Revista Matemática Iberoamericana
Vol. 11, N.° 3, 1995

Variétés riemanniennes isométriques à l'infini

Thierry Coulhon et Laurent Saloff-Coste

1. Introduction.

Dans cet article, nous nous intéresserons à certaines propriétés des variétés riemanniennes non compactes qui ne dépendent que de leur géométrie à l'infini; pour cela, nous utiliserons un procédé de discrétisation qui associe un graphe (pondéré) à une variété. Nous reprenons ainsi les idées et les méthodes de [3], [17], [20], [21], [22], [31], [34] (voir aussi [1]), en leur incorporant des développements plus récents [11], [28], [29], qui font bien apparaître le rôle joué dans ces questions par les inégalités de Poincaré.

Soit (M, d, μ) un espace métrique mesuré; notons $V(x,r)$ le volume de la boule dans M de centre x et de rayon r, autrement dit $\mu(\{y \in M : \ d(y,x) \leq r\})$. Nous supposerons toujours $V(x,r) < +\infty$ pour $r < +\infty$.

Nous dirons que (M, d, μ) vérifie une condition de doublement du volume à rayon fixé si pour tout $r > 0$, il existe C_r tel que

$$(DV)_{\mathrm{loc}} \qquad V(x, 2r) \leq C_r \, V(x,r) , \qquad \text{pour tout } x \in M ,$$

Notons que $(DV)_{\mathrm{loc}}$ est une condition locale en r mais uniforme en $x \in M$.

Soient (M_i, d_i, μ_i), $i = 1, 2$, deux espaces métriques mesurés non compacts vérifiant $(DV)_{\mathrm{loc}}$. Posons

$$V_i(y,r) = \mu_i \left(\{z \in M_i : \ d_i(y,z) \leq r\}\right) .$$

Nous dirons qu'ils sont isométriques à l'infini s'il existe une application Φ de M_1 dans M_2 telle que

i) il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[\Phi(M_1)]_\varepsilon = M_2$, où $[A]_\varepsilon$ désigne le voisinage d'ordre ε de A.

ii) il exite $a \geq 1$, $b \geq 0$ tels que $a^{-1}\, d_1(x,y) - b \leq d_2(\Phi(x), \Phi(y)) \leq a\, d_1(x,y) + b$, pour tout $x, y \in M_1$.

iii) il existe $C > 0$ tel que $C^{-1}\, V_1(x,1) \leq V_2(\Phi(x),1) \leq C\, V_1(x,1)$, pour tout $x \in M_1$.

L'existence d'une application vérifiant i) et ii) définit une relation d'équivalence entre espaces métriques; cette notion a été considérée par Kanai [20]. L'existence d'une application vérifiant i), ii) et iii) définit une relation d'équivalence entre espaces métriques mesurés vérifiant l'hypothèse $(DV)_{\mathrm{loc}}$; cette relation apparaît dans [20].

Dans ce qui suit, nous considérerons essentiellement deux types d'espaces métriques mesurés: des variétés riemanniennes, munies de la distance et de la mesure riemannienne, et des graphes dénombrables, localement finis, connexes, munis de leur distance naturelle, et pondérés, c'est-à-dire munis de la mesure associée à une fonction positive fixée. Sur les graphes, nous ferons l'hypothèse que les sommets ont un nombre de voisins borné. Sur les variétés, nous ferons des hypothèses très faibles de géométrie locale.

Soit M une variété riemannienne connexe et complète, munie de sa mesure riemannienne que nous noterons tantôt μ tantôt dx. Pour $x \in M$ et $r > 0$, $B(x,r)$ désignera la boule riemannienne de centre x et de rayon r, et $V(x,r)$ son volume. Pour ψ une fonction sur M, $\psi_r(x)$ désignera sa moyenne sur $B(x,r)$, c'est-à-dire

$$\psi_r(x) = \frac{1}{V(x,r)} \int_{B(x,r)} \psi(y)\, dy\,.$$

Nous dirons que M vérifie l'inégalité de Poincaré sur les boules à rayon fixé, en abrégé vérifie $(P)_{\mathrm{loc}}$, si pour tout $\sigma \geq 1$ et pour tout $r > 0$ il existe $C_{\sigma,r}$ tels que, pour toute fonction $\psi \in C_0^\infty(M)$ et tout $x \in M$,

$$(P)_{\mathrm{loc}} \quad \Big(\int_{B(x,r)} |\psi(y) - \psi_r(x)|^\sigma\, dy \Big)^{1/\sigma} \leq C_{\sigma,r} \Big(\int_{B(x,2r)} |\nabla\psi(y)|^\sigma\, dy \Big)^{1/\sigma}.$$

Dans le second membre de $(P)_{\mathrm{loc}}$ on peut toujours, sous l'hypothèse $(DV)_{\mathrm{loc}}$, remplacer $B(x,2r)$ par $B(x,(1+\alpha)r)$, pourvu que $\alpha > 0$: les familles d'inégalités obtenues pour différents $\alpha \geq 0$ sont deux à deux équivalentes, sous l'hypothèse $(DV)_{\text{loc}}$. Si besoin est, on notera $(P_\sigma)_{loc}$ la version à σ fixé de l'inégalité ci-dessus.

Notons que les variétés à courbure de Ricci minorée vérifient des propriétés plus fortes que $(P)_{\text{loc}}$ et $(DV)_{\text{loc}}$ (voir $(P)_0$ et $(DV)_0$ au Paragraphe 8 ci-dessous); les conditions que nous venons de considérer n'imposent, elles, aucune contrainte vraiment locale sur M. Nous n'imposerons pas non plus $\sup_{x\in M} V(x,r) < +\infty$, pour r fixé, contrairement à ce qui a lieu dans les variétés à courbure de Ricci minorée.

Nous commencerons par montrer que certaines inégalités de type Poincaré ou Sobolev se transmettent entre graphes pondérés isométriques à l'infini. Puis nous discrétiserons les variétés vérifiant $(P)_{\text{loc}}$ et $(DV)_{\text{loc}}$, c'est-à-dire qu'à une telle variété nous associerons un graphe pondéré qui lui soit isométrique à l'infini, et nous vérifierons que cette opération préserve à nouveau certaines inégalités analytiques. Nous obtiendrons ainsi la stabilité par isométrie à l'infini de plusieurs propriétés des variétés vérifiant $(P)_{\text{loc}}$ et $(DV)_{\text{loc}}$. Ceci généralise les résultats de [20], [21], [22] car nous ne faisons pas d'hypothèse sur le rayon d'injectivité de M (en particulier, pour $r > 0$ fixé, $V(x,r)$ n'est pas supposé uniformément minoré, sauf lorsque nous considérons des inégalités de Sobolev qui l'imposent), ainsi que ceux de [28], [29], car la notion d'isométrie à l'infini est plus générale que celle de quasi-isométrie.

En couplant les considérations précédentes et les méthodes de [29], nous montrerons que les variétés à courbure de Ricci minorée qui sont isométriques à l'infini soit à une variété à courbure de Ricci positive ou nulle, soit à un groupe de Lie à croissance polynômiale du volume, ne possèdent pas de fonctions harmoniques positives non triviales. Ceci généralise dans deux directions le résultat de [20] qui traite le cas des variétés isométriques à l'infini à $\mathbb{R}^n$ et de dimension inférieure ou égale à n.

Les résultats de cet article valent dans un cadre plus général que celui des variétés riemanniennes: il suffit de considérer comme dans [29] des variétés munies d'un opérateur du second ordre localement sous-elliptique et de la distance qu'il induit; on peut ainsi traiter, par exemple, des opérateurs sous-elliptiques sur les groupes de Lie à croissance polynômiale du volume (voir Paragraphe 9).

2. Croissance du volume.

Ce paragraphe généralise [20, Paragraphe 3]. Commençons par un lemme technique dont la preuve est évidente et qui nous sera utile dans toute la suite.

Lemme 2.1. *Si l'espace métrique mesuré (M, d, μ) vérifie $(DV)_{\mathrm{loc}}$, alors, pour tous r_1, r_2 tels que $0 < r_1 < r_2$, il existe C_{r_1,r_2} tel que pour tout $x \in M$,*

$$V(x, r_2) \leq C_{r_1,r_2} V(x, r_1).$$

En particulier, pour tout $r \leq R$, pour tous $x, y \in M$ tels que $d(x, y) \leq R$, on a

$$V(x, r) \leq C_{r,2R} V(y, r).$$

Soient (M_1, d_1, μ_1) et (M_2, d_2, μ_2) deux espaces métriques mesurés vérifiant $(DV)_{\mathrm{loc}}$, et Φ une isométrie à l'infini de M_1 dans M_2. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $[\Phi(M_1)]_\varepsilon = M_2$; à $z \in M_2$, associons un élément x de M_1 tel que $d_2(z, \Phi(x)) \leq \varepsilon$, et notons-le $\Phi^{-1}(z)$; Φ^{-1} définit une isométrie à l'infini de M_2 dans M_1.

Proposition 2.2. *Soient (M_1, d_1, μ_1) et (M_2, d_2, μ_2) deux espaces métriques mesurés vérifiant $(DV)_{\mathrm{loc}}$, et Φ une isométrie à l'infini de M_1 dans M_2. Alors, il existe $C > 0$ tel que*

$$C^{-1} V_1(x, C^{-1} r) \leq V_2(\Phi(x), r) \leq C\, V_1(x, C r),$$

pour tous $x \in M_1$, $r \geq 1$.

PREUVE. Soit $R \geq 1$ tel que $aR - b = R' > 0$ (nous reprenons, pour les propriétés de Φ, les notations de l'introduction). Soit $r \geq R$, $x \in M_1$, et $(x_i)_{i=1}^k$ une partie maximale R-séparée de $B(x, r)$. On a $B(x, r) \subset \cup_{i=1}^k B(x_i, R)$, et donc $V_1(x, r) \leq \sum_{i=1}^k V_1(x_i, R)$. De plus, d'après le Lemme 2.1,

$$V_1(x_i, R) \leq C_{1,R} V_1(x_i, 1) \leq C_{1,R}\, C\, V_2(\Phi(x_i), 1)$$

(la constante C provient de la propriété iii) de l'isométrie à l'infini). Comme les boules $B(x_i, R/2)$ sont deux à deux disjointes, il en est de même des boules $B(\Phi(x_i), R'/2)$. Mais, à nouveau d'après le Lemme 2.1, $V_2(\Phi(x_i), 1) \leq C_{1,R'} V_2(\Phi(x_i), R'/2)$, d'où

$$V_1(x,r) \leq \sum_{i=1}^{k} C_{1,R}\, C\, C_{1,R'}\, V_2(\Phi(x_i), R'/2)\,.$$

Enfin, comme $\Phi(x_i) \in B(\Phi(x), ar+b)$, $B(\Phi(x_i), R'/2) \subset B(\Phi(x), ar + b + R'/2)$, d'où

$$V_1(x,r) \leq C'\, V_2(\Phi(x), ar+b+R'/2)\,.$$

On en déduit facilement l'inégalité de gauche, en passant de $r \geq R$ à $r \geq 1$ par l'intermédiaire de la condition $(DV)_{\mathrm{loc}}$. Le même raisonnement appliqué à M_2, M_1 et Φ^{-1} montre que

$$V_2(\Phi(x), r) \leq C\, V_1(\Phi^{-1} \circ \Phi(x), C\,r)\,, \qquad x \in M_1\,.$$

L'inégalité de droite s'en déduit en utilisant le fait que $d_1(\Phi^{-1} \circ \Phi(x), x)$ est borné.

Nous dirons que (M, d, μ) vérifie la propriété de doublement du volume à l'infini si pour tout $r_0 > 0$, il existe C_{r_0} tel que

$$(DV)_\infty \qquad V(x, 2r) \leq C_{r_0}\, V(x,r)\,, \qquad \text{pour tous } x \in M\,,\ r > r_0\,.$$

On déduit de ce qui précède

Proposition 2.3 *Soient (M_1, d_1, μ_1) et (M_2, d_2, μ_2) deux espaces métriques mesurés vérifiant $(DV)_{\mathrm{loc}}$ et isométriques à l'infini. Alors, si (M_1, d_1, μ_1) vérifie $(DV)_\infty$, il en est de même de (M_2, d_2, μ_2).*

3. Analyse sur les graphes pondérés.

Soit X un graphe localement uniformément fini: le nombre de voisins de chacun de ses sommets est borné par N. Soit d la distance naturellement associée au graphe X: $d(x,y)$ est le plus petit nombre de pas nécessaire pour relier x à y; nous noterons $x \sim y$ si x et y sont voisins dans X, c'est-à-dire si $d(x,y) = 1$, $x \simeq y$ si x et y sont voisins ou égaux. Soit m une fonction strictement positive fixée sur X. Nous supposerons

$$C_m = \sup_{\substack{x,y \\ x\sim y}} \frac{m(x)}{m(y)} < +\infty .$$

Nous dirons que (X,m) est un graphe pondéré. Si l'on pose

$$V(x,n) = \sum_{B(x,n)} m(y) ,$$

on a

$$m(x) \leq V(x,n) \leq m(x)\, C^n\, N^n , \qquad \text{pour tous } \; x \in X, \; n \in \mathbb{N}^* .$$

Autrement dit, si on considère m comme une mesure discrète sur X, l'espace métrique mesuré (X,d,m) vérifie $(DV)_{\text{loc}}$. La constante qui intervient dans $(DV)_{\text{loc}}$ est contrôlée par N et C_m.

Posons, pour $E \subset X$,

$$\|f\|_{p,E} = \Big(\sum_E |f(x)|^p\, m(x) \Big)^{1/p} .$$

Nous noterons $\|\cdot\|_{p,X}$, ou $\|\cdot\|_p$ s'il n'y a pas d'ambiguïté, la norme ℓ^p par rapport à la mesure m sur X. Nous désignerons par

$$\delta f(x) = \Big(\sum_{y\sim x} |f(y) - f(x)|^2 \Big)^{1/2}$$

la longueur du gradient discret en x de la fonction f.

Dans la suite on notera simplement X le graphe pondéré (X,m) et l'espace métrique mesuré correspondant.

A. Inégalités de Sobolev sur les graphes pondérés.

Soit

$$S_{p,q} = S_{p,q}(X) = \inf \Big\{ \frac{\|\delta f\|_p}{\|f\|_q} \; : \; f \in c_0(X) , \; f \neq 0 \Big\} .$$

Nous dirons que X vérifie l'inégalité de Sobolev $(S_{p,q})$ si $S_{p,q}(X) > 0$; dans ce cas, on a

$$(S_{p,q}) \qquad S_{p,q}\, \|f\|_q \leq \|\delta f\|_p , \qquad \text{pour tout } \; f \in c_0(X) .$$

Ceci ne peut avoir lieu que si $q \geq p$. En appliquant $(S_{p,q})$ aux fonctions de Dirac, on voit que le cas $q > p$ ne peut se présenter que si $\inf_{x \in X} m(x) > 0$. On notera que

$$S_{p,p}(X) \leq N\, C_m\,.$$

Les inclusions entre espaces ℓ^p montrent facilement que $S_{p',q'}(X) \geq S_{p,q}(X)$, si $p' \leq p$ et $q' \geq q$, mais on a aussi:

Proposition 3.1. *Sur un graphe pondéré, l'inégalité $(S_{p,q})$ entraîne $(S_{p',q'})$ avec $1/p' - 1/q' = 1/p - 1/q$ pour $p' \geq p$, et $(S_{p',q'})$ avec $1/p' - 1/q' = 1 - p/q$ pour $1 \leq p' < p$. Dans le premier cas, on a*

$$S_{p',q'} \geq c\, S_{p,q}\,,$$

et dans le second,

$$S_{p',q'} \geq c'\, S_{p,q}^{p}\,,$$

où c, c' ne dépendent que de p, p', q, de la constante C_m, et de la borne N sur le nombre de voisins dans X.

REMARQUE. Les implications précédentes ne peuvent être améliorées comme le montrent les cas de $\mathbb{Z}^n$ (où $S_{p,q}(\mathbb{Z}^n) > 0$ si et seulement si $1/p - 1/q \geq 1/n$) et des graphes construits dans [12] qui vérifient $(S_{2,q})$ mais pas $(S_{1,q/2+\varepsilon})$.

PREUVE. La proposition est classique dans le cas non pondéré. Nous en donnons la preuve dans le cas général pour la commodité du lecteur. La première assertion s'obtient en appliquant $(S_{p,q})$ à $f^{q'/q}$, avec $f \geq 0$. Plus précisément,

$$\begin{aligned}
\|\delta(f^{q'/q})\|_p &= \Big(\sum_x \Big(\sum_{y\sim x} |f^{q'/q}(y) - f^{q'/q}(x)|^2\Big)^{p/2} m(x)\Big)^{1/p} \\
&\leq \frac{q'}{q}\Big(\sum_x \Big(\sum_{y\sim x} |f(y) - f(x)|^2 \\
&\qquad\qquad \cdot (\max\{f(y), f(x)\})^{2(q'/q-1)}\Big)^{p/2} m(x)\Big)^{1/p} \\
&\leq \frac{q'}{q}\Big(\sum_x \Big(\sum_{y\sim x} |f(y) - f(x)|^2\Big)^{p/2} g(x)^{p(q'/q-1)}\, m(x)\Big)^{1/p},
\end{aligned}$$

où $g(x) = \max\{f(y) :\ y \simeq x\}$. L'inégalité de Hölder donne alors

$$\|\delta(f^{q'/q})\|_p \le \frac{q'}{q}\Big(\sum_x \Big(\sum_{y\sim x} |f(y)-f(x)|^2\Big)^{p'/2} m(x)\Big)^{1/p'} \cdot \Big(\sum_x g(x)^{q'} m(x)\Big)^{1/q-1/q'}.$$

Maintenant

$$\begin{aligned}\sum_x g(x)^{q'} m(x) &\le \sum_x \Big(\sum_{y\simeq x} f(y)^{q'}\Big) m(x)\\ &\le C_m \sum_x \Big(\sum_{y\simeq x} f(y)^{q'} m(y)\Big)\\ &\le (N+1)\, C_m \sum_y f(y)^{q'} m(y).\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\|\delta(f^{q'/q})\|_p \le \frac{q'}{q}\,(N+1)^{1/q-1/q'} C_m^{q'/q-1}\, \|\delta f\|_{p'}\, \|f\|_{q'}^{q'/q-1}.$$

Comme

$$S_{p,q}\, \|f\|_{q'}^{q'/q} = S_{p,q}\, \|f^{q'/q}\|_q \le \|\delta(f^{q'/q})\|_p\,,$$

pour tout $f \in c_0(X)$, $f \ge 0$, on a

$$S_{p,q}\, \|f\|_{q'} \le \frac{q'}{q}\,(N+1)^{1/q-1/q'} C_m^{q'/q-1}\, \|\delta f\|_{p'}\,,$$

autrement dit, en utilisant le fait que $\delta\,|f| \le \delta f$,

$$S_{p,q} \le \frac{q'}{q}\,(N+1)^{1/q-1/q'} C_m^{q'/q-1} S_{p',q'}\,.$$

Pour obtenir la seconde assertion, on applique $(S_{p,q})$ à la fonction caractéristique d'un sous-ensemble fini Ω de X:

$$S_{p,q}\, \|1_\Omega\|_q \le \|\delta 1_\Omega\|_p\,.$$

Mais $\|1_\Omega\|_q = m(\Omega)^{1/q}$, et

$$\delta 1_\Omega(x) = \Big(\sum_{y\sim x} |1_\Omega(y) - 1_\Omega(x)|^2\Big)^{1/2} \begin{cases} = 0\,, & \text{si } x \in (\Omega\setminus\partial\Omega)\cup(\Omega^c\setminus\partial\Omega^c)\,,\\ \le \sqrt{N}\,, & \text{si } x \in \partial\Omega\cup\partial\Omega^c\,,\end{cases}$$

où, pour $A \subset X$, on note ∂A l'ensemble des points de A qui ont un voisin dans A^c. Donc

$$\|\delta 1_\Omega\|_p = \Big(\sum_x \Big(\sum_{y\sim x} |f(y)-f(x)|^2\Big)^{p/2} m(x)\Big)^{1/p}$$
$$\leq N^{1/2}\, m(\partial\Omega \cup \partial\Omega^c)^{1/p}\,.$$

Par ailleurs $m(\partial\Omega^c) = \sum_{x\in\partial\Omega^c} m(x) \leq C_m \sum_{x\in\partial\Omega^c} m(y_x)$, où y_x est un point de $\partial\Omega$ voisin de x; chaque y_x ne pouvant intervenir plus de N fois dans la sommation, cela donne $m(\partial\Omega^c) \leq C_m\, N\, m(\partial\Omega)$. Finalement,

$$m(\Omega)^{p/q} S^p_{p,q} \leq N^{p/2}\,(1 + C_m\, N)\, m(\partial\Omega)\,,$$

soit, par la formule de coaire discrète ([8, preuve du Théorème 5], ou [33]),

$$\|f\|_{q/p}\, S^p_{p,q} \leq C_{p,q}\, N^{p/2}\,(1 + C_m\, N)\, \|\delta f\|_1\ ,$$

pour tout $f \in c_0(X)$, soit

$$S_{1,q/p} \geq C^{-1}_{p,q}\, N^{-p/2}\,(1 + C_m\, N)^{-1}\, S^p_{p,q}\ .$$

Ici, $C_{p,q}$ est la constante amenée par la formule de coaire. On applique alors la première assertion pour conclure.

Corollaire 3.2. *Soit p, $1 \leq p < +\infty$. Sur un graphe pondéré, l'inégalité $(S_{p,p})$ entraîne $(S_{p',p'})$, pour tout p', $1 \leq p' < +\infty$, et, si $p' \leq p$,*

$$c\, S_{p',p'} \leq S_{p,p} \leq C\, S^{1/p}_{p',p'}\ ,$$

où c, C ne dépendent que de p, p', de la constante C_m, et de N.

Le cas $p = 1$, $p' = 2$, dans le cas non pondéré, figure dans [22, Proposition 4.2].

B. Marches aléatoires.

Considérons sur X le noyau markovien

$$p(x,y) = \begin{cases} \dfrac{m^{1/2}(y)}{\sum\limits_{z\sim x} m^{1/2}(z)}\,, & \text{si } y \sim x\,,\\[2ex] 0\,, & \text{sinon,}\end{cases}$$

et P l'opérateur associé:

$$Pf(x) = \sum_y p(x,y)\, f(y)\,.$$

Le noyau p est réversible par rapport à la mesure

$$\pi(x) = m^{1/2}(x) \Big(\sum_{z \sim x} m^{1/2}(z) \Big)\,,$$

c'est-à-dire que

$$\pi(x)\, p(x,y) = \pi(y)\, p(y,x) = \begin{cases} m^{1/2}(x)\, m^{1/2}(y)\,, & \text{si } y \sim x\,, \\ 0\,, & \text{sinon}, \end{cases}$$

ou encore que P est auto-adjoint sur $\ell^2(\pi)$. Notons que $\pi(x)$ est de l'ordre de $m(x)$. Il en résulte que l'expression

$$\langle (I-P)f, f \rangle_{\ell^2(\pi)} = \sum_{x,y} |f(y) - f(x)|^2\, p(x,y)\, \pi(x)$$

est uniformément comparable à

$$\sum_x \Big(\sum_{y \sim x} |f(y) - f(x)|^2 \Big) m(x) = \|\delta f\|_2\,.$$

REMARQUE. D'autres choix de p conduisent bien sûr au même résultat: il suffit de considérer une quantité $q(x,y)$ égale à 0 si $x \not\sim y$, et si $x \sim y$, à une expression symétrique et positive de $m(x)$ et $m(y)$, de l'ordre de $m(x)$ si l'on fait formellement $x = y$ (par exemple $m(x) + m(y)$, $\sup\{m(x), m(y)\}$ ou comme ci-dessus $m^{1/2}(x)\, m^{1/2}(y)$). On pose alors

$$\pi(x) = \sum_{z \sim x} q(x,z)\,, \qquad p(x,y) = \frac{q(x,y)}{\pi(x)}\,.$$

Définissons les noyaux itérés p_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, en posant

$$p_k(x,y) = \sum_z p_{k-1}(x,z)\, p(z,y)\,, \qquad p_0(x,y) = \delta_x(y)\,,$$

et

$$G(x,y) = \sum_0^\infty p_k(x,y)\,.$$

Rappelons que la chaîne de Markov associée à p est transiente si et seulement si $G(x,x) < +\infty$ pour un (et donc pour tous) $x \in X$. Nous dirons alors que X est transient et sinon que X est récurrent. Nous utiliserons le critère suivant (voir [32], [1]):

Théorème 3.3. *Le graphe pondéré X est transient si et seulement si il existe $x_0 \in X$ et $C = C(x_0)$ tels que*

$$f(x_0) \leq C\,\|\delta f\|_2\,, \qquad \textit{pour tout } f \in c_0(X)\,.$$

De plus, si X est transient, cette inégalité vaut pour tout $x_0 \in X$.

Nous dirons que X vérifie l'inégalité de Nash de dimension $\nu > 0$ si

$$N_\nu = N_\nu(X) = \inf\left\{\frac{\|\delta f\|_2\,\|f\|_1^{2/\nu}}{\|f\|_2^{1+2/\nu}} : f \in c_0(X)\,,\ f \neq 0\right\} > 0\,.$$

Dans ce cas, on a

$$(N_\nu) \qquad N_\nu\,\|f\|_2^{1+2/\nu} \leq \|\delta f\|_2\,\|f\|_1^{2/\nu}\,, \qquad \text{pour tout } f \in c_0(X)\,.$$

Notons que, comme pour l'inégalité $(S_{p,q})$ avec $p < q$, (N_ν) implique $\inf_X m > 0$.

Les inégalités de Nash et de Sobolev sont liées à la décroissance des noyaux itérés p_k comme l'indique le théorème suivant (voir [33], [6], [13]).

Théorème 3.4. *Pour $\nu > 0$, l'inégalité (N_ν) équivaut à*

$$\textit{il existe } C > 0 \textit{ tel que } p_k(x,x) \leq C\,m(x)\,k^{-\nu/2}\,, \textit{ pour tout } x \in X\,.$$

De plus, si $\nu > 2$ et $q = 2\nu/(\nu-2)$, ces propriétés sont aussi équivalentes à $(S_{2,q})$.

4. Graphes pondérés isométriques à l'infini.

La proposition suivante est l'adaptation de [22, Proposition 2.1] au cas des graphes pondérés. Nous n'en répéterons pas la preuve.

Proposition 4.1. *Soient (X_1,m_1) et (X_2,m_2) deux graphes pondérés isométriques à l'infini. Alors, si (X_1,m_1) vérifie l'inégalité $(S_{p,q})$ ou l'inégalité (N_ν), il en est de même de (X_2,m_2).*

Nous dirons qu'un graphe pondéré (X,m) vérifie l'inégalité de Poincaré à l'échelle (P) s'il existe une constante $C \geq 1$ et, pour tout $\sigma \geq 1$, une constante C_σ telles que, pour tout $x \in X$, $n \in \mathbb{N}^*$ et toute fonction f,

$$(P)\quad \Big(\sum_{y\in B(x,n)} |f(y)-f_n(x)|^\sigma\, m(y)\Big)^{1/\sigma} \leq C_\sigma\, n \Big(\sum_{y\in B(x,Cn)} |\delta f(y)|^\sigma\, m(y)\Big)^{1/\sigma},$$

où

$$f_n(x) = \frac{1}{V(x,n)} \sum_{y\in B(x,n)} f(y)\, m(y)\,.$$

On distinguera la version L^σ dans cette famille d'inégalités en la notant (P_σ). L'inégalité (P) est satisfaite, par exemple, pour tous les graphes de Cayley des groupes finiment engendrés à croissance polynômiale du volume (la preuve est identique à celle donnée dans [35] pour les groupes de Lie). Elle est aussi satisfaite sur les espaces homogènes de ces groupes (voir [25], [30]).

Proposition 4.2. *Soient (X_1,m_1) et (X_2,m_2) deux graphes pondérés isométriques à l'infini. Alors, si (X_1,m_1) vérifie l'inégalité de Poincaré à l'échelle, il en est de même de (X_2,m_2).*

PREUVE. Pour alléger les notations, nous n'écrirons la preuve que pour $\sigma = 1$. Soit $\Phi : X_1 \to X_2$ une isométrie à l'infini, et $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $[\Phi(X_1)]_k = X_2$. Si f est une fonction à support fini sur X_2, considérons sa moyenne f_k sur les boules de rayon k. Comme X_1 vérifie (P), on a, pour tout $x \in X_1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}(4.1)\qquad &\sum_{y\in B(x,n)} |(f_k\circ\Phi)(y) - (f_k\circ\Phi)_n(x)|\, m_1(y)\\ &\qquad \leq C n \sum_{y\in B(x,C'n)} \delta(f_k\circ\Phi)(y)\, m_1(y)\,.\end{aligned}$$

Commençons par traiter le second membre de cette inégalité. On a

$$\sum_{y \in B(x,Cn)} \delta(f_k \circ \Phi)(y)\, m_1(y) \leq C_1 \sum_{z \in B(\Phi(x),C_1'n)} \delta f_k(z)\, m_2(z)\,, \tag{4.2}$$

puisque pour C_1' assez grand, $B(\Phi(x), C_1'n)$ contient $\Phi(B(x, C'n))$ et que $m_2(\Phi(y)) \approx m_1(y)$.

Ecrivons,

$$\begin{aligned}
|\delta f_k(z)|^2 &= \sum_{y \sim z} |f_k(z) - f_k(y)|^2 \\
&= \sum_{y \sim z} \left| \frac{1}{V(z,k)} \sum_{t \in B(z,k)} f(t)\, m_2(t) - \frac{1}{V(y,k)} \sum_{s \in B(y,k)} f(s)\, m_2(s) \right|^2 \\
&\leq 2 \sum_{y \sim z} \Big(\frac{1}{V(z,k)} \sum_{t \in B(z,k)} |f(t) - f(z)|^2\, m_2(t) \\
&\qquad + \frac{1}{V(y,k)} \sum_{s \in B(y,k)} |f(s) - f(z)|^2\, m_2(s) \Big) \\
&\leq \frac{2\,C_2}{V(z,k)} \sum_{t \in B(z,k)} |f(t) - f(z)|^2\, m_2(t) \\
&\quad + \frac{C_3}{V(z,k)} \sum_{s \in B(z,k+1)} |f(s) - f(z)|^2\, m_2(s)\,.
\end{aligned}$$

Dans la dernière inégalité, C_2 désigne une borne sur le nombre de voisins dans X_2; pour le deuxième terme, on utilise le fait que $B(y,k) \subset B(z,k+1)$ et que $V(z,k) \leq C_3 V(y,k)$ (voir le Lemme 2.1). Comme $m_2(t) \approx V(z,k)$, pour tout $z \in X_2$, et pour tout $t \in B(z,k+1)$, on obtient

$$|\delta f_k(z)|^2 \leq C_4 \sum_{t \in B(z,k+1)} |f(t) - f(z)|^2\,.$$

De plus,

$$|f(t) - f(z)|^2 \leq (k+1) \sum_{i=1}^{j-1} |f(t_i) - f(t_{i+1})|^2 \leq (k+1) \sum_{y \in B(z,k+1)} |\delta f(y)|^2\,,$$

où $t = t_1, \ldots, t_i, \ldots, t_j = z$ est un chemin minimisant de t à z. On en déduit

$$|\delta f_k(z)|^2 \leq C_4\,(k+1)\, C_2^{k+1} \sum_{y \in B(z,k+1)} |\delta f(y)|^2\,,$$

soit

$$\delta f_k(z) \le C_5\Big(\sum_{y\in B(z,k+1)} |\delta f(y)|^2\Big)^{1/2} \le C_6 \sum_{y\in B(z,k+1)} \delta f(y)\,.$$

Finalement,

$$\sum_{z\in B(\Phi(x),C_1'n)} \delta f_k(z)\, m_2(z) \le C_7 \sum_{y\in B(\Phi(x),C_2'n)} \delta f(y)\, m_2(y)\,. \tag{4.3}$$

En mettant bout à bout (4.1),(4.2) et (4.3), on obtient

$$\begin{aligned}&\sum_{y\in B(x,n)} |(f_k\circ\Phi)(y) - (f_k\circ\Phi)_n(x)|\, m_1(y)\\ &\qquad\qquad \le C_8\, n \sum_{y\in B(\Phi(x),C_2'n)} \delta f(y)\, m_2(y)\,.\end{aligned} \tag{4.4}$$

Supposons maintenant que nous ayons démontré

$$\begin{aligned}&\sum_{z\in B(\Phi(x),n)} |f(z) - (f_k\circ\Phi)_n(x)|\, m_2(z)\\ &\qquad \le \sum_{y\in B(x,C_3'n)} |(f_k\circ\Phi)(y) - (f_k\circ\Phi)_n(x)|\, m_1(y)\\ &\qquad\quad + C_9 \sum_{z\in B(\Phi(x),C_3'n)} \delta f(z)\, m_2(z)\,.\end{aligned} \tag{4.5}$$

Alors, (4.4) et (4.5) donnent ensemble

$$\sum_{z\in B(\Phi(x),n)} |f(z)-(f_k\circ\Phi)_n(x)|\, m_2(z) \le C_{10}'\, n \sum_{z\in B(\Phi(x),C_4'n)} \delta f(z)\, m_2(z)\,.$$

On en déduit que X_2 possède la propriété (P), car

$$\sum_{z\in B(\Phi(x),n)} |f(z) - f_n(z)|\, m_2(z) \le 2 \inf_\alpha \sum_{z\in B(\Phi(x),n)} |f(z) - \alpha|\, m_2(z)\,.$$

Il nous reste donc à montrer (4.5). Ecrivons pour cela

$$\sum_{z\in B(\Phi(x),n)} |f(z) - (f_k\circ\Phi)_n(x)|\, m_2(z) \le \mathrm{I} + \mathrm{II}\,,$$

où

$$\mathrm{I} = \sum_{z \in B(\Phi(x),n)} |f(z) - f_k \circ \Phi \circ \Phi^{-1}(z)|\, m_2(z)$$

et

$$\mathrm{II} = \sum_{z \in B(\Phi(x),n)} |f \circ \Phi \circ \Phi^{-1}(z) - (f_k \circ \Phi)_n(x)|\, m_2(z)\,.$$

On a, d'une part

$$\begin{aligned} \mathrm{II} &\leq C_{11} \sum_{z \in B(\Phi(x),n)} |f_k \circ \Phi \circ \Phi^{-1}(z) - (f_k \circ \Phi)_n(x)|\, m_1(\Phi^{-1}(z)) \\ &\leq C_{11} \sum_{y \in B(x, C_5' n)} |f_k \circ \Phi(y) - (f_k \circ \Phi)_n(x)|\, m_1(y)\,. \end{aligned}$$

En effet, pour C_5' assez grand, $\Phi^{-1}(B(\Phi(x), n)) \subset B(x, C_5' n)$, puisque Φ^{-1} est une quasi-isométrie et que $d_2(x, \Phi \circ \Phi^{-1}(x)) \leq k$.

D'autre part, si on pose $\Phi \circ \Phi^{-1}(z) = \bar{z}$, alors $d_2(z, \bar{z}) \leq k$ et

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \sum_{z \in B(\Phi(x),n)} |f(z) - f_k(\bar{z})|\, m_2(z) \\ &\leq \sum_{z \in B(\Phi(x),n)} \Big(\frac{1}{V(\bar{z}, k)} \sum_{t \in B(\bar{z},k)} |f(z) - f(t)|\, m_2(t) \Big)\, m_2(z)\,. \end{aligned}$$

En découpant comme nous l'avons fait précédemment $|f(z) - f(t)|$ suivant un chemin minimisant, on voit que

$$\mathrm{I} \leq C_{12} \sum_{z \in B(\Phi(x),n)} \Big(\sum_{y \in B(z,2k)} |\delta f(y)|^2 \Big)^{1/2} m_2(z)\,.$$

On en déduit facilement

$$\mathrm{I} \leq C_{13} \sum_{z \in B(\Phi(x), C_6' n)} \delta f(z)\, m_2(z)\,,$$

ce qui achève de démontrer (4.5) et la Proposition 4.2.

REMARQUE. Pour chaque $\sigma \geq 1$, on peut transférer d'un graphe pondéré à un autre la version L^σ de l'inégalité de Poincaré à l'échelle que nous avons notée (P_σ). On peut aussi considérer des inégalités analogues, mais où la dépendance en n n'est pas linéaire; si l'on part d'une dépendance en $K(n)$, K croissante, on obtient une dépendance en $CK(Cn)$ dans l'inégalité transférée.

5. Analyse à l'infini sur les variétés.

Ce paragraphe rappelle quelques résultats maintenant classiques et généralise [11]. Soit M une variété riemannienne connexe et complète munie de sa mesure canonique. Notons $\nabla\psi$ le gradient de la fonction ψ et

$$\|\psi\|_{p,E} = \Big(\int_E |\psi(x)|^p \, dx\Big)^{1/p}$$

pour $E \subset M$. Nous écrirons $\|\cdot\|_{p,M} = \|\cdot\|_p$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Soit $p_t(x,y) > 0$ le noyau de la chaleur associé à l'opérateur de Laplace–Beltrami Δ sur M. Considérons la fonction de Green

$$G(x,y) = \int_0^\infty p_t(x,y)\, dt\,.$$

Nous dirons que M est transiente si $G(x,y) < +\infty$ en dehors de la diagonale et que M est récurrente sinon. Rappelons l'une des caractérisations classiques (voir [1], par exemple) de la transience.

Théorème 5.1. *Une variété M est transiente si et seulement si il existe un ouvert non vide U et une constante $C = C(U)$ tels que*

$$\int_U \psi(x)\, dx \leq C\, \|\nabla\psi\|_2\,, \qquad \textit{pour tout } \psi \in C_0^\infty(M)\,.$$

De plus, si M est transiente, l'inégalité ci-dessus est satisfaite pour tout ouvert relativement compacte de M.

Soient $1 \leq p \leq q < +\infty$. Nous dirons que la variété M vérifie l'inégalité de Sobolev $(S_{p,q})$ si

$$S_{p,q} = S_{p,q}(M) = \inf\Big\{\frac{\|\nabla\psi\|_p}{\|\psi\|_q} \;:\; \psi \in C_0^\infty(M)\,,\ \psi \neq 0\Big\} > 0\,.$$

Dans ce cas, on a

$$(S_{p,q}) \qquad S_{p,q}\, \|\psi\|_q \leq \|\nabla\psi\|_p\,, \qquad \text{pour tout } \psi \in C_0^\infty(M)\,.$$

De même, nous dirons que M vérifie l'inégalité de Nash de dimension ν notée (N_ν) si

$$N_\nu = N_\nu(M) = \inf\Big\{\frac{\|\nabla\psi\|_2\, \|\psi\|_1^{2/\nu}}{\|\psi\|_2^{1+2/\nu}} \;:\; \psi \in C_0^\infty(M)\,,\ \psi \neq 0\Big\} > 0\,.$$

Rappelons que l'inégalité (N_ν) est équivalente à

$$\text{il existe } C \text{ tel que } p_t(x,x) \leq C\, t^{-\nu/2}\,, \text{ pour tout } t > 0\,.$$

De plus, si $\nu > 2$, ces propriétés sont équivalentes à $(S_{2,q})$ avec $q = 2\nu/(\nu-2)$; voir [37] où ces équivalences sont discutées en détail.

Le but de ce paragraphe est de localiser à l'infini ce type d'équivalences sur les variétés vérifiant $(DV)_{\text{loc}}$ et $(P)_{\text{loc}}$. Supposons donc que M est une variété riemannienne connexe complète vérifiant $(P)_{\text{loc}}$ et $(DV)_{\text{loc}}$. Notons ρ la distance riemannienne sur M. Fixons $\varepsilon > 0$ ainsi qu'une partie X ε-séparée (pour tous $x, y \in X$, $\rho(x,y) \geq \varepsilon$) maximale de M. Nous utiliserons sans cesse le fait que les boules $B(x,\varepsilon)$, $x \in X$, recouvrent M, et que les boules $B(x,\varepsilon/2)$, $x \in X$, sont deux à deux disjointes. De plus, il découle facilement de l'hypothèse $(DV)_{\text{loc}}$ que, pour chaque $i \in \mathbb{N}^*$ fixé, tout point $z \in M$ appartient à un nombre uniformément borné de boules $B(x, i\varepsilon)$, $x \in X$.

Munissons X d'une structure de graphe en décidant que deux points distincts x, y de X sont voisins si $\rho(x,y) \leq 2\varepsilon$; nous noterons alors $x \sim y$. Il est facile de voir que, M étant connexe, X l'est aussi: on peut relier deux points arbitraires x et y de X par un chemin, c'est-à-dire qu'il existe une suite $x_0 = x, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n = y$ telle que $x_i \sim x_{i+1}$, pour tout $i = 0, \ldots, n-1$. Il est clair que X est uniformément localement fini. Nous noterons N une borne sur le nombre de voisins de tout sommet de X.

Fixons $\{\theta_x\}_{x\in X}$ une partition de l'unité C^∞ sur M telle que $\theta_x \geq 1/N$ sur $\bar{B}(x,\varepsilon/2)$, $\theta_x \equiv 0$ sur $B(x, 3\varepsilon/2)^c$, et vérifiant $\|\nabla\theta_x\|_\infty \leq C$, pour tout $x \in X$. La construction d'une telle partition de l'unité est détaillée dans [21, p. 235].

Finalement, considérons l'opérateur S de $C_0^\infty(M)$ dans lui-même défini par

$$S\psi = \sum_{x\in X} \psi_\varepsilon(x)\,\theta_x,$$

où, suivant la notation de l'introduction

$$\psi_\varepsilon(x) = \frac{1}{V(x,\varepsilon)} \int_{B(x,\varepsilon)} \psi(y)\,dy\,.$$

Lemme 5.2. *Supposons que M vérifie $(DV)_{\text{loc}}$ et $(P)_{\text{loc}}$. Alors S opère sur L^p, $1 \leq p \leq +\infty$. Autrement dit,*

$$\|S\psi\|_p \leq C_1 \|\psi\|_p\,, \qquad \textit{pour tout } \psi \in C_0^\infty(M)\,.$$

De plus,

$$\|\psi - S\psi\|_p \le C_2 \|\nabla\psi\|_p\,, \qquad \textit{pour tout } \psi \in C_0^\infty(M)\,. \tag{5.1}$$

Enfin, S est régularisant, c'est-à-dire opère de L^1 dans L^∞, si et seulement si

$$\inf_{x\in X} V(x,\varepsilon) > 0\,.$$

PREUVE. Seule la preuve de (5.1) mérite d'être donnée. Ecrivons

$$\begin{aligned}
\|\psi - S\psi\|_p^p &= \int \Big|\psi - \sum_{x\in X} \psi_\varepsilon(x)\,\theta_x\Big|^p \\
&= \int \Big|\sum_{x\in X} (\psi(y) - \psi_\varepsilon(x))\,\theta_x(y)\Big|^p\,dy \\
&\le N \sum_{z\in X} \int_{B(z,\varepsilon)} \Big(\sum_{x\sim z} |\psi(y) - \psi_\varepsilon(x)|\Big)^p\,dy \\
&\le N^p \sum_{z\in X} \sum_{x\sim z} \int_{B(z,\varepsilon)} |\psi(y) - \psi_\varepsilon(x)|^p\,dy \\
&\le 2^{p-1} N^p \sum_{z\in X} \Big(N \int_{B(z,\varepsilon)} |\psi(y) - \psi_\varepsilon(z)|^p\,dy \\
&\qquad\qquad + \sum_{x\sim z} |\psi_\varepsilon(z) - \psi_\varepsilon(x)|^p\,V(z,\varepsilon)\Big)\,.
\end{aligned}$$

Maintenant, d'après $(P)_{\mathrm{loc}}$,

$$\int_{B(z,\varepsilon)} |\psi - \psi_\varepsilon(z)|^p \le C_{p,\varepsilon} \int_{B(z,2\varepsilon)} |\nabla\psi|^p\,.$$

Pour le second terme, nous utiliserons le résultat suivant qui découle de l'inégalité de Jensen et de l'inégalité de Poincaré $(P)_{\mathrm{loc}}$, appliquée deux fois.

Lemme 5.3. *Soit M une variété vérifiant $(DV)_{\mathrm{loc}}$ et $(P)_{\mathrm{loc}}$. Etant donnés $\varepsilon > 0$ et $1 \le p < \infty$, il existe $C = C(\varepsilon,p)$ tel que, pour tous $x, y \in M$ tels que $\rho(x,y) \le 2\varepsilon$, on ait*

$$|\psi_\varepsilon(x) - \psi_\varepsilon(y)|^p\,V(x,\varepsilon) \le C \int_{B(x,6\varepsilon)} |\nabla\psi(\xi)|^p\,d\xi\,.$$

Ceci termine la preuve de (5.1).

REMARQUE. Pour obtenir (5.1) nous n'avons utilisé les propriétés $(DV)_{\mathrm{loc}}$ et $(P)_{\mathrm{loc}}$ que pour un nombre fini de valeurs du paramètre r. Plus précisément, $\varepsilon > 0$ étant fixé, nous avons utilisé $(DV)_{\mathrm{loc}}$ et $(P)_{\mathrm{loc}}$ pour $r = \varepsilon/2, \varepsilon, 2\varepsilon, \ldots, 8\varepsilon$. Dans toute la suite, nous dirons qu'une constante C ne dépend que de $(DV)_{\mathrm{loc}}$ et $(P)_{\mathrm{loc}}$ à l'échelle ε si cette constante ne dépend que de $(DV)_{\mathrm{loc}}$ et $(P)_{\mathrm{loc}}$ avec $r \in \{\varepsilon/i\,,\ i\varepsilon :\ i = 1, \ldots, 16\}$. Par exemple, la constante C_2 dans (5.1) ne dépend que de $(DV)_{\mathrm{loc}}$ et $(P)_{\mathrm{loc}}$ à l'échelle ε.

Nous définissons maintenant la version à l'infini de $S_{p,q}(M)$ en posant

$$S^{\infty}_{p,q} = S^{\infty}_{p,q}(M) = \inf\left\{\frac{\|\nabla\psi\|_p}{\|S\psi\|_q}\ :\ \psi \in C_0^{\infty}(M)\,,\ \psi \neq 0\right\}.$$

Nous dirons que M vérifie $(S^{\infty}_{p,q})$ si $S^{\infty}_{p,q}(M) > 0$. Posons aussi

$$N^{\infty}_{\nu} = N^{\infty}_{\nu}(M) = \inf\left\{\frac{\|\nabla\psi\|_2\, \|\psi\|_1^{2/\nu}}{\|S\psi\|_2^{1+2/\nu}}\ :\ \psi \in C_0^{\infty}(M)\,,\ \psi \neq 0\right\}.$$

Nous dirons que M vérifie (N^{∞}_{ν}) si $N^{\infty}_{\nu}(M) > 0$.

Comme S opère sur L^q, $S_{p,q}$ (respectivement (N_ν)) entraîne $S^{\infty}_{p,q}$ (respectivement (N^{∞}_{ν})) et l'inégalité (5.1) implique

Proposition 5.4. *Sur une variété M vérifiant $(DV)_{\mathrm{loc}}$ et $(P)_{\mathrm{loc}}$, l'inégalité $(S_{p,p})$ équivaut à $(S^{\infty}_{p,p})$. De plus, il existe c, C ne dépendant que de $(DV)_{\mathrm{loc}}$ et $(P)_{\mathrm{loc}}$ à l'échelle ε tels que*

$$c\, S^{\infty}_{p,p}(M) \le S_{p,p}(M) \le C\, S^{\infty}_{p,p}(M)\,.$$

REMARQUES: 1) On peut introduire la version locale de $S_{p,q}(M)$ en posant

$$S^{\mathrm{loc}}_{p,q}(M) = \inf\left\{\frac{\|\nabla\psi\|_p}{\|\psi - S\psi\|_q}\ :\ \psi \in C_0^{\infty}(M)\,,\ \psi \neq 0\right\}.$$

On peut introduire de même une inégalité de Nash locale. Il est clair que $S_{p,q}(M) > 0$ si et seulement si $S^{\infty}_{p,q}(M) > 0$ et $S^{\mathrm{loc}}_{p,q}(M) > 0$.

L'inégalité (5.1) signifie que l'on a toujours $S_{p,p}^{\mathrm{loc}}(M) > 0$. Notons aussi que $S_{p,p}(M) \leq C$ où C ne dépend que des constantes apparaissant dans $(DV)_{\mathrm{loc}}$ et $(P)_{\mathrm{loc}}$.

2) Les inégalités $(S_{p,q})$, $(S_{p,q}^{\mathrm{loc}})$ et $(S_{p,q}^{\infty})$ ne peuvent avoir lieu que si $p \leq q$. Ces inégalités ne peuvent avoir lieu avec $p < q$ que si $\inf_{x\in M} V(x,r)$ est strictement positif pour tout $r > 0$. Il suffit pour le voir d'appliquer l'une d'entre elles à la fonction $(r - d(x,\,\cdot\,))_+$. En faisant tendre r vers 0, on montre que, sur une variété riemannienne de dimension topologique n, $(S_{p,q})$ ou sa version locale ne peuvent avoir lieu que si $1/p - 1/q \leq 1/n$. Rappelons aussi que les variétés de dimension n à courbure de Ricci minorée vérifient $S_{p,q}^{\mathrm{loc}}(M) > 0$ pour un ou tout couple (p,q) tels que $p < n$ et $0 < 1/p - 1/q \leq 1/n$ si et seulement si $\inf_M V(x,1) > 0$, voir [36]. Ces commentaires valent aussi pour les différentes versions (globale, locale, à l'infini) de l'inégalité de Nash si l'on remplace $1/p - 1/q$ par $1/\nu$.

3) D'après la remarque précédente et le Lemme 5.2, la validité de l'une des inégalités avec $p < q$ implique que l'opérateur S est régularisant. Il en va de même pour (N_ν) et (N_ν^∞).

Terminons ce paragraphe par la localisation à l'infini annoncée.

Théorème 5.5. *Soit $\nu > 0$. Si M vérifie $(DV)_{\mathrm{loc}}$ et $(P)_{\mathrm{loc}}$, les deux conditions suivantes sont équivalentes:*

1) *Il existe $t_0 > 0$ et C_0 tels que $\sup_x p_{t_0}(x,x) \leq C_0$ et $N_\nu^\infty(M) > 0$.*

2) *Il existe $r_0 > 0$ tel que $\inf_x V(x,r_0) > 0$, et $\sup_x p_t(x,x) = O(t^{-\nu/2})$ quand $t \to +\infty$.*

De plus, si $\nu > 2$ et $q = 2\nu/(\nu-2)$, ces conditions sont aussi équivalentes à:

3) *Il existe $t_0 > 0$ et C_0 tels que $\sup_x p_{t_0}(x,x) \leq C_0$ et $S_{2,q}^\infty(M) > 0$.*

PREUVE. Notons $P_t = e^{-t\Delta}$ le semi-groupe de la chaleur sur M dont le noyau est p_t. Pour montrer que 1) implique 2), il suffit de montrer que 1) implique

$$\|P_{t_0}\psi\|_2^{1+2/\nu} \leq \|\nabla P_{t_0}\psi\|_2\, \|\psi\|_1^{2/\nu}, \qquad \text{pour tout } \psi \in C_0^\infty(M) \tag{5.2}$$

puis d'utiliser l'argument de Nash (voir [26], [6], [37]). Mais, si on applique (N_ν^∞) à $P_{t_0}\psi$, on obtient

$$\|SP_{t_0}\psi\|_2^{1+2/\nu} \leq \|\nabla P_{t_0}\psi\|_2\, \|P_{t_0}\psi\|_1^{2/\nu}, \qquad \text{pour tout } \psi \in C_0^\infty(M).$$

Comme le Lemme 5.2 donne

$$\|(I-S)P_{t_0}\psi\|_2 \leq \|\nabla P_{t_0}\psi\|_2$$

et que $\sup_x p_{t_0}(x,x) \leq C_0$ implique

$$\|(I-S)P_{t_0}\psi\|_2 \leq \|\psi\|_1 \ ,$$

on obtient facilement (5.2). La preuve de 2) implique 1) s'obtient à partir des arguments développés en détail dans [6] ou [37] en y ajoutant des manipulations similaires à celles présentées ci-dessus. En ce qui concerne 3), voir [11].

REMARQUE. Seule la version L^2 $(P_2)_{loc}$ de l'inégalité $(P)_{\rm loc}$ a été utilisée dans la preuve du Théorème 5.5.

Corollaire 5.6. *Soit $\nu > 0$. Si M est à courbure de Ricci minorée (ou, plus généralement, si M vérifie les conditions $(DV)_0$ et $(P_2)_0$ introduites ci-dessous au Paragraphe 8), les deux conditions suivantes sont équivalentes:*

1) *M vérifie (N_ν^∞).*

2) *Pour tout $t_0 > 0$ il existe C_0 tel que $\sup_x p_t(x,x) \leq C_0\, t^{-\nu/2}$ pour tout $t \geq t_0$.*

De plus, si $\nu > 2$ et $q = 2\nu/(\nu-2)$, ces conditions sont aussi équivalentes à:

3) *M vérifie $(S_{2,q}^\infty)$.*

PREUVE. Sous les hypothèses de ce corollaire, pour tout $t_0 > 0$ il existe $c_0 > 0$, et C_0 tels que

$$c_0\, V(x,\sqrt{t})^{-1} \leq p_t(x,x) \leq C_0\, V(x,\sqrt{t})^{-1}\ , \quad \text{pour tout } t,\ 0 < t \leq t_0\ .$$

(voir Paragraphe 8) ce qui permet de conclure facilement.

REMARQUE. D'un point de vue plus géométrique, on notera que pour $q \geq 1$, l'inégalité $S_{1,q}$ équivaut, via la formule de coaire, à l'inégalité isopérimétrique $|A|^{1/q} \leq C\,|\partial A|$, où A décrit les sous-ensembles compacts de M à bord régulier; $S_{1,q}^\infty$ équivaut à la même inégalité, mais où A décrit les sous-ensembles compacts de M à bord régulier contenant une boule de rayon ε. Voir [8].

6. Discrétisation d'une variété riemannienne.

Nous reprenons les notations du paragraphe précédent. Autrement dit, M est une variété riemannienne connexe complète vérifiant $(P)_{\text{loc}}$ et $(DV)_{\text{loc}}$ et X est une partie ε-séparée maximale de M, pour un $\varepsilon > 0$ fixé. Rappelons que nous avons muni X d'une structure de graphe connexe tel que le nombre de voisins d'un point $x \in X$ est uniformément majoré (par N): deux points sont voisins dans X si $\rho(x,y) \leq 2\varepsilon$.

D'après [20, p.397], il existe $a \geq 1$ et $b \geq 0$ tels que pour tous $x, y \in X$,

$$\frac{1}{2\varepsilon}\,\rho(x,y) \leq d(x,y) \leq a\,\rho(x,y) + b\,,$$

où ρ est la distance riemannienne sur M et d est la distance naturellement associée au graphe X. Comme par construction le ε-voisinage X_ε est égal à M, l'inclusion de X dans M réalise une isométrie à l'infini de (X,d,m), où $m(x) = V(x,\varepsilon)$ (on identifie la fonction et la mesure), dans (M,ρ,μ). Remarquons que, d'après le Lemme 2.1, il existe une constante que nous noterons C_m, contrôlée par la constante de $(DV)_{\text{loc}}$ sur M, à l'échelle ε, telle que

$$\sup_{\substack{x,y \\ x\sim y}} \frac{m(x)}{m(y)} \leq C_m\,.$$

(X,d,m) est donc un graphe pondéré au sens du Paragraphe 3. Dans la suite, on notera simplement M pour (M,ρ,μ) et X pour (X,d,m).

Le but de ce paragraphe est de montrer qu'un bon nombre de propriétés se transmettent entre une variété et son discrétisé. On généralisera ainsi des considérations issues de [1], [3], [11], [20], [21], [22], [31], [34].

Soit ψ une fonction sur M; nous lui associons une fonction $\tilde{\psi}$ sur X par

$$\tilde{\psi}(x) = \psi_\varepsilon(x) = \frac{1}{V(x,\varepsilon)} \int_{B(x,\varepsilon)} \psi(\xi)\,d\xi, \qquad x \in X\,.$$

L'inégalité de Jensen et les propriétés des boules $B(x,\varepsilon)$, $x \in X$, fournissent

Lemme 6.1. *Il existe C, C' tels que pour tout $x \in X$, tout entier n, tout $1 \leq p \leq +\infty$ et toute fonction $\psi \in C_0^\infty(M)$, on ait*

$$\|\tilde{\psi}\|_{p,B(x,n)} \leq C\,\|\psi\|_{p,B(x,C'n)}\,.$$

En particulier,

$$\|\tilde{\psi}\|_{p,X} \leq C \, \|\psi\|_{p,M} \, .$$

Inversement, soit f une fonction sur X; nous lui associons une fonction $\hat{f}$ sur M par

$$\hat{f}(y) = \sum_{x \in X} f(x) \, \theta_x(y) \, , \qquad y \in M \, ,$$

où θ_x est la partition de l'unité déjà utilisée au Paragraphe 5.

Lemme 6.2. *Il existe C, C' tels que pour tout $z \in M$, tout $r > 0$, tout $1 \leq p \leq +\infty$ et toute fonction $f \in c_0(X)$, on ait*

$$\|\hat{f}\|_{p,B(z,r)} \leq C \, \|f\|_{p,B(\bar{z},\lceil C'r \rceil)} \, ,$$

où $\bar{z}$ est un point de X tel que $\rho(z,\bar{z}) \leq \varepsilon$. En particulier,

$$\|\hat{f}\|_{p,M} \leq C \, \|f\|_{p,X} \, .$$

De plus, si $f \geq 0$, pour tout $x \in X$ et tout entier n, on a

$$\|f\|_{p,B(x,n)} \leq C \, \|\hat{f}\|_{p,B(x,C'n)}$$

et donc

$$\|f\|_{p,X} \leq C \, \|\hat{f}\|_{p,M} \, .$$

Rappelons que nous avons défini au Paragraphe 5 l'opérateur $S\psi = \sum_{x \in X} \tilde{\psi}(x) \, \theta_x$. Avec les notations ci-dessus, on a $S\psi = (\tilde{\psi})\hat{}$. Les lemmes 6.1 et 6.2 ont donc pour corollaire

Lemme 6.3. *Il existe C, C' tels que pour tout $z \in M$, $r > 0$ et toute fonction $\psi \in C_0^\infty(M)$,*

$$\|S\psi\|_{p,B(z,r)} \leq C \, \|\tilde{\psi}\|_{p,B(\bar{z},\lceil C'r \rceil)}$$

où $\bar{z} \in X$ est tel que $\rho(z,\bar{z}) \leq \varepsilon$. De plus, si $\psi \geq 0$, pour tout $x \in X$ et tout entier n, on a

$$\|\tilde{\psi}\|_{p,B(x,n)} \leq C \, \|S\psi\|_{p,B(x,C'n)} \, .$$

De même, si $f \in c_0(X)$ et $f \geq 0$,

$$\|f\|_{p,B(x,n)} \leq C\,\|S\hat{f}\|_{p,B(x,C'n)}\ .$$

Les constantes qui interviennent dans les trois lemmes ci-dessus et que nous avons uniformément notées C, ne dépendent que de $(DV)_{\mathrm{loc}}$, à l'échelle ε. Les constantes notées C' ne dépendent elles que de ε.

Les gradients discret et riemannien peuvent aussi être comparés.

Lemme 6.4. *Pour chaque $p \geq 1$, il existe des constantes C, C' telles que pour tout $x \in X$, tout entier n et toute fonction $\psi \in C_0^\infty(M)$, on ait*

$$\|\delta\tilde{\psi}\|_{p,B(x,n)} \leq C\,\|\nabla\psi\|_{p,B(x,C'n)}\ .$$

En particulier,

$$\|\delta\tilde{\psi}\|_{p,X} \leq C\,\|\nabla\psi\|_{p,M}\ .$$

De même, pour tout $z \in M$, $\bar{z} \in X$ tel que $\rho(z,\bar{z}) \leq \varepsilon$, tout $r > 0$ et toute fonction $f \in C_0(X)$,

$$\|\nabla\hat{f}\|_{p,B(z,r)} \leq C\,\|\delta f\|_{p,B(\bar{z},\lceil C'r\rceil)}$$

et donc

$$\|\nabla\hat{f}\|_{p,M} \leq C\,\|\delta f\|_{p,X}\ .$$

PREUVE. Les deux premières assertions découlent du Lemme 5.3. Pour les deux dernières, notons que, comme $\sum_{y\in X}\nabla\theta_y = 0$, on a

$$\nabla\hat{f} = \sum_{y\in X}\left(f(y)-f(x)\right)\nabla\theta_y\ , \qquad \text{pour tout } x \in X\ ,$$

et donc, pour tout $x \in X$ et tout $z \in B(x,\varepsilon)$,

$$\begin{aligned}|\nabla\hat{f}(z)| &\leq C_1\,\sup\{|f(y)-f(x)| :\ d(y,x) \leq 2\}\\ &\leq C_2 \sum_{d(z,x)\leq 2}\delta f(z)\,.\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\int_{B(z,r)} |\nabla \hat{f}(\xi)|^p \, d\xi \leq \sum_{x \in B(\bar{z}, \lceil C' r \rceil)} \int_{B(x,\varepsilon)} |\nabla \hat{f}(\xi)|^p \, d\xi$$
$$\leq C_3 \sum_{x \in B(\bar{z}, \lceil C' r \rceil)} \sum_{d(z,x) \leq 2} |\delta f(z)|^p \, m(x) ,$$

ce qui prouve l'inégalité annoncée. Les constantes C, C' du Lemme 6.4 ne dépendent que de ε et de $(DV)_{\mathrm{loc}}$ et de $(P)_{\mathrm{loc}}$, à l'échelle ε (en fait, pour les deux dernières inégalités, $(P)_{\mathrm{loc}}$ n'intervient pas).

De ces lemmes techniques, on peut tirer immédiatement quelques résultats.

Proposition 6.5. *Soit $1 \leq p \leq q < +\infty$. Si X est un discrétisé de M, l'inégalité $(S^{\infty}_{p,q})$ sur M équivaut à $(S_{p,q})$ sur X. On a plus précisément*

$$c \, S_{p,q}(X) \leq S^{\infty}_{p,q}(M) \leq C \, S_{p,q}(X) ,$$

où c, C ne dépendent que de $(DV)_{\mathrm{loc}}$ et de $(P)_{\mathrm{loc}}$ sur M à l'échelle ε. Le même résultat vaut pour $N^{\infty}_{\nu}(M)$ et $N_{\nu}(X)$ avec $\nu > 0$.

Corollaire 6.6. *Si X est un discrétisé de M, $(S_{p,p})$ sur M équivaut à $(S_{p,p})$ sur X. Le rapport de $S_{p,p}(M)$ et de $S_{p,p}(X)$ est compris entre des bornes ne dépendant que des constantes de $(DV)_{\mathrm{loc}}$ et de $(P)_{\mathrm{loc}}$ sur M à l'échelle ε.*

Avec le Corollaire 3.2, on en déduit

Corollaire 6.7. *Sur M, les inégalités $(S_{p,p})$ sont deux à deux équivalentes pour $1 \leq p < \infty$. Si $p' \leq p$,*

$$C_1 \, S_{p',p'}(M) \leq S_{p,p}(M) \leq C_2 \, (S_{p',p'}(M))^{1/p} ,$$

où C_1 et C_2 ne dépendent que de p et p', et des constantes de $(DV)_{\mathrm{loc}}$ et $(P)_{\mathrm{loc}}$ à l'échelle ε.

CAS PARTICULIER: Prenons $p = 2$, $p' = 1$. D'après la formule de co-aire, $S_{1,1}(M) = h(M)$, avec

$$h(M) = \inf_{\Omega} \frac{|\partial \Omega|}{|\Omega|} ,$$

où Ω parcourt les sous-ensembles compacts à bord régulier de M ($h(M)$ est la constante de Cheeger). Comme $(S_{2,2}(M))^2 = \lambda_1$, où

$$\lambda_1 = \inf_{f \in C_0^\infty(M)} \frac{\langle -\Delta f, f\rangle}{\|f\|_2^2},$$

on obtient une forme plus faible mais plus générale de l'inégalité de Cheeger-Buser:

$$C_3\, h^2 \leq \lambda_1 \leq C_4\, h,$$

où C_3 et C_4 ne dépend que des constantes de $(DV)_{\text{loc}}$ et $(P)_{\text{loc}}$; voir [5].

Plus généralement, les propositions 3.1 et 6.5 donnent le

Corollaire 6.8. *Sur M, l'inégalité $(S^\infty_{p,q})$ entraîne $(S^\infty_{p',q'})$ avec $1/p' - 1/q' \geq 1/p - 1/q$ pour $p' \geq p$, et $(S^\infty_{p',q'})$ avec $1/p' - 1/q' \geq 1 - p/q$ pour $1 \leq p' \leq p$; dans le premier cas, on a*

$$S^\infty_{p',q'}(M) \geq c\, S^\infty_{p,q}(M),$$

et dans le second,

$$S^\infty_{p',q'}(M) \geq c\,(S^\infty_{p,q}(M))^p,$$

où c ne dépend que de p, p', q, q', et de $(DV)_{\text{loc}}$ et de $(P)_{\text{loc}}$ à léchelle ε.

On trouvera dans [12, Proposition 2], une esquisse de la deuxième partie de cet énoncé.

REMARQUE. Les implications précédentes ne peuvent être améliorées. Dans le cas $p' \geq p$, il suffit pour le voir de prendre $M = \mathbb{R}^n$, où $(S^\infty_{p,q})$ a lieu si et seulement si $1/p - 1/q \geq 1/n$. On construit d'autre part dans [12], pour tout $\varepsilon > 0$, et pour q arbitrairement proche de 1, une variété à géométrie bornée qui vérifie $(S^\infty_{2,q})$ mais pas $(S^\infty_{1,q/2+\varepsilon})$.

Concernant la transience, le Lemme 6.4 et les théorèmes 3.3 et 5.1 fournissent

Proposition 6.9. *Soit M une variété vérifiant $(DV)_{\text{loc}}$ et $(P)_{\text{loc}}$. Soit X un discrétisé de M. Alors, M est transiente si et seulement si X est transient.*

Nous passons maintenant aux inégalités de Poincaré. Nous dirons qu'une variété riemannienne M vérifie l'inégalité de Poincaré $(P)_\infty$ s'il existe C et si pour tout r_0 et tout $\sigma \geq 1$, il existe C_{σ,r_0} tels que pour tout $x \in M$, tout $r \geq r_0$ et tout $\psi \in C_0^\infty(M)$, on ait

$$(P)_\infty \quad \Big(\int\limits_{B(x,r)} |\psi(y) - \psi_r(x)|^\sigma \, dy \Big)^{1/\sigma} \leq C_{\sigma,r_0}\, r \Big(\int\limits_{B(x,Cr)} |\nabla\psi(y)|^\sigma \, dy \Big)^{1/\sigma}.$$

Les variétés riemanniennes à courbure de Ricci positive ou nulle vérifient $(P)_\infty$ (voir [5]). Il en est de même des groupes de Lie à croissance polynômiale du volume (voir [35]).

Proposition 6.10. *Soit M une variété satisfaisant $(P)_{\mathrm{loc}}$ et $(DV)_{\mathrm{loc}}$. Elle vérifie $(P)_\infty$ si et seulement si son discrétisé X vérifie (P).*

PREUVE. Nous n'écrirons la preuve que pour $\sigma = 1$. Les autres cas se traitent de la même façon Supposons que X vérifie (P). Soit $\psi \in C_0^\infty(M)$, $x \in M$, $r \geq \varepsilon$ et $\alpha \in \mathbb{R}$; on a

$$\begin{aligned}\int_{B(x,r)} |\psi(y) - \alpha| \, dy &\leq \int_{B(x,r)} \sum_{z \in X \cap B(x,r+\varepsilon)} |\psi(y) - \alpha| \, 1_{B(z,\varepsilon)}(y) \, dy \\ &\leq \sum_{z \in X \cap B(x,r+\varepsilon)} \int_{B(z,\varepsilon)} |\psi(y) - \tilde\psi(z)| \, dy \\ &\quad + \sum_{z \in X \cap B(x,r+\varepsilon)} m(z) \, |\tilde\psi(z) - \alpha| \, .\end{aligned}$$

Le premier terme est dominé, d'après $(P)_{\mathrm{loc}}$, par

$$C_1 \sum_{z \in X \cap B(x,r+\varepsilon)} \int_{B(z,C_1'\varepsilon)} |\nabla\psi(y)| \, dy \, ,$$

donc, puisque $r \geq \varepsilon$, par

$$C_2 \int_{B(x,C_2'r)} |\nabla\psi(y)| \, dy \, .$$

Soit $x_0 \in X$ tel que $\rho(x, x_0) \leq \varepsilon$, et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \approx r$ et $X \cap B_M(x, r+\varepsilon) \subset B_X(x_0, n) \subset B_M(x, C''r)$; si l'on choisit $\alpha = \psi_n(x_0)$, le second terme est dominé, d'après (P), par

$$C_3 \, n \sum_{y \in B(x_0, C_3' n)} |\delta\tilde\psi(y)| \, .$$

Le Lemme 6.4 permet de majorer cette dernière quantité par

$$C_4\, r \int_{B(x,C_4' r)} |\nabla\psi(y)|\, dy\,.$$

En observant que

$$\int_{B(x,r)} |\psi(y)-\psi_r(x)|\, dy \le 2 \inf_{\alpha\in\mathbb{R}} \int_{B(x,r)} |\psi(y)-\alpha|\, dy\,,$$

on obtient

$$\int_{B(x,r)} |\psi(y)-\psi_r(x)|\, dy \le C_5\, r \int_{B(x,C_5' r)} |\nabla\psi(y)|\, dy\,,$$

pour $r \ge \varepsilon$. Jointe à la condition $(P)_{\mathrm{loc}}$, cette propriété donne $(P)_\infty$.

Supposons maintenant que M vérifie $(P)_\infty$. Soit f une fonction à support fini sur X, $x \in X$, $n \in \mathbb{N}^*$, et $\alpha \in \mathbb{R}$. Ecrivons

$$\sum_{y\in B(x,n)} |f(y)-\alpha|\, m(y) \le C\Big(\sum_{y\in B(x,n)} \int_{B(y,\varepsilon/2)} |f(y)-\hat{f}(z)|\, dz + \sum_{y\in B(x,n)} \int_{B(y,\varepsilon/2)} |\hat{f}(z)-\alpha|\, dz\Big).$$

D'une part, on a

$$\mathrm{I} = \sum_{y\in B(x,n)} \int_{B(y,\varepsilon/2)} |\hat{f}(z)-\alpha|\, dz \le \int_{B(x,C'n)} |\hat{f}(z)-\alpha|\, dz\,.$$

On choisit alors $\alpha = (\hat{f})_n(x)$, et on applique $(P)_\infty$. Il en découle

$$\mathrm{I} \le C_1\, n \int_{B(x,C_1' n)} |\nabla\hat{f}(z)|\, dz\,.$$

Le Lemme 6.4 montre alors que

$$\int_{B(x,C_1' n)} |\nabla\hat{f}(z)|\, dz \le C_2 \sum_{y\in B(x,C_2' n)} \delta f(y)\,.$$

Attention, dans ce calcul on a utilisé la convention que les boules $B(x,r)$ se rapportent à X quand elles apparaissent sous des sommes et à M quand elles apparaissent sous des intégrales.

D'autre part, comme $\theta_t(z) = 0$ dès que $d(z,t) \geq 3\varepsilon/2$, on a

$$\begin{aligned}\int_{B(y,\varepsilon/2)} |f(y) - \hat{f}(z)|\, dz &= \int_{B(y,\varepsilon/2)} |f(y) - \sum_{t\sim y} f(t)\,\theta_t(z)|\, dz \\ &= \int_{B(y,\varepsilon/2)} |\sum_{t\sim y}(f(y) - f(t))\,\theta_t(z)|\, dz \\ &\leq C_3 \sum_{t\sim y} |f(y) - f(t)|\, m(y) \\ &\leq C_4\, \delta f(y)\, m(y)\,.\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\mathrm{II} = \sum_{y\in B(x,n)} \int_{B(y,\varepsilon/2)} |f(y) - \hat{f}(z)|\, dz \leq C \sum_{y\in B(x,n)} \delta f(y)\, m(y)\,.$$

Ceci termine la démonstration puisque

$$\sum_{y\in B(x,n)} |f(y) - f_n(x)|\, m(y) \leq 2 \inf_{\alpha\in\mathbb{R}} \sum_{y\in B(x,n)} |f(y) - \alpha|\, m(y)\,.$$

REMARQUE. L'énoncé précédent vaut en fait séparément pour chacune des versions L^σ des inégalités de Poincaré à l'infini sur M que nous noterons $(P_\sigma)_\infty$: pour chaque $\sigma \geq 1$, sous l'hypothèse que M vérifie $(DV)_{\mathrm{loc}}$ et $(P_\sigma)_{loc}$, l'inégalité $(P_\sigma)_\infty$ sur M équivaut à (P_σ) sur X. L'énoncé s'étend aussi à d'autres types de dépendance en $r \geq 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

7. Variétés et graphes isométriques à l'infini.

En mettant bout à bout le passage d'une variété à un discrétisé et le transfert entre graphes pondérés isométriques à l'infini, on peut ainsi résumer l'ensemble des paragraphes précédents:

Théorème 7.1. *Soit M_1, M_2 deux variétés vérifiant $(DV)_{\mathrm{loc}}$ et $(P)_{\mathrm{loc}}$ et isométriques à l'infini.*

1) *Soit $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ et $\nu > 0$. Les conditions $S^\infty_{p,q}(M_i) > 0$, $i = 1,2$ sont équivalentes. Il en va de même des conditions $S_{p,p}(M_i) > 0$, $i = 1,2$, comme de $N_\nu(M_i) > 0$, $i = 1,2$.*

2) *M_1 et M_2 sont simultanément récurrentes ou transientes.*

3) *Pour chaque $\sigma \geq 1$, M_1 vérifie la condition $(P_\sigma)_\infty$ si et seulement si M_2 vérifie $(P_\sigma)_\infty$.*

4) *Soient $p_t^i(x,y)$, $i = 1,2$, les noyaux de la chaleur sur M_1, M_2. Supposons que pour chaque $r > 0$ et $i = 1,2$ on ait $\inf_{M_i} V(x,r) > 0$, et que pour $i = 1,2$ il existe $t_i > 0$ et C_i tels que $\sup_{M_i} p_{t_i}^i(x,x) \leq C_i$. Alors,*

$$\sup_{M_1} p_t^1(x,x) = O(t^{-\nu/2}), \qquad \textit{quand } t \to +\infty,$$

si et seulement si

$$\sup_{M_2} p_t^2(x,x) = O(t^{-\nu/2}), \qquad \textit{quand } t \to +\infty.$$

Théorème 7.2. *Soit M une variété vérifiant $(DV)_{\rm loc}$ et $(P)_{\rm loc}$ et soit (X,m) un graphe pondéré isométrique à l'infini à M (par exemple son discrétisé).*

1) *Soit $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ et $\nu > 0$. Les conditions $S_{p,q}^\infty(M) > 0$ et $S_{p,q}(X) > 0$ sont équivalentes. Il en va de même des conditions $S_{p,p}(M) > 0$ et $S_{p,p}(X) > 0$ comme de $N_\nu(M) > 0$ et $N_\nu(X) > 0$.*

2) *M et X sont simultanément récurrents ou transients.*

3) *Pour chaque $\sigma \geq 1$, M vérifie la condition $(P_\sigma)_\infty$ si et seulement si X vérifie (P_σ).*

4) *Supposons que $\inf_X m > 0$ et qu'il existe $t_0 > 0$ et C_0 tels que $\sup_M p_{t_0}^M(x,x) \leq C_0$. Alors, les noyaux itérés p_k^X, $k = 1,2,\dots$, sur X satisfont*

$$\sup_X p_k^X(x,x) = O(k^{-\nu/2})$$

si et seulement si le noyau de la chaleur p_t^M sur M satisfait

$$\sup_M p_t^M(x,x) = O(t^{-\nu/2}), \qquad \textit{quand } t \to +\infty.$$

Rappelons pour mémoire le cas typique d'application du Théorème 7.2 où M est une variété sur laquelle agit sans point fixe un groupe d'isométries Γ, finiment engendré, et tel que le quotient M/Γ soit compact. Le graphe de Cayley de Γ est alors isométrique à l'infini à M. En particulier, le Théorème 7.2 contient et généralise les résultats suivants:

1. Le revêtement universel $\tilde{N}$ d'une variété compacte N est transient si et seulement si le groupe fondamental $\pi_1(N)$ est transient (voir [31, [32]).

2. Le bas du spectre de $\tilde{N}$ est strictement positif si et seulement si $\pi_1(N)$ est non-moyennable (voir [3], [31]).

REMARQUE. Dans [4], Brooks étudie par discrétisation certaines propriétés de l'ensemble des revêtements compacts d'une variété compacte. Par exemple, si N est une variété compacte dont le π_1 a la propriété T de Kazhdan, alors la première valeur propre non nulle de tous les revêtements compacts de N est uniformément minorée. Pour le voir, Brooks utilise le fait que la première valeur propre non nulle (pour le laplacien discret) de tous les quotients finis d'un groupe finiment engendré ayant la propriété de Kazhdan est uniformément minorée. Le Théorème 7.2, 1, ci-dessus permet de retrouver ces résultats de Brooks par transport des inégalités de Poincaré. L'idée de base est, comme dans [4], la discrétisation mais notre approche est un peu différente.

8. Inégalités de Harnack et propriété de Liouville.

Soit M une variété riemannienne. Nous dirons que M a la propriété de Liouville (respectivement de Liouville forte) si elle n'admet pas d'autres fonctions harmoniques bornées (respectivement positives) que les constantes.

Nous dirons que M vérifie l'inégalité de Harnack elliptique s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in M$, et tout $r > 0$, toute solution u positive de $\Delta u = 0$ dans $B(x,r)$ satisfait

$$\sup_{B(x,r/2)} u \leq C \inf_{B(x,r/2)} u\,.$$

Nous dirons que M vérifie l'inégalité de Harnack parabolique s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in M$, et tout $r > 0$, toute solution u positive de $(\partial_t + \Delta)u = 0$ dans $Q(x,r) =]0, r^2[\times B(x,r)$ satisfait

$$\sup_{Q_-(x,r)} u \leq C \inf_{Q_+(x,r)} u\,,$$

où

$$Q_-(x,r) =](r/4)^2, (r/2)^2[\times B(x, r/2)$$

et

$$Q_+(x,r) =](3r/4)^2, r^2[\times B(x, r/2).$$

Nous dirons enfin que M vérifie l'inégalité de Harnack parabolique locale si, pour tout $r_0 > 0$, il existe $C(r_0) > 0$ tel que pour tout $x \in M$, et tout r, $0 < r \leq r_0$, toute solution u positive de $(\partial_t + \Delta)u = 0$ dans $Q(x,r)$ satisfait

$$\sup_{Q_-(x,r)} u \leq C(r_0) \inf_{Q_+(x,r)} u.$$

Bien entendu, l'inégalité de Harnack parabolique entraîne l'inégalité de Harnack elliptique, qui entraîne à son tour la propriété de Liouville forte. Clairement, les inégalités de Harnack sont beaucoup plus précises que les propriétés de Liouville. A. Grigor'yan remarque dans [16, p. 340] que la Proposition 6 de [9] montre qu'une variété peut vérifier la version elliptique de l'inégalité de Harnack sans vérifier sa version parabolique. Dans le cadre des variétés à courbure de Ricci positive ou nulle, des versions précises de l' inégalité de Harnack parabolique sont fournies par P. Li et S-T. Yau dans [23].

T. Lyons a construit dans [24] (voir aussi [2]) deux variétés quasi-isométriques, à courbure de Ricci minorée, dont l'une a la propriété de Liouville forte et l'autre n'a pas la propriété de Liouville. Nous allons voir que, au contraire, l'inégalité de Harnack parabolique est stable par isométrie à l'infini.

Nous utiliserons pour cela le résultat principal de [29], qui donne une caractérisation de l'inégalité de Harnack parabolique en termes géométriques. Pour formuler ce résultat, nous devons introduire des formes de l'inégalité de Poincaré à l'échelle et de la propriété de doublement du volume plus fortes que celles que nous avons considérées jusqu'à présent. Nous dirons que M vérifie (DV) s'il existe C tel que

$$(DV) \qquad V(x,2r) \leq C\, V(x,r), \qquad \text{pour tous } x \in M,\ r > 0.$$

Pour chaque $\sigma \geq 1$, nous dirons que M vérifie (P_σ) s'il existe C_σ tel que pour tout $x \in M$, $r > 0$, et toute fonction $\psi \in C_0^\infty(M)$ on ait

$$(P_\sigma) \quad \Big(\int_{B(x,r)} |\psi(y) - \psi_r(x)|^\sigma \, dy \Big)^{1/\sigma} \leq C_\sigma \, r \Big(\int_{B(x,2r)} |\nabla \psi(y)|^\sigma \, dy \Big)^{1/\sigma}.$$

Nous aurons aussi besoin d'une version plus locale de ces conditions. Nous dirons que M vérifie $(DV)_0$ si, pour tout $r_0 > 0$, il existe $C(r_0)$ tel que

$$(DV)_0 \quad V(x,2r) \leq C(r_0)\, V(x,r), \quad \text{pour tout } x \in M,\ 0 < r \leq r_0.$$

Pour chaque $\sigma \geq 1$, nous dirons que M vérifie $(P_\sigma)_0$ si, pour tout $r_0 > 0$, il existe $C_\sigma(r_0)$ tel que pour tout $x \in M$, tout $0 < r \leq r_0$, et toute fonction $\psi \in C_0^\infty(M)$ on ait

$$(P_\sigma)_0 \quad \Big(\int_{B(x,r)} |\psi(y) - \psi_r(x)|^\sigma \, dy \Big)^{1/\sigma} \leq C_\sigma(r_0) \, r \Big(\int_{B(x,2r)} |\nabla \psi(y)|^\sigma \, dy \Big)^{1/\sigma} .$$

Nous dirons que M vérifie $(P)_0$ si elle vérifie $(P_\sigma)_0$ pour tout $\sigma \geq 1$. Avec ces notations, le résultat principal de [29] s'énonce:

Théorème 8.1. *Une variété riemannienne vérifie l'inégalité de Harnack parabolique si et seulement si elle vérifie l'inégalité de Poincaré à l'échelle (P_2) et la propriété de doublement du volume (DV). Elle vérifie l'inégalité de Harnack parabolique locale si et seulement si $(P_2)_0$ et $(DV)_0$ sont satisfaites.*

L'inégalité de Harnack parabolique est un outil puissant qui a de nombreuses applications. Quelques-unes sont rappelées dans [29]. Elle permet, par exemple, d'obtenir des bornes gaussiennes, inférieure et supérieure, pour le noyau de la chaleur. En particulier, l'inégalité de Harnack locale permet de montrer que pour tout t_0 il existe c_0, C_0 tels que

$$c_0 \, V(x, \sqrt{t})^{-1} \leq p_t(x,x) \leq C_0 \, V(x, \sqrt{t})^{-1} , \qquad x \in M, \ 0 < t \leq t_0 .$$

A l'aide du Théorème 7.1, on obtient donc

Proposition 8.2. *Soient M_1 et M_2 deux variétés riemanniennes isométriques à l'infini vérifiant $(P_2)_0$ et $(DV)_0$. Alors, pour tout $\nu > 0$, on a*

$$\sup_{M_1} p_t^1(x,x) = O(t^{-\nu/2}) , \qquad \textit{quand } t \to \infty ,$$

si et seulement si

$$\sup_{M_2} p_t^2(x,x) = O(t^{-\nu/2}) , \qquad \textit{quand } t \to \infty .$$

De même, si M vérifie $(P_2)_0$ et $(DV)_0$ et est isométrique à l'infini au graphe pondéré X, alors

$$\sup_{M} p_t^M(x,x) = O(t^{-\nu/2}) , \qquad \textit{quand } t \to \infty ,$$

si et seulement si

$$\sup_X p_k^X(x,x) = O(k^{-\nu/2}), \qquad \textit{quand } k \to \infty .$$

Comme la propriété de doublement du volume (Proposition 2.3) et la propriété $(P_2)_\infty$ (théorèmes 7.1 et 7.2 ou, plus précisément, propositions 4.2 et 6.10 et les remarques qui les suivent) sont conservées par isométrie à l'infini, le Théorème 8.1 fournit:

Théorème 8.3. 1) *Soient M_1 et M_2 deux variétés riemanniennes isométriques à l'infini vérifiant $(DV)_0$ et $(P_2)_0$. Alors, si M_1 vérifie l'inégalité de Harnack parabolique, il en est de même de M_2.*

2) *Si M est une variété vérifiant $(DV)_0$ et $(P)_0$ et isométrique à l'infini à un graphe pondéré (X, m), alors M vérifie l'inégalité de Harnack parabolique si et seulement si X vérifie (DV) et (P_2).*

Corollaire 8.4. *Soit M une variété riemannienne à courbure de Ricci minorée. Supposons que M est isométrique à l'infini soit à une variété à courbure de Ricci positive ou nulle, soit à un groupe de Lie à croissance polynômiale du volume, soit encore à un groupe finiment engendré à croissance polynômiale du volume. Alors M vérifie l'inégalité de Harnack parabolique; en particulier, M a la propriété de Liouville forte.*

Cet énoncé généralise le Théorème 5.1 de [21], qui traite le cas où M est isométrique à l'infini à $\mathbb{R}^n$, avec $n \geq \dim M$, et les résultats de [16], [27], [28], [29], qui donnent certains cas des énoncés ci-dessus si l'on remplace isométrique à l'infini par quasi-isométrique.

REMARQUE: On peut vouloir essayer de décrire d'une façon ou d'une autre, à isométrie à l'infini près, les classes de variétés et de graphes vérifiant (DV) et (P). Nous nous contenterons des observations suivantes:

1. En utilisant les résultats de [30], on montre facilement qu'une variété M (ou un graphe) connexe qui vérifie (DV), (P) et $V(x,r) \geq c\, r^{1+\varepsilon}$, $r \geq 1$ ne peut posséder qu'une seule composante connexe à l'infini (*i.e.* $M \setminus B(x_0, r)$ est connexe pour tout r assez grand).

2. Tous les graphes de dimension 1 (*i.e.* tels que $C^{-1} \leq V(x,r)/r \leq C$) satisfont (DV) et (P). On en construit facilement une infinité

deux à deux non isométriques à l'infini. Il suffit par exemple de considérer la famille de graphes $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, où X_n est constitué de n copies de $\mathbb{Z}$ qui se croisent en un point. Cet exemple montre que la Remarque 1 ne s'applique pas en dimension un. Il existe aussi une infinité de graphes de dimension un ne possédant qu'une composante connexe à l'infini et deux à deux non isométriques à l'infini. Il suffit de considérer deux copies de $\mathbb{N}$ et d'identifier par exemple les points a^i, $i \in \mathbb{N}$, où a est un entier donné. Les graphes associés à des entiers distincts ne sont pas isométriques à l'infini.

9. Opérateurs isométriques à l'infini.

La technique de discrétisation que nous avons décrite jusqu'ici pour les variétés riemanniennes peut en fait être mise en œuvre dès que l'on sait donner un sens à $(DV)_{\mathrm{loc}}$ et $(PL)_{loc}$.

Considérons une variété connexe M munie d'un opérateur du second ordre $\mathcal{L}$, à coefficients réels et sans terme constant. Supposons qu'il existe une mesure positive et C^∞ μ sur M telle que $\mathcal{L}$ soit auto-adjoint sur $L^2(M,\mu)$. Supposons enfin que $\mathcal{L}$ est localement sous-elliptique. On peut alors définir la longueur du gradient associé à $\mathcal{L}$ en posant

$$|\nabla\psi|^2 = |\nabla_{\mathcal{L}}\psi|^2 = \frac{1}{2}\left(-\mathcal{L}\psi^2 + 2\,\psi\mathcal{L}\,\psi\right).$$

Une métrique ρ est canoniquement associée à $\mathcal{L}$; on a en fait

$$\rho(x,y) = \sup\{\psi(x) - \psi(y) : \ \psi \in C_0^\infty(M),\ |\nabla f| \le 1\}.$$

Nous disposons donc des notions nécessaires pour écrire les diverses inégalités de Poincaré à l'échelle et les diverses conditions de doublement du volume. Nous les noterons comme précédemment.

EXEMPLE. Sur $\mathbb{R}^2$, considérons l'opérateur de Grushin $\mathcal{L} = -(\partial_x^2 + x^2\partial_y^2)$. C'est un des opérateurs sous-elliptiques les plus simples (voir par exemple [19]). On peut montrer que $\mathcal{L}$ satisfait (DV) et (P). Ceci résulte de ce que $\mathcal{L}$ peut être obtenu par passage au quotient à partir du sous-laplacien sur le groupe de Heisenberg. De plus, pour $z = (x,y)$, $V(z,r) \simeq |x|\,r^2 + r^3$, ce qui montre que (DV) n'implique pas, en général, que $V(z,1)$ soit majoré ou minoré. Pour tout ceci, voir [25].

Soient maintenant deux opérateurs $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ sur M comme ci-dessus, μ_1, μ_2 les mesures et ρ_1, ρ_2 les distances associées. Nous dirons que $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ sont isométriques à l'infini si (M, ρ_1, μ_1) et (M, ρ_2, μ_2) sont isométriques à l'infini au sens du Paragraphe 1.

Proposition 9.1. *Supposons que $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ vérifient $(DV)_{\mathrm{loc}}$ et $(P)_{\mathrm{loc}}$ et qu'ils sont isométriques à l'infini.*

1) *Les opérateurs $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ vérifient simultanément chacune des propriétés $(S^{\infty}_{p,q})$, (N^{∞}_{ν}) ou $(S_{p,p})$ pour un ou pour tout $1 \leq p < +\infty$.*

2) *Soient p^1_t et p^2_t les noyaux de la chaleur respectivement associés à $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$, et soit $\nu > 0$. Supposons que $\inf_M V_i(x,r) > 0$, pour tout $r > 0$ et $i = 1, 2$. Supposons de plus qu'il existe $t_i > 0$ et C_i tels que $\sup_M p^i_{t_i}(x,x) \leq C_i$ pour $i = 1, 2$. Alors*

$$\sup_M p^1_t(x,y) = O(t^{-\nu/2}), \qquad \textit{quand } t \to +\infty,$$

si et seulement si

$$\sup_M p^2_t(x,y) = O(t^{-\nu/2}), \qquad \textit{quand } t \to +\infty.$$

En particulier, cette équivalence vaut quand $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ vérifient $(DV)_0$ et $(P)_0$ (ou même $(P_2)_0$).

EXEMPLE. Soit G un groupe de Lie muni d'une mesure de Haar invariante à droite. Considérons les opérateurs $\mathcal{L}$ sur G de la forme

$$\mathcal{L}\psi = -\sum_{i=1}^{k} X_i^2 \psi,$$

où les X_i sont des champs de vecteurs invariants à gauche qui engendrent algébriquement l'algèbre de Lie de G. Les propriétés $(DV)_0$ et $(P)_0$ sont alors vérifiées, voir [37], [35]. La première assertion de la Proposition 9.1 montre que G est non-moyennable si et seulement si pour un ou pour tout p, $1 \leq p < +\infty$, et un ou tout $\mathcal{L}$ comme ci-dessus, la propriété $(S_{p,p})$ est satisfaite. Ici on peut prendre comme définition de la non-moyennabilité le fait que le spectre de $\mathcal{L}_0 = -\sum_1^m Z_i^2$ sur $L^2(G)$ (mesure de Haar invariante à droite) ne contient pas zéro, où $(Z_i)_1^m$ est une famille fixée de champs de vecteurs invariants à gauche qui forme une base de l'algèbre de Lie de G. On peut aussi partir de la propriété de Folner et la discrétiser.

Théorème 9.2. *Supposons que $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ vérifient $(DV)_0$ et $(P)_0$ et qu'ils sont isométriques à l'infini. Alors $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ vérifient simultanément (DV), (P_σ) ou l'inégalité de Harnack parabolique.*

Pour terminer, décrivons quelques situations où l'on peut appliquer la Proposition 9.1 et le Théorème 9.2. Sur $\mathbb{R}^n$, nous dirons qu'un opérateur $\mathcal{L}$ comme ci-dessus est uniformément sous-elliptique s'il existe C_1 tel que

$$(9.1) \qquad |\nabla_{\mathcal{L}}\psi| \le C_1\,|\nabla\psi|, \qquad \text{pour tout } \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

et s'il existe $0 < \alpha \le 1$ et C_2 tels que

$$(9.2) \quad \|\Delta^{\alpha/2}\psi\|_2 \le C_2\left(\|\mathcal{L}^{1/2}\psi\|_2 + \|\psi\|_2\right), \quad \text{pour tout } \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

où $\nabla\psi = \left(\sum|\partial_i\psi|^2\right)^{1/2}$ et $\Delta = -\sum_{i=1}^n \partial_i^2$ est le laplacien usuel. La première inégalité n'est qu'une façon de dire que les coefficients de $\mathcal{L}$ sont bornés.

Il résulte des travaux de Fefferman, Phong, et Sanchez-Calle [14], [15], que, si $\mathcal{L}$ est uniformément sous-elliptique, il vérifie $(DV)_0$, et que la distance $\rho_{\mathcal{L}} = \rho$ satisfait

$$\sup_{|x-y|\le 1} \rho(x,y) \le C \qquad \text{et} \qquad \sup_{\rho(x,y)\le 1} |x-y| \le C$$

où $|x|$ est la norme euclidienne de $x \in \mathbb{R}^n$. On en déduit facilement que Δ et $\mathcal{L}$ sont isométriques à l'infini. De plus, Jerison et Sanchez-Calle montrent dans [19] que $\mathcal{L}$ satisfait $(P)_0$. On peut donc appliquer le Théorème 9.2 qui montre que $\mathcal{L}$ vérifie l'inégalité de Harnack parabolique. On peut en déduire que $\mathcal{L}$ a la propriété de Liouville forte et obtenir des estimations précises du noyau de la chaleur associé à $\mathcal{L}$. On retrouve ainsi certains des résultats de [23].

Maintenant, on peut facilement généraliser ces considérations en remplaçant $\mathbb{R}^n$ et sa structure euclidienne par une variété riemannienne M. La définition d'un opérateur sous-elliptique (par rapport à la structure riemannienne fixée sur M) s'obtient en copiant celle donnée ci-dessus dans le cas de $\mathbb{R}^n$: si ∇ et Δ sont le gradient et le laplacien riemanniens sur M, un opérateur $\mathcal{L}$ comme ci-dessus est uniformément sous-elliptique (par rapport à Δ) s'il vérifie (9.1) et (9.2) pour toute fonction $\psi \in C_0^\infty(M)$.

Dans ce cadre, il nous faut supposer que la structure locale de M est uniformément comparable à celle de $\mathbb{R}^n$ en un sens suffisamment fort pour pouvoir transplanter les résultats de Fefferman, Phong, Sanchez-Calle et Jerison. C'est certainement le cas si on prend pour M un groupe de Lie muni d'une métrique riemannienne invariante à gauche (l'opérateur $\mathcal{L}$ n'est lui pas nécessairement invariant à gauche). On peut dans ce cas appliquer la Proposition 9.1 et le Théorème 9.2. En particulier, les opérateurs uniformément sous-elliptiques sur les groupes de Lie à croissance polynômiale du volume vérifient l'inégalité de Harnack parabolique et ont la propriété de Liouville forte (voir aussi [27]). On peut étudier de même les opérateurs uniformément elliptiques sur les revêtements de variétés compactes.

References.

[1] Ancona, A., Théorie du potentiel sur des graphes et des variétés. In *Cours de l'Ecole d'été de probabilités de Saint-Flour*, 1988. Springer Lecture Notes **1427** (1990), 4-112.

[2] Benjamini, I., Instability of the Liouville property for quasi-isometric graphs and manifolds of polynomial volume growth. *J. Theory Probab.* **3** (1991), 631-637.

[3] Brooks, R., The fundamental group and the spectrum of the Laplacian. *Comm. Math. Helvetici* **56** (1981), 581-598.

[4] Brooks, R., The spectral geometry of a tower of coverings. *J. Differential Geom.* **23** (1986), 97-107.

[5] Buser, P., A note on the isoperimetric constant. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* 4-*ème série* **15** (1982), 213-230.

[6] Carlen, E., Kusuoka, S., Stroock, D., Upper bounds for symmetric Markov transition functions. *Ann. Inst. H. Poincaré, Probabilités et Statistique* **23** (1987), 245-287.

[7] Chavel, I., Feldman E., Isoperimetric constants, the geometry of ends, and large time heat diffusion in Riemannian manifolds. *Proc. London Math. Soc.* **62** (1991), 427-448.

[8] Chavel, I., Feldman, E., Modified isoperimetric constants and large time heat diffusion in riemannian manifolds. *Duke Math. J.* **64** (1991), 473-499.

[9] Cheng, S.Y., Yau, S.T., Differential equations on riemannian manifolds and their geometric applications. *Comm. Pure Appl. Math.* **28** (1975), 333-354.

[10] Coulhon, Th., Dimension à l'infini d'un semi-groupe analytique. *Bull. Soc. Math. France* **114** (1990), 485-500.

[11] Coulhon, Th., Noyau de la chaleur et discrétisation d'une variété riemannienne. *Israel J. Math.* **80** (1992), 289-300.

[12] Coulhon, Th., Ledoux M., Isopérimétrie, décroissance du noyau de la chaleur et transformations de Riesz: un contre-exemple. *Arkiv Mat.* **32** (1994), 63-77.

[13] Coulhon, Th., Saloff-Coste, L., Puissances d'un opérateur régularisant. *Ann. Inst. H. Poincaré, Probabilités et Statistique* **26** (1990), 419-436.

[14] Fefferman, Ch., Phong, D. H., Subelliptic eigenvalue problems. In *Proc. Conference Harmonic Anal. in Honor of A. Zygmund*, Wadsworth Math. Ser. (1981), 590-606.

[15] Fefferman, Ch., Sanchez-Calle, A., Fundamental solutions for second order subelliptic operators. *Ann. of Math.* **124** (1986), 247-272.

[16] Grigor'yan, A., The heat equation on non-compact Riemannian manifolds. *Math. USSR Sbor.* **72** (1992), 47-77.

[17] Gromov, M., *Structures métriques pour les variétés riemanniennes.* Cedic, 1981.

[18] Jerison, D., The Poincaré inegality for vector fields satisfying Hörmander's condition. *Duke Math. J.* **53** (1986), 503-523.

[19] Jerison, D., Sanchez-Calle, A., Subelliptic second order differential operators. Springer Lecture Notes in Math., **1277** (1986), 47-77.

[20] Kanai, M., Rough isometries, and combinatorial approximations of geometries of non-compact riemannian manifolds. *J. Math. Soc. Japan* **37** (1985), 391-413.

[21] Kanai, M., Rough isometries and the parabolicity of riemannian manifolds. *J. Math. Soc. Japan* **38** (1986), 227-238.

[22] Kanai, M., Analytic inequalities, and rough isometries between noncompact riemannian manifolds. In *Curvature and Topology of Riemannian Manifolds*, Springer Lecture Notes **1201** (1986), 122-137.

[23] Kusuoka, S., Stroock, D., Long time estimates for the heat kernel associated with a uniformly subelliptic symmetric second order operator. *Ann. of Math.* **127** (1988), 165-189.

[24] Li, P., Yau, S-T., On the parabolic kernel of the Schrodinger operator. *Acta Math.* **156** (1986), 153-201.

[25] Lyons, T., Instability of the Liouville property for quasi-isometric manifolds and reversible Markov chains. *J. Differential Geom.* **26** (1987), 33-66.

[26] Maheux, P., Analyse et géométrie sur les espaces homogènes. Thèse de Doctorat, Université Paris VI, 1991.

[27] Nash, J., Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations. *Amer. J. Math.* **80** (1958), 931-954.

[28] Saloff-Coste, L., Stroock, D., Opérateurs uniformément sous-elliptiques sur des groupes de Lie. *J. Funct. Anal.* **98** (1991), 97-109.

[29] Saloff-Coste, L., Uniformly elliptic operators on riemannian manifolds. *J. Differential Geom.* **36** (1992), 417-450.

[30] Saloff-Coste, L., A note on Poincaré, Sobolev, and Harnack inequalities. *Duke Math. J., Internat. Math. Res. Notices* **2** (1992), 27-38.

[31] Saloff-Coste, L., On global Sobolev inequality. *Forum Math.* **6** (1994), 271-286.

[32] Varopoulos, N., Brownian motion and random walks on manifolds. *Ann. Inst. Fourier* **34** (1984), 243-269.

[33] Varopoulos, N., Chaînes de Markov et inégalités isopérimétriques. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* **298** (1984), 233-236.

[34] Varopoulos, N., Isoperimetric inequalities and Markov chains. *J. Funct. Anal.* **63** (1985), 215-239.

[35] Varopoulos, N., Random walks and Brownian motion on manifolds. *Symposia Math.* **29** (1987), 97-109.

[36] Varopoulos, N., Fonctions harmoniques sur les groupes de Lie. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* **304** (1987), 519-521.

[37] Varopoulos, N., Small time Gaussian estimates of heat diffusion kernels. Part I: the semigroup technique. *Bull. Soc. Math. France* **113** (1989), 253-277.

[38] Varopoulos, N., Saloff-Coste, L., Coulhon, Th., *Analysis and geometry on groups.* Cambridge Univ. Press, 1993.

[39] Yau, S-T., Isoperimetric constants and the first eigenvalue of a compact riemannian manifold. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* *4-ème série* **8** (1975), 487-507.

Recibido: 3 de agosto de 1.994
Revisado: 31 de enero de 1.995

Laurent Saloff-Coste
CNRS, Laboratoire de
Statistique et Probabilités
Université Paul Sabatier
118, route de Narbonne
61032 Toulouse cedex
FRANCE
lsc@cict.fr

Thierry Coulhon
Université de Cergy-Pontoise
Département de Mathématiques
2 Avenue Adolphe Chauvin
Pontoise
95032 Cergy Pontoise Cedex
FRANCE
coulhon@u-cergy.fr