

# Correspondances géodésiques entre les surfaces euclidiennes à singularités coniques

Mohammed Mostefa Mesmoudi

**Abstract.** A. J. Montesinos has shown that a geodesic correspondence between two complete Riemannian manifolds with transitive topological geodesic flow is a homothety. In this paper we prove a similar result for a conformal geodesic correspondence between two singular flat surfaces with conical singularities and negative concentrated curvature.

**Résumé.** A. J. Montesinos a montré qu'une correspondance géodésique entre deux variétés riemanniennes complètes à flot géodésique topologiquement transitif est une homothétie. Dans le même esprit, nous montrons dans cet article qu'une correspondance géodésique conforme entre deux surfaces euclidiennes à singularités coniques avec des courbures concentrées négatives est une homothétie.

## Introduction.

Une correspondance géodésique entre deux surfaces  $M$  et  $M'$ , munies de deux métriques riemanniennes à singularités possible  $g$  et  $g'$  respectivement, est un difféomorphisme  $f : M \rightarrow M'$  qui envoie les géodésiques (non paramétrées) de  $(M, g)$  sur celles de  $(M', g')$ . Dans [Mon], Montesinos démontre le théorème suivant: Si  $(M, g)$  est une variété riemannienne de dimension  $n > 1$ , complète, à flot géodésique

topologiquement transitif alors toute correspondance géodésique  $f : (M, g) \rightarrow (M', g')$ , où  $(M', g')$  est une variété riemannienne de dimension  $n > 1$ , est une homothétie (c'est-à-dire il existe une constante  $c$  telle que  $g'(dfv, dfw) = cg(v, w)$  pour tous  $v$  et  $w$  du fibré tangent  $TM$ ).

Dans [Bon], F. Bonahon conjecture que tout homéomorphisme entre deux surfaces, munies de deux métriques riemanniennes à courbure strictement négative, qui envoie les géodésiques de la première surface sur les géodésiques de la deuxième surface est une homothétie. Dans le même contexte, on démontre dans cet article que toute correspondance géodésique conforme entre deux structures plates singulières est une homothétie.

**Définition.** Soit  $M$  une surface sans bord. Une métrique plate singulière  $\mu$  sur  $M$  est une métrique riemannienne sur  $M \setminus \text{Sing } \mu$ , où  $\text{Sing } \mu$  est un sous-ensemble discret de points de  $M$ , vérifiant les deux conditions suivantes:

1. En dehors des points de  $\text{Sing } \mu$ , la métrique  $\mu$  est localement isométrique à la métrique euclidienne sur le plan.

2. Pour chaque point  $p$  de  $\text{Sing } \mu$ , il existe un voisinage  $V_p$  de  $p$  et deux nombres réels  $\theta_p \neq 2\pi$  et  $\varepsilon > 0$  tels que  $V_p$  soit isométrique au cône d'angle conique  $\theta_p$  défini par:

$$\{(r, t) : 0 \leq r \leq \varepsilon, t \in \mathbb{R}/(\theta_p \mathbb{Z})\} / (0, t) \sim (0, t')$$

muni de la métrique  $ds^2 = dr^2 + r^2 dt^2$ . Le point  $p$  est appelé une singularité de  $\mu$  et le nombre  $\theta_p$  l'angle conique de la singularité  $p$ .

On étend cette définition d'une façon naturelle à une surface à bord. Un voisinage d'un point régulier sur le bord est isométrique à un voisinage d'un point sur le bord d'un demi-plan euclidien. Les singularités sur le bord sont des points anguleux dont l'angle correspondant est différent de  $\pi$ . Lorsque  $M$  est compacte, l'ensemble  $\text{Sing } \mu$  est fini.

Un segment géodésique dont l'intérieur ne contient pas de singularités est un segment euclidien. Un segment géodésique  $g$  dont l'une des extrémités est une singularité d'angle conique supérieur à  $2\pi$  peut se prolonger au voisinage de cette singularité en une infinité de segments géodésiques tel que chacun des deux angles bordés par  $g$  et chacun de

ces prolongés est supérieur à  $\pi$ , [fig.1].

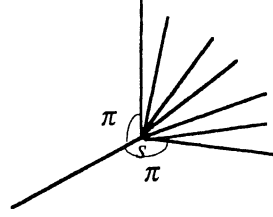


Figure 1

**Proposition 1.** *Sur une surface  $M$  simplement connexe munie d'une métrique plate singulière dont l'angle conique de chaque singularité est supérieur à  $2\pi$ , chaque courbe qui est localement géodésique est une géodésique globale.*

**DÉMONSTRATION.** Rappelons d'abord que la caractéristique d'Euler d'une surface compacte munie d'une métrique plate singulière vérifie la formule de Gauss-Bonnet (voir par exemple [Tro]) suivante

$$2\pi \chi(M) = \sum_{s \in \text{Sing } \mu \cap \text{int } M} (2\pi - \theta_s) + \sum_{s \in \text{Sing } \mu \cap \partial M} (\pi - \theta_s),$$

où  $\theta_s$  désigne l'angle conique d'une singularité  $s$  appartenant à l'intérieur de  $M$  dans la première somme et sur le bord de  $M$  dans la seconde. Soit  $g$  une courbe localement géodésique sur  $M$ . Supposons qu'il existe deux points  $a$  et  $b$  de  $g$  tels que le chemin le plus court  $ab$  qui les joint n'est pas inclus dans  $g$ . désignons par  $S$  le segment de  $g$  d'extrémités  $a$  et  $b$ . Le segment  $S$  borde avec  $ab$  au moins un disque polygonal. Soit  $D$  un tel disque. Ce disque a au plus deux sommets  $s_1$  et  $s_2$  d'angles (à l'intérieur de  $D$ ) inférieurs strictement à  $\pi$ . La formule de Gauss-Bonnet appliquée à  $D$  donne

$$2\pi = \sum_{s \in \text{Sing } \mu \cap \text{int } D} (2\pi - \theta_s) + \sum_{s \in \text{Sing } \mu - \{s_1, s_2\} \cap \partial D} (\pi - \theta_s) + (2\pi - \theta_{s_1} - \theta_{s_2})$$

ce qui implique

$$\theta_{s_1} + \theta_{s_2} = \sum_{s \in \text{Sing } \mu \cap \text{int } D} (2\pi - \theta_s) + \sum_{s \in \text{Sing } \mu - \{s_1, s_2\} \cap \partial D} (\pi - \theta_s) < 0.$$

Ceci est évidemment impossible. Par conséquent,  $ab$  coïncide avec  $S$ .

Le corollaire suivant est immédiat.

**Corollaire 1.** *Sur une surface munie d'une métrique plate singulière dont l'angle conique de chaque singularité est supérieur à  $2\pi$ , tout segment géodésique est unique dans sa classe d'homotopie relative.*

Par la suite, on suppose que  $M$  et  $M'$  sont deux surfaces compactes sans bord de même genre  $g > 1$  et que  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont deux métriques plates définies respectivement sur  $M$  et  $M'$ , singulières si  $g > 1$  et telles que tous les angles coniques des singularités sont supérieurs à  $2\pi$ . Pour chaque singularité  $s$  d'angle conique  $\theta_s$ , le nombre  $2\pi - \theta_s$  est appelé courbure concentrée de  $\rho_1$  (ou  $\rho_2$ ) en  $s$ . Ainsi on suppose que toutes les courbures concentrées sont négatives.

**Proposition 2.** *L'inverse d'une correspondance géodésique est une correspondance géodésique. De plus, si  $f : (M, \rho_1) \longrightarrow (M', \rho_2)$  est une correspondance géodésique, l'image de tout point singulier de  $(M, \rho_1)$  est un point singulier dans  $(M', \rho_2)$ .*

DÉMONSTRATION: Soit  $a$  un arc géodésique dans  $(M', \rho_2)$ . Si  $f^{-1}(a)$  n'est pas géodésique, l'image par  $f$  d'un segment géodésique  $a'$  homotope à  $f^{-1}(a)$  à extrémités fixes est un segment géodésique dans  $(M', \rho_2)$  homotope au segment  $a$  à extrémités fixes. Ceci est en contradiction avec le Corollaire 1.

Un segment géodésique  $a$  dont l'une des extrémités est une singularité  $s$  peut se prolonger en une infinité des segments géodésiques [fig. 1]. Les images de ces segments par  $f$  sont des segments géodésiques qui prolongent  $f(a)$  en  $f(s)$ . Le point  $f(s)$  est alors une singularité. La proposition est démontrée.

**Proposition 3.** *Si  $s$  est une singularité de  $\rho_1$  ayant un angle conique  $\theta_s$ , alors  $f(s)$  est une singularité de  $\rho_2$  ayant le même angle conique  $\theta_s$ .*

Pour démontrer cette proposition on a besoin de deux lemmes.

**Lemme 1.** *L'image par  $f$  d'un secteur basé en  $s$  d'angle  $\pi$  est un secteur basé en  $f(s)$  d'angle  $\pi$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $a$  un segment géodésique sur  $(M, \rho_1)$  dont  $s$  est l'une des extrémités. Le segment  $a$  se prolonge au point  $s$  en une infinité de géodésiques (un faisceau de géodésiques) bornées par deux géodésiques  $a_1$  et  $a_2$  qui font avec  $a$  un angle  $\pi$  [fig.1 ou 2]. Ces géodésiques s'envoient par  $f$  en des géodésiques de  $(M', \rho_2)$  ayant toutes le segment  $f(a)$  en commun. Par conséquent, les angles que fait  $f(a)$  avec  $f(a_1)$  et  $f(a_2)$  sont tous supérieurs à  $\pi$ . S'il existe une géodésique  $g$  dans  $(M', \rho_2)$  prolongeant  $f(a)$  au point  $f(s)$  et n'appartenant pas à l'image du faisceau de géodésiques borné par  $a_1$  et  $a_2$  alors, d'après la proposition précédente,  $f^{-1}(g)$  est une géodésique sur  $(M, \rho_1)$  prolongeant  $a$  et n'appartenant pas au faisceau borné par  $a_1$  et  $a_2$ . Ceci est évidemment impossible. Par conséquent, les angles au point  $f(s)$  entre  $f(a)$  et  $f(a_1)$  et entre  $f(a)$  et  $f(a_2)$  sont égaux à  $\pi$ . L'image d'un secteur d'angle  $\pi$  est alors un secteur d'angle  $\pi$ .

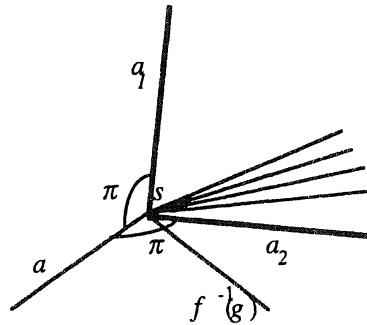


Figure 2

**Lemme 2.** Si l'angle conique  $\theta_s$  de  $s$  est compris entre  $k\pi$  et  $(k+1)\pi$ , pour un certain entier naturel  $k$ , alors l'angle conique  $\theta_{f(s)}$  de  $f(s)$  est aussi compris entre  $k\pi$  et  $(k+1)\pi$ .

DÉMONSTRATION: Supposons que  $\theta_s = k\pi + \alpha$  avec  $0 \leq \alpha < \pi$ . Traçons un secteur basé en  $s$  d'angle  $\alpha$  délimité par deux segments géodésiques notés  $a_0$  et  $a_k$ . Subdivisons le secteur restant en  $k$  secteurs chacun d'angle  $\pi$ . Chaque secteur est délimité par deux segments géodésiques notés  $a_i$  et  $a_{i+1}$ , l'indice  $i$  varie entre 0 et  $k$  [fig. 3]. Supposons que  $\theta_{f(s)}$  est strictement inférieur à  $k\pi$ . Supposons enfin que  $(m-1)\pi <$

$\theta_{f(s)} < m\pi$  avec  $m < k$ . Le lemme précédent entraîne que l'image des  $(m - 1)$  premiers secteurs basés en  $s$  et délimités par les segments  $a_0$  et  $a_{m-1}$  est un secteur basés en  $f(s)$  d'angle  $(m - 1)\pi$  et délimité par  $f(a_0)$  et  $f(a_{m-1})$ . Les secteurs restants basés en  $s$  s'envoient tous sur un secteur basé en  $f(s)$  d'angle inférieur à  $\pi$  qui ne peut pas contenir de géodésiques passant par  $f(s)$ , voir les parties hachurées de la Figure 3. Ceci est évidemment impossible et par conséquent  $\theta_{f(s)} \geq k\pi$ . Puisque l'image inverse de l'application  $f$  est une correspondance géodésique, le même raisonnement entraîne que si  $\theta_{f(s)}$  est supérieur à  $(k + 1)\pi$  alors  $\theta_{f^{-1}(f(s))} = \theta_s$  est aussi supérieur à  $(k + 1)\pi$ . Ce qui n'est pas possible. D'où l'on déduit le lemme.

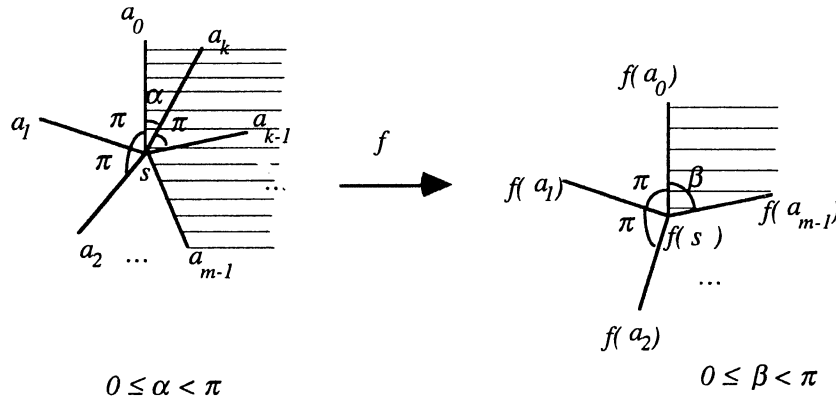


Figure 3

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION. Si l'angle conique  $\theta_s$  est un multiple de  $\pi$ , le Lemme 2 implique que  $\theta_{f(s)} = \theta_s$ . Supposons maintenant que  $\theta_s$  n'est pas un multiple de  $\pi$  et que l'on a  $\theta_{f(s)} > \theta_s$  et  $(k - 1)\pi < \theta_s < k\pi$  pour un certain entier naturel  $k$ . Cet encadrement entraîne, d'après ce qui précède, que l'on a  $(k - 1)\pi < \theta_{f(s)} < k\pi$ . Notons pour simplifier  $\alpha = k\pi - \theta_s$  et  $\beta = k\pi - \theta_{f(s)}$ . Puisque l'image de  $\theta_s$  par  $f$  est  $\theta_{f(s)}$  et  $f$  préserve les angles multiples de  $\pi$ , en chaque singularité, l'image de tout secteur d'angle  $\alpha$  est un secteur d'angle  $\beta$ . Notons ceci par  $f(\alpha) = \beta$ . Par conséquent, l'image de deux secteurs voisins d'angle  $\alpha$  chacun sont deux secteurs voisins d'angle  $\beta$  chacun, d'où  $f(2\alpha) = 2\beta$ . Par récurrence, on montre que  $f(n\alpha) = n\beta$  pour tout entier naturel  $n$ . L'inégalité  $\theta_{f(s)} > \theta_s$  implique que  $\beta < \alpha$ . Puisque

$\alpha - \beta$  est différent de zéro, la différence  $n\alpha - n\beta$  tend vers l'infini quand  $n$  croît. Soit  $n'$  le premier entier naturel tel que :

$$n'\alpha = m\pi + \alpha' \quad \text{et} \quad n'\beta = m\pi + \beta',$$

où  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\pi \leq \alpha'$  et  $0 \leq \beta' < \pi$ .

Puisque  $f(n\alpha) = n\beta$  et  $f(n\pi) = n\pi$  quel que soit l'entier naturel  $n$ , on a  $f(\alpha') = \beta'$ . Ceci est impossible car le secteur d'angle  $\alpha'$  contient des géodésiques passant par son sommet  $s$ , tandis que le secteur image d'angle  $\beta'$  ne contient pas de géodésiques passant par son sommet  $f(s)$  [fig. 4]. Par conséquent, on obtient  $\theta_{f(s)} \leq \theta_s$ .

Puisque  $f^{-1}$  est une correspondance géodésique, la même méthode appliquée à  $f^{-1}$  donne l'inégalité  $\theta_{f(s)} \geq \theta_{f^{-1}(f(s))=s}$ . D'où l'on déduit la proposition.

**Corollaire 2.** *Soient  $s$  un point singulier de la métrique  $\rho_1$  et  $\theta_s$  l'angle conique en  $s$ . Supposons que  $\theta_s$  est rationnellement indépendant de  $\pi$ . L'image par  $f$  de tout secteur d'ouverture  $\alpha'$  basé en  $s$  est un secteur d'ouverture  $\alpha'$  basé en  $f(s)$ . Autrement dit,  $f$  respecte les angles en  $s$ .*

**DÉMONSTRATION.** Supposons que  $\theta_s = k\pi + \alpha$  pour un certain entier naturel  $k$  et  $0 < \alpha < \pi$ . Un simple calcul montre que l'angle  $\alpha$  est rationnellement indépendant avec  $\theta_s$ . Un résultat de topologie implique que les multiples relatifs de  $\alpha$  modulo  $\theta_s$  forment un ensemble dense dans l'intervalle  $[0, \theta_s]$ . D'après la proposition précédente, on a  $f(n\alpha) = n\alpha$  pour tout entier  $n$ . Chaque angle  $\alpha'$  peut être approché par une suite de multiples de  $\alpha$  modulo  $\theta_s$ . L'image de cette suite par  $f$  est elle-même. Par conséquent, elle tend vers  $\alpha'$ . Ainsi  $f(\alpha') = \alpha'$ .

Les deux corollaires suivants sont immédiats.

**Corollaire 3.** *L'image par  $f$  d'un cylindre euclidien sur  $(M, \rho_1)$  est un cylindre euclidien sur  $(M', \rho_2)$ .*

**Corollaire 4.** *Si  $\{s_1, \dots, s_k\}$  est l'ensemble des singularités de  $\rho_1$ , alors l'ensemble des singularités de  $\rho_2$  est exactement  $\{f(s_1), \dots, f(s_k)\}$ .*

et, pour chaque  $i \in \{1, \dots, k\}$ , le point singulier  $f(s_i)$  a le même angle conique que  $s_i$ .

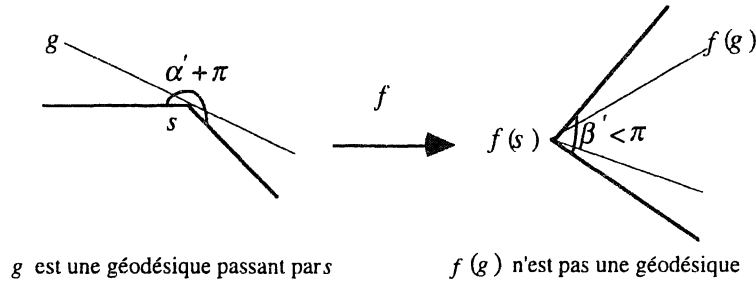


Figure 4.

**Théorème.** Soient  $M$  et  $M'$  deux surfaces compactes sans bord de même genre  $g \geq 1$ . Soient  $\rho_1$  et  $\rho_2$  deux métriques plates singulières définies respectivement sur  $M$  et  $M'$  telles que tous les angles coniques des singularités des deux métriques sont strictement supérieure à  $2\pi$ . Toute correspondance géodésique conforme  $f : (M, \rho_1) \rightarrow (M', \rho_2)$  est une homothétie.

**DÉMONSTRATION.** Remarquons d'abord que l'hypothèse du théorème entraîne que dans le cas  $g = 1$  les métriques plates  $\rho_1$  et  $\rho_2$  ne sont pas singulières. Notons  $\bar{\rho}_2$  la métrique réciproque de  $\rho_2$  par  $f$ . Les métriques  $\bar{\rho}_2$  et  $\rho_2$  sont isométriques. Ce qui implique que  $\bar{\rho}_2$  est une métrique plate singulière sur  $M$ . Puisque  $f$  est conforme, la métrique  $\bar{\rho}_2$  est conforme à  $\rho_1$  (dans le sens où il existe une fonction positive  $h$  telle que  $\bar{\rho}_2 = h\rho_1$ ) et a les mêmes géodésiques (non paramétrées) que  $\rho_1$ . D'après le corollaire précédent, si  $M$  est de genre  $g > 1$  alors  $\rho_1$  et  $\bar{\rho}_2$  ont les mêmes points singuliers avec les mêmes angles coniques respectifs. Comme les métriques  $\rho_1, \bar{\rho}_2$  sont conformes et ont mêmes singularités avec les mêmes angles coniques respectifs (quand  $g > 1$ ), alors, d'après le Théorème de Troyanov [Tro] de classification des surfaces euclidiennes à singularités coniques, la fonction  $h$  est une constante  $c$ . On a alors,  $\bar{\rho}_2 = c\rho_1$ . Il en résulte que l'application  $f$  est une homothétie.

**REMARQUE.** La condition du théorème demandant que  $\rho_1$  et  $\bar{\rho}_2$  soient conformes est essentielle au moins en genre 1. Dans ce cas si la correspondance géodésique n'est pas conforme, le théorème est faux. En



effet, un tore  $T$  muni des deux métriques plates  $\rho_1 = dx^2 + dy^2$  et  $\rho_2 = dx^2 + 2dy^2$  admet l'identité comme correspondance géodésique alors que les métriques  $\rho_1$  et  $\rho_2$  ne sont pas proportionnelles.

**Remerciements.** Je remercie Marc Troyanov pour ses remarques et suggestions sur ce travail.

#### Références.

- [Bon] Bonahon, F., Surfaces with the same marked length spectrum. *Topology and its applications* **50** (1993), 55-62.
- [Mes] Mesmoudi, M., M., Métriques plates singulières et feuilletages mesurés sur les surfaces, Thèse de doctorat, prépublication de l'IRMA, 1994.
- [Mon] Montesinos, A. J., Sur les variétés riemanniennes à flot géodésique topologiquement transitif. *Rev. Mat. Iberoamericana* **6** (1990), 109-124.
- [Tro] Troyanov, M., Les surfaces euclidiennes à singularités coniques. *Enseig. Math.* **32** (1986), 79-94.

*Recibido:* 14 de noviembre de 1.994

*Revisado:* 22 de febrero de 1.995

Mohammed Mostefa Mesmoudi  
 Institut de Recherche Mathématique Avancée  
 Université Louis Pasteur et C.N.R.S.  
 7, rue René Descartes 67084  
 Strasbourg Cedex, FRANCE  
 mesmoudi@math.u-strasbg.fr