset \tilde{\Omega}$ tel que $|\tilde{\Omega} \setminus G| \leq \varepsilon$, $u_n \rightarrow u$ uniformément sur G ; ce qui entraîne que $f_n(x, u_n(x)) \rightarrow f(x, u(x))$, pour tout $x \in G$.*

Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel que $\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} = 1$ on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u_n \cdot \nabla \varphi \, dx &= \int_{\Omega} f_n(x, u_n(x)) \varphi \, dx \\ &= \int_{\tilde{\Omega}} f_n(x, u_n(x)) \varphi \, dx \\ &= \int_G f_n(x, u_n(x)) \varphi \, dx + \int_{\tilde{\Omega} \setminus G} f_n(x, u_n(x)) \varphi \, dx; \end{aligned}$$

soit par passage à la limite quand n tend vers l'infini

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx &= \int_G f(x, u(x)) \varphi \, dx + \int_{\tilde{\Omega} \setminus G} g(x) \varphi \, dx, \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx - \int_{\tilde{\Omega}} f(x, u(x)) \varphi \, dx &= - \int_{\tilde{\Omega} \setminus G} f(x, u) \varphi \, dx + \int_{\tilde{\Omega} \setminus G} g \varphi \, dx. \end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz, appliquée au second membre, donne

$$\left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx - \int_{\tilde{\Omega}} f(x, u) \varphi \, dx \right| \leq 2M \sqrt{\varepsilon},$$

$$\left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx - \int_{\tilde{\Omega}} \chi_{\Omega} f(x, u(x)) \varphi \, dx \right| \leq 2M \sqrt{\varepsilon},$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Donc

$$(3.31.1) \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\tilde{\Omega}} \chi_{\tilde{\Omega}} f(x, u(x)) \varphi \, dx$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel que $\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} = 1$, ce qui signifie que l'on a (3.31.1) pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ par homogénéité. Ainsi u vérifie

$$-\Delta u = \chi_{\tilde{\Omega}} f(x, u(x)) \quad \text{dans } \Omega,$$

i.e.

$$\chi_{\tilde{\Omega}} f(x, u(x)) = g(x), \quad \text{presque pour tout } x \in \Omega,$$

ou encore

$$f(x, u(x)) = g(x), \quad \text{presque pour tout } x \in \Omega,$$

car $|\tilde{\Omega}| = |\Omega|$. Fin de la preuve de la Proposition 3.1.1.

Pour traiter l'Exemple 2 nous avons besoin des hypothèses suivantes:

L'ouvert $D = \{x \in \Omega : u(x) > t_0\}$ est un 2-connexe fortement étoilé par rapport, par exemple, à 0. Les fonctions suivantes sont de Caratheodory et satisfont

$$(3.32) \quad 0 \leq - \sum_i x_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x, t) \leq a|t| + b(x),$$

pour tout $j = 1, 2$, où a est une constante positive et b une fonction de $L^2(\Omega)$. La fonction suivante est de Caratheodory et vérifie

$$(3.33) \quad 0 \geq \frac{\partial f_j}{\partial t}(x, t) \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^+), \quad j = 1, 2.$$

On pose

$$\begin{aligned} g_j(x) &= f_j(x, u(x)), & j &= 1, 2, \\ g(x) &= f(x, u(x)), & \text{presque pour tout } x, \\ k(x, t) &= \begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial t}(x, t), & \text{presque pour tout } x, \text{ pour tout } t < t_0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial t}(x, t) & \text{presque pour tout } x, \text{ pour tout } t > t_0. \end{cases} \end{aligned}$$

Il est clair que les hypothèses (3.32) et (3.33) entraînent que g_j et $x \cdot \nabla g_j(x)$ appartiennent à $L^2(\Omega)$ pour $j = 1, 2$. Le Lemme 3.1 permet alors de définir les traces $g_j|_{\partial D}$, $j = 1, 2$. Ce qui rend licite l'hypothèse

$$(3.34) \quad (f_2(x, u) - f_1(x, u))|_{\partial D} \leq 0$$

au sens de $H^{-1/2}(\partial D)$.

En procédant comme dans la Proposition 3.1 on obtient: si $p = x \cdot g$

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{div} p, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)} &= \langle n f + \sum_i x_i \frac{\partial g}{\partial x_i}, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)} \\ &= \int_{\Omega} n f \varphi + \int_{\Omega} k(x, u) \varphi \\ &\quad + \int_D \sum_i x_i \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x, u) \varphi \\ &\quad + \int_{\Omega \setminus \bar{D}} \sum_i x_i \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(x, u) \varphi \\ &\quad + \langle (f_2 - f_1) \cdot (x \cdot \nu), \varphi \rangle_{H^{-1/2}(\partial D) \times H^{1/2}(\partial D)}, \end{aligned}$$

soit

$$(3.35) \quad \begin{aligned} \langle \sum_i x_i \frac{\partial g}{\partial x_i}, \varphi \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} &= \int_{\Omega} k(x, u) \varphi + \int_{\Omega} T(x) \varphi \, dx \\ &\quad + \langle (f_2 - f_1) \cdot (x \cdot \nu), \varphi \rangle_{H^{-1/2}(\partial D) \times H^{1/2}(\partial D)} \end{aligned}$$

avec

$$T(x) = \begin{cases} \sum_i x_i \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x, u), & \text{si } x \in D, \\ \sum_i x_i \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(x, u), & \text{si } x \in \Omega \setminus \bar{D}. \end{cases}$$

En procédant par régularisation et en utilisant l'unicité du problème de Dirichlet on montre que la fonction $v = x \cdot \nabla u$ vérifie au sens des distributions

$$(3.36) \quad \begin{cases} -\Delta v = 2f(x, u) + \sum_i x_i \frac{\partial g}{\partial x_i}(x), \\ v|_{\partial\Omega} < 0. \end{cases}$$

Compte tenu de l'hypothèse (3.34), l'équation (3.36) entraîne que l'on a

$$\langle -\Delta v - k(x, u)v, \varphi \rangle \leq \int_{\Omega} T\varphi + 2 \int_{\Omega} f(x, u)\varphi \, dx,$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi \geq 0$, *i.e.*

$$-\Delta v - k(x, u)v \leq T + 2f(x, u).$$

Considérons alors la solution ω de

$$(3.37) \quad \begin{cases} -\Delta\omega - k(x, u)\omega = T + 2f(x, u), \\ \omega|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega}. \end{cases}$$

Si on suppose que l'on a

$$2f(x, u) + T(x) \leq 0, \quad \text{presque pour tout } x \in \Omega, \neq 0,$$

le principe du maximum ([22], [26]) donne

$$v(x) \leq \omega(x) < 0.$$

Et la conclusion s'impose comme dans l'Exemple 1.

REMARQUE 3.4. Un exemple de fonction positive satisfaisant l'inégalité

$$2f(x) + x \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x) \leq 0.$$

Supposons Ω_1 et Ω_2 convexes tels que $0 \in \Omega_1$, $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$. Soit $g(x)$ concave sur Ω_2 , régulière, positive telle que

$$g(0) = \sup\{g(x) : x \in \overline{\Omega_2}\}.$$

Dans ce cas on a

$$x \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x) \leq 0, \quad \text{pour tout } x \in \Omega_2.$$

Posons

$$f(x) = \frac{g(x)}{x^2}, \quad \text{pour tout } x \in \Omega_2 \setminus \overline{\Omega}_1.$$

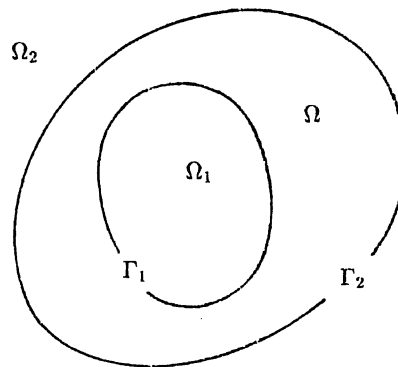
Un calcul élémentaire montre que

$$2f(x) + x \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x) \leq 0, \quad \text{pour tout } x \in \Omega_2 \setminus \overline{\Omega}_1.$$

4. Nécessité de l'hypothèse (3.26).

Le résultat du Théorème 3.2 n'a pas lieu quelles que soient les constantes c_1 et c_2 , $0 < c_2 < c_1$: en réalité ces constantes sont liées au second membre f . C'est le but de ce qui suit. Pour cela on considère deux ouverts connexes Ω_1 et Ω_2 bornés réguliers tels que $\Omega_2 \supset \overline{\Omega}_1$. On pose

$$\Omega = \Omega_2 \setminus \overline{\Omega}_1, \quad \Gamma_i = \partial\Omega_i.$$



Soit g une fonction positive appartenant à $L^\infty(\Omega)$:

$$(3.38) \quad 0 \leq g(x) \leq M \neq 0, \quad \text{avec } g \not\equiv M.$$

(cf. Remarque 3.4).

Considérons le problème de Dirichlet suivant:

$$(3.39) \quad \begin{cases} -\Delta r_c = g & \text{dans } \Omega, \\ r_c|_{\Gamma_2} = 0, \quad r_c|_{\Gamma_1} = c, & \text{constante } > 0. \end{cases}$$

On a

Proposition 3.2. *Il existe $c_0 = c_0(g) > 0$ tel que pour tout c , $0 \leq c \leq c_0$ la fonction r_c possède un point critique au moins à l'intérieur de Ω i.e. que r_c possède des ensembles de niveau qui ne sont pas des 2-connexes.*

REMARQUE 3.5. Il est connu que si $M = 0$ et Ω_i convexe ($i = 1, 2$), alors pour tout $c > 0$ la fonction r_c n'a pas de points critiques dans $\bar{\Omega}$.

De plus les lignes de niveau de r_c sont des courbes régulières convexes (cf. [14]).

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION. On considère le problème

$$(3.40) \quad \begin{cases} -\Delta \omega = g & \text{dans } \Omega, \\ \omega|_{\Gamma_1} = \omega|_{\Gamma_2} = 0, \end{cases}$$

et on choisit $0 < c \leq \|\omega\|_\infty = \sup\{\omega(x) : x \in \bar{\Omega}\}$. Il existe $x_0 \in \Omega$ tel que $\omega(x_0) = \|\omega\|_\infty$; par le principe du maximum classique on a

$$\|r_c\|_\infty \geq r_c(x_0) > \omega(x_0) = \|\omega\|_\infty \geq c = \sup\{r_c(x) : x \in \Gamma_1\};$$

par conséquent il existe $x_1 \in \Omega$ tel que

$$r_c(x_1) = \|r_c\|_\infty > c \quad \text{et} \quad c_0(g) = \|\omega\|_\infty.$$

Proposition 3.3. *Pour Ω défini ci-dessus, il existe un réel $c_1 = c_1(M) > 0$ tel que pour tout g satisfaisant (3.38) et tout $c > c_1$ la solution $r_c = r_{c,g}$ de (3.39) vérifie les estimations suivantes:*

$$\begin{aligned} \sup\{r_c(x) : x \in \bar{\Omega}\} &= c, \\ r_c(x) &< c, \quad \text{pour tout } x \in \Omega. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Considérons les solutions ω_0, ω_1 et s_c respectivement des problèmes

$$(3.41) \quad \begin{cases} -\Delta\omega_0 = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \omega_0|_{\Gamma_2} = 0, \quad \omega_0|_{\Gamma_1} = 1, \end{cases}$$

$$(3.42) \quad \begin{cases} -\Delta\omega_1 = 1 & \text{dans } \Omega, \\ \omega_1|_{\Gamma_2} = 0, \quad \omega_1|_{\Gamma_1} = 0, \end{cases}$$

$$(3.43) \quad \begin{cases} -\Delta s_c = M & \text{dans } \Omega, \\ s_c|_{\Gamma_2} = 0, \quad s_c|_{\Gamma_1} = c. \end{cases}$$

Il est clair que l'on a

$$s_c = M\omega_1 + c\omega_0$$

et

$$\|\nabla s_c(x)\| = \|M\nabla\omega_1(x) + c\nabla\omega_0(x)\|.$$

Posons

$$\mathcal{L}(c) = \inf\{\|\nabla s_c(x)\| : x \in \overline{\Omega}\},$$

et

$$E = \{c \geq 0 : \mathcal{L}(c) = 0\}.$$

D'après la Proposition 3.2, E contient l'intervalle $[0, \|s_0\|_\infty]$ où s_0 est la solution de (3.43) correspondant à $c = 0$, i.e. $E \neq \emptyset$. On définit alors $c_1(M)$ par

$$c_1(M) = \sup\{c \geq 0 : c \in E\},$$

$$c_1(M) \geq \|s_0\|_\infty > 0.$$

Par définition de $c_1(M)$ tout $c > c_1(M)$ on a

$$(3.44) \quad \mathcal{L}(c) = \inf\{\|\nabla s_c(x)\| : x \in \overline{\Omega}\} > 0.$$

D'autre part ($c > c_1(M)$) par le principe du maximum la solution r_c de (3.39) vérifie

$$r_c(x) < s_c(x), \quad \text{pour tout } x \in \Omega,$$

donc

$$r_c(x) < s_c(x) \leq \sup\{s_c(x) : x \in \overline{\Omega}\},$$

pour tout $x \in \Omega$, i.e. d'après (3.44),

$$r_c(x) < \sup\{s_c(x) : x \in \bar{\Omega}\} = c = \sup\{r_c(x) : x \in \bar{\Omega}\},$$

pour tout $x \in \Omega$.

QUESTIONS. Que se passe-t-il pour s_c solution de (3.43) quand $c = c_1(M)$? Par exemple est-il exact que l'on a

$$\|\nabla s_c(x)\| > 0, \quad \text{pour tout } x \in \Omega$$

et que $\|\nabla s_c(x)\|$ ne s'annule que sur Γ_1 ?

REMARQUE 3.6. Les Propositions 3.2 et 3.3 montrent que les Théorèmes 3.1 et 3.2 ne peuvent avoir lieu pour tout c_1 et c_2 tels que $c_2 < c_1$; ce qui justifie l'hypothèse (3.26).

5. Cas d'un ouvert fortement étoilé.

La difficulté, dans ce cas, est due au fait que l'hypothèse

$$(3.44.1) \quad \begin{cases} 2f(x) + x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \leq 0 & \text{dans } \Omega, \\ f(x) \geq 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

n'est jamais vérifiée au voisinage de 0 quand f est positive: on s'en convainc facilement en considérant une fonction positive concave atteignant son maximum en $x = 0$. La première inégalité (3.44.1) est satisfaite si f est négative au voisinage de 0. Mais dans ce cas la solution u correspondante n'est pas nécessairement positive.

i) *Un principe du maximum.*

On se donne une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de signe non constant dans Ω . Et on se pose la question suivante: à quelles conditions sur f la solution u du problème

$$(3.45) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u|_{\Gamma} = 0, \end{cases}$$

soit positive. Pour cela on introduit les notations suivantes:

$$\alpha(x, r) = \inf \{ f(y) : y \in B(x, r) \},$$

pour tous $x \in \Omega$, $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset \Omega$,

$$\beta(x, r, R) = \inf \{ f(y) : y \in B(x, R) \setminus B(x, r) \},$$

pour tout $R > r$ tel que $B(x, R) \subset \Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$,

$$E = \{ x \in \Omega : f(x) < 0 \}, \quad F = \{ x \in \Omega : f(x) \geq 0 \}.$$

Théorème 3.3. *On suppose qu'il existe $x \in \Omega$, $r_0 > 0$ et $R > r_0$ tels que l'on ait*

$$(3.46) \quad B(x, r_0) \supset E$$

et

$$(3.47) \quad 1 - \frac{\alpha(x, r_0)}{\beta(x, r_0, R)} \leq \begin{cases} \left(\frac{R}{r_0}\right)^{N+1} \frac{(N-1)}{(N+1)\left(\frac{R}{r_0}\right)^{N-1} - 2}, & \text{si } N > 1, \\ \left(\frac{R}{r_0}\right)^2 \frac{1}{1 + 2 \log\left(\frac{R}{r_0}\right)}, & \text{si } N = 1. \end{cases}$$

Alors la solution u de (3.45) est strictement positive dans Ω .

La preuve de ce résultat nécessite deux résultats préliminaires.

On se donne un ouvert θ tel que $\theta \subset \bar{\Omega}$; et on considère le problème

$$\begin{cases} -\Delta v = g & \text{dans } \theta, \quad g \in L^2(\theta) \text{ par exemple,} \\ v|_{\partial\theta} = 0, \quad v \in H_0^1(\theta). \end{cases}$$

On pose

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{dans } \theta, \\ 0 & \text{dans } \Omega \setminus \bar{\theta}, \end{cases} \quad \tilde{v}(x) = \begin{cases} v(x) & \text{dans } \theta, \\ 0 & \text{dans } \Omega \setminus \bar{\theta}, \end{cases}$$

il est clair que $\tilde{v} \in H_0^1(\Omega)$ (cf. [22] par exemple).

Lemme 3.1 (de prolongement). *Si on suppose que*

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} \Big|_{\partial \theta} < 0$$

alors \tilde{v} vérifie dans $H^{-1}(\Omega)$ l'inégalité suivante

$$-\Delta \tilde{v} \leq \tilde{g}.$$

DÉMONSTRATION. C'est une simple application de la formule de Green: il est clair que $\Delta \tilde{v} \in H^{-1}(\Omega)$; et pour toute fonction φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} \langle -\Delta \tilde{v}, \varphi \rangle_{H^{-1} \times H_0^1} &= \langle -\Delta \tilde{v}, \varphi \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} = \langle -\Delta \varphi, \tilde{v} \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} \\ &= \int_{\Omega} -\Delta \varphi \tilde{v} \, dx = \int_{\theta} \nabla \varphi \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} v \, d\sigma \\ &= \int_{\theta} \nabla \varphi \cdot \nabla v \, dx = - \int_{\theta} \Delta v \varphi \, dx + \int_{\partial \theta} \frac{\partial v}{\partial \eta} \varphi \, d\sigma, \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned} \nabla \tilde{v}(x) &= \begin{cases} \nabla v(x) & \text{dans } \theta, \\ 0 & \text{dans } \Omega \setminus \bar{\theta}, \end{cases} \\ -\langle \Delta \tilde{v}, \varphi \rangle_{H^{-1} \times H_0^1} &= \int_{\theta} g \varphi \, dx + \int_{\partial \theta} \frac{\partial v}{\partial \eta} \varphi \, d\sigma \\ &= \int_{\Omega} \tilde{g} \varphi \, dx + \int_{\partial \theta} \frac{\partial v}{\partial \eta} \varphi \, d\sigma \\ &\leq \int_{\Omega} \tilde{g} \varphi \, dx. \end{aligned}$$

Et on conclut par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$.

Soit r_0 et R tels que $0 < r_0 < R$, et $g : B(0, R) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} \alpha < 0 & \text{sur } B(0, r_0), \\ \beta > 0 & \text{sur } B(0, R) \setminus B(0, r_0), \end{cases}$$

où α et β sont deux constantes.

On considère la solution v de

$$(3.48) \quad \begin{cases} -\Delta v = g & \text{dans } B(0, R), \\ v|_{\partial B} = 0. \end{cases}$$

Lemme 3.2 (de fonction radiale positive). *Si α, β, r_0 et R vérifie la relation*

$$1 - \frac{\alpha}{\beta} \leq \begin{cases} \left(\frac{R}{r_0}\right)^{N+1} \frac{(N-1)}{(N+1)\left(\frac{R}{r_0}\right)^{N-1} - 2}, & \text{si } N > 1, \\ \left(\frac{R}{r_0}\right)^2 \frac{1}{1 + 2 \log\left(\frac{R}{r_0}\right)}, & \text{si } N = 1, \end{cases}$$

alors (3.48) possède une solution radiale positive.

DÉMONSTRATION. La solution de (3.48) se calcule explicitement puisqu'elle vérifie

$$(3.49) \quad \begin{cases} -\frac{1}{r^N} \frac{d}{dr} \left(r^N \frac{dv}{dr} \right) = g(r) & \text{dans } B(0, R), \\ v(R) = 0, \quad v'(0) = 0, \quad N \geq 1, \end{cases}$$

$$v(r) = \int_r^R \frac{1}{\sigma^N} \left(\int_0^\sigma s^N g(s) ds \right) d\sigma,$$

$$v'(r) = -\frac{1}{r^N} \int_0^r s^N g(s) ds.$$

Par définition de g , on a $v'(r) \geq 0$, pour tout $r \in [0, r_0]$; i.e. si on impose la condition $v(0) \geq 0$, on aura $v(r) \geq 0$ sur $[0, r_0]$. De plus

$$(3.50) \quad v''(r) = -\frac{(\beta - \alpha)N}{N + 1} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{N+1} - \frac{\beta}{N + 1} \leq 0,$$

pour tout $r \in [r_0, R]$, joint à la condition aux limites $v(R) = 0$, entraîne que l'on a $v(r) \geq 0$, pour tout $r \in [r_0, R]$.

Ainsi la seule condition à imposer pour que (3.48) ait une solution $v(r)$ positive est $v(0) \geq 0$, qui, pour $N \neq 1$, se traduit par

$$v(0) = \frac{\beta R^2}{2(N + 1)} + \frac{\alpha - \beta}{2(N + 1)} r_0^2 - \frac{(\beta - \alpha) r_0^{N+1}}{N^2 - 1} \left(\frac{1}{r_0^{N-1}} - \frac{1}{R^{N-1}} \right) \geq 0$$

qui est une condition équivalente à

$$1 - \frac{\alpha}{\beta} \leq \left(\frac{R}{r_0}\right)^{N+1} \frac{(N-1)}{(N+1)\left(\frac{R}{r_0}\right)^{N-1} - 2}.$$

Dans le cas $N = 1$, le condition ci-dessus devient

$$v(0) = \frac{\alpha r_0^2}{4} + \frac{\beta}{4} (R^2 - r_0^2) + \frac{(\alpha - \beta) r_0^2}{2} \log \frac{R}{r_0} \geq 0$$

ou encore

$$1 - \frac{\alpha}{\beta} \leq \left(\frac{R}{r_0}\right)^2 \frac{1}{1 + 2 \log \frac{R}{r_0}}.$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.3. Soit v la solution radiale du problème

$$\begin{cases} -\Delta v = g & \text{dans } B(0, R), \\ v|_{\partial B(0, R)} = 0, \end{cases}$$

où l'on a supposé que le centre x est à l'origine, quitte à effectuer une translation, et où

$$g(r) = \begin{cases} \alpha(0, r_0) & \text{sur } B(0, r_0), \\ \beta(0, r_0, R) & \text{sur } B(0, R) \setminus B(0, r_0). \end{cases}$$

Par le Lemme 3.2 la fonction $v(r)$ est positive. De plus g est positive au voisinage du bord de $B(0, R)$, donc par le principe du maximum de Hopf on a

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} \Big|_{\partial B(0, R)} < 0.$$

On prolonge v par 0 à tout Ω : soit \tilde{v} ce prolongement. D'après le Lemme 3.1 \tilde{v} vérifie

$$(3.51) \quad \begin{cases} -\Delta \tilde{v} \leq \tilde{g}, \\ \tilde{v}|_{\partial \Omega} = 0, \end{cases}$$

où \tilde{g} est le prolongement de g par 0 à tout Ω . Puisque $f - \tilde{g} \geq 0$, dans Ω , le principe du maximum faible (cf. [26]) entraîne que l'on a

$$u(x) \geq \tilde{v}(x) \geq 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

i.e. $u(x) > 0$ dans $B(0, R)$.

Il reste à montrer que $u(x) > 0$ dans Ω . On considère alors l'équation (3.45) restreinte à $\Omega \setminus \overline{B(0, R-\varepsilon)}$ où $\varepsilon > 0$ assez petit vérifie $R - \varepsilon > r_0$

$$\begin{cases} -\Delta u = f \geq 0 & \text{dans } \Omega \setminus \overline{B(0, R-\varepsilon)}, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u|_{\partial B(0, R-\varepsilon)} \geq v|_{\partial B(0, R-\varepsilon)} > 0; \end{cases}$$

donc le principe du maximum classique (cf. [26]) entraîne que

$$u(x) > 0 \quad \text{dans } \Omega \setminus \overline{B(0, R-\varepsilon)}.$$

REMARQUE 3.7. Ce théorème possède un certain "caractère local": en effet ce principe du maximum a encore lieu si

$$E = \bigcup_i E_i, \quad i \in I \subseteq \mathbb{N},$$

et s'il existe $r_0^i > 0$ et $R_i > r_0^i$ satisfaisant (3.46) et (3.47) pour tout $i \in I$.

ii) *Localisation des points critiques.*

Etant donnés deux ouverts Ω et D convexes tels que $0 \in D$ et $\overline{D} \subset \Omega$, on considère une fonction $F(x)$ de Ω dans \mathbb{R}^+ satisfaisant les hypothèses suivantes:

$$F(x) = \begin{cases} \gamma, & \text{presque pour tout } x \in D, \quad \text{une const. } > 0, \\ f(x), & \text{pour tout } x \in \Omega \setminus \overline{D}, \quad f(x) \geq 0, \quad \text{pour tout } x, \end{cases}$$

où f est une fonction définie sur Ω qui vérifie les hypothèses suivantes (pour simplifier la présentation on choisit f régulière)

$$(3.51) \quad f|_{\partial D} \leq \gamma.$$

Pour tout $x \in \Omega$, tout $y \in D$, on pose

$$(3.52) \quad \begin{aligned} g(x, y) = & -\left(2 f(x+y) \chi_{\Omega \setminus \overline{D}}(x+y) + x \frac{\partial f}{\partial x}(x+y) \chi_{\Omega \setminus \overline{D}}(x+y)\right) \\ & + 2 \gamma \chi_D(x+y), \end{aligned}$$

$$\alpha(y, r) = \inf \{g(x, y) : x \in B(-y, r)\},$$

$$E(y) = \{x : g(x, y) \leq 0\},$$

$$\beta(y, r, R) = \inf \{g(x, y) : x \in B(-y, R) \setminus \overline{B(-y, r)}\},$$

où $r > 0$ et $R > 0$ sont tels que $\overline{D} \subset B(0, r) \subset B(0, R)$. Enfin on suppose que la solution u de

$$(3.53) \quad \begin{cases} -\Delta u = F & \text{sur } \Omega, \\ u|_{\Gamma} = 0, \end{cases}$$

possède la propriété suivante:

$$(3.54) \quad \begin{cases} \text{il existe } y_0 \in D \text{ point de maximum local pour } u \text{ tel que} \\ 2f(x + y_0) + x \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x + y_0) \leq 0, \\ \text{pour tout } x \text{ tel que } x + y_0 \in \Omega \setminus \overline{D}. \end{cases}$$

Il est clair que

$$E(y_0) = D - y_0 \quad \text{et} \quad \alpha(y_0, r) = -2\gamma.$$

Nous avons le résultat suivant:

Théorème 3.4. *On suppose que les hypothèses (3.51), (3.54) ont lieu et qu'il existe r_0 et R tels que $\alpha(y_0, r_0)$, $\beta(y_0, r_0, R)$ et $E(y_0)$ vérifient les inégalités (3.47) et (3.46) respectivement. Alors y_0 est le seul point critique de u dans Ω . De plus les ensembles de niveau de u sont strictement étoilés par rapport à y_0 .*

DÉMONSTRATION. On se ramène au Théorème 3.2. Pour tout $r > 0$ suffisamment petit, il existe $t_r > 0$ tel que l'ouvert $\{x \in \Omega : u(x) > t_r\}$ possède une composante connexe Ω_r convexe, contenant y_0 et incluse dans $B(y_0, r)$, la boule de centre y_0 et de rayon r . Ceci est toujours possible car y_0 est un point de maximum local de u .

L'ouvert $\Omega \setminus \overline{\Omega}_r$ est donc un 2-connexe fortement étoilé par rapport à y_0 et on a

$$\begin{cases} -\Delta u = F(x) & \text{dans } \Omega \setminus \overline{\Omega}_r, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u|_{\partial\Omega_r} = t_r > 0. \end{cases}$$

La fonction $v(x) = x \cdot \nabla u(x + y_0)$ pour tout $x \in \Omega - y_0 = \tilde{\Omega}$ vérifie

$$\begin{cases} -\Delta v(x) = 2\gamma \chi_D(x + y_0) + 2f(x + y_0) \chi_{\Omega \setminus \overline{D}}(x + y_0) \\ \quad + \mathcal{T} + x \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x + y_0) \chi_{\Omega \setminus \overline{D}}(x + y_0), \\ v|_{\partial \tilde{\Omega}} = 0, \quad v|_{\partial \tilde{\Omega}_r} = t_r > 0, \quad x \in (\Omega \setminus \overline{\tilde{\Omega}_r}) - y_0, \end{cases}$$

où $\tilde{\Omega}_r = \Omega_r - y_0$, \mathcal{T} est un élément de $H^{-1}(\tilde{\Omega})$ obtenu par application de la Proposition 3.1 et défini par

$$\langle \mathcal{T}, \varphi \rangle_{H^{-1} \times H_0^1} = \int_{\partial D} (f(y_0 + \cdot) - \gamma)(x \cdot \nu) \varphi \, d\sigma \leq 0,$$

pour tout $\varphi \geq 0$, $\varphi \in H_0^1(\tilde{\Omega})$. Par conséquent v satisfait l'inégalité

$$\begin{aligned} -\Delta v(x) &\leq 2\gamma \chi_D(x + y_0) + 2f(x + y_0) \chi_{\Omega \setminus \overline{D}}(x + y_0) \\ &\quad + x \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x + y_0) \chi_{\Omega \setminus \overline{D}}(x + y_0) = -g(x, y_0), \end{aligned}$$

dans $H^{-1}(\tilde{\Omega})$, et les conditions aux limites

$$v|_{\partial \tilde{\Omega}} < 0, \quad v|_{\partial \tilde{\Omega}_r} < 0,$$

grâce au principe du maximum de Hopf.

Si on considère ω solution dans $(\Omega \setminus \overline{\tilde{\Omega}_r}) - y_0$ de

$$\begin{cases} -\Delta \omega = 2\gamma \chi_D(x + y_0) + 2f(x + y_0) \chi_{\Omega \setminus \overline{D}}(x + y_0) \\ \quad + x \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x + y_0) \chi_{\Omega \setminus \overline{D}}(x + y_0) = -g(x, y_0), \\ \omega|_{\partial \tilde{\Omega}} = v|_{\partial \tilde{\Omega}} < 0, \quad \omega|_{\partial \tilde{\Omega}_r} = v|_{\partial \tilde{\Omega}_r} < 0, \end{cases}$$

on peut montrer, par une adaptation de la preuve du Théorème 3.3, que l'on a $\omega(x) < 0$ dans $(\Omega \setminus \overline{\tilde{\Omega}_r}) - y_0$; ce qui entraîne que $v(x) < 0$ dans $(\Omega \setminus \overline{\tilde{\Omega}_r}) - y_0$, pour tout $r > 0$, par application du principe du maximum classique [26]; *i.e.* $|\nabla u(x)| > 0$ pour tout $x \in \Omega$, $x \neq y_0$.

iii) *localisation des points de maximum global.*

On suppose Ω convexe borné régulier et on considère l'ensemble \mathcal{E} des fonctions positives, défini par

$$\mathcal{E} = \{f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ : 0 \leq a \leq f(t) \leq b\},$$

où a et b sont deux constantes. Pour tout f dans \mathcal{E} considérons la solution $u = u_f$ de l'équation

$$(3.55) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u|_{\Gamma} = 0. \end{cases}$$

Nous avons le résultat suivant

Proposition 3.4. *Il existe dans Ω un voisinage \mathcal{V} de $\partial\Omega$ ne dépendant que de Ω , a et b tel que pour tout f appartenant à \mathcal{E} , la solution $u = u_f$ de (3.55) ne possède pas de points de maximum global dans \mathcal{V} . De plus le voisinage \mathcal{V} est une "couronne convexe", donnée explicitement par:*

$$\mathcal{V} = \{x \in \Omega : u_b(x) < \sup\{u_a(x) : x \in \Omega\}\}.$$

DÉMONSTRATION. Par le principe du maximum on a

$$(3.54.1) \quad u_a(x) \leq u(x) = u_f(x) \leq u_b(x), \quad \text{pour tout } x \in \bar{\Omega}.$$

Comme les ensembles de niveaux $\{x \in \Omega : u_b(x) > t\}$ de u_b sont convexes (cf. [14]) il s'ensuit que $\mathcal{V} = \{x \in \Omega : u_b(x) < \|u_a\|_{L^\infty}\}$ est une "couronne convexe" ne dépendant que de a et b . On se propose alors de montrer que pour tout f dans \mathcal{E} , u_f n'a pas de point de maximum global dans \mathcal{V} .

D'après Stampacchia [25] il existe $K = K(\Omega, \beta)$ tel que l'on ait

$$(3.55.1) \quad \|\nabla u_f\|_{L^\infty(\Omega)} \leq K, \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{E}.$$

Soit y_0 quelconque appartenant à \mathcal{V} ; on a

$$(3.56) \quad u_b(y_0) < \|u_a\|_\infty = \|u_a\|_{L^\infty};$$

soit $r_0 > 0$ satisfaisant

$$(3.57) \quad \frac{\|u_a\|_\infty - u_b(y_0)}{r_0} > K$$

et tel que la boule $B(y_0, r_0)$ soit incluse dans \mathcal{V} .

Nous pouvons affirmer que $B(y_0, r_0)$ ne contient aucun point de maximum global de u_f . En effet supposons qu'il existe $\bar{x} \in B(y_0, r_0)$ tel que

$$u_f(\bar{x}) = u(\bar{x}) = \|u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Nous avons, grâce à (3.55)

$$K \geq \frac{u(\bar{x}) - u(y_0)}{|\bar{x} - y_0|} \geq \frac{u(\bar{x}) - u(y_0)}{r_0}$$

qui donne, compte tenu de (3.54.1) et (3.57)

$$(3.58) \quad K \geq \frac{u(\bar{x}) - u(y_0)}{r_0} > \frac{\|a_a\|_\infty - u_b(y_0)}{r_0} > K,$$

ceci constitue une contradiction.

REMARQUE 3.8. Il serait intéressant de savoir si l'hypothèse (3.5.4) est nécessaire.

Références.

- [1] Protter, M., Weinberger, H., *Maximum Principles in differential equations*. Prentice-Hall, 1967.
- [2] Sperb, R., *Maximum Principles and their applications*. Academic Press, 1981.
- [3] Serrin, J., A symmetry problem in Potential Theory. *Arch. Rational Mech. Anal.* **43** (1971), 304-318.
- [4] Gidas, N., Ni, W. N., Nirenberg, L., Symmetry and related properties via the maximum principle. *Comm. Math. Phys.* **68** (1979), 209-243.
- [5] Korevaar, N., Capillary surface convexity above convex domains. *Indiana Univ. Math. J.* **32** (1983), 73-81.
- [6] Korevaar, N., Convex solutions to nonlinear elliptic and parabolic boundary value problems. *Indiana Univ. Math. J.* **32** (1983), 603-614.

- [7] Caffarelli, L. A., Spruck, J., Convexity properties of solutions to some classical variational problems. *Comm. Partial Diff. Equations* **7** (1982), 1337-1379.
- [8] Brascamp, H. J., Lieb, E. H., On extension of the Brunn-Minkowski and Prékopa-Leindler theorems. *J. Funct. Anal.* **22** (1976), 366-389.
- [9] Kennington, A. U., Power concavity and boundary value problems. *Indiana Univ. Math. J.* **34** (1985), 687-704.
- [10] Kawohl, B., *Rearrangements and convexity of level sets in PDE*. Lecture Notes in Math. **1150**, Springer, 1985.
- [11] Lions, P. L., Two geometrical properties of solutions of semilinear problems. *Appl. Anal.* **12** (1981), 267-272.
- [12] Caffarelli, L. A., Friedman, A., Convexity of solutions of semilinear elliptic equations. *Duke Math. J.* **52** (1985), 431-456.
- [13] Korevaar, N., Lewis, J. L., Convex solutions of certain elliptic equations have constant rank Hessians. *Arch. Rational Mech. Anal.* **97** (1987), 19-32.
- [14] Lewis, J. L., Capacitary functions in convex rings. *Arch. Rational Mech. Anal.* **66**, (1977), 201-224.
- [15] Gabriel, R., A result concerning convex level surfaces of 3-dimensional harmonic functions. *J. London Math. Soc.* **32** (1957), 286-294.
- [16] Pohozaev, S. I., Eigenfunctions of the equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$. *Soviet Math. Dokl.* **165** (1965), 1408-1411.
- [17] Sakaguchi, S. Concavity properties of solutions to some degenerate quasilinear elliptic Dirichlet problems. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **14** (1993), 403-421.
- [18] Tahraoui, R., Contrôle optimal dans les équations elliptiques. *SIAM J. Control Optim.* **3** (1992), 495-521.
- [19] de Figueiredo, D. G., Mitidieri, E., Maximum principles for cooperative elliptic systems. *C. R. Acad. Sci. Paris* **310** (1990), 49-52.
- [20] Lions, J. L., Magenes, E., *Problèmes aux limites non linéaires*. Editions Dunod-Gauthiers-Villars, 1969.
- [21] Miranda, C., Formule di maggiorazione e theorema di esistenza per le funzioni biarmoniche di due variabili. *Giorn. Mat. Battaglini* **78** (1948), 97-118.
- [22] Stampacchia, G., Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus. *Ann. Inst. Fourier* **15** (1965), 189-258.
- [23] Giga, Y., Goto, S., Ishii, H., Sato, M. H., Comparaison principle and convexity preserving properties for singular degenerate parabolic equations on unbounded domains. Preprint.

- [24] Alexandrof. *Die innere Geometrie der konvexen*. Springer-Verlag, 1955.
- [25] Stampacchia, G., On some regular multiple integral problems in the calculus of variations. *Comm. Pure Appl. Math.* XVI (1963), 383-421.
- [26] Gilbarg, D., Trudinger, N. S., *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer Verlag, 1983.
- [27] Temam, R., *Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis*. North-Holland, 1979.
- [28] Hörmander, L. *The analysis of linear partial differential operators*, I, II, III. Springer-Verlag, 1983-85.
- [29] Tahraoui, R., Sur le principe du maximum des opérateurs elliptiques. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* **320** (1995), 1453-1458.

Recibido: 2 de junio de 1.994

R. Tahraoui
CEREMADE
Université Paris-Dauphine
Place de Lattre de Tassigny
75775 Paris Cedex 16
FRANCE
tahroui@ceremade.dauphine.fr