Revista Matemática Iberoamericana
Vol. 12, N.° 3, 1996

Transformée en paquets d'ondelettes des signaux stationnaires: comportement asymptotique des densités spectrales

Loïc Hervé

Résumé. On considère la transformée en paquets d'ondelettes associée à un filtre polynomial QMF. Soit $X = \{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ un signal aléatoire stationnaire à densité spectrale f continue. On démontre que les 2^n signaux, générés à partir de X après n itérations de la transformée, "convergent" vers des bruits blancs quand $n \to +\infty$. Si f est höldérienne, la vitesse de convergence est exponentielle.

Abstract. We consider quadrature mirror filters, and the associated wavelet packet transform. Let $X = \{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ be a stationary signal which has a continuous spectral density, f. We prove that the 2^n signals, obtained from X by n iterations of the transform, "converge" to white noises when $n \to +\infty$. If f is holderian, the convergence rate is exponential.

1. Enoncé des résultats.

On désigne par $(E, \|\cdot\|_\infty)$ l'espace des fonctions continues 1-périodiques muni de la norme uniforme, et pour $\eta \in]0,1]$, on note $(E^\eta, \|\cdot\|_\eta)$ le sous-espace des fonctions uniformément η-hölderiennes, avec

$$\|f\|_\eta = \|f\|_\infty + m_\eta(f)\,,$$

où

$$m_\eta(f) = \sup\left\{ \frac{|f(y) - f(x)|}{|y-x|^\eta}\,,\ x \neq y \right\}.$$

Soit $H_0(\lambda) = \sum_{k=0}^N h_k^0 e^{2i\pi k\lambda}$ un polynôme trigonométrique tel que $H_0(0) = 1$ et

$$\left|H_0(\frac{\lambda}{2})\right|^2 + \left|H_0(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2})\right|^2 = 1\,, \quad \text{pour tout } \lambda \in [0,1]\,. \tag{1}$$

On suppose que les h_k^0 sont des nombres réels, et on définit $h_k^1 = (-1)^{k+1} h_{-1-k}^0$ pour $k = -N-1, \ldots, -1$, et

$$H_1(\lambda) = \sum_{k=-N-1}^{-1} h_k^1 e^{2i\pi k\lambda} = e^{-2i\pi\lambda}\overline{H_0(\lambda + \frac{1}{2})}\,.$$

Notons que $H_0(0) = H_0(1) = H_1(1/2) = 1$, $H_1(0) = H_1(1) = H_0(1/2) = 0$, et que H_1 vérifie également la relation (1). Un tel couple (H_0, H_1) est appelé QMF (quadrature mirror filters) [3], [8]. La méthode d'analyse spectrale des signaux aléatoires, développée dans [2], consiste à itérer, à partir d'un processus aléatoire initial $X = (X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, les deux opérations de filtrage T_0 et T_1 définies par

$$(T_j X)_n = \sqrt{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k^j X_{2n-k}, \qquad j = 0, 1, \quad n \in \mathbb{Z}\,,$$

où par convention $h_k^0 = 0$ si $k \notin [0, N]$, et $h_k^1 = 0$ si $k \notin [-N-1, -1]$.

Cet algorithme, qui en d'autres termes effectue la transformée en paquets d'ondelettes de X [1], fournit une famille arborescente de signaux stationnaires: après n itérations, on dispose des 2^n processus $T_{\omega_n} \cdots T_{\omega_1} X$, où les ω_i décrivent $\{0,1\}$.

On note $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$, $u_0 = |H_0|^2$, $u_1 = |H_1|^2$, et P_0, P_1 les opérateurs de transition définis sur E par

$$P_j f(\lambda) = u_j(\frac{\lambda}{2})\, f(\frac{\lambda}{2}) + u_j(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2})\, f(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2})\,, \tag{2}$$

où $\lambda \in [0,1]$, $j = 0,1$. On démontre dans [2] le résultat suivant

Théorème 1.1.

i) *Si* $X = (X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *est un processus stationnaire du second ordre, les processus* T_0X *et* T_1X *sont également stationnaires. Si* X *a une densité spectrale* f*, alors* P_0f *et* P_1f *sont les densités spectrales respectivement de* T_0X *et* T_1X*, et plus généralement chaque processus* $T_{\omega_n}\cdots T_{\omega_1}X$ *admet une densité spectrale égale à* $P_{\omega_n}\cdots P_{\omega_1}f$.

ii) *Soit* Q_0 *le nombre de zéros de* H_0*. On suppose que, pour tout* $p \in \{1,\dots,Q_0\}$*, pour tout* $k \in \{1,\dots,2^p-2\}$*, il existe* $\ell \in \{0,\dots,p\}$*, tel que*

$$H_0\left(\frac{k\,2^\ell}{2^p-1}+\frac{1}{2}\right) \neq 0\,. \tag{3}$$

Si $f \in E$*, alors, pour presque tout* $\omega = (\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_n,\dots) \in \Omega$ *(au sens de la probabilité produit équiprobable sur* Ω*), la suite de processus* $(T_{\omega_n}\cdots T_{\omega_1}X)_{n\geq 1}$ *"converge" vers un bruit blanc, c'est-à-dire* $(P_{\omega_n}\cdots P_{\omega_1}f)_{n\geq 1}$ *converge vers une constante* $c(f,\omega)$ *quand* $n\to+\infty$.

Le point i) résulte d'un calcul élémentaire, et l'assertion ii) du Théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu [6] et de la Loi des grands nombres. Signalons que la condition (3) est exactement l'hypothèse sur les cycles périodiques invariants donnée dans [2]. Dans ce travail, sous une hypothèse du même type mais un peu plus forte que (3), nous nous proposons, d'une part de généraliser la propriété de convergence du ii) à tout $\omega \in \Omega$, et d'autre part de prouver que la vitesse de convergence est exponentielle quand f est hölderienne.

Théorème 1.2. *Soit* Q *le nombre de zéros de* H_0H_1*. On suppose que, pour tout* $p \in \{1,\dots,Q\}$*, pour tout* $k \in \{1,\dots,2^p-2\}$*, il existe* $\ell \in \{0,\dots,p\}$*, tel que*

$$H_0\left(\frac{k\,2^\ell}{2^p-1}\right) H_1\left(\frac{k\,2^\ell}{2^p-1}\right) \neq 0\,. \tag{4}$$

Soit X *un processus stationnaire du second ordre admettant une densité spectrale* f *continue, et soit* $\omega = (\omega_1,\dots,\omega_n,\dots) \in \Omega$ *quelconque. Alors la mesure spectrale* $P_{\omega_n}\cdots P_{\omega_1}f$ *du processus* $T_{\omega_n}\cdots T_{\omega_1}X$ *converge uniformément vers une constante* $c(f,\omega)$ *quand* $n\to+\infty$*, c'est-à-dire,*

$$\lim_{n\to+\infty} \|P_{\omega_n}\cdots P_{\omega_1}f - c(f,\omega)\|_\infty = 0\,. \tag{5}$$

Théorème 1.3. *On conserve les hypothèses et notations du théorème précédent. Si $f \in E^\eta$, alors il existe deux constantes $D > 0$ et $\rho \in [0,1[$ (indépendantes de f) telles que l'on ait, pour tout $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots) \in \Omega$,*

$$\|P_{\omega_n} \cdots P_{\omega_1} f - c(f,\omega)\|_\eta \le D\rho^n \|f\|_\eta \,. \tag{6}$$

REMARQUES. a) La propriété (6) montre que la suite d'opérateurs $(P_{\omega_n} \cdots P_{\omega_1})_{n\ge 1}$ converge en norme dans E^η avec une vitesse exponentielle. L'étude du comportement asymptotique des spectres discrets dans l'arbre de filtrage, que nous n'abordons pas ici, a été traitée dans [2]. Par ailleurs une étude plus précise des itérées de T_0 a été faite dans [5] dans le cadre des filtres polynomiaux non nécessairement QMF.

b) L'hypothèse (3) est une condition nécessaire et suffisante pour que H_0 engendre une analyse multirésolution, et elle assure que la suite $\{P_0^n f,\ n \ge 1\}$ converge uniformément vers $f(0)$ pour tout $f \in E$, voir [2]. Pour $\omega \in \Omega$, on note μ_ω la mesure de probabilité sur le tore définie par

$$\int f\, d\mu_\omega = c(f,\omega)\,, \qquad f \in E\,.$$

Si $\omega = (0,0,\ldots)$, le résultat ci-dessus montre que $\mu_\omega = \delta_0$ (masse de Dirac en 0). Plus généralement, si ω est de la forme $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_r, 0, 0, \ldots)$, on a $\mu_\omega = \sum_{k=0}^{2^r-1} u_{\omega_r}(k/2) \cdots u_{\omega_1}(k/2^r)\, \delta_{(k/(2^r))}$.

Cependant ce type de propriété ne s'étend pas à tous les éléments de Ω. Plus précisément, soient ν la mesure produit équiprobable sur Ω, $\mathcal{D}$ l'ensemble des points dyadiques de $[0,1[$, et soit enfin A le sous-ensemble de Ω formé des ω tels que μ_w soit de la forme

$$\mu_\omega = \sum_{a\in\mathcal{D}} \alpha_a(\omega)\, \delta_a \;,$$

où les $\alpha_a(\omega)$ sont des réels positifs tels que $\sum_{a\in\mathcal{D}} \alpha_a(\omega) = 1$. Alors $\nu(A) = 0$. En effet, on établit aisément par récurrence que

$$\int_0^1 f(\lambda)\, d\lambda = 2^{-n} \sum_{\omega_1,\ldots,\omega_n \in \{0,1\}} \int_0^1 P_{\omega_n} \cdots P_{\omega_1} f(\lambda)\, d\lambda\,,$$

pour tout $f \in E$ et pour tout $n \ge 1$. D'où, grâce au théorème de convergence dominée sur (Ω, ν),

$$\int_0^1 f(\lambda)\, d\lambda = \int_\Omega c(f,\omega)\, d\nu(\omega)\,.$$

Donc, pour tout borélien B, on a $m(B) = \int_\Omega \mu_\omega(B)\, d\nu(\omega)$, où m est la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$. Pour $B = \mathcal{D}$, on obtient $0 = m(\mathcal{D}) \geq \nu(A)$. Donc $\nu(A) = 0$.

Signalons également que, si $\omega = (1,1,\dots)$, alors μ_ω est une mesure continue: $\mu_\omega(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in [0,1[$. En effet supposons que $\mu_\omega(\{x\}) > 0$. On sait que μ_ω est invariante sous l'action de P_1 et Δ, où Δ est la transformation définie par $\Delta\lambda = 2\lambda$ (modulo1), voir [7]. On en déduit aisément que x est nécessairement un point fixe pour une certaine puissance Δ^p de Δ, et que $u_1(\Delta^k x) = 1$ pour $k = 1,\dots,p$, ce qui contredit l'hypothèse (4). Donc $\mu_\omega(\{x\}) = 0$. De même, si $\omega = (0,1,0,1,\dots)$, ou plus généralement si ω est cyclique, on peut montrer que μ_ω est une mesure continue.

c) Pour tout $n \geq 1$, l'application A_n définie par

$$f \longmapsto (P_{\omega_n} \cdots P_{\omega_1} f)_{\omega_1,\dots,\omega_n \in \{0,1\}}$$

est injective de E dans E^{2^n}. Il suffit de le vérifier pour $n = 1$. θ_r, pour λ fixé, on a ${}^t[P_0 f(2\lambda), P_1 f(2\lambda)] = \mathcal{A}(\lambda)\ {}^t[f(\lambda), f(\lambda + 1/2)]$, où $\mathcal{A}(\lambda)$ est une matrice carrée d'ordre 2 qui s'exprime aisément à l'aide de $u_0(\lambda)$ et $u_1(\lambda)$, et dont le déterminant est $D(\lambda) = (u_0(\lambda))^2 - (u_1(\lambda))^2$. L'injectivité de A_1 résulte du fait que D a un nombre fini de zéros.

Par conséquent si deux processus X et Y admettent des densités spectrales f_X et f_Y distinctes, alors $A_n f_X \neq A_n f_Y$ pour tout $n \geq 1$, et en ce sens, la transformée en ondelettes des signaux stationnaires fournit un procédé d'analyse spectrale. Cependant, la propriété d'injectivité de A_n peut se "dégrader" quand $n \to +\infty$. Plus précisément, considérons l'exemple du filtre de Haar, $H_0(\lambda) = (1 + e^{2i\pi\lambda})/2$. Un calcul simple montre que, pour $f(\lambda) = \sin 2\pi\lambda$, on a $P_0 f = f/2$ et $P_1 f = -f/2$, de sorte que $c\,(f,\omega) = 0$ pour tout $\omega \in \Omega$. En d'autres termes, l'application $f \mapsto c\,(f,\cdot)$ associée au filtre de Haar n'est pas injective. Nous ne sommes pas parvenus à étudier, pour H_0 quelconque, l'injectivité de $f \mapsto c\,(f,\cdot)$.

La suite de ce papier est consacrée à la démonstration des théorèmes 1.2 et 1.3 qui repose, d'une part sur la positivité des opérateurs P_0, P_1 et la notion de points périodiques [2], [4] (étude dans E), et d'autre part sur le Théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu et des arguments de compacité (étude dans E^η).

2. Démonstration du Théorème 1.2.

Dans ce paragraphe, nous nous proposons de démontrer le Théorème 1.2. Pour simplifier, on notera, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n, \dots) \in \Omega$,

$$\Pi_n^\omega f(\lambda) = P_{\omega_n} \cdots P_{\omega_1} f(\lambda), \qquad f \in E,\ \lambda \in [0,1]\,.$$

Rappelons que $u_1(\lambda) = u_0(\lambda + 1/2)$. Les opérateurs P_0 et P_1 définis par (2) sont bornés, positifs sur E, et vérifient $P_0 1 = P_1 1 = 1$, où 1 est la fonction identiquement égale à 1. De même chaque opérateur Π_n^ω est positif, borné sur E, et vérifie

$$\Pi_n^\omega 1 = 1, \quad \|\Pi_n^\omega f\|_\infty \le \|f\|_\infty, \qquad \text{pour tout } f \in E\,.$$

On définit, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{T}_k = \operatorname{vect}\{e^{-2i\pi(k+1)\lambda}, \dots, e^{2i\pi(k+1)\lambda}\}$. Notons que u_0 et u_1 appartiennent à $\mathcal{T}_N$. Pour de simples raisons de degré, il est clair que, si f est un polynôme trigonométrique, alors les fonctions $\Pi_n^\omega f$ appartiennent à $\mathcal{T}_N$ pour n assez grand. De même, on montre facilement que P_0, P_1, et donc Π_n^ω, opèrent sur $\mathcal{T}_N$.

Soient S_0 et S_1 les applications définies par

$$S_j \lambda = \frac{\lambda + j}{2}\,, \qquad \lambda \in [0,1]\,, j = 0, 1\,.$$

Pour $\lambda \in [0,1]$, $\omega \in \Omega$, et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $T_{n,\lambda}^\omega$ l'ensemble des points $\sigma_n \cdots \sigma_1 \lambda$ tels que $\sigma_i \in \{S_0, S_1\}$ et $u_{\omega_n}(\sigma_1\lambda) \cdots u_{\omega_1}(\sigma_n \cdots \sigma_1 \lambda) > 0$. Compte-tenu des identités $u_j(\lambda/2) + u_j(\lambda/2 + 1/2) = 1$, l'ensemble $T_{n,\lambda}^\omega$ n'est jamais vide. On notera $[a]$ la partie entière d'un réel a, et θ le shift défini sur Ω par

$$\theta\omega = \theta(\omega_1, \dots, \omega_n, \dots) = (\omega_2, \dots, \omega_n, \dots)\,.$$

La démonstration du Théorème 1.2 utilise les deux lemmes techniques suivants:

Lemme 2.1. *Soit h une fonction de E à valeurs positives ou nulles, et soient $\omega \in \Omega$, $\lambda \in [0,1]$, $m, \ell \in \mathbb{N}^*$, et enfin $y = \tau_\ell \cdots \tau_1 \lambda \in T_{\ell,\lambda}^{\theta^m \omega}$. Si $\Pi_m^\omega h(y) > 0$, alors on a $\Pi_{\ell+m}^\omega h(\lambda) > 0$.*

Lemme 2.2. *On note* $r = [\log_2(2N+1)] + 1 + 2Q$. *Soit* h *une fonction de* $\mathcal{T}_N$ *à valeurs positives ou nulles, mais non identiquement nulle. Il existe* $\delta > 0$ *telle que*

$$P_{\mu_n} \cdots P_{\mu_1} P_1 P_{\omega_r} \cdots P_{\omega_1} h(\lambda) \geq \delta\,, \quad \text{pour tous } \lambda \in [0,1]\,,\ n \geq 1\,,\ \omega_i, \mu_i \in \{0,1\}\,.$$

Preuve du Lemme 2.1. On montre aisément par récurrence que

$$\Pi_m^\omega h(\lambda) = \sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_m \in \{S_0,S_1\}} u_{\omega_m}(\sigma_1\lambda) \cdots u_{\omega_1}(\sigma_m \cdots \sigma_1 \lambda)\, h(\sigma_m \cdots \sigma_1 \lambda)\,.$$

Comme $y \in T_{\ell,\lambda}^{\theta^m \omega}$, on a $A = u_{\omega_{m+\ell}}(\tau_1\lambda) \cdots u_{\omega_{m+1}}(\tau_\ell \cdots \tau_1 \lambda) > 0$. Le Lemme 2.1 se déduit alors de l'inégalité

$$\begin{aligned} &\Pi_{m+\ell}^\omega h(\lambda) \\ &\geq A \sum_{\sigma_{\ell+1},\cdots,\sigma_{\ell+m} \in \{S_0,S_1\}} u_{\omega_m}(\sigma_{\ell+1} y) \cdots u_{\omega_1}(\sigma_{\ell+m} \cdots \sigma_{\ell+1} y) h(\sigma_{\ell+m} \cdots \sigma_{\ell+1} y) \\ &= A\ \Pi_m^\omega h(y)\,. \end{aligned}$$

Avant de donner la preuve du Lemme 2.2, commençons par faire quelques rappels sur la notion de points périodiques [2], [4], et le lien avec la condition (4). Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on dit que $\lambda \in [0,1]$ est un point p-périodique s'il existe p éléments $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ de $\{S_0, S_1\}$ tels que $\sigma_p \cdots \sigma_1 \lambda = \lambda$, et si p est le plus petit entier pour lequel on a une telle relation (de manière équivalente, si $\Delta^p \lambda = \lambda$ et $\Delta^k \lambda \neq \lambda$ pour $k = 1, \ldots, p-1$, où $\Delta x = 2x \bmod 1$). La famille $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_p\}$ vérifiant la relation ci-dessus est unique, et l'on note

$$\mathcal{C}_\lambda = \{\sigma_k \cdots \sigma_1 \lambda :\ k = 1, \ldots, p\}\,.$$

Il est clair que les points périodiques d'ordre inférieur ou égal à un entier m, $m \in \mathbb{N}^*$, sont de la forme $k/(2^p - 1)$, où $p \in \{1, \ldots, m\}$ et $k \in \{0, 1, \ldots, 2^p - 1\}$. La condition (4) est équivalente à la suivante: pour tout $\lambda \in]0,1[$, p-périodique, $2 \leq p \leq Q$, il existe $y \in \mathcal{C}_\lambda$, tel que

$$H_0(y) H_1(y) \neq 0\,. \tag{7}$$

Pour $\lambda \in [0,1]$, on note $A_\lambda = \{\sigma_n \cdots \sigma_1 \lambda :\ n \geq 1,\ \sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \{S_0, S_1\}\}$. Nous aurons besoin des propriétés suivantes démontrées dans [4]:

Soit $\lambda \in [0,1]$. Si λ est périodique, alors un (et uniquement un) des points $S_0\lambda$ et $S_1\lambda$ est périodique. Si λ n'est pas périodique, les points de A_λ sont distincts deux à deux et ne sont pas périodiques.

PREUVE DU LEMME 2.2. On note Z l'ensemble des zéros de $u_0 u_1$, et $|E|$ le cardinal d'un ensemble quelconque E. Rappelons que $|Z| = Q$. Les opérateurs P_i étant positifs et tels que $P_i 1 = 1$, il suffit de prouver qu'il existe $\delta > 0$ tel que l'on ait, pour tous $\lambda \in [0,1]$, $\omega_1, \ldots, \omega_r \in \{0,1\}$

$$P_1 P_{\omega_r} \cdots P_{\omega_1} h(\lambda) \geq \delta \,. \tag{8}$$

a) Soit $r_1 = [\log_2(2N+1)] + 1$. Si λ est non périodique et tel que $A_\lambda \cap Z = \varnothing$, alors $\Pi_m^\omega h(\lambda) > 0$, pour tous $m \geq r_1$, $\omega \in \Omega$. En effet, sinon on aurait $h(\sigma_m \cdots \sigma_1 \lambda) = 0$ pour chaque $\sigma_m, \ldots, \sigma_1 \in \{S_0, S_1\}$, ce qui est impossible car h admet au plus $2N+1$ racines.

b) Soit $r_2 = r_1 + Q$. Si λ est non périodique, alors $\Pi_m^\omega h(\lambda) > 0$, pour tous $m \geq r_2$, $\omega \in \Omega$. Pour prouver b), considérons les ensembles

$$A_\lambda^Q = \{\sigma_k \cdots \sigma_1 \lambda :\ 1 \leq k \leq Q,\ \sigma_i \in \{S_0, S_1\}\}\,,$$

$$F_\lambda^Q = \{\sigma_Q \cdots \sigma_1 \lambda :\ \sigma_i \in \{S_0, S_1\}\}\,.$$

On note $p = |A_\lambda^Q \cap Z|$. Soit $\omega' \in \Omega$ quelconque. On a $0 \leq p \leq Q$, et $|F_\lambda^Q - T_{Q,\lambda}^{\omega'}| \leq 2^{Q-1} + 2^{Q-2} + \cdots + 2^{Q-p} = 2^Q - 2^{Q-p}$. Pour prouver cette inégalité, on peut par exemple représenter l'ensemble A_λ^Q sous la forme d'un arbre dyadique de racine λ (admettant pour fils $\lambda/2$ et $\lambda/2 + 1/2$ ... etc ...), et remarquer que le nombre $|F_\lambda^Q - T_{Q,\lambda}^{\omega'}|$ est d'autant plus grand que les éléments de Z sont proches de λ dans l'arbre. Il en résulte que $|T_{Q,\lambda}^{\omega'}| \geq 2^{Q-p} > Q - p$. Les points de A_λ étant distincts deux à deux, on en déduit qu'il existe $y \in T_{Q,\lambda}^{\omega'}$ tel que $A_y \cap Z = \varnothing$. Rappelons que y est nécessairement non périodique. Soient maintenant $m \geq 1$ et $\omega \in \Omega$ quelconques: il existe $y_m \in T_{Q,\lambda}^{\theta^m \omega}$ non périodique tel que $A_{y_m} \cap Z = \varnothing$. Du a), il vient que $\Pi_m^\omega h(y_m) > 0$ pour tout $m \geq r_1$, d'où, d'après le Lemme 2.1, $\Pi_{m+Q}^\omega h(\lambda) > 0$, ce qui prouve b).

c) Soit $r = r_2 + Q$. Si λ est périodique, $\lambda \neq 0$, alors $\Pi_m^\omega h(\lambda) > 0$, pour tous $m \geq r$, $\omega \in \Omega$. Démontrons tout d'abord que, pour tout

$\omega' \in \Omega$, il existe un élément y de $T^{\omega'}_{Q,\lambda}$ non périodique: dans le cas contraire, en vertu des propriétés sur les points périodiques rappelées ci-dessus, l'ensemble $T^{\omega'}_{Q,\lambda}$ serait en fait réduit à un seul élément qui en outre appartiendrait à $\mathcal{C}_\lambda$, d'où $u_0(t)\, u_1(t) = 0$ pour tout $t \in \mathcal{C}_\lambda$, ce qui contredit l'hypothèse (7).

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Il existe donc $y \in T^{\theta^m\omega}_{Q,\lambda}$ non périodique, de sorte qu'on a, pour tout $m \geq r_2$, $\Pi^\omega_m h(y) > 0$ et donc d'après le Lemme 2.1, $\Pi^\omega_{m+Q} h(\lambda) > 0$. Le point c) est prouvé.

On a en particulier démontré que, pour tout $\omega_1, \ldots, \omega_r, \omega_{r+1} \in \{0, 1\}$ et tout $\lambda \neq 0$, $P_{\omega_{r+1}} P_{\omega_r} \cdots P_{\omega_1} h(\lambda) > 0$. Remarquons que, si $\omega_{r+1} = \omega_r = \cdots = \omega_2 = 0$ et $\omega_1 = 1$, alors $\Pi^\omega_{r+1} h(0) = u_0(0) \cdots u_0(0)$ $u_1(1/2) h(1/2) = h(1/2)$, ce dernier terme pouvant être nul. Pour $\lambda = 0$, il est donc nécessaire d'avoir $\omega_{r+1} = 1$.

d) (*cas* $\lambda = 0$). On a $P_1 P_{\omega_r} \cdots P_{\omega_1} h(0) > 0$, pour tous $\omega_1, \ldots, \omega_r \in \{0, 1\}$. En effet, comme $u_1(0) = 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
&P_1 P_{\omega_r} \cdots P_{\omega_1} h(0) \\
&\quad = \sum_{\sigma_2, \ldots, \sigma_{r+1} \in \{S_0, S_1\}} u_1(\frac{1}{2}) u_{\omega_r}(\sigma_2 \frac{1}{2}) \cdots u_{\omega_1}(\sigma_{r+1} \cdots \sigma_2 \frac{1}{2}) h(\sigma_{r+1} \cdots \sigma_2 \frac{1}{2}) \\
&\quad = P_{\omega_r} \cdots P_{\omega_1} h(\frac{1}{2})
\end{aligned}$$

ce dernier terme étant positif d'après ce qui précède.

Notons que r est bien indépendant de la fonction h. Nous pouvons maintenant prouver (8). Soient $\omega_1, \ldots, \omega_r \in \{0, 1\}$. Il existe une constante $\delta_{(\omega_1, \ldots, \omega_r)} > 0$ ne dépendant que de $(\omega_1, \ldots, \omega_r)$ telle que $P_1 P_{\omega_r} \cdots P_{\omega_1} h \geq \delta_{(\omega_1, \ldots, \omega_r)}$. On en déduit (8) avec $\delta = \min\{\delta_{(\omega_1, \ldots, \omega_r)} : \omega_i \in \{0, 1\}\}$.

Démonstration du Théorème 1.2. Soit $\omega \in \Omega$.

1^{er} *cas*: il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\omega_n = 0$ pour tout $n > k$. Alors $\Pi^\omega_n = P_0^{n-k} \Pi^\omega_k$. On déduit de l'étude des itérées de P_0 faite dans [2] que, pour tout $f \in E$, la suite $\{\Pi^\omega_n f :\ n \geq 1\}$ converge uniformément vers la constante $\Pi^\omega_k f(0)$.

2^{ieme} *cas*: il existe une suite strictement croissante $\{\phi(n)\}_{n \geq 1}$ d'entiers positifs tels que $\omega_{\phi(n)} = 1$. Commençons par supposer que

• $f \in \mathcal{T}_N$: on peut choisir les $\phi(n)$ tels que $\phi(n+1) - \phi(n) > r+1$, où r est l'entier défini dans le Lemme 2.2. Soit $\psi(n) = \phi(n) - r - 1$.

La famille $\{\Pi^\omega_{\psi(n)} f\ :\ n \geq 1\}$ est bornée dans l'espace $\mathcal{T}_N$ qui est de dimension finie. On peut donc en extraire une sous-suite $\{\Pi^\omega_{\tau(n)} f\ :\ n \geq 1\}$ convergeant uniformément vers une fonction g de $\mathcal{T}_N$.

Nous allons démontrer que g est identiquement égale à

$$c = \inf_{\lambda \in [0,1]} [g(\lambda)]\,.$$

A cet effet procédons par l'absurde et supposons qu'il existe $\lambda \in [0,1]$ tel que $g(\lambda) > c$. On a $\Pi^\omega_{\tau(n+1)} = R_n \Pi^\omega_{\tau(n)}$ où

$$R_n = P_{\omega_{\tau(n+1)}} \cdots P_{\omega_{\tau(n)+r+2}} P_{\omega_{\tau(n)+r+1}} P_{\omega_{\tau(n)+r}} \cdots P_{\omega_{\tau(n)+1}}\ .$$

Rappelons que par construction $\omega_{\tau(n)+r+1} = 1$. Le Lemme 2.2 appliqué avec $h = g - c$ assure l'existence d'une constante $\delta > 0$ telle que l'on ait $R_n(g - c) \geq \delta$, ou encore $R_n g \geq c + \delta$, pour tout $n \geq 1$. Or on a $\Pi^\omega_{\tau(n+1)} f - R_n g = R_n(\Pi^\omega_{\tau(n)} f - g)$, d'où $\|\Pi^\omega_{\tau(n+1)} f - R_n g\|_\infty \leq \|\Pi^\omega_{\tau(n)} f - g\|_\infty$. La suite $\{R_n g\ :\ n \geq 1\}$ converge donc uniformément vers g. Il en résulte que $\lim_{n \to +\infty}(\inf_{\lambda \in [0,1]} R_n g(\lambda)) = c$, ce qui est impossible d'après l'inégalité ci-dessus. Donc $g = c$. On conclut que $\{\Pi^\omega_n f\ :\ n \geq 1\}$ converge uniformément vers c en remarquant que, pour tout $m \geq \tau(n)$,

$$\|\Pi^\omega_m f - c\|_\infty = \|P_{\omega_m} \cdots P_{\omega_{\tau(n)+1}} (\Pi^\omega_{\tau(n)} f - c)\|_\infty \leq \|\Pi^\omega_{\tau(n)} f - c\|_\infty\ .$$

Passons au cas général

• $f \in E$: il existe une suite $\{f_k\}_{k \geq 1}$ de polynômes trigonométriques convergeant dans E vers f. Soit $\varepsilon > 0$. On a

$$\begin{aligned} \|\Pi^\omega_q f - \Pi^\omega_p f\|_\infty &\leq \|\Pi^\omega_q f - \Pi^\omega_q f_k\|_\infty + \|\Pi^\omega_q f_k - \Pi^\omega_p f_k\|_\infty \\ &\quad + \|\Pi^\omega_p f_k - \Pi^\omega_p f\|_\infty \\ &\leq 2\,\|f_k - f\|_\infty + \|\Pi^\omega_q f_k - \Pi^\omega_p f_k\|_\infty\ . \end{aligned}$$

On fixe k assez grand pour que $\|f_k - f\|_\infty \leq \varepsilon/3$. On sait que, pour ℓ assez grand, $\Pi^\omega_\ell f_k \in \mathcal{T}_N$ (car P_0 et P_1 contractent les degrés). On déduit de ce qui précède que la suite $\{\Pi^\omega_n f_k\ :\ n \geq 1\}$ converge dans E, et finalement que $\{\Pi^\omega_n f\ :\ n \geq 1\}$ est une suite de Cauchy dans E. Cette dernière suite converge donc vers une fonction $h \in E$, et on a en particulier $\lim_{n \to +\infty} P_1(P_{\omega_{\phi(n)-1}} \cdots P_{\omega_1} f) = P_1 h = h$ (car $\omega_{\phi(n)} = 1$). On conclut en utilisant le fait que, sous l'hypothèse (7) (qui assure que

u_1 n'a pas de cycle périodique invariant), les fonctions P_1-invariantes sont constantes, voir [2].

3. Démonstration du Théorème 1.3.

Nous conservons les notations et hypothèses précédentes (voir début du Paragraphe 2), et nous nous proposons de démontrer le Théorème 1.3, c'est-à-dire l'inégalité (6) pour tout $f \in E^\eta$. Pour simplifier les notations, on suppose que $\eta = 1$ (la démonstration est identique pour $\eta \in]0,1]$ quelconque). Remarquons tout d'abord que P_0, P_1, et donc chaque Π_n^ω, sont des opérateurs bornés sur E^1. Plus précisément, on démontre facilement l'existence de constantes $C, R > 0$ telles que l'on ait, pour $j = 0, 1$ et tout $f \in E^1$,

$$m_1(P_j f) \le 2^{-1} m_1(f) + C\|f\|_\infty \,, \tag{9}$$

$$\|P_j f\|_1 \le 2^{-1}\|f\|_1 + R\|f\|_\infty \,. \tag{10}$$

On en déduit que, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\|\Pi_2^\omega f\|_1 \le \frac{1}{4}\,\|f\|_1 + \frac{3}{2}\,R\,\|f\|_\infty \,,$$

et plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\|\Pi_n^\omega f\|_1 \le 2^{-n}\|f\|_1 + 2\,R\,\|f\|_\infty \,. \tag{11}$$

D'autre part, pour tout $f \in E$, les suites $\{P_0^n f \;:\; n \ge 1\}$ et $\{P_1^n f \;:\; n \ge 1\}$ convergent dans E. En vertu du Théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu [6], [9], la valeur propre 1 est l'unique valeur spectrale de module 1 pour P_0 et P_1, et on obtient les décompositions suivantes sur E^1 :

Pour $i = 0, 1$, il existe une mesure de probabilité ν_i, P_i-invariante sur le tore, et un opérateur Q_i borné sur E^1, de rayon spectral strictement inférieur à 1, tels que

$$P_i f = \int f\,d\nu_i + Q_i(f)\,, \quad \textit{pour tout } f \in E^1\,, \tag{12}$$

avec, en outre, $Q_i\nu_j = 0$ *et* $\nu_i\nu_j = \nu_j$ *pour* $i, j \in \{0,1\}$ *(on a noté* ν_i *l'opérateur défini sur* E^1 *par* $\nu_i(f) = \int f d\nu_i$*). On en déduit que, pour tout* $f \in E^1$*,*

$$\Pi_n^\omega(f) = \nu_{\omega_1}(f) + \nu_{\omega_2}Q_{\omega_1}f + \cdots + \nu_{\omega_n}Q_{\omega_{n-1}}\cdots Q_{\omega_1}f + Q_{\omega_n}\cdots Q_{\omega_1}f\,. \tag{13}$$

La démonstration du Théorème 1.3 utilise les trois lemmes suivants:

Lemme 3.1. *Il existe une constante* $D > 0$ *telle que pour tous* $f \in E^1$*,* $n \in \mathbb{N}^*$*,* $\omega_1, \dots, \omega_n \in \{0,1\}$*,*

$$\|Q_{\omega_n}\cdots Q_{\omega_1}f\|_1 \le D\,\|f\|_1\,.$$

Lemme 3.2. *On a pour tout* $f \in E^1$ *et tout* $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots) \in \Omega$

a) $\lim_{n\to+\infty} \|Q_{\omega_n}\cdots Q_{\omega_1}f\|_\infty = 0$.

b) $\lim_{n\to+\infty} \|Q_{\omega_n}\cdots Q_{\omega_1}f\|_1 = 0$.

Lemme 3.3. *Pour tout réel* $\beta > 0$*, il existe* $M \in \mathbb{N}^*$ *tel que pour tous* $f \in E^1$*,* $n \ge M$*,* $\omega_1, \dots, \omega_n \in \{0,1\}$*,*

$$\|Q_{\omega_n}\cdots Q_{\omega_1}f\|_1 \le \beta\,\|f\|_1\,.$$

Commençons par admettre ces lemmes, et donnons la

Démonstration du Théorème 1.3. Soient β tel que $0 < \beta < 1$, et M l'entier du Lemme 3.3 correspondant à β. Soient $\omega \in \Omega$, et $k \in \mathbb{N}^*$ qu'on écrit sous la forme $k = qM + r$, où $q \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0, \dots, M-1\}$. Alors

$$\begin{aligned}\|Q_{\omega_k}\cdots Q_{\omega_1}f\|_1 &\le D\,\beta^q\,\|f\|_1\\ &= D'\,(\beta^{1/M})^k\,\|f\|_1\,.\end{aligned}$$

On pose $\rho = \beta^{1/M}$ et $T_kf = Q_{\omega_k}\cdots Q_{\omega_1}f$. Utilisant (13) et le fait que, pour $g \in E^1$ et $j = 0,1$, $\|\nu_j(g)\|_1 = |\nu_j(g)| \le \|g\|_\infty \le \|g\|_1$, on montre aisément que

$$\begin{aligned}\|\Pi_{n+p}^\omega f - \Pi_n^\omega f\|_1 &\le \|T_nf\|_1 + \sum_{k=n}^{n+p}\|T_kf\|_1\\ &\le 2D'\Big(\sum_{k=n}^{n+p}\rho^k\Big)\|f\|_1\,.\end{aligned}$$

On conclut grâce au critère de Cauchy, et au Théorème 1.2 qui permet d'identifier la limite à une constante.

PREUVE DU LEMME 3.1. La démonstration de ce lemme est donnée dans [2]. Nous la reprenons ici car elle met en jeu une inégalité importante dont nous aurons besoin dans la suite. Grâce à (9), (12), et enfin aux relations entre Q_i et ν_j, on obtient les majorations suivantes:

$$\begin{aligned}\|Q_{\omega_n}\cdots Q_{\omega_1}f\|_1 &= \|Q_{\omega_n}P_{\omega_{n-1}}\cdots P_{\omega_1}f\|_1\\ &= \|Q_{\omega_n}P_{\omega_{n-1}}\cdots P_{\omega_1}f\|_\infty + m_1(P_{\omega_n}\cdots P_{\omega_1}f)\\ &\leq 2\,\|f\|_\infty + 2^{-1}m_1(P_{\omega_{n-1}}\cdots P_{\omega_1}f) + C\,\|f\|_\infty\,,\end{aligned}$$

et finalement

$$\begin{aligned}\|Q_{\omega_n}\cdots Q_{\omega_1}f\|_1 \leq (2 + C + C\,2^{-1} + \cdots + C\,2^{-(n-1)})\,\|f\|_\infty\\ + 2^{-n}m_1(f)\,.\end{aligned}\tag{14}$$

PREUVE DU LEMME 3.2. a) On obtient grâce à (13)

$$\nu_{\omega_{n+1}}\Pi_n^\omega f = \sum_{i=1}^{n+1}\nu_{\omega_i}Q_{\omega_{i-1}}\cdots Q_{\omega_1}f\,.$$

Rappelons que $\{\Pi_n^\omega f\}_{n\geq 1}$ converge uniformément vers une constante $c(f,\omega)$. On a en outre

$$\begin{aligned}\|\nu_{\omega_{n+1}}(\Pi_n^\omega f) - c(f,\omega)\|_\infty &= \|\nu_{\omega_{n+1}}\left[\Pi_n^\omega f - c(f,\omega)\right]\|_\infty\\ &\leq \|\Pi_n^\omega f - c(f,\omega)\|_\infty\,,\end{aligned}$$

d'où, d'après le Théorème 1.2, $\lim_{n\to+\infty}\|\nu_{\omega_{n+1}}(\Pi_n^\omega f) - c(f,\omega)\|_\infty = 0$. On en déduit que $\{\sum_{i=1}^n \nu_{\omega_i}Q_{\omega_{i-1}}\cdots Q_{\omega_1}f\,:\; n\geq 1\}$ converge dans E vers $c(f,\omega)$ quand $n\to+\infty$. On utilise à nouveau (13) pour en déduire le a) du lemme.

b) On pose $a_n = m_1(Q_{\omega_n}\cdots Q_{\omega_1}f)$ et $b_n = \|Q_{\omega_n}\cdots Q_{\omega_1}f\|_\infty$. En vertu du a), il reste à prouver que $\lim_{n\to+\infty}a_n = 0$. Or, on a $a_k = m_1(P_{\omega_k}Q_{\omega_{k-1}}\cdots Q_{\omega_1}f)$, d'où d'après (9), $a_k \leq 2^{-1}a_{k-1} + Cb_{k-1}$, et pour tout $p\geq 1$,

$$a_{n+p} \leq 2^{-p}a_n + C\,(b_{n+p-1} + 2^{-1}b_{n+p-2} + \cdots + 2^{-p+1}b_n)\,.$$

L'assertion b) résulte donc du point a) et du fait que la suite $\{a_n\}_{n\geq 1}$ est bornée (*cf.* Lemme 3.1).

Preuve du Lemme 3.3. On note $\mathcal{S}_1$ la sphère unité de E^1. Par ailleurs on définit sur Ω la distance $d(\omega,\omega') = \sum_{k\geq 1} 2^{-k}|\omega_k - \omega'_k|$. Rappelons que (Ω, d) est compact.

Nous procédons par l'absurde en supposant qu'il existe un réel $\beta > 0$ pour lequel on a la propriété suivante: pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\psi(n) \geq n$, $\omega_1^{\psi(n)}, \ldots, \omega_{\psi(n)}^{\psi(n)} \in \{0,1\}$, $f_{\psi(n)} \in \mathcal{S}_1$, tels que

$$\|Q_{\omega_{\psi(n)}^{\psi(n)}} \cdots Q_{\omega_1^{\psi(n)}} f_{\psi(n)}\|_1 > \beta \,.$$

On pose $\omega^{\psi(n)} = (\omega_1^{\psi(n)}, \ldots, \omega_{\psi(n)}^{\psi(n)}, 0, 0, \ldots) \in \Omega$. En vertu du Théorème d'Ascoli et de la compacité de Ω, il existe une suite d'entiers positifs $\{\phi(n)\}_{n\geq 1}$ strictement croissante (extraite de $\{\psi(n)\}_{n\geq 1}$) telle que $\{\omega^{\phi(n)}\}_{n\geq 1}$ converge vers $\omega \in \Omega$, et telle que $\{f_{\phi(n)}\}_{n\geq 1}$ converge dans E vers $f \in E^1$, avec $\|f\|_1 \leq 1$. Posant

$$A_n = Q_{\omega_{\phi(n)}^{\phi(n)}} \cdots Q_{\omega_1^{\phi(n)}} \;,$$

on obtient

$$\beta < \|A_n f_{\phi(n)}\|_1 \leq \|A_n(f_{\phi(n)} - f)\|_1 + \|A_n f\|_1 \;.$$

Nous allons démontrer que ces deux derniers termes ont une limite nulle quand $n \to +\infty$, ce qui constituera bien une contradiction:

De (14), il vient que

$$\|A_n(f_{\phi(n)} - f)\|_1 \leq E\; \|f_{\phi(n)} - f\|_\infty + 2^{-\phi(n)} m_1(f_{\phi(n)} - f)\,,$$

avec $E = 2(C+1)$. En outre, on a $m_1(f_{\phi(n)} - f) \leq 2$, d'où

$$\lim_{n\to+\infty} \|A_n(f_{\phi(n)} - f)\|_1 = 0\,.$$

La convergence de $\{\omega^{\phi(n)}\}_{n\geq 1}$ vers $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots)$ entraîne qu'il existe une suite $\{k(n)\}_{n\geq 1}$ d'entiers positifs, avec $\lim_{n\to+\infty} k(n) = +\infty$, telle que $w_k^{\phi(n)} = \omega_k$ pour tout $1 \leq k \leq k(n)$. Si $k(n) \geq \phi(n)$, alors $A_n = Q_{\omega_{\phi(n)}} \cdots Q_{\omega_1}$. Si $k(n) < \phi(n)$, alors

$$A_n = Q_{\omega_{\phi(n)}^{\phi(n)}} \cdots Q_{\omega_{k(n)+1}^{\phi(n)}} (Q_{\omega_{k(n)}} \cdots Q_{\omega_1})\,,$$

d'où $\|A_n f\|_1 \leq D\; \|Q_{\omega_{k(n)}} \cdots Q_{\omega_1} f\|_1$ d'après le Lemme 3.1. On déduit du Lemme 3.2.b) que $\lim_{n\to+\infty} \|A_n f\|_1 = 0$, ce qui achève la démonstration du Lemme 3.3.

References.

[1] Coifman, R., Meyer, Y., Quake, S., Wickerhauser M.V., Signal processing and compression with wave packets. *Proc. of the Conference on Wavelets*, Marseille, Spring 1989.

[2] Conze, J. P., Raugi, A., Fonctions harmoniques pour un opérateur de transition et applications. *Bull. Soc. Math. France* **118** (1990), 273-310.

[3] Esteban, D., Galand, C., Application of Quadrature Mirror Filters to Split-band Voice Coding Schemes. *Proc. of ICASSP*, Hartford, Connecticut, 1977.

[4] Hervé, L., Etude d'opérateurs quasi-compacts et positifs. Applications aux opérateurs de transfert *Ann. Inst. H. Poincaré, Probabilités et Statistique.* **30**, (1994), 437-466.

[5] Hervé, L., Comportement asymptotique dans l'algorithme de transformée en ondelettes. Lien avec la régularité de l'ondelette. *Revista Mat. Iberoamericana* **11** (1995), 431-451.

[6] Ionescu-Tulcéa, C.T., Marinescu, G., Théorie ergodique pour une classe d'opérations non complétement continues. *Ann. of Math.* **52** (1950), 140-147.

[7] Keane, M., Strongly mixing g-measures. *Invent. Math.* **16** (1972), 309-324.

[8] Mallat, S., Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$. *Trans. Amer. Math. Soc.* **315** (1989), 69-88.

[9] Norman, M. F., *Markov processes and learning models.* Academic Press, 1972.

Recibido: 3 de mayo de 1.995
Revisado: 6 de septiembre de 1.995

Loïc Hervé
I.R.M.A.R.-Universitè de Rennes 1
Laboratoire de Probabilités
Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex
FRANCE
herve@univ-rennes1.fr