Revista Matemática Iberoamericana
Vol. 12, N.° 2, 1996

Etude de la vitesse de convergence de l'algorithme en cascade dans la construction des ondelettes d'Ingrid Daubechies

Sylvain Durand

Résumé. L'objet de cet article est l'étude de la vitesse de convergence des algorithmes de résolution d'une équation à deux échelles. Il s'agit d'algorithmes de point fixe, souvent appelés "algorithmes en cascade", qui sont utilisés dans la construction des ondelettes. Nous étudions la vitesse de convergence dans les espaces de Lebesgue et de Besov, et montrons que la qualité de convergence dépend de deux facteurs indépendants. Le premier, qui va de soi, est la régularité de la fonction d'échelle qui est la solution de l'équation. Le second facteur (qui est la découverte essentielle de ce travail) concerne des propriétés algébriques spécifiques de la fonction servant à initialiser l'algorithme. celle-ci doit satisfaire des conditions analogues à celles de Strang-Fix.

Abstract. The aim of this paper is the study of the convergence of algorithms involved in the resolution of two scale equations. They are fixed point algorithms, often called "cascade algorithm", which are used in the construction of wavelets. we study their speed of convergence in

Lebesgue and Besov spaces, and show that the quality of the convergence depends on two independent factors. The first one, as we could foresee, is the regularity of the scaling function which is the solution of the equation. The second factor (that is the essential discovery of this work) concerns specific algebraic properties of the function used to initialize the algorithm. This function must satisfy conditions analogous to Strang-Fix conditions.

0. Introduction.

Dans ce travail, nous étudions la vitesse de convergence des algorithmes de résolution d'une équation d'échelle,

$$\varphi(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} c_l \, \varphi(2x - l)\,, \tag{1}$$

où la fonction φ que l'on cherche à construire appartient à l'espace $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ et satisfait $\int \varphi(x)\, dx = 1$. Pour construire la fonction d'échelle φ, on utilise un algorithme itératif appelé *algorithme en cascade*. On définit l'opérateur T de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans lui même par

$$T(f)(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} c_l \, f(2x - l)\,. \tag{2}$$

Puis, partant d'une fonction arbitraire f_0 dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, on définit la suite $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ par

$$f_j = T(f_{j-1}) = T^j(f_0)\,, \qquad \text{pour tout } \; j \in \mathbb{N}\,. \tag{3}$$

Nous allons montrer comment la qualité de convergence de cet algorithme de point fixe, est reliée aux propriétés de la fonction limite φ et du terme initial f_0.

Notre première motivation était la construction des ondelettes. C'est dans ce même but que l'algorithme a été utilisé par I. Daubechies dans [4]. Celui-ci est cependant également utilisé dans d'autres finalités. Nous avons donc essayé d'énoncer nos théorèmes dans le cadre le plus général possible.

On définit plus souvent l'équation d'échelle par

$$\varphi(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} c_l \, \varphi(kx - l)\,,$$

pour un entier $k \geq 2$. Les théorèmes énoncés dans cet article se généralisent sans difficultés à cette équation, bien qu'ils soient toujours énoncés lorsque l'entier k est égal à 2, comme cela est le cas pour les ondelettes.

Les équations d'échelle ont été introduites, pour la première fois, en 1956, par G. de Rham [6], dans le but de construire des fonctions continues, nulle part dérivables. Puis ces équations ont été récemment réintroduites dans le cadre des algorithmes d'interpolation. Nous pouvons citer, dans ce domaine, les travaux de W. Dahmen, A. Cavarretta et C. Micchelli [3], [2], [1], G. Deslauriers et S. Dubuc [9], [7], [8], N. Dyn, A. Gregory et D. Levin [11]. Ces algorithmes ont des applications dans le Computer Aided Design (C.A.D.) car ils permettent de lisser les angles des surfaces polyhédriques. Contrairement à ce qu'il en est pour les travaux de G. de Rham, il s'agit souvent de construire des courbes les plus régulières possibles. Cette divergence dans les objectifs va de pair avec le caractère instable de la régularité de la fonction φ.

Le problème de la convergence de l'algorithme en cascade est par contre beaucoup plus stable, lorsque le problème de l'existence et de l'unicité de la solution de l'équation d'échelle a été résolu. Signalons à ce propos que, si l'on omet la condition $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors l'espace des solutions de l'équation d'échelle est de dimension infinie. Si l'on suppose $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, il est, au plus, de dimension 1 et, lorsque cela est le cas, φ est définie de façon unique par la seconde condition $\int \varphi(x)\, dx = 1$, [10].

Le problème concernant la convergence $L^2(\mathbb{R}^n)$ est donc mal posé dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. C'est pourquoi, dans tous les énoncés concernant la convergence $L^2(\mathbb{R}^n)$, on doit imposer à f_0 une autre propriété (qui sera, en général, plus forte que $f_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$). Sinon f_0 pourrait être un autre point-fixe de T ce qui conduirait à $T^j(f_0) = f_0$ qui ne converge pas vers φ.

Nous montrons, dans cet article, que la qualité de la convergence dépend de deux facteurs indépendants et montrons quel est le rôle joué par chacun des deux facteurs. Le premier, qui va de soi, est la régularité de la fonction d'échelle φ. Le second facteur concerne des propriétés algébriques spécifiques de la fonction f_0. Pour avoir une bonne convergence, celle-ci doit satisfaire des propriétés analogues à celles de Strang-Fix,

$$\partial^\alpha \hat{f}_0(2l\pi) = 0\,, \qquad \text{pour tout } \; l \in (\mathbb{Z}^n)^*\,,$$

et

$$\partial^\alpha \hat{f}_0(0) = \partial^\alpha \hat{\varphi}(0)\,,$$

où les $\alpha \in \mathbb{N}^n$ sont donnés par la régularité de φ.

Nous nous ramenons à une suite d'opérateurs définis par changement d'échelle à l'aide d'un noyau intégrale. On montre que l'on a

$$f_j = E_j(\varphi),$$

où l'opérateur E_j est défini par

$$E_j(g)(x) = 2^{nj} \int K(2^j x, 2^j y)\, g(y)\, dy$$

et le noyau K dépend du choix de f_0 et de φ. La convergence de f_j vers φ est donc une conséquence immédiate de la convergence de E_j vers l'opérateur d'identité I.

Nous énonçons les théorèmes dans le cadre de la convergence dans les espaces de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $1 \leq p < +\infty$, puis dans les espaces de Besov $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ qui sont les plus généraux. L'objet de cet article est de présenter les principaux théorèmes démontrés dans [10]. A l'exception du théorème sur la convergence dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, nous nous contenterons ici de donner les résultats.

1. Nouvel énoncé du problème.

Cet énoncé s'appuie sur l'existence d'une fonction $\tilde{\varphi} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ telle que, pour φ donnée,

$$(4) \qquad \langle \varphi(x-l), \tilde{\varphi}(x) \rangle = \delta_{0l}\,, \qquad \text{pour tout } \; l \in \mathbb{Z}^n\,,$$

où $\delta_{0l} = 1$ si $l = 0$, 0 sinon, et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Dans des cas très généraux, il est toujours possible de construire une telle fonction.

Lemme 1. *On suppose que $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ vérifie les hypothèses suivantes:*

1) *sa transformée de Fourier $\hat{\varphi}$ appartient à $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

2) *il existe un entier $N > 0$ et un réel $\delta > 0$ tels que*

$$\sum_{|l| \leq N} |\hat{\varphi}(\xi + 2l\pi)|^2 \geq \delta\,,$$

pour tout $\xi \in [0, 2\pi]^n$.

Alors il existe une fonction $\tilde{\varphi}$ *dans la classe de Schwartz* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *telle que*

$$\int \bar{\varphi}(x-k)\,\tilde{\varphi}(x-l)\,dx = \delta_{kl}\,, \qquad \textit{pour tous} \;\; k, l \in \mathbb{Z}^n\,.$$

Pour démontrer le lemme, on doit assurer

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}^n} \bar{\hat{\varphi}}(\xi + 2l\pi)\,\hat{\tilde{\varphi}}(\xi + 2l\pi) = 1\,.$$

On cherche $\hat{\tilde{\varphi}}$ sous la forme $\hat{\varphi}\,\theta$ où $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Or on sait, par hypothèse, que

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}^n} |\hat{\varphi}(\xi + 2l\pi)|^2 \geq \delta\,, \qquad \text{si} \;\; \xi \in [0, 2\pi]^n\,.$$

Il en résulte que

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}^n} |\hat{\varphi}(\xi + 2l\pi)|^2\,\theta(\xi + 2l\pi) \geq \delta\,, \qquad \text{sur} \;\; [0, 2\pi]^n\,,$$

si on prend $\theta \geq 0$ partout et $\theta \geq 1$ sur un compact assez grand. Ensuite, on considère la somme

$$\sigma(\xi) = \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} |\hat{\varphi}(\xi + 2l\pi)|^2\,\theta(\xi + 2l\pi)$$

qui est une fonction de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 2π-périodique en chaque variable et qui vérifie $\sigma(\xi) \geq \delta$ sur $\mathbb{R}^n$. On pose finalement

$$\hat{\tilde{\varphi}} = \hat{\varphi}(\xi)\,\frac{\theta(\xi)}{\sigma(\xi)}$$

et on a, par construction

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}^n} \bar{\hat{\varphi}}(\xi + 2l\pi)\,\hat{\tilde{\varphi}}(\xi + 2l\pi) = 1\,.$$

Ce résultat nous permet de reformuler le problème de la convergence de l'algorithme en cascade. On peut, en effet, énoncer le "lemme-définition" suivant.

Lemme 2. *Si φ vérifie les conditions* 1) *et* 2), *alors il existe une fonction $\tilde{\varphi}$ dans la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que, pour toute fonction f_0 dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, on ait*

$$f_j = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \langle \varphi, \tilde{\varphi}_{jl} \rangle \, f_{jl} \, ,$$

avec $f_{jl}(x) = 2^{nj/2} f_0(2^j x - l)$ et $\tilde{\varphi}_{jl}(x) = 2^{nj/2} \tilde{\varphi}(2^j x - l)$.

La démonstration du Lemme 2 est très simple. On commence par observer qu'il existe une suite α_{jl}, $j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}^n$, telle que, pour toute fonction $f_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, on ait

$$f_j = T^j(f_0) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \alpha_{jl} \, f_{jl} \, .$$

Ceci s'obtient par récurrence à partir de la définition de T. Pour terminer la preuve, il suffit donc de déterminer les coefficients α_{jl}. Pour cela, on utilise le fait que φ soit point fixe de l'opérateur T. On a donc, en prenant $f_0 = \varphi$,

$$\varphi = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \alpha_{jl} \, \varphi_{jl} \, .$$

Le lemme 1 nous fournit finalement $\alpha_{jl} = \langle \varphi, \tilde{\varphi}_{jl} \rangle$.

On utilise maintenant les notations suivantes,

$$K(x, y) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} f_0(x - l) \, \bar{\tilde{\varphi}}(y - l) \, , \tag{5}$$

ce qui entraîne

$$f_j = 2^{nj} \int K(2^j x, 2^j y) \, \varphi(y) \, dy \, . \tag{6}$$

Cette expression nous pousse à étudier la suite d'opérateurs E_j définis de la façon suivante.

Définition 1. *Pour tout entier j, on note E_j l'opérateur défini sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ et à valeurs dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, qui, à une fonction g, associe la fonction*

$$E_j(g)(x) = 2^{nj} \int K(2^j x, 2^j y)\, g(y)\, dy\,. \tag{7}$$

Nous oublions maintenant la définition particulière de K et nous nous posons le problème général de trouver des conditions suffisantes (et si possible nécessaires) sur le noyau K, pour que la suite d'opérateurs E_j converge vers l'identité. La convergence de f_j vers φ en sera une conséquence.

REMARQUE 1. Le fait de pouvoir prendre $\tilde{\varphi}$ dans la classe de Schwartz nous assure une régularité arbitraire pour le noyau K en variable y.

REMARQUE 2. La propriété 2) du Lemme 1, résulte de la propriété, en apparence plus simple suivante: il n'existe pas de $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\hat{\varphi}(\xi_0 + 2l\pi) = 0$, pour tout $l \in \mathbb{Z}^n$.

REMARQUE 3. Si $\{\varphi(x-l),\ l \in \mathbb{Z}^n\}$ est une base inconditionnelle de l'espace V_0 qu'elle engendre, on a nécessairement $\sum_{l\in\mathbb{Z}^n} |\hat{\varphi}(\xi+2l\pi)|^2 \geq \delta > 0$ presque partout. La seule difficulté pour obtenir la propriété 2), est de transformer ce presque partout en partout. C'est le cas si la série écrite est uniformément convergente sur $[0,2\pi]^n$. Ceci a lieu pour toutes les ondelettes d'I. Daubechies, ainsi que pour toutes les ondelettes qui sont utilisées dans la pratique.

REMARQUE 4. En utilisant un résultat de P. G. Lemarié-Rieusset [12], on peut montrer que, si φ est une fonction d'échelle à support compact minimal dans une analyse multirésolution de dimension 1, il est possible dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Le fait de prendre $\tilde{\varphi}$ à support compact, peut simplifier les démonstrations.

2. Convergence dans les espaces de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Nous commençons par étudier la convergence dans l'espace de Lebesgue $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Lemme 3. *Soient ε, R et C trois réels strictement positifs. On suppose que le noyau K vérifie*

1) $\sup_{t\in\mathbb{R}^n} \iint_{|x-t|\le R} |K(x,y)|^2\,(1+|x-y|)^{n+\varepsilon}\,dx\,dy \le C\,,$

2) $\sup_{t\in\mathbb{R}^n} \iint_{|y-t|\le R} |K(x,y)|^2\,(1+|x-y|)^{n+\varepsilon}\,dx\,dy \le C\,,$

3) $\int K(x,y)\,dy = 1\,,$ *presque pour tout.*

Alors, pour toute fonction g dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, $E_j(g)$ converge vers g en norme $L^2(\mathbb{R}^n)$. De plus, si $\int K(x,y)\,dy = 1$ appartient à $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ alors la condition 3) est nécessaire.

Nous commençons par montrer que l'opérateur E_0 est borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. Pour cela, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

$$\begin{aligned}\|E_0(g)\|_2^2 &= \int \Big|\int K(x,y)\,g(y)\,dy\Big|^2\,dx\\ &\le \int \Big(\int |K(x,y)|^2\,(1+|x-y|)^{n+\varepsilon}\,dy\Big)\\ &\qquad\cdot \Big(\int |g(z)|^2\,(1+|x-z|)^{-n-\varepsilon}\,dz\Big)\,dx\,.\end{aligned}$$

On décompose l'intégrale sur des cubes unitaires:

$$\begin{aligned}\|E_0(g)\|_2^2 &\le \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} \Big(\int_{[l,l+1]} \Big(\int |K(x,y)|^2\,(1+|x-y|)^{n+\varepsilon}\,dy\Big)\\ &\qquad\cdot \Big(\int |g(z)|^2\,(1+|x-z|)^{-n-\varepsilon}\,dz\Big)\,dx\Big)\\ &\le \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} \Big(\int_{[l,l+1]} \Big(\int |K(x,y)|^2\,(1+|x-y|)^{n+\varepsilon}\,dy\Big)\,dx\Big)\\ &\qquad\cdot \sup_{t\in[l,l+1]} \Big(\int |g(z)|^2\,(1+|t-z|)^{-n-\varepsilon}\,dz\Big)\end{aligned}$$

avec $[l,l+1] = [l_1,l_1+1]\times\cdots\times[l_n,l_n+1]$. En utilisant la première hypothèse du lemme, on constate que, à une constante multiplicative près, ceci est inférieur à

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}^n} \sup_{t\in[l,l+1]} \int |g(y)|^2(1+|t-y|)^{-n-\varepsilon}\,dy\,,$$

ou encore

$$\int |g(y)|^2 \Big(\sum_{l\in \mathbb{Z}^n} \sup_{t\in[l,l+1]} (1+|t-y|)^{-n-\varepsilon} \Big)\, dy\,.$$

Finalement, on a montré que

$$\int \Big| \int K(x,y)\, g(y)\, dy \Big|^2 dx \le C \int |g(y)|^2\, dy\,,$$

c'est à dire $\|E_0(g)\|_2 \le C\,\|g\|^2$. Et comme $L^2(\mathbb{R}^n)$ est un espace homogène, on a aussi

$$\|E_j(g)\|_2 \le \|g\|_2\,.$$

Pour terminer la démonstration, on peut alors se concentrer sur le cas des fonctions C^∞ à support compact. Le reste se fait par densité.

On doit montrer que $\|E_j(g)-g\|_2$ tend vers zéro lorsque j tend vers l'infini, pour toute fonction $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Comme $\int K(x,y)\; dy = 1$, on a

$$E_j(g)(x) - g(x) = 2^{nj} \int K(2^j x, 2^j y)\,(g(y)-g(x))\, dy\,.$$

Et comme $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, on a , pour tout réel $0 < s \le 1$,

$$|g(y)-g(x)| \le C\,|y-x|^s\,,$$

d'où

$$|E_j(g)(x) - g(x)| \le C\, 2^{nj} \int |K(2^j x, 2^j y)|\, |y-x|^s\, dy\,.$$

On note maintenant A un réel positif tel que le support de g soit inclus dans $[-A,A]^n$. Et on traite séparément les cas où $x \in [-A,A]^n$ et $\mathbb{R}^n \setminus [-A,A]^n$. Lorsque $x \in \mathbb{R}^n \setminus [-A,A]^n$, on a $g(x) = 0$ et, par conséquent, $g(y)-g(x)$ s'annule pour $y \in \mathbb{R}^n \setminus [-A,A]^n$. On a donc

$$\begin{aligned}\|E_j(g)-g\|_2^2 \le C &\int_{[-A,A]^n} 2^{nj} \Big(\int |K(2^j x, 2^j y)|\, |y-x|^s\, dy \Big)^2 dx \\ &+ C \int_{\mathbb{R}^n\setminus[-A,A]^n} 2^{nj} \Big(\int_{[-A,A]^n} |K(2^j x, 2^j y)|\, |y-x|^s\, dy \Big)^2 dx \\ &:= \mathrm{I}_A + \mathrm{J}_A\,.\end{aligned}$$

Pour la première intégrale, on utilise, une nouvelle fois, l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_A &= \int\limits_{[-A,A]^n} 2^{2nj}\Big(\int |K(2^j x, 2^j y)|\, |y-x|^s \, dy\Big)^2 dx \\
&\leq 2^{2nj} \int\limits_{[-A,A]^n} \Big(\int |K(2^j x, 2^j y)|^2 \, (1 + 2^j\, |x-y|)^{n+\varepsilon} \, dy\Big) \\
&\qquad\qquad \cdot \Big(\int |y-x|^{2s} \, (1+2^j\,|x-y|)^{-n-\varepsilon}\, dy\Big)\, dx\,.
\end{aligned}$$

On impose $s < \varepsilon/2$ et on majore le deuxième facteur de l'intégrand, de la façon suivante

$$2^{-nj} \int 2^{-2sj}\, |y|^{2s}\, (1+|y|)^{-n-\varepsilon}\, dy \leq C\, 2^{-nj}\, 2^{-2sj}\,.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_A &\leq C\, 2^{-2sj}\, 2^{nj} \iint\limits_{x\in[-A,A]^n} |K(2^j x, 2^j y)|^2 \, (1 + 2^j\, |x-y|)^{n+\varepsilon}\, dy\, dx \\
&\leq C\, 2^{-2sj}\, 2^{-nj} \iint\limits_{x\in[-2^j A, 2^j A]^n} |K(x,y)|^2\, (1+|x-y|)^{n+\varepsilon}\, dy\, dx\,.
\end{aligned}$$

Et d'après la première hypothèse du lemme

$$\mathrm{I}_A \leq C\, 2^{-2sj}\,.$$

Passons au reste de l'intégrale. On doit majorer

$$\mathrm{J}_A = \int\limits_{x\notin[-A,A]^n} 2^{nj}\Big(\int\limits_{y\in[-A,A]^n} |K(2^j x, 2^j y)|\, |y-x|^s\, dy\Big)^2 dx\,.$$

En reprenant les mêmes calculs que pour I_A, on arrive à

$$\mathrm{J}_A \leq C\, 2^{-2sj}\, 2^{-nj} \iint\limits_{y\in[-2^j A, 2^j A]^n} |K(x,y)|^2\, (1+|x-y|)^{n+\varepsilon}\, dy\, dx\,.$$

Et, d'après la seconde hypothèse du lemme, on a

$$J_A \leq C\, 2^{-2sj}\,,$$

et

$$\|E_j(g) - g\|_2 \leq C\, 2^{-sj}\,.$$

Si maintenant on se place dans le cas particulier où le noyau K est défini par (5), on obtient, comme corollaire du Lemme 3, un premier théorème.

Théorème 1. *On suppose que $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ vérifie les conditions* 1) *et* 2) *du Lemme* 1. *Si $f_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ est à support compact et vérifie $\sum_{l\in\mathbb{Z}^n} f_0(x-l) = 1$ presque partout, alors f_j converge vers φ au sens de la norme $L^2(\mathbb{R}^n)$. De plus, si $|f_0(x)| \leq (1+|x|)^{-n-\varepsilon}$, $(\varepsilon > 0)$, alors la condition $\sum_{l\in\mathbb{Z}^n} f_0(x-l) = 1$ est nécessaire.*

Si l'identité $\sum_{l\in\mathbb{Z}^n} f_0(x-l) = 1$ n'est pas vérifiée, il nous reste cependant la convergence faible de l'algorithme.

Proposition 1. *On suppose que $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ vérifie les conditions* 1) *et* 2) *du Lemme* 1. *Si $f_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ est à support compact et vérifie $\int f_0(x)\,dx = 1$, alors f_j converge vers φ faiblement dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Le Lemme 3 se généralise, sans difficultés, au cadre de la convergence $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $1 \leq p < +\infty$. On peut donc énoncer un deuxième théorème.

Théorème 2. *On suppose que $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ vérifie les hypothèses* 1) *et* 2) *du Lemme* 1. *Si $f_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ est à support compact et $\sum_{l\in\mathbb{Z}^n} f_0(x-l) = 1$, presque pour tout, alors f_j converge vers φ au sens de la norme $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

La démonstration du Lemme 3 s'appuyant sur la densité de l'espace $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, pour $1 \leq p < +\infty$, nous ne savons pas généraliser ce résultat au cas $p = +\infty$. Il nous reste, en fait, uniquement la convergence faible. Pour obtenir la convergence forte, on doit faire une hypothèse supplémentaire qui porte sur la régularité de φ.

3. Convergence dans les espaces de Besov.

Nous commençons par étudier la convergence uniforme de l'algorithme. Le théorème suivant, qui se démontre toujours en ramenant à la convergence des opérateurs E_j, nous donne la vitesse de convergence de l'algorithme en fonction de la régularité de φ.

Théorème 3. *Soit $s \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose que $\varphi \in C^s(\mathbb{R}^n)$ vérifie les conditions* 1) *et* 2) *du Lemme* 1. *Si $f_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ vérifie*

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}^n} |f_0(x-l)|\,|x-l|^s \leq C < +\infty$$

et

$$\partial^\beta \hat{f}_0(2l\pi) = \partial^\beta \hat{\varphi}(2l\pi)\,,$$

pour $\beta \in \mathbb{N}^n$ telle que $|\beta| = \beta_1 + \cdots + \beta_n < s$ et $l \in \mathbb{Z}^n$, alors on a

$$\|f_j - \varphi\|_\infty \leq C\,2^{-sj}\,.$$

Pour la démonstration, on utilise un développement de Taylor-Young de φ à l'ordre s, dans (6).

$$E_j(\varphi)(x) - \varphi(x) = \sum_{1 \leq |\beta| < s} 2^{-|\beta| j} \Big(\int K(2^j x, y)\, \frac{(y - 2^j x)^\beta}{\beta!}\, dy \Big) \partial^\beta \varphi(x) + O\Big(2^{-sj} \int |K(2^j x, y)|\,|y - 2^j x|^s\, dy\Big)\,.$$

Cette expression est intéressante car elle nous montre comment la vitesse de convergence de l'algorithme est ralentie par les termes

$$\mu_\beta(2^j x) = \int K(2^j x, y)\, \frac{(y - 2^j x)^\beta}{\beta!}\, dy\,.$$

Pour les annuler, on doit satisfaire

$$\partial^\beta \hat{f}_0(2l\pi) = \partial^\beta \hat{\varphi}(2l\pi)\,, \qquad \text{pour tout } l \in \mathbb{Z}^n\,.$$

Comme, on a $\partial^\beta \hat{\varphi}(2l\pi) = 0$, pour tous $l \in (\mathbb{Z}^n)^*$ et $\beta \in \mathbb{N}^n$ telle que $|\beta| \leq s$, on doit prendre f_0 telle que

$$(8) \quad \partial^\beta \hat{f}_0(2l\pi) = 0\,, \quad \text{pour tous } l \in (\mathbb{Z}^n)^* \text{ et } \beta \in \mathbb{N}^n \text{ telle que } |\beta| \leq s\,,$$

et

$$(9) \quad \int x^\beta f_0(x)\, dx = \int x^\beta \varphi(x)\, dx\,, \quad \text{pour tout } \beta \in \mathbb{N}^n \text{ telle que } |\beta| \leq s\,.$$

On a donc uniquement besoin de connaître les moments de φ.

Si cette dernière condition n'est plus vérifiée, mais si (8) l'est encore, les fonctions μ_β sont encore constantes. Cette condition est suffisante pour que l'algorithme converge dans l'espace de Hölder (si f_0 est régulière) comme le montre le théorème suivant. Soit $s_0 \in \mathbb{R}_+^*$, on note $[s_0]$ le plus petit entier strictement inférieur à s_0.

Théorème 4. *On suppose que φ appartient à $C^{s_0}(\mathbb{R}^n)$ et vérifie les conditions* 1) *et* 2) *du Lemme* 1. *Si $f_0 \in C^{s_0}(\mathbb{R}^n)$ vérifie*

1) $|\partial^\beta f_0(x)| \leq C\,(1+|x|)^{-n-|\beta|}$, *pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$ telle que $|\beta| < s_0$,*

2) $|f_0(x)| \leq C\,(1+|x|)^{-n-\varepsilon}$, *pour un réel $\varepsilon > 0$,*

3) $|\partial^\beta f_0(x) - \partial^\beta f_0(x')| \leq C\,|x-x'|^{-s_0+[s_0]} \sup_{x,x'} (1+|t|)^n$, *pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$ telle que $|\beta| = [s_0]$,*

4) $\sum_{l \in \mathbb{Z}^n} (x-l)^\beta f_0(x-l)$ *est constante, pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$ telle que $|\beta| \leq [s_0]$,*

5) $\sum_{l \in \mathbb{Z}^n} f_0(x-l) \equiv 1$,

alors f_j converge vers φ dans $C^s(\mathbb{R}^n)$ pour tout $s < s_0$.

La démonstration de ce théorème fait appel à la théorie des opérateurs d'intégrales singulières. Il en est de même pour le théorème suivant qui en est une généralisation aux espaces de Besov $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$. Cette famille d'espaces comprend les espaces de Hölder $C^s(\mathbb{R}^n) = B_\infty^{s,\infty}(\mathbb{R}^n)$ et les espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n) = B_2^{s,2}(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 5. *Soit $s_0 \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose que φ appartient à $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$, pour tout $s < s_0$ ($1 \leq p < +\infty$, $1 \leq q \leq +\infty$) et satisfait les conditions* 1 *et* 2 *du Lemme* 1. *Si $f_0 \in C^{s_0}(\mathbb{R}^n)$ est à support compact et*

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}^n} (x-l)^\beta f_0(x-l) \quad \textit{est constante pour } |\beta| < s_0$$

($\sum_{l \in \mathbb{Z}^n} f_0(x-l) = 1$), *alors f_j converge vers φ dans $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$, pour tout $s < s_0$.*

REMARQUE 5. Cet énoncé n'est pas entièrement satisfaisant car on impose à f_0 une régularité hölderienne d'ordre s_0, alors que l'on recherche la convergence de l'algorithme dans les espaces $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ qui correspondent à une régularité d'ordre $s < s_0$ en un sens un peu moins précis. Il n'est pas naturel, pour étudier la convergence d'une suite dans un espace donné, de prendre son terme initial dans un autre espace. En l'ocurrence, nous n'avons que $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n) \subset C^{s-n/p}(\mathbb{R}^n)$.

En utilisant la Remarque 4, nous avons obtenu un énoncé plus précis qui est cependant uniquement valable en dimension 1.

Théorème 6. *Soit $s_0 \in \mathbb{R}_+^*$, $1 \leq p < +\infty$ et $1 \leq q \leq +\infty$. On suppose que φ appartient à $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $s < s_0$ et φ est une fonction d'échelle à support compact minimal dans une analyse multirésolution. Si $f_0 \in B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $s < s_0$ et vérifie*

$$\int |f_0(x)|^p (1 + |x|)^p dx \leq C < +\infty$$

et

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}^n} (x - l)^\beta f_0(x - l)$$

est constante pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$ telle que $|\beta| < s_0$ ($\sum_{l \in \mathbb{Z}^n} f_0(x - l) = 1$), alors l'algorithme converge dans $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$, pour tout $s < s_0$.

4. Exemples.

Ce dernier paragraphe est consacré aux exemples d'applications des théorèmes énoncés dans les paragraphes précédents. Nous commentons quelques choix standards pour la fonction f_0 et en donnons des nouveaux.

EXEMPLE 4.1. Nous commençons par montrer comment la mauvaise convergence se manifeste lorsque f_0 ne satisfait pas les bonnes conditions. Supposons, par exemple, que f_0 appartienne à $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mais ne vérifie pas la condition $\sum_{l \in \mathbb{Z}^n} f_0(x - l) \equiv 1$. Le corollaire 1 nous assure la convergence faible de l'algorithme. Mais, d'après le Théorème 1, nous savons qu'il n'y a pas convergence forte.

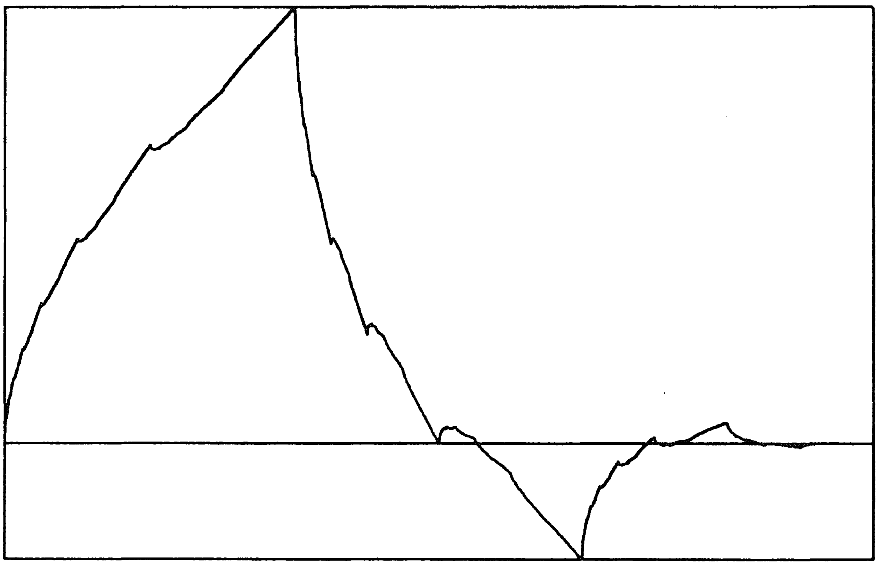

Figure 1. La fonction φ_3 (voir texte)

Les figures 2 et 3 sont une illustration de l'identité

$$\begin{aligned} f_j(x) &= \varphi(x)\Big(\int K(2^j x, y)\, dy\Big) + O(2^{-sj}) \\ &= \varphi(x)\Big(\sum_{l\in\mathbb{Z}} f_0(x-l)\Big) + O(2^{-sj}), \end{aligned}$$

obtenue à partir de 6 et de $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq C\,|x-y|^s$.

Dans cet exemple, φ_3 est l'ondelette d'I. Daubechies, solution de l'équation

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1+\sqrt{3}}{4}\,\varphi(2x) + \frac{3+\sqrt{3}}{4}\,\varphi(2x-1) \\ &\quad + \frac{3-\sqrt{3}}{4}\,\varphi(2x-2) + \frac{1-\sqrt{3}}{4}\,\varphi(2x-3)\,. \end{aligned} \tag{10}$$

La fonction φ_3 appartient à $C^s(\mathbb{R})$ avec $s = 2 - \log_2(1+\sqrt{3}) \sim 0.55\cdots$, [5].

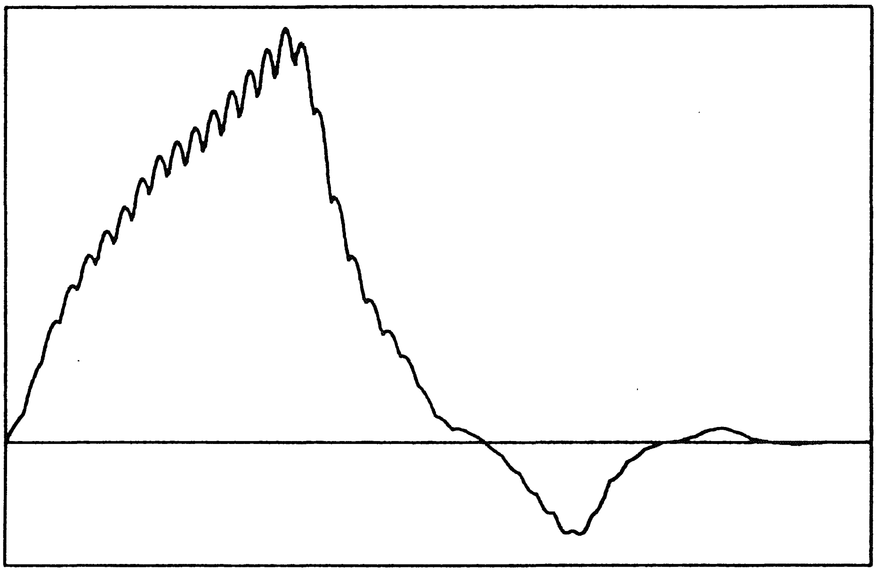

Figure 2. f_4 lorsque $f_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mais ne satisfait pas $\sum_{l \in \mathbb{Z}^n} f_0(x-l) = 1$. Il y a uniquement convergence faible.

Figure 3. f_8 lorsque $f_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mais ne satisfait pas $\sum_{l \in \mathbb{Z}^n} f_0(x-l) = 1$.

EXEMPLE 4.2. En introduisant l'algorithme en cascade, I. Daubechies a utilisé, comme fonction f_0, $\chi_{[-\pi/2,\pi/2]}$ la fonction indicatrice de l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$. On a alors immédiatement $\sum_{l\in\mathbb{Z}} f_0(x-l) \equiv 1$ ce qui nous assure, d'après le Théorème 2, la convergence de l'algorithme dans les espaces $L^p(\mathbb{R})$.

Si l'on cherche à construire φ_3, la convergence uniforme a lieu avec une vitesse en $O(2^{-sj})$. Cependant, si la régularité de la fonction d'échelle que l'on cherche à construire dépasse 1, la vitesse de convergence ne pourra pas dépasser 2^{-j} car on n'a pas $\sum_{l\in\mathbb{Z}}(x-l)\, f_0(x-l) = \int y\,\varphi(y)\,dy$.

EXEMPLE 4.3. Dans [17], L. F. Villemoes a initialisé l'algorithme avec une fonction de la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ normalisée par $\int f_0 = 1$ et dont le support de la transformée de Fourier est dans $[-2\pi, 2\pi]$. On obtient

$$\partial^\alpha f_0(2l\pi) = 0\,, \qquad \text{pour tous } l \in \mathbb{Z}^*\,,\ \alpha \in \mathbb{N}\,,$$

et l'algorithme converge dans les espaces de Besov $B_p^{s,q}(\mathbb{R})$ dès que φ appartient à $B_p^{s+\varepsilon,q}(\mathbb{R})$ pour $\varepsilon > 0$. Cependant, comme cela était le cas dans l'exemple précédent, la vitesse de convergence dans spaces de Lebesgue ne peut, en général, pas dépasser 2^{-j} car on n'a pas l'égalité des moments,

$$\int x^\alpha f_0(x)\,dx = \int x^\alpha \varphi(x)\,dx\,.$$

EXEMPLE 4.4. Un moyen pour obtenir cette identité nous est donné par I. Daubechies et J. Lagarias dans [5]. Celui-ci fait appel à un calcul des valeurs de φ et de ses dérivées sur les entiers.

Si $\varphi \in C^{N+\varepsilon}(\mathbb{R})$ où N est entier et $0 < \varepsilon < 1$, on prend pour f_0, la fonction spline de degré $2N+1$ qui satisfait la propriété,

$$\partial^k f_0(l) = \partial^k \varphi(l)\,, \qquad \text{pour tous } k = 0, \ldots, N,\ l \in \mathbb{Z}\,. \tag{11}$$

Les valeurs de $\partial^k\varphi(l)$ sont déterminées par résolution du système,

$$\partial^k\varphi(l) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_{2l-m}\, 2^k\, \partial^k\varphi(m)\,, \qquad \text{pour tout } l \in \mathbb{Z}\,.$$

Avec un tel choix de fonction initiale, l'algorithme converge dans $L^\infty(\mathbb{R})$, à la vitesse $O(2^{-(N+\varepsilon)})$.

Pour démontrer cette propriété, I. Daubechies et J. Lagarias utilisent une méthode différente de la notre. On peut cependant retrouver ce résultat en appliquant le Théorème 3, ceci bien-sûr en supposant que φ satisfait les hypothèses du théorème. On peut facilement vérifier que f_0 satisfait les conditions,

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}}(x-l)^k f_0(x-l)=\sum_{l\in\mathbb{Z}}(x-l)^k\varphi(x-l)\,.$$

Au delà d'une rapidité de convergence optimale, ce choix de fonction initiales nous offre une autre propriété intéressante. les valeurs, sur la grille $2^{-j}\mathbb{Z}$, de f_j et de ses dérivées jusqu'à l'ordre m, correspondent à celle de φ et de ses dérivées.

$$\partial^k f_j(2^{-j}l)=\partial^k\varphi(2^{-j}l)\,,\quad \text{pour tous } k=0,\dots,m\,,\ l\in\mathbb{Z}\,. \tag{12}$$

Cette méthode a cependant l'inconvénient d'imposer, à l'utilisateur, le calcul préalable des valeurs des dérivées de φ sur les entiers. Ceci n'est, en fait, pas nécessaire, comme le montre l'exemple suivant.

EXEMPLE 4.5. Pour initialiser l'algorithme, il est possible d'employer des fonctions splines, d'une autre manière. On suppose encore que $\varphi\in C^{N+\varepsilon}(\mathbb{R}^n)$ avec $N\in\mathbb{N}$ et $0<\varepsilon<1$. Mais on prend, cette fois-ci, pour f_0, la fonction spline d'ordre N définie de la façon suivante.

On a

$$f_0(x)=\sum_{l\in\mathbb{Z}}a_l\,\chi_{[0,1]}^{*(N+1)}(x-l)\,,$$

où $\chi_{[0,1]}^{*(N+1)}$ est la fonction indicatrice de l'intervalle $[0,1]$ convolée N fois par elle même, et la suite $\{a_l\}_{l\in\mathbb{Z}}$ est choisie telle que

$$f_0(l)=\varphi(l)\,,\qquad \text{pour tout } l\in\mathbb{Z}\,.$$

La fonction f_0 satisfait alors les conditons habituelles et d'après le Théorème 3, il y a convergence dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ à la vitesse $2^{-(N+\varepsilon)j}$.

On a eu besoin, préalablement, de calculer uniquement les valeurs de φ sur $\mathbb{Z}$ sans se soucier des dérivées de φ.

On a cependant perdu, par rapport au choix précédent, la propriété $\partial^\alpha f_j(2^{-j}l)=\partial^\alpha\varphi(2^{-j}l)$, pour tout $l\in\mathbb{Z}$ pour $\alpha=0,\dots,N$. (Nous n'avons, de plus, conservé que la convergence dans $C^N(\mathbb{R})$, alors que l'autre choix nous fournissait la convergence dans $C^{N+\varepsilon}(\mathbb{R})$. Pour remédier à ce problème, il suffit de prendre des splines d'ordre $N+1$.)

Les deux exemples que nous venons de donner, présentent également un inconvénient en commun: il est indispensable de connaître un majorant de l'indice de régularité de φ pour obtenir une vitesse de convergence optimale. Il faut adapter le choix de N à celui de φ, ce qui suppose une étude préalable de la régularité de la fonction d'échelle.

Nous présentons, dans le paragraphe suivant, un sixième exemple qui nous permet de contourner cette difficulté.

EXEMPLE 4.6. Un autre choix possible pour initialiser l'algorithme en cascade, nous est proposé par F. Paiva [16].

Commençons par remarquer que, lorsque φ est à support compact, le fait de ne pas prendre f_0 à support compact ne pose pas de problème. En effet, la fonction f_0 n'intervient que dans une deuxième étape de l'algorithme en cascade qui consiste à interpoler la suite $\{\langle\varphi, \tilde{\varphi}_{jl}\rangle\}_{l\in\mathbb{Z}^n}$ à l'aide de $2^{nj/2} f_0(2^j x - l)$. Cette suite est finie, et la longueur du support de φ nous est donné par la longueur N du filtre m_0. Pour déterminer $f_j(x)$, pour tout réel x donné sur le support $[0, N-1]$ de φ, nous n'avons alors besoin que de la restriction de f_0 à l'intervalle $[-(N-1), 2^j(N-1)]$. Tout se passe donc comme si f_0 était à support compact, alors qu'en théorie, elle ne l'est pas. Et on peut même prendre $\hat{f}_0$ à support compact, ce qui n'aurait pas été possible si f_0 l'était.

F. Paiva considère une fonction g de la classe de Schwartz dont le support de la transformée de Fourier est dans $[-2\pi, 2\pi]$, et qui vérifie

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} \hat{g}(\xi + 2l\pi) \equiv 1\,.$$

On a donc $\partial^\alpha \hat{g}(2l\pi) = 0$ pour $l \in \mathbb{Z}, \alpha \in \mathbb{N}$ sauf pour $\hat{g}(0)$ qui est égal à 1, et on a $g(l) = \delta_{0l}$ pour $l \in \mathbb{Z}$ (on peut, par exemple, prendre $\hat{g} = |\hat{\Phi}|^2$ où Φ est la fonction d'échelle de [13]). On pose ensuite

$$f_0(x) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \varphi(l)\, g(x-l)\,. \tag{13}$$

Cette fonction f_0 vérifie les conditions

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} (x-l)^\alpha f_0(x-l) = \int y^\alpha\, \varphi(y)\, dy\,.$$

Il y a donc convergence dans $L^\infty(\mathbb{R})$ à la vitesse $O(2^{-sj})$ et dans $C^{s-\varepsilon}(\mathbb{R})$ pour tout $\varepsilon > 0$, dès que φ appartient à $C^s(\mathbb{R})$.

Nous retrouvons, de plus, la propriété du premier exemple,

$$f_j(2^{-j}l) = \varphi(2^{-j}l)\,, \qquad \text{pour tout } l \in \mathbb{Z}\,.$$

Mais nous n'avons plus la même propriété pour les dérivées.

References.

[1] Cavaretta, A. S., Dahmen, W., Micchelli, C., A., Stationary subdivision. *Mem. Amer. Math. Soc.* **453** (1991), 1-186.

[2] Dahmen, W., Micchelli, C. A., Stationnary subdivision, fractals and wavelets. Technical report, I.B.M., 1989.

[3] Dahmen, W., Micchelli, C. A., Using the refinement equation for evaluating integrals of wavelets. *SIAM J. Numer. Anal.* **30** (1993), 507-537.

[4] Daubechies, I., Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure Appl. Math.* **41** (1988), 909-996.

[5] Daubechies, I., Lagarias, J., Two-scale difference equations II, local regularity, infinite products of matrices and fractals. *SIAM J. Math. Anal.* **23** (1992), 1031-1079.

[6] de Rham, G., Sur une courbe plane. *J. de Math.* **35** (1956), 25-42.

[7] Deslauriers, G., Dubuc, S., Interpolation dyadique. In *Fractal, dimensions non entières et applications.* Masson, 1987.

[8] Deslauriers, G., Dubuc, S., Symetric iterative interpolation processes. *Constr. Approx.* **5** (1989), 49-68.

[9] Dubuc, S., Interpolation through an iterative scheme. *Journal Math. Anal. & Applications* **114** (1986), 185-204.

[10] Durand, S., Etude de la vitesse de convergence de l'algorithme en cascade intervenant dans la construction des ondelettes. Thesis, Université Paris IX-Dauphine, 1993.

[11] Dyn, N., Gregory, J. A., Levin, D., Analysis for curve design. *Constr. Approx.* **7** (1991), 127-147.

[12] Lemarié, P. G., Fonctions à support compact dans les analyses multi-résolutions. *Revista Mat. Iberoamericana* **7** (1991), 157-182.

[13] Lemarié, P. G., Meyer, Y., Ondelettes et bases hilbertiennes. *Revista Mat. Iberoamericana* **2** (1986), 1-18.

[14] Meyer, Y., *Ondelettes et Opérateurs I. Ondelettes.* Herman, 1990.

[15] Meyer, Y., *Ondelettes et Opérateurs II. Opérateurs de Calderón-Zygmund.* Herman, 1990.

[16] Paiva, F., Thesis, Université Paris IX-Dauphine, 1994.

[17] Villemoes, L. F., Wavelet analysis of refinement equations. *SIAM J. Math. Anal.* **25** (1994), 1433-1460.

Recibido: 14 de octubre de 1.994
Revisado: 25 de octubre de 1.995

Sylvain Durand
CEREMADE
Université Paris IX-Dauphine
FRANCE
durand@ceremade.dauphine.fr