

Unicité dans $L^3(\mathbb{R}^3)$ et d'autres espaces fonctionnels limites pour Navier-Stokes

Giulia Furioli, Pierre G. Lemarié-Rieusset et Elide Terraneo

Résumé. Le but principal de cet article est de démontrer l'unicité des solutions "mild" des équations de Navier-Stokes dans $L^3(\mathbb{R}^3)$. Nous généralisons ce résultat à certains espaces de Morrey-Campanato.

Abstract. The main result of this paper is the proof of uniqueness for mild solutions of the Navier-Stokes equations in $L^3(\mathbb{R}^3)$. This result is extended as well to some Morrey-Campanato spaces.

0. Introduction.

Le but principal de cet article est de démontrer l'unicité dans $L^3(\mathbb{R}^3)$ des solutions "mild" des équations de Navier-Stokes.

Les équations de Navier-Stokes, dans le cas d'un fluide visqueux, incompressible et homogène remplissant tout l'espace, sont données en l'absence de forces extérieures (et en prenant les constantes de densité et de viscosité égales à 1) par le système

$$(1) \quad \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0, \\ \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - \vec{\nabla} p, \end{cases}$$

où $\vec{u}(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est le vecteur vitesse et $p(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ est la pression.

Lorsqu'on étudie les solutions faibles de (1) (les dérivations sont alors prises au sens des distributions), on remplace le terme $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}$ par $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}$: lorsque \vec{u} est une fonction régulière, on a $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}$ de sorte que la condition de divergence nulle $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ assure l'égalité $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}$; si \vec{u} est irrégulière il est souvent plus facile de définir $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}$ que $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}$.

Définition 1. Soit $T \in]0, +\infty]$. Une solution faible sur $]0, T[$ des équations de Navier-Stokes est un champ de vecteurs

$$\vec{u}(t, x) \in (L^2_{\text{loc}}(]0, T[\times \mathbb{R}^3))^3$$

qui vérifie

$$(2) \quad \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0, \\ \text{il existe } p \in \mathcal{D}'(]0, T[\times \mathbb{R}^3) \\ \text{telle que } \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u} - \vec{\nabla} p, \end{cases}$$

Le théorème que nous allons démontrer est alors le suivant.

Théorème 1 (Unicité $L^3(\mathbb{R}^3)$). Soient $\vec{u}(t) \in C([0, T[, (L^3)^3)$ et $\vec{v}(t) \in C([0, T'[, (L^3)^3)$ telles que :

- i) \vec{u} est solution faible des équations de Navier-Stokes sur $]0, T[$;
 - ii) \vec{v} est solution faible des équations de Navier-Stokes sur $]0, T'[$;
 - iii) $\vec{u}|_{t=0} = \vec{v}|_{t=0}$.
- Alors $\vec{u} = \vec{v}$ sur $[0, \inf\{T, T'\}[$.

Les solutions "mild" dans L^p pour les équations de Navier-Stokes sont les solutions faibles \vec{u} sur $]0, T[$ qui vérifient de plus

$$\vec{u}(t) \in C([0, T[, (L^p)^3).$$

T. Kato [KAT 2] a démontré l'existence de telles solutions pour $p \geq 3$ et leur unicité pour $p > 3$. L'idée essentielle est d'exprimer la solution des

équations de Navier-Stokes comme la solution d'un problème intégral [BRO], [KAT 1]. Pour cela, la première étape consiste à éliminer la pression p en projetant les équations de Navier-Stokes sur les champs de vecteurs à divergence nulle. Cette technique remonte aux travaux de J. Leray [LER] sur les solutions faibles $\vec{u}(t) \in L^\infty(]0, T[, (L^2)^3)$ et le projecteur \mathbb{P} est donné par la formule

$$\mathbb{P}\vec{f} = \vec{f} - \vec{\nabla} \frac{1}{\Delta} (\vec{\nabla} \cdot \vec{f}) = (\text{Id} + \vec{R} \otimes \vec{R}) \vec{f}$$

où

$$\vec{R} = \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \vec{\nabla}$$

est le vecteur des transformations de Riesz

$$\vec{R} = (R_1, R_2, R_3), \quad \widehat{R_j f} = i \frac{\xi_j}{|\xi|} \widehat{f}.$$

\mathbb{P} n'est pas défini pour une distribution générale et il faut montrer que \mathbb{P} a un sens sur les termes de (2). Nous verrons que c'est le cas lorsque \vec{u} est, uniformément en temps, uniformément localement de carré intégrable et nulle à l'infini.

Définition 2. *L'espace E_2 des fonctions uniformément localement de carré intégrable et nulles à l'infini est l'espace des $f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ telles que*

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \int_{\|y-x\| < 1} |f(y)|^2 dy = 0$$

normé par

$$\|f\|_{E_2} = \sup_x \left(\int_{\|y-x\| < 1} |f(y)|^2 dy \right)^{1/2}.$$

Proposition 1 (Formulation intégrale des équations de Navier-Stokes). *Soit $\vec{u}(t) \in L^2(]0, T[, (E_2)^3)$. Alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) \vec{u} est solution faible des équations de Navier-Stokes ;
- ii) $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ et $\partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}$;
- iii) il existe $\vec{u}_0 \in \mathcal{S}'$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$ et

$$\vec{u} = e^{t\Delta} \vec{u}_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}(s) ds.$$

La Proposition 1 se démontre à l'aide de la décomposition de Littlewood-Paley.

En effet, si $\vec{f} \in (E_2)^3$, alors $\vec{g} = \vec{\nabla} \cdot \vec{f} \otimes \vec{f}$ appartient à un espace Y_∞ sur lequel les transformations de Riesz opèrent.

Une fois la pression éliminée, on cherche à résoudre

$$\vec{u}(t) = e^{t\Delta} \vec{u}_0 + B(\vec{u}, \vec{u})(t)$$

où

$$B(\vec{u}, \vec{u})(t) = - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}(s) ds$$

par une méthode de point fixe (méthode de Picard) : on part de $\vec{u}_{(0)} = 0$ et on définit $\vec{u}_{(n+1)}$ par $\vec{u}_{(n+1)} = e^{t\Delta} \vec{u}_0 + B(\vec{u}_{(n)}, \vec{u}_{(n)})$. Lorsque $\vec{u}_0 \in (L^p)^3$, où $p \geq 3$, le procédé converge dans $C([0, T[, (L^p)^3)$ pour T assez petit (dépendant de \vec{u}_0).

En effet, si $p > 3$ on part de l'estimation

$$\|e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{f} \otimes \vec{g}\|_{L^p} \leq C_p \left(\frac{1}{t-s} \right)^{1/2+3/(2p)} \|\vec{f}\|_{L^p} \|\vec{g}\|_{L^p}$$

pour obtenir

$$(3) \quad \|B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_{L^p} \leq C'_p t^{1/2-3/(2p)} \sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s)\|_{L^p} \sup_{0 < s < t} \|\vec{v}(s)\|_{L^p}$$

d'où la continuité de l'opérateur bilinéaire B sur $C([0, T[, (L^p)^3)$ et son caractère contractant au voisinage de $e^{t\Delta} \vec{u}_0$ si T est assez petit.

Pour $p = 3$, (3) n'est plus valable puisque

$$\int_0^t \frac{dt}{t-s} = +\infty.$$

Le procédé de point fixe reste cependant convergent ; comme l'avait remarqué Kato [KAT 2] à la suite des travaux de Weissler [WEI], lorsque $\vec{u}_0 \in (L^3)^3$, $e^{t\Delta} \vec{u}_0$ est non seulement L^3 mais L^∞ pour $t > 0$

$$\sqrt{t} \|e^{t\Delta} \vec{u}_0\|_{L^\infty} \leq C \|\vec{u}_0\|_{L^3}.$$

On vérifie que cette propriété se transmet aux $\vec{u}_{(n)}$

$$\|e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{f} \otimes \vec{g}\|_{L^3} \leq C \|\vec{g}\|_{L^3} \sqrt{s} \|\vec{f}\|_{L^\infty} \frac{1}{\sqrt{t-s}} \frac{1}{\sqrt{s}},$$

$$\|e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{f} \otimes \vec{g}\|_{L^\infty} \leq C \sqrt{s} \|\vec{f}\|_{L^\infty} \inf \left\{ \frac{\sqrt{s} \|\vec{g}\|_{L^\infty}}{s \sqrt{t-s}}, \frac{\|\vec{g}\|_{L^3}}{(t-s) \sqrt{s}} \right\},$$

d'où

$$\begin{aligned} & \|B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_{L^3} + \sqrt{t} \|B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_{L^\infty} \\ & \leq C \sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} \left(\sup_{0 < s < t} \|\vec{v}(s)\|_{L^3} + \sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty} \right). \end{aligned}$$

Lorsque $\|\vec{u}_0\|_{L^3}$ est assez petite, on voit que B , qui est bilinéaire continu sur $\{\vec{v}(t) \in C([0, +\infty[, (L^3)^3) : \sqrt{t} \vec{v} \in L^\infty((L^\infty)^3), \vec{v} \in L^\infty((L^3)^3), \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \|\vec{v}(t)\|_{L^\infty} = 0\}$, est contractant sur un voisinage de $e^{t\Delta} \vec{u}_0$. Pour $\|\vec{u}_0\|_{L^3}$ quelconque, une analyse plus fine de B montre qu'il est contractant sur $[0, T]$ pour T assez petit au voisinage de $e^{t\Delta} \vec{u}_0$. Ainsi le procédé converge et garantit l'unicité des solutions "mild" qui vérifient de plus $\sqrt{t} \vec{u} \in L^\infty((L^\infty)^3)$. Notre théorème montre que l'unicité vaut sans restrictions a priori sur le comportement de la solution.

Les résultats de Kato s'étendent à d'autres espaces fonctionnels que L^p . M. Cannone [CAN 1] a donné un critère assez général sur un espace E pour que, lorsque $\vec{u}(t) \in C([0, T[, (E)^3)$, on ait

$$\int_0^t \|e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \nabla \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u})(s)\|_E ds \leq C \omega(t) \sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s)\|_E^2$$

(où $\lim_{t \rightarrow 0} \omega(t) = 0$), ce qui généralise le cas $p > 3$.

Les *espaces limites* généraliseront le cas $p = 3$ et nos résultats s'y appliqueront facilement.

Définition 3. *Un espace fonctionnel limite E pour les équations de Navier-Stokes est un espace de Banach de fonctions sur \mathbb{R}^3 tel que :*

- (4) \mathcal{S} est dense dans E (et l'injection est continue);
- (5) E s'injecte continûment dans $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$;
- (6) pour tous $f \in E, x_0 \in \mathbb{R}^3, \|f(x - x_0)\|_E = \|f\|_E$;
- (7) pour tous $f \in E, \lambda > 0, \|\lambda f(\lambda x)\|_E = \|f\|_E$.

Nous montrerons alors précisément le théorème suivant.

Théorème 2 (Solutions "mild" dans un espace limite). *Soit E un espace limite.*

A) Si on suppose qu'il existe $C > 0$ tel que pour tous $f, g \in E \cap L^\infty$

$$\|\Delta_0(fg)\|_E \leq C (\|f\|_E \|g\|_{L^\infty} + \|f\|_{L^\infty} \|g\|_E)$$

alors il existe $\delta_0 > 0$ tel que pour tout \vec{u}_0 vérifiant $\|\vec{u}_0\|_E < \delta_0$ il existe $\vec{u}(t) \in C([0, +\infty[, (E)^3)$, $\vec{u} \in L^\infty(E^3)$, $\sqrt{t} \vec{u} \in L^\infty((L^\infty)^3)$ et $\sqrt{t} \|\vec{u}(t)\|_{L^\infty} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0$ tel que $\vec{u}(t) = e^{t\Delta} \vec{u}_0 + B(\vec{u}, \vec{u})(t)$ sur $]0, +\infty[$. De plus, un tel \vec{u} est unique.

B) Si on suppose qu'il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $M(\varepsilon) > 0$ tel que pour tous $f, g \in E \cap L^\infty$

$$(8) \quad \|\Delta_0(fg)\|_E \leq (M(\varepsilon) \|f\|_E \|g\|_{L^\infty} + \varepsilon \|g\|_E \|f\|_{L^\infty}^\alpha \|f\|_E^{1-\alpha})$$

alors pour $\vec{u}_0 \in E^3$ il existe $T > 0$ et $\vec{u}(t) \in C([0, T[, (E)^3)$ avec $\vec{u} \in L^\infty(E^3)$, $\sqrt{t} \vec{u} \in L^\infty((L^\infty)^3)$ et $\sqrt{t} \|\vec{u}(t)\|_{L^\infty} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0$ tels que $\vec{u}(t) = e^{t\Delta} \vec{u}_0 + B(\vec{u}, \vec{u})(t)$ sur $]0, T[$. De plus un tel \vec{u} est unique.

C) Si on suppose de plus qu'il existe $p > 2$ tel que E s'injecte continûment dans $L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^3)$ alors si $\vec{u}(t) \in C([0, T[, (E)^3)$, $\vec{v}(t) \in C([0, T'[, (E)^3)$, $\vec{u}(t) = e^{t\Delta} \vec{u}_0 + B(\vec{u}, \vec{u})(t)$ et $\vec{v}(t) = e^{t\Delta} \vec{u}_0 + B(\vec{v}, \vec{v})(t)$ pour un même $\vec{u}_0 \in E^3$, alors $\vec{u} = \vec{v}$ sur $[0, \inf\{T, T'\}[$.

La différence d'approche entre A) et B), qui suivent Kato, et C) est essentiellement la suivante : dans A) et B) on cherche à démontrer que $\|B(\vec{u}, \vec{u})\|_E$ est finie, et plus précisément que $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \|\Delta_j B(\vec{u}, \vec{u})\|_E < +\infty$ (ce qui se note $B(\vec{u}, \vec{u}) \in (\dot{B}_E^{0,1})^3$), tandis que dans C) on se contente d'estimations du type $\sup_{j \in \mathbb{Z}} \|\Delta_j B(\vec{u}, \vec{u})\|_E < +\infty$ (ou encore $B(\vec{u}, \vec{u}) \in (\dot{B}_E^{0,\infty})^3$). L'espace de Besov $\dot{B}_E^{0,\infty}$ se révélera particulièrement adapté aux calculs dans les espaces limites, car il permet de contourner l'obstruction

$$\int_0^t \frac{ds}{t-s} = +\infty$$

(pour calculer $\|\Delta_j B(\vec{u}, \vec{u})\|_E$ on intègre "grosso modo" pour $(t-s)$ compris entre $1/4^j$ et $2/4^j$; or $\int_\alpha^{2\alpha} ds/s = \ln 2 < +\infty$).

Le plan de l'article est alors le suivant:

1. Décomposition de Littlewood-Paley, espaces de Besov et paraproducts.
2. Solutions faibles des équations de Navier-Stokes.
3. Existence des solutions "mild".
4. Unicité des solutions "mild" : les espaces limites réguliers.
5. Unicité dans l'espace L^3 .
6. Unicité dans les espaces limites. Espaces de Morrey-Campanato.
7. Remarques finales.

REMARQUE. Les résultats principaux de cet article sont le théorèmes 1, 2 et la Proposition 1; d'autres résultats se trouvent dans les théorèmes 3 et 4.

1. Décomposition de Littlewood-Paley, espaces de Besov et paraproducts.

Nous commencerons par rappeler la définition de la décomposition de Littlewood-Paley d'une distribution tempérée.

Pour $m \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, on notera $m(D)$ le multiplicateur de Fourier défini par $(m(D)f)^\wedge(\xi) = m(\xi) \widehat{f}(\xi)$ (où \widehat{f} est la transformée de Fourier de $f : \widehat{f}(\xi) = \int f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx$). C'est évidemment un opérateur continu sur L^2 . Lorsque $m \in C^\infty$ et que toutes ses dérivées sont à croissance lente, $m(D)$ opère continûment sur \mathcal{S} et sur \mathcal{S}' . Lorsque m est la transformée de Fourier d'une fonction $k \in L^p(\mathbb{R}^3)$ on notera $\|m(D)\|_p = \|k\|_{L^p}$. Le cas $p = 1$ est particulièrement intéressant : si E est un espace de Banach de distributions (E s'injecte continûment dans \mathcal{S}') dont la norme est invariante par translations ($\|f(x-x_0)\|_E = \|f\|_E$), si \mathcal{S} est dense dans E et si $m = \widehat{k}$ avec $k \in L^1$, alors $m(D)$ opère continûment sur E c'est-à-dire $\|m(D)f\|_E \leq \|m(D)\|_1 \|f\|_E$.

Pour introduire la décomposition de Littlewood-Paley ([FJW], [TRI], [PEE]) on fixe $\omega \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ telle que

$$\text{Supp } \omega \subset \left\{ \xi : \frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 2 \right\}$$

et, pour $\xi \neq 0$, $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \omega(\xi/2^j) = 1$; on lui associe

$$\varphi(\xi) = 1 - \sum_{j \geq 0} \omega\left(\frac{\xi}{2^j}\right)$$

et $\Omega(\xi) = \varphi(\xi/4) - \varphi(2\xi)$ (de sorte que $\omega\Omega = \omega$).

Définition 4. On note Δ_j l'opérateur $\omega(D/2^j)$ et S_j l'opérateur $\varphi(D/2^j)$. La décomposition de Littlewood-Paley de $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ est alors l'identité

$$f = S_k f + \sum_{j \geq k} \Delta_j f$$

valable pour $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$, $k \in \mathbb{Z}$ (la convergence de la série ayant lieu dans \mathcal{S}').

La décomposition de Littlewood-Paley homogène est l'identité $f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta_j f$; elle n'est pas valable pour toute distribution (par exemple, si f est un polymôme $\Delta_j f = 0$ pour tout j).

Aussi, introduisons-nous la définition suivante.

Définition 5. $\mathcal{S}'_0(\mathbb{R}^3) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3) : f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta_j f \text{ dans } \mathcal{S}'\}$.

Le lemme suivant est facile à démontrer.

Lemme 1. a) Si $S_0 f \in C_0$ (fonctions continues nulles à l'infini), alors $f \in \mathcal{S}'_0$. En corollaire, si E est un espace de Banach de distributions tempérées dont la norme est invariante par translation, et si $E \cap \mathcal{S}$ est dense dans E , alors $E \subset \mathcal{S}'_0$.

b) Si E est un espace de Banach de distributions tempérées dont la norme est invariante par translation et positivement homogène de degré $-\alpha$ pour un $\alpha > 0$ (pour $\lambda > 0$, $\|f(\lambda x)\|_E = \lambda^{-\alpha} \|f\|_E$), alors $E \subset \mathcal{S}'_0$.

PREUVE. a) est immédiat : si $\|\cdot\|_E$ est invariante par translation, on a $\|S_0 f\|_{L^\infty} \leq \|\varphi(D)\|_{E'} \|f\|_E$, donc S_0 est continu de E dans L^∞ ; si $E \cap \mathcal{S}$ est dense dans E , S_0 est donc continu de E dans C_0 (car pour $f \in \mathcal{S}$ on a $S_0 f \in \mathcal{S}$).

Maintenant, pour $j \leq -1$, $S_j f = S_j(S_0 f)$ et donc $\|S_j f\|_{L^\infty} \leq \|S_j\|_1 \|\varphi(D)\|_{E'} \|f\|_E = \|S_0\|_1 \|\varphi(D)\|_{E'} \|f\|_E$. Les S_j sont donc équicontinus de E dans L^∞ pour $j \leq -1$; or, pour $f \in \mathcal{S}$ on a $\|S_j f\|_{L^\infty} \leq \|S_j\|_{L^\infty} \|f\|_{L^1} = 2^{3j} \|S_0\|_\infty \|f\|_{L^1}$ et donc

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} \|S_j f\|_{L^\infty} = 0.$$

Cela prouve que pour $f \in E$, $\lim_{j \rightarrow -\infty} \|S_j f\|_{L^\infty} = 0$ et donc que $E \subset \mathcal{S}'_0$.

b) est encore plus simple :

$$\|S_j f\|_{L^\infty} = \left\| S_0 \left(f \left(\frac{\cdot}{2^j} \right) \right) \right\|_{L^\infty} \leq \|\varphi\|_{E'} \|f\|_E 2^{\alpha j}$$

et

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} 2^{\alpha j} = 0.$$

Rappelons maintenant la définition d'un *espace de Besov*.

Si E est un espace de Banach de distributions tempérées, on désignera par $\dot{B}_E^{s,q}$ l'espace des distributions $f \in \mathcal{S}'$ telles que

$$\{2^{js} \|\Delta_j f\|_E\}_{j \in \mathbb{Z}} \in l^q(\mathbb{Z}).$$

A priori, c'est un espace défini modulo les polynômes (car pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $\Delta_j f = 0$) si et seulement si $f \in \mathbb{C}[X]$). Cependant on peut, pour certaines valeurs de s , injecter $\dot{B}_E^{s,q}$ dans \mathcal{S}'_0 en choisissant le seul représentant de f modulo les polynômes qui appartienne à \mathcal{S}'_0 .

- Si $s < 0$ et si f_j vérifie

$$\text{Supp } \hat{f}_j \subset \left\{ \xi : \frac{2^j}{2} \leq |\xi| \leq 2 \cdot 2^j \right\}$$

et $\{2^{js} \|f_j\|_E\}_{j \in \mathbb{Z}} \in l^\infty(\mathbb{Z})$, alors $\sum_{j \in \mathbb{Z}} f_j$ converge dans \mathcal{S}' : en effet, on a $\sum_{j \leq 0} \|f_j\|_E < +\infty$ tandis que pour tout $g \in \mathcal{S}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $\sum_{j \geq 0} 2^{kj} \|\Delta_j g\|_{E'} < +\infty$. (Il suffit d'écrire pour un $M \in \mathbb{N}$, $\|g\|_{E'} \leq \sum_{|\alpha| \leq M} \sum_{|\beta| \leq M} \|\xi^\alpha (\partial^\beta / \partial \xi^\beta) \hat{g}\|_{L^\infty}$.)

- De même, si $s = 0$,

$$\text{Supp } \hat{f}_j \subset \left\{ \xi : \frac{2^j}{2} \leq |\xi| \leq 2 \cdot 2^j \right\}$$

et $\{\|f_j\|_E\}_{j \in \mathbb{Z}} \in l^1(\mathbb{Z})$, alors $\sum_{j \in \mathbb{Z}} f_j$ converge dans E .

Cela permet d'inclure $\dot{B}_E^{s,q}$ et $\dot{B}_E^{0,1}$ dans \mathcal{S}'_0 pour $s < 0$. Le cas de $s \geq 0$ se traite par le lemme suivant.

Lemme 2. *Soit E un espace de Banach de distributions tempérées dont la norme est invariante par translations et positivement homogène de degré $-\alpha$ pour un $\alpha > 0$ et soient f_j tels que*

$$\text{Supp } \hat{f}_j \subset \left\{ \xi : \frac{2^j}{2} \leq |\xi| \leq 2 \cdot 2^j \right\}$$

et $\{2^{js} \|f_j\|_E\}_{j \in \mathbb{Z}} \in l^q(\mathbb{Z})$. Alors si $1 \leq q \leq +\infty$ et $s < \alpha$ ou si $q = 1$ et $s = \alpha$, $\sum_{j \in \mathbb{Z}} f_j$ converge dans \mathcal{S}' .

PREUVE. La convergence de $\sum_{j \geq 0} f_j$ est immédiate. Pour $j \leq 0$, on a que si $s < \alpha$, $\{2^{js} \|f_j\|_E\}_{j \in \mathbb{Z}^-} \in l^\infty$ entraîne $\{2^{j\alpha} \|f_j\|_E\}_{j \in \mathbb{Z}^-} \in l^1$ de sorte qu'on n'a qu'à traiter le cas $s = \alpha$, $q = 1$. Or, $\|f_j\|_{L^\infty} = \|S_{j+1} f_j\|_{L^\infty} \leq C \|f_j\|_E 2^{\alpha j}$ pour $j \leq 0$ (preuve du Lemme 1) et

$$|\langle f_j, g \rangle| = \left| \left\langle f_j, \Omega\left(\frac{D}{2^j}\right) g \right\rangle \right| \leq \|f_j\|_{L^\infty} \|g\|_{L^1} \|\Omega(D)\|_1.$$

Le lemme est donc démontré.

REMARQUE On a toujours $\dot{B}_E^{0,1} \subset E$ (en prenant les représentants de $\dot{B}_E^{0,1}$ dans \mathcal{S}'_0) et lorsque E vérifie les hypothèses du Lemme 2, $E \subset \dot{B}_E^{0,\infty}$. Lorsque la norme de E est seulement supposée invariante par translation, on a E ou E/\mathbb{C} inclus dans $\dot{B}_E^{0,\infty}$ (espace défini modulo les polynômes).

L'utilité des espaces de Besov sur E provient des *inégalités de Bernstein*.

Lemme 3. a) Si la norme de E est invariante par translation et si \mathcal{S} est dense dans E , alors on a pour tout $j \in \mathbb{Z}$

$$\left\| \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} S_j f \right\|_E \leq \left\| \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \circ \varphi\left(\frac{D}{2}\right) \right\|_1 2^{j|\alpha|} \|S_j f\|_E,$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^3$,

$$\|(\sqrt{-\Delta})^s \Delta_j f\|_E \leq \|(\sqrt{-\Delta})^s \circ \Omega(D)\|_1 2^{js} \|\Delta_j f\|_E,$$

pour tout $s \in \mathbb{R}$.

b) Si la norme de E est homogène de degré $-\alpha$ et celle de F homogène de degré $-\beta$ et si S_0 est continu de E dans F , alors

$$\|S_j f\|_F \leq \|S_0\|_{\mathcal{L}(E,F)} 2^{(j+1)(\alpha-\beta)} \|S_j f\|_E.$$

c) En particulier pour $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ et $1/r = 1 + 1/q - 1/p$

$$\|S_j f\|_L^q \leq \|\varphi(D)\|_r 2^{(j+1)(3/p-3/q)} \|S_j f\|_L^p.$$

PREUVE. Ce lemme est immédiat.

Corollaire 1. *Si la norme de E est invariante par translation et homogène de degré $-\alpha$ et si \mathcal{S} est dense dans E , alors pour $s, \sigma < \alpha$, $(\sqrt{-\Delta})^{s-\sigma}$ est un isomorphisme de $\dot{B}_E^{s,q}$ sur $\dot{B}_E^{\sigma,q}$.*

Nous utiliserons essentiellement les espaces $\dot{B}_E^{0,1}$ et $\dot{B}_E^{0,\infty}$, ainsi que les espaces $\dot{B}_{L^p}^{s,q} = \dot{B}_p^{s,q}$. Dans la Section 6, nous utiliserons également des espaces de Besov sur les espaces de Morrey-Campanato (de tels espaces de Besov ont déjà été introduits dans le contexte des équations de Navier-Stokes par Kozono et Yamazaki [KY]).

Les espaces $\dot{B}_p^{s,q}$ sont décrits par exemple dans [TRI] et [BL]. Dire que $f \in \dot{B}_p^{s,q}$ revient à dire que $\{2^{js} \Delta_j f\}_{j \in \mathbb{Z}} \in l^q(L^p)$. Les espaces de Triebel-Lizorkin $\dot{F}_p^{s,q}$ ($p < +\infty$) sont définis par $\{2^{js} \Delta_j f\}_{j \in \mathbb{Z}} \in L^p(l^q)$. En particulier $\dot{F}_p^{0,2} = L^p$ pour $1 < p < +\infty$ et $\dot{F}_1^{0,2} = \mathcal{H}^1$ où \mathcal{H}^1 est l'espace de Hardy. Un autre cas que nous aurons à considérer est $\dot{F}_2^{s,2} = \dot{H}^s$ où \dot{H}^s est l'espace de Sobolev homogène.

Les inégalités de Bernstein donnent immédiatement $\dot{B}_p^{s,q} \subset \dot{B}_{p'}^{s',q}$ pour $p \leq p'$ et $s' = s + 3/p' - 3/p$.

Pour finir, nous rappelons le principe du paraproduit de J. M. Bony [BON]. Considérons deux espaces E et F de normes invariantes par translation et homogènes de degré $-\alpha$ pour E et $-\beta$ pour F , avec $\alpha, \beta > 0$. On a donc $E \subset \dot{B}_\infty^{-\alpha,\infty}$ et $F \subset \dot{B}_\infty^{-\beta,\infty}$. En général, le produit de deux éléments de E et de F n'est pas défini. En écrivant $S_N f S_N g$ (qui est défini puisque pour $f \in E$ et $g \in F$ on a $S_N f \in L^\infty$ et $S_N g \in L^\infty$) sous la forme

$$\begin{aligned} S_N f S_N g &= \sum_{k < N} \sum_{l < N} \Delta_k f \Delta_l g \\ &= \sum_{k < N} \sum_{l < k-3} \Delta_k f \Delta_l g + \sum_{l < N} \sum_{k < l-3} \Delta_k f \Delta_l g \\ &\quad + \sum_{k < N} \sum_{\substack{l < N \\ |l-k| < 2}} \Delta_k f \Delta_l g, \end{aligned}$$

on voit que les deux premiers termes convergent dans \mathcal{S}' quand $N \rightarrow +\infty$ vers des éléments de $\dot{B}_\infty^{-\alpha-\beta,\infty}$

$$\pi(f, g) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta_j f S_{j-2} g$$

$$\pi(g, f) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta_j g S_{j-2} f$$

(car le support de $(\Delta_j f S_{j-2} g)^\wedge$ est contenu dans $\{\xi : 2^j/4 \leq |\xi| \leq (9/4)2^j\}$) et que l'obstruction à la définition de fg provient de la non convergence éventuelle du troisième terme

$$R(f, g) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{|l-j| \leq 2} \Delta_j f \Delta_l g.$$

2. Solutions faibles des equations de Navier-Stokes.

Dans cette section nous présentons la définition de solution faible pour les équations de Navier-Stokes et nous montrons que sous certaines hypothèses une telle solution est aussi solution d'un problème intégral équivalent [KAT 1], [BRO].

Ce sera sous cette dernière forme que nous aborderons par la suite l'étude des solutions "mild", qui ne sont qu'un cas particulier de solutions faibles. Rappelons la définition que nous avons donnée des solutions faibles.

Définition 1. Soit $T \in]0, +\infty]$. Une solution faible sur $]0, T[$ des équations de Navier-Stokes est un champ de vecteurs

$$\vec{u}(t, x) \in (L^2_{\text{loc}}(]0, T[\times \mathbb{R}^3))^3$$

qui vérifie dans $\mathcal{D}'(]0, T[\times \mathbb{R}^3)$

$$(2) \quad \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0, \\ \text{il existe } p \in \mathcal{D}'(]0, T[\times \mathbb{R}^3) : \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u} - \vec{\nabla} p. \end{cases}$$

On envisage d'éliminer le terme $\vec{\nabla} p$ en appliquant l'opérateur de projection $\mathbb{P} = \text{Id} + \vec{R} \otimes \vec{R}$ aux équations de Navier-Stokes; celui-ci n'étant pas en général défini dans \mathcal{D}' il faut maintenant préciser le cadre fonctionnel dans lequel toutes les opérations seront licites.

Nous considérons le cas de solutions faibles $\vec{u}(t) \in L^2(]0, T[, (E_2)^3)$ où pour $1 \leq p \leq +\infty$ on définit E_p par

$$E_p = \left\{ f \in L^p_{\text{loc}} : \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \int_{\|x-y\| \leq 1} |f(y)|^p dy < +\infty, \right. \\ \left. \lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \int_{\|x-y\| \leq 1} |f(y)|^p dy = 0 \right\}.$$

En réalité il ne s'agit pas là d'une véritable restriction.

Les solutions faibles de Leray ($\vec{u}(t) \in L^\infty(]0, T[, (L^2)^3) \cap L^2(]0, T[, (\dot{H}^1)^3)$) [LER], ou "mild" de Kato ($\vec{u}(t) \in C([0, T[, (L^p)^3)$, $p \geq 3$) [KAT 2], sont dans $L^2(]0, T'[, (E_2)^3)$ pour tout $T' < T$. De même les solutions autosimilaires de Cannone [CAN 1] vérifient $\vec{u}(t) \in C_*([0, \infty[, (\dot{B}_q^{s, \infty})^3)$ et $t^{1/2-3/(2q)}\vec{u}(t) \in L^\infty(]0, \infty[, (L^q)^3)$ avec $s = 3/q - 1$, $3 < q < +\infty$, et donc

$$\vec{u}(t) \in L^2(]0, T'[, (L^q)^3) \subset L^2(]0, T'[, (E_2)^3),$$

pour tout $T' < \infty$. Enfin les solutions "mild" de Meyer [MEY] ($\vec{u}(t) \in C_*([0, T[, (L^{3, \infty})^3)$) conviennent également puisque $L^{3, \infty} \hookrightarrow L^2 + L^4 \hookrightarrow E_2$.

En ce qui concerne les espaces étudiés dans la suite de cet article, ce seront des espaces de Banach de fonctions X qui vérifient $X \hookrightarrow L_{\text{loc}}^2$, \mathcal{S} est dense dans X , $\|f(x - x_0)\|_X = \|f(x)\|_X$, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^3$, ce qui entraîne immédiatement $X \hookrightarrow E_2$.

Nous allons maintenant démontrer la Proposition 1 annoncée dans l'introduction.

Proposition 1 (Formulation intégrale des équations de Navier-Stokes).
Soit $\vec{u}(t) \in L^2(]0, T[, (E_2)^3)$. Alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- i) \vec{u} est une solution faible des équations de Navier-Stokes;
- ii) $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ et $\partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}$;
- iii) il existe $\vec{u}_0 \in (\mathcal{S}')^3$ telle que

$$\vec{u}(t) = e^{t\Delta} \vec{u}_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}(s) ds.$$

PREUVE. Nous commençons par vérifier que i) entraîne ii).

Si $\vec{u}(t) \in L^2(]0, T[, (E_2)^3)$ est une solution faible des équations de Navier-Stokes, elle vérifie l'égalité (2) dans un espace de distributions plus précis que $\mathcal{D}'(]0, T[\times \mathbb{R}^3)$.

On définit en effet l'espace τ des fonctions de test en posant $\varphi \in \tau$ si et seulement si $\varphi \in C^\infty(]0, T[\times \mathbb{R}^3)$ et il existe K compact, $K = K(\varphi) \subset \mathbb{R}$ tel que $\text{Supp } \varphi(t, x) \subset K \times \mathbb{R}^3$ et pour tous α, β multi-indices, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $\sup_{t \in]0, T[} \|x^\alpha \partial_t^n \partial_x^\beta \varphi\|_{L^\infty} < \infty$.

On considère alors τ' le dual de τ , c'est à dire $T \in \tau'$ si et seulement si pour tout K compact il existe A_K, B_K, C_K et N_K tels que pour tout φ à support dans $K \times \mathbb{R}^3$ on ait

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C_K \sum_{\substack{|\alpha| \leq A_K \\ |\beta| \leq B_K \\ n \leq N_K}} \sup_t \|x^\alpha \partial_t^n \partial_x^\beta \varphi\|_{L^\infty} .$$

Comme $E_2 \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$, il est facile de voir que $L^2(]0, T[, (E_2)^3) \subset (\tau')^3$ et donc aussi $\partial_t \vec{u}, \Delta \vec{u} \in (\tau')^3$. De même, étant donné que toutes les composantes de $\vec{u} \otimes \vec{u}$ sont dans $L^1(]0, T[, (E_1)^3)$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}$ est dans $(\tau')^3$.

En revenant aux équations de Navier-Stokes, cela entraîne que $\vec{\nabla} p \in (\tau')^3$ et que les équations peuvent être considérées dans τ' et non pas seulement dans \mathcal{D}' .

Il n'est pas encore licite d'appliquer le projecteur \mathbb{P} , mais nous allons contourner le problème en passant aux hautes fréquences. La nullité à l'infini des fonctions dans E_2 permet en effet d'écrire si $\vec{u}(t) \in L^2(]0, T[, (E_2)^3)$, $\vec{u} \stackrel{\tau'}{=} \lim_{k \rightarrow -\infty} (\text{Id} - S_k) \vec{u}$ et donc aussi

$$\partial_t \vec{u} \stackrel{\tau'}{=} \lim_{k \rightarrow -\infty} (\text{Id} - S_k) \partial_t \vec{u} .$$

Il est maintenant possible de faire agir \mathbb{P} sur $(\text{Id} - S_k) \partial_t \vec{u}$; on obtient $\mathbb{P}(\text{Id} - S_k) \partial_t \vec{u} = (\text{Id} - S_k) \partial_t \vec{u}$ grâce à $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$. Etant donné \vec{u} une solution dans $L^2(E_2)$, on peut donc écrire

$$\begin{aligned} \partial_t \vec{u} \stackrel{\tau'}{=} \lim_{k \rightarrow -\infty} \mathbb{P}(\text{Id} - S_k) \partial_t \vec{u} \\ \stackrel{\tau'}{=} \lim_{k \rightarrow -\infty} (\mathbb{P}(\text{Id} - S_k) \Delta \vec{u} - \mathbb{P}(\text{Id} - S_k) \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u} - \mathbb{P}(\text{Id} - S_k) \vec{\nabla} p) . \end{aligned}$$

où maintenant tous les termes sont bien définis. On envisage alors de démontrer que $\mathbb{P}(\text{Id} - S_k) \vec{\nabla} p \stackrel{\tau'}{=} 0$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et qu'on peut passer à la limite pour les autres termes. En utilisant la définition

$$\mathbb{P}(\text{Id} - S_k) \vec{\nabla} p = \left(\text{Id} - \vec{\nabla} \frac{1}{\Delta} \vec{\nabla} \cdot \right) ((\text{Id} - S_k) \vec{\nabla} p) ,$$

si on prouve que pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot ((\text{Id} - S_k) \vec{\nabla} p)) \stackrel{\tau'}{=} \Delta (\text{Id} - S_k) \vec{\nabla} p$$

on aura résolu le problème. Ayant supposé $p \in \mathcal{D}'$ et non pas dans τ' , on ne peut pas commuter les opérateurs $(\text{Id} - S_k)$ et $\vec{\nabla}$ car le premier est défini seulement sur τ' .

En testant sur une fonction $\vec{\varphi} \in \tau^3$ on est ramené à vérifier que $\langle \vec{\nabla} p, (\text{Id} - S_k) (\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\varphi}) - \Delta \vec{\varphi}) \rangle = 0$. Cela est impliqué immédiatement par la propriété exprimée par le lemme suivant.

Lemme 4. *Soit $p \in \mathcal{D}'$ telle que $\vec{\nabla} p \in (\tau')^3$ et soit $\vec{\psi} \in \tau^3$ telle que $\vec{\nabla} \cdot \vec{\psi} = 0$. Alors $\langle \vec{\nabla} p, \vec{\psi} \rangle = 0$.*

Supposons avoir montré que pour tout $\vec{\psi} \in \tau^3$ telle que $\vec{\nabla} \cdot \vec{\psi} = 0$ il existe $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \tau^3$ telle que

$$\vec{\psi} = \vec{\nabla} \wedge \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2 \varphi_3 - \partial_3 \varphi_2 \\ \partial_3 \varphi_1 - \partial_1 \varphi_3 \\ \partial_1 \varphi_2 - \partial_2 \varphi_1 \end{pmatrix}.$$

On aura alors conclu car il est toujours possible d'approximer $\vec{\varphi} \in \tau^3$ par $\vec{\phi} \in \mathcal{D}^3$ et donc $\vec{\psi}$ par $\vec{\nabla} \wedge \vec{\phi}$. Or, puisque $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{\phi}) = 0$ on a

$$\langle \vec{\nabla} p, \vec{\nabla} \wedge \vec{\phi} \rangle = \langle p, \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{\phi}) \rangle = 0.$$

La construction de $\vec{\varphi}$ découle essentiellement de la propriété classique suivante : si $f \in \mathcal{S}$, il existe $g \in \mathcal{S}$ tel que $\partial_1 g = f$ si et seulement si $\int f(t, x_2, x_3) dt = 0$.

On commence alors par écrire $\vec{\psi} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ où

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \left(\int \psi_2(t, x_2, x_3) dt \right) \omega(x_1) \\ \left(\int \psi_3(t, x_2, x_3) dt \right) \omega(x_1) \end{pmatrix}$$

où $\int \omega(x) dx = 1$, et $\vec{\beta} = \vec{\psi} - \vec{\alpha}$.

On a $\vec{\nabla} \cdot \vec{\alpha} = 0$ et donc $\vec{\nabla} \cdot \vec{\beta} = 0$ et le problème se reconduit à chercher $\vec{\gamma} = (0, \gamma_2, \gamma_3)$ et $\vec{\delta} = (\delta_1, 0, 0)$ telles que $\vec{\beta} = \vec{\nabla} \wedge \vec{\gamma}$ et $\vec{\alpha} = \vec{\nabla} \wedge \vec{\delta}$.

Du moment que $\int \beta_2(t, x_2, x_3) dt = \int \beta_3(t, x_2, x_3) dt = 0$ il existe γ_2 et γ_3 dans \mathcal{S} telles que $\beta_2 = -\partial_1 \gamma_3$ et $\beta_3 = -\partial_1 \gamma_2$.

De $\vec{\nabla} \cdot \vec{\beta} = 0$ on tire alors $\vec{\beta} = \vec{\nabla} \wedge \vec{\gamma}$.

Pour $\vec{\alpha}$, il est facile de voir que $\int \alpha_3(x_1, t, x_3) dt = 0$ ce qui entraîne que $\alpha_3 = -\partial_2 \delta_1$ et grâce à $\vec{\nabla} \cdot \vec{\alpha} = 0$ on a $\vec{\alpha} = \vec{\nabla} \wedge \vec{\delta}$.

Revenant aux équations de Navier-Stokes, nous avons obtenu

$$\partial_t \vec{u} \stackrel{\tau'}{=} \lim_{k \rightarrow -\infty} (\mathbb{P}(\text{Id} - S_k) \Delta \vec{u} - \mathbb{P}(\text{Id} - S_k) \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}).$$

Pour le premier terme du deuxième membre on tire de $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ que $\mathbb{P}(\text{Id} - S_k) \Delta \vec{u} = (\text{Id} - S_k) \Delta \vec{u}$ et on peut passer à la limite obtenant $\lim_{k \rightarrow -\infty} \mathbb{P}(\text{Id} - S_k) \Delta \vec{u} \stackrel{\tau'}{=} \Delta \vec{u}$.

Pour ce qui concerne le deuxième terme, on serait tenté de permuter le projecteur avec la limite, mais \mathbb{P} n'étant pas défini sur τ' on ne le peut pas. Une analyse plus fine du terme $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}$ nous amène à la définition d'un nouvel espace Y_∞ tel que $\lim_{k \rightarrow -\infty} (\text{Id} - S_k) f \stackrel{\tau'}{=} f$ si $f \in Y_\infty$ et que $\mathbb{P} : Y_\infty^3 \rightarrow Y_\infty^3$ soit continu.

Soit alors

$$Y_\infty = \{f \in \mathcal{S}'_0 : \|\Delta_j f\|_{L^\infty} \leq 2^j C \text{ si } j < 0, \|\Delta_j f\|_{L^\infty} \leq 2^{4j} C \text{ si } j \geq 0\}$$

normé par $\|f\|_{Y_\infty} = \sup_{j \in \mathbb{Z}} 2^{-j} \inf\{1, 2^{-3j}\} \|\Delta_j f\|_{L^\infty}$.

Il est facile de voir que si $\vec{u}(t) \in L^2(]0, T[, (E_2)^3)$ alors $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u} \in L^1(]0, T[, (Y_\infty)^3)$.

Par ailleurs si $f \in Y_\infty^3$ alors $\mathbb{P}f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}\Delta_j f$ et $\|\mathbb{P}\Delta_j f\|_{L^\infty} \leq 2^j C$ si $j \leq 0$ et $\|\mathbb{P}\Delta_j f\|_{L^\infty} \leq 2^{3j} C$ si $j > 0$, donc $\mathbb{P}f \in Y_\infty^3$ et $\mathbb{P} : Y_\infty^3 \rightarrow Y_\infty^3$ est continu. Cela nous permet ainsi de conclure que

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} \mathbb{P}(\text{Id} - S_k) \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u} \stackrel{\tau'}{=} \lim_{k \rightarrow -\infty} (\text{Id} - S_k) \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u} \stackrel{\tau'}{=} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}$$

et donc

$$(9) \quad \partial_t \vec{u} \stackrel{\tau'}{=} \Delta \vec{u} - \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}.$$

Passons à ii) entraîne iii). Dans les équations (9) on a vu que $\mathbb{P}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u} \in L^1(]0, T[, (Y_\infty)^3)$ mais on montre aussi facilement que $\Delta \vec{u} \in L^1(]0, T'[, (Y_\infty)^3)$ pour $T' \leq T$ et donc $\partial_t \vec{u}$ aussi. On peut écrire alors

$$\vec{u}(t) = \int_0^t \partial_s \vec{u}(s) ds + \vec{w}, \quad \vec{w} \in (\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3))^3.$$

On peut passer à la limite dans \mathcal{S}' au deuxième membre et donc $\vec{u}(t) \rightarrow \vec{w}$ pour $t \rightarrow 0$ dans \mathcal{S}' ce qui donne un sens à la donnée initiale $\vec{u}_0 = \vec{w}$. De plus \vec{u}_0 est encore à divergence nulle.

Considérons alors l'expression

$$\vec{v}(t) = e^{t\Delta} \vec{u}_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}(s) ds, \quad \text{pour tout } t \leq T,$$

où l'intégrale converge dans Y_∞^3 , de sorte que

$$\vec{v}(t) - e^{t\Delta} \vec{u}_0 \in L^\infty(]0, T[, (Y_\infty)^3).$$

Supposons avoir montré l'égalité

$$(10) \quad \partial_t \vec{v} \stackrel{\mathcal{D}'}{=} \Delta \vec{v} - \mathbb{P}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}.$$

On en déduit que

$$\begin{cases} \partial_t(\vec{u} - \vec{v}) = \Delta(\vec{u} - \vec{v}), \\ \vec{u}(0, x) = \vec{v}(0, x) = \vec{u}_0(x). \end{cases}$$

Alors sur $]0, t[\times \mathbb{R}^3$

$$\partial_s(e^{(t-s)\Delta}(\vec{u}(s) - \vec{v}(s))) \stackrel{\tau'}{=} 0$$

d'où

$$e^{(t-s)\Delta}(\vec{u}(s) - \vec{v}(s)) = C = 0, \quad \text{dans } \tau'(]0, t[\times \mathbb{R}^3).$$

On n'a pas le droit d'inverser en général l'opérateur $e^{(t-s)\Delta}$, mais on peut le faire sur les basses fréquences et on écrit donc

$$S_k e^{(t-s)\Delta}(\vec{u}(s) - \vec{v}(s)) = 0, \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{Z},$$

pour obtenir

$$S_k(\vec{u}(s) - \vec{v}(s)) = 0$$

et enfin

$$\vec{u}(s) = \vec{v}(s).$$

Il ne nous reste qu'à prouver (10). On sait que $\partial_t e^{t\Delta} \vec{u}_0 \stackrel{\mathcal{D}'}{=} \Delta e^{t\Delta} \vec{u}_0$. Il faut montrer que

$$\begin{aligned} \partial_t \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}(s) ds \\ = \Delta \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}(s) ds + \mathbb{P}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}(t). \end{aligned}$$

Par une chaîne d'égalités par définition ou bien par des propriétés immédiates on obtient, pour tous $\vec{\varphi} \in (\mathcal{D}([0, T[\times \mathbb{R}^3))^3$, $\vec{w}(t) \in L^1([0, T[, (Y_\infty)^3)$

$$\begin{aligned} & \left\langle \partial_t \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \vec{w}(s, x) ds, \vec{\varphi}(t, x) \right\rangle \\ &= - \left\langle \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \vec{w}(s, x) ds, \partial_t \vec{\varphi}(t, x) \right\rangle \\ &= - \int_0^T \left\langle \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \vec{w}(s, \cdot) ds, \partial_t \vec{\varphi}(t, \cdot) \right\rangle dt \\ &= - \int_0^T \int_0^t \langle e^{(t-s)\Delta} \vec{w}(s, \cdot), \partial_t \vec{\varphi}(t, \cdot) \rangle ds dt \\ &= - \int_0^T \int_0^t \langle \vec{w}(s), e^{(t-s)\Delta} \partial_t \vec{\varphi}(t) \rangle ds dt \\ &= \int_0^T \int_0^t \langle \vec{w}(s), -\partial_t (e^{(t-s)\Delta} \vec{\varphi}(t)) + \Delta e^{(t-s)\Delta} \vec{\varphi}(t) \rangle ds dt \\ &= \int_0^T \int_0^t -\partial_t \langle \vec{w}(s), e^{(t-s)\Delta} \vec{\varphi}(t) \rangle ds dt \\ &\quad + \int_0^T \int_0^t \langle \Delta e^{(t-s)\Delta} \vec{w}(s), \vec{\varphi}(t) \rangle ds dt \\ &= \int_0^T \int_s^T -\partial_t \langle \vec{w}(s), e^{(t-s)\Delta} \vec{\varphi}(t) \rangle dt ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^T \left\langle \int_0^t \Delta e^{(t-s)\Delta} \vec{w}(s, \cdot) ds, \vec{\varphi}(t, \cdot) \right\rangle dt \\
 & = \int_0^T \langle \vec{w}(s, \cdot), \vec{\varphi}(s, \cdot) \rangle ds + \left\langle \Delta \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \vec{w}(s, x) ds, \vec{\varphi}(t, x) \right\rangle \\
 & = \langle \vec{w}(t, x), \vec{\varphi}(t, x) \rangle + \left\langle \Delta \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \vec{w}(s, x) ds, \vec{\varphi}(t, x) \right\rangle.
 \end{aligned}$$

Passons enfin à iii) entraîne i). Si $\vec{u}(t) \in L^2(]0, T[, (E_2)^3)$ est telle que $\vec{u}(t) = e^{t\Delta} \vec{u}_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}(s) ds$ avec $\vec{u}_0 \in (\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3))^3$ et $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$, alors on vient de montrer que

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0. \end{cases}$$

Il faut maintenant reconstruire le terme de pression. En écrivant $\partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u} + (\text{Id} - \mathbb{P}) \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}$ on doit pouvoir identifier $(\text{Id} - \mathbb{P}) \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}$ à $\vec{\nabla} p$.

Pour pouvoir “intégrer”, il est nécessaire d'utiliser encore une fois un découpage fréquentiel. En appelant

$$p_j = \frac{\vec{\nabla}}{\Delta} \cdot \Delta_j (\text{Id} - \mathbb{P}) \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}$$

il est évident que $\sum_j \vec{\nabla} p_j$ converge vers $(\text{Id} - \mathbb{P}) \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}$. Si $\sum_j p_j$ convergerait dans $\mathcal{D}'(]0, T[\times \mathbb{R}^3)$ on aurait terminé.

On a pour tout $t \in]0, T[$

$$\|p_j(t)\|_{L^\infty} \leq \|\Delta_j(\vec{u} \otimes \vec{u})(t)\|_{L^\infty} \leq \begin{cases} C, & j \leq 0, \\ C 2^{3j}, & j > 0, \end{cases}$$

donc $\sum_{j>0} p_j$ converge bien dans τ' . Pour $j \leq 0$ on n'a pas cette convergence, mais il suffit de “renormaliser” en rajoutant des constantes. Étant donné que

$$|p_j(x, t) - p_j(0, t)| \leq \|x\| \|\vec{\nabla} p_j(t)\|_{L^\infty} \leq \|x\| 2^j \|\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}(t)\|_{Y_\infty}$$

où $\|\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}(t)\|_{Y_\infty} \in L^1(]0, T[)$, $\sum_{j \leq 0} (p_j(x) - p_j(0))$ converge dans τ' et on peut ainsi définir

$$p = \sum_{j > 0} p_j + \sum_{j \leq 0} (p_j - p_j(0))$$

de sorte qu'on ait $\vec{\nabla} p = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \vec{\nabla} p_j = (\text{Id} - \mathbb{P}) \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}$ et on conclut.

REMARQUE. Notre démonstration prouve qu'une solution

$$\vec{u} \in L^2([0, T[, (E_2)^3)$$

des équations de Navier-Stokes appartient à $C([0, T[, (B_\infty^{-4, \infty})^3)$.

3. Existence de solutions "mild".

Dans cette section, nous montrerons les points A et B du Théorème 2 sur l'existence de solutions "mild" dans les espaces limites. Il s'agit d'une généralisation assez directe du théorème de Kato sur l'existence de solutions "mild" dans L^3 .

On considère un espace de Banach E de distributions qui vérifie :

- (4) \mathcal{S} est dense dans E ;
- (5) E s'injecte continûment dans L^2_{loc} ;
- (6) $\|\cdot\|_E$ est invariante par translation.

(E s'injecte alors continûment dans l'espace E_2 défini dans l'introduction).

Pour prouver l'existence de solutions "mild" dans E des équations de Navier-Stokes (c'est-à-dire pour $\vec{u}_0 \in E^3$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$, de solutions faibles $\vec{u}(t) \in C([0, T[, (E)^3)$ des équations de Navier-Stokes sur $]0, T[$ vérifiant $\vec{u}(0, \cdot) = \vec{u}_0$), le *formalisme de Kato* [KAT 2] consiste à rechercher un point fixe de la transformation intégrale

$$\vec{u}(t) \longmapsto e^{t\Delta} \vec{u}_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}(s) ds.$$

On part donc de $\vec{u}(0) = 0$ et on pose $\vec{u}_{(n+1)} = e^{t\Delta} \vec{u}_0 + B(\vec{u}_{(n)}, \vec{u}_{(n)})$ où $B(\vec{u}, \vec{v})(t) = - \int_0^t \mathbb{P} e^{(t-s)\Delta} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{v}(s) ds$. Si $B(\cdot, \cdot)$ est bicontinu sur $C([0, T[, (E)^3)$ et si

$$(11) \quad \|B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_E \leq \eta(t) \sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s)\|_E \sup_{0 < s < t} \|\vec{v}(s)\|_E$$

avec $\lim_{t \rightarrow 0} \eta(t) = 0$, il suffit de choisir T de sorte que $\sup_{0 < s \leq T} \eta(t) < 1/(4 \|\vec{u}_0\|_E)$ pour voir que $\vec{u} \mapsto e^{t\Delta} \vec{u}_0 + B(\vec{u}, \vec{u})$ est contractante sur

$$\Delta = \{ \vec{u}(t) \in C([0, T[, (E)^3) : \sup_{0 \leq t \leq T} \|\vec{u}(t)\|_E \leq 2 \|\vec{u}_0\|_E \}$$

et envoie Δ dans lui-même. Cela entraîne l'existence (et l'unicité) de \vec{u} sur $[0, T]$.

Théorème (Kato-Cannone).

i) (Kato) Pour $p \in]3, +\infty[$, L^p vérifie (11) avec

$$\eta(t) = C_p t^{1/2-3/(2p)}.$$

Il y a donc existence et unicité locales des solutions "mild" dans L^p .

ii) (Cannone) Plus en général, si E vérifie (4), (5), (6) et

$$\|\Delta_j(uv)\|_E \leq \eta_j \|u\|_E \|v\|_E$$

avec $\sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{-|j|} \eta_j < +\infty$, alors E vérifie (11) avec

$$\eta(t) = C \left(\left(\sum_{2^j \sqrt{t} \leq 1} 2^j \eta_j \right) t + \sum_{2^j \sqrt{t} > 1} 2^{-j} \eta_j \right).$$

Il y a donc dans ce cas existence et unicité locales des solutions "mild" dans E .

PREUVE ([KAT 2], [CAN 1]).

i) Il suffit de remarquer que $\|\mathbb{P} e^{\Delta \vec{\nabla}}\|_{p/(p-1)} < +\infty$, puisque

$$\begin{aligned} & \|\mathbb{P} e^{\Delta \vec{\nabla}}\|_{p/(p-1)} \\ & \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left\| \left\| \omega\left(\frac{D}{2^j}\right) \right\|_{p/(p-1)} \left\| \mathbb{P} \Omega\left(\frac{D}{2^j}\right) e^{\Delta \vec{\nabla}} \right\|_1 \right\| \\ & \leq \sum_{j \leq 0} \left\| \left\| \omega(D) \right\|_{p/(p-1)} 2^{3j/p} \left\| \mathbb{P} \Omega(D) \vec{\nabla} \right\|_1 2^j \left\| e^{\Delta} \right\|_1 \right\| \\ & \quad + \sum_{j > 0} \left\| \left\| \omega(D) \right\|_{p/(p-1)} 2^{3j/p} \left\| \mathbb{P} \Omega(D) \frac{1}{\Delta} \right\|_1 2^{-2j} \left\| \Delta e^{\Delta \vec{\nabla}} \right\|_1 \right\| \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} & \|B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_L^p \\ & \leq \int_0^t \|\mathbb{P} e^{\Delta \vec{\nabla}}\|_{p/(p-1)} (t-s)^{-1/2-3/(2p)} \|\vec{u}(s)\|_L^p \|\vec{v}(s)\|_L^p ds \\ & \leq C t^{1/2-3/(2p)} \|\mathbb{P} e^{\Delta \vec{\nabla}}\|_{p/(p-1)} \sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s)\|_L^p \sup_{0 < s < t} \|\vec{v}(s)\|_L^p . \end{aligned}$$

ii) Ce point est tout aussi immédiat. En effet, on a

$$\begin{aligned} \|B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_E & \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \eta_j \int_0^t \left\| \mathbb{P} e^{(t-s)\Delta} \vec{\nabla} \Omega\left(\frac{D}{2^j}\right) \right\|_1 ds \\ & \quad \cdot \sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s)\|_E \sup_{0 < s < t} \|\vec{v}(s)\|_E . \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \left\| \mathbb{P} e^{(t-s)\Delta} \vec{\nabla} \Omega\left(\frac{D}{2^j}\right) \right\|_1 \\ & \leq \begin{cases} 2^j \|\mathbb{P} \vec{\nabla} \Omega(D)\|_1 \|e^{\Delta}\|_1 , & 2^j \sqrt{t} \leq 1 , \\ \frac{1}{\sqrt{t-s}} \min \left\{ \|e^{\Delta} \vec{\nabla}\|_1 \|\mathbb{P} \Omega(D)\|_1 , \right. \\ \left. \frac{1}{4^j (t-s)} \|\Delta e^{\Delta} \vec{\nabla}\|_1 \left\| \mathbb{P} \frac{1}{\Delta} \Omega(D) \right\|_1 \right\} , & 1 < 2^j \sqrt{t} . \end{cases} \end{aligned}$$

Dans le cas de L^3 , (11) devient faux (en fait, B n'est pas continu sur $C([0, T[, (L^3)^3]$ [ORU]), mais l'algorithme du point fixe converge encore. En effet, $\vec{u}_{(1)} = e^{t\Delta} \vec{u}_0$ vérifie $\sup_{0 < t < T} \sqrt{t} \|\vec{u}_{(1)}\|_{L^\infty} < +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \|\vec{u}_{(1)}\|_{L^\infty} = 0$, et ces propriétés restent vérifiées par $\vec{u}_{(n)}$: si $G = \{\vec{u}(t) \in C([0, T[, (L^3)^3) : \sup_{t \in]0, T[} \sqrt{t} \|\vec{u}(t)\|_{L^\infty} < +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \|\vec{u}(t)\|_{L^\infty} = 0\}$ et si G est normé par

$$\sup_{t \in]0, T[} \sqrt{t} \|\vec{u}(t)\|_{L^\infty} + \sup_{t \in]0, T[} \|\vec{u}(t)\|_{L^3} ,$$

alors $B(\cdot, \cdot)$ est bilinéaire et continu sur G

$$\begin{aligned} \|B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_L^3 & \leq \int_0^t \|\mathbb{P} e^{\Delta \vec{\nabla}}\|_1 \frac{1}{\sqrt{t-s}} \|\vec{u}(s)\|_{L^3} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty} \sqrt{s} \frac{ds}{\sqrt{s}} \\ & \leq C \|\vec{u}\|_G \sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_{L^\infty} &\leq \int_0^t \|\mathbb{P} e^{\Delta \vec{\nabla}}\|_{6/5} \frac{1}{\sqrt{t-s}} \frac{1}{(\sqrt{t-s})^{1/2}} \\ &\quad \cdot s^{1/4} \|\vec{u}(s)\|_{L^6} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty} \sqrt{s} \frac{ds}{s^{3/4}} \\ &\leq \frac{C}{\sqrt{t}} \sup_{0 < s < t} s^{1/4} \|\vec{u}(s)\|_{L^6} \sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty} \\ &\leq \frac{C'}{\sqrt{t}} \|\vec{v}\|_G \sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty}, \end{aligned}$$

d'où le théorème de Kato [KAT 2].

Théorème (Kato). *Si $\vec{u}_0 \in (L^3)^3$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$, il existe $T(\vec{u}_0) > 0$ (avec $T = +\infty$ si $\|\vec{u}_0\|_{L^3}$ est assez petite) tel que il existe une et une seule solution faible \vec{u} des équations de Navier-Stokes sur $]0, T[$ qui vérifie $\vec{u} \in C([0, T[, (L^3)^3)$, $\sup_{0 < t < T} \sqrt{t} \|\vec{u}(t)\|_{L^\infty} < +\infty$, $\lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \|\vec{u}(t)\|_{L^\infty} = 0$ et $\vec{u}(0, \cdot) = \vec{u}_0$.*

Nous allons maintenant généraliser le Théorème B au cas des espaces limites. Rappelons qu'un *espace limite* est pour nous un espace de Banach E tel que $\mathcal{S} \hookrightarrow E \hookrightarrow L^2_{\text{loc}}$, \mathcal{S} est dense dans E , $\|\cdot\|_E$ est invariante par translation et homogène de degré -1 par dilatation.

Les exemples que nous considérerons seront principalement :

- L^3 ;
- les espaces de Besov $\dot{B}_p^{s,q}$ ($1 \leq p < 3$, $1 \leq q < +\infty$, $s = 3/p - 1$) et de Triebel-Lizorkin $\dot{F}_p^{s,q}$ ($1 < p < 3$, $1 \leq q < +\infty$, $s = 3/p - 1$) ;
- l'espace $\dot{F}_1^{2,2} = \{u \in \mathcal{S}'_0 : \Delta u \in \mathcal{H}^1\}$ où \mathcal{H}^1 est l'espace de Hardy ;
- pour $2 \leq p \leq 3$ l'adhérence de \mathcal{S} dans l'espace de Morrey-Campanato $\dot{M}_{p,3}$ défini par : $f \in \dot{M}_{p,3}$ si et seulement si $f \in L^p_{\text{loc}}$, $\sup_{R>0} \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3} R^{1-3/p} (\int_{|y-x_0|<R} |f(y)|^p dy)^{1/p} < +\infty$.

3.1. Existence d'une solution globale pour une donnée initiale de norme petite (Théorème 2.A).

Rappelons qu'il s'agit de démontrer l'existence de $\delta_0(E) > 0$ tel que si E est un espace limite qui vérifie de plus

$$(12) \quad \|\Delta_0(fg)\|_E \leq C (\|f\|_E \|g\|_{L^\infty} + \|f\|_{L^\infty} \|g\|_E)$$

alors pour $\vec{u}_0 \in E^3$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$, $\|\vec{u}_0\|_E < \delta_0$, il existe une (unique) solution $\vec{u} \in C([0, +\infty[, (E)^3)$ telle que $\sup_{t>0} \|\vec{u}(t)\|_E < +\infty$, $\sup_{t>0} \sqrt{t} \cdot \|\vec{u}(t)\|_{L^\infty} < +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \|\vec{u}(t)\|_{L^\infty} = 0$.

Remarquons que (12) est immédiat pour $E = L^3$ ou $\dot{M}_{p,3}$ (puisque dans ce cas $\|fg\|_E \leq \|f\|_E \|g\|_{L^\infty}$) et facile pour $E = \dot{F}_p^{s,q}$ ou $\dot{B}_p^{s,q}$, $p < 3$, $s = 3/p - 1$: on utilise le paraproduit de Bony $fg = \pi(f, g) + \pi(g, f) + R(f, g)$ et on a

$$\begin{aligned} \|\Delta_0 \pi(f, g)\|_E &\approx \|\Delta_0 \pi(f, g)\|_{L^p} \\ &\leq C \|g\|_{L^\infty} (\|\Delta_{-1} f\|_{L^p} + \|\Delta_0 f\|_{L^p} + \|\Delta_1 f\|_{L^p}) \\ &\leq C' \|g\|_{L^\infty} \|f\|_E \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|\Delta_0 R(f, g)\|_E &\approx \|\Delta_0 R(f, g)\|_{L^p} \\ &\leq \sum_{j \geq -2} \sum_{|l-j| \leq 2} \|\Delta_0 (\Delta_j f) (\Delta_l g)\|_{L^p} \\ &\leq C \|g\|_{L^\infty} \sum_{j \geq -2} 2^{j(1-3/p)} \|f\|_E \\ &= C' \|f\|_E \|g\|_{L^\infty} . \end{aligned}$$

La démonstration de l'existence de \vec{u} est quasi immédiate. On introduit

$$E_\infty = \{ \vec{u}(t) \in C([0, +\infty[, (E)^3) :$$

$$\sup_{t>0} (\|\vec{u}(t)\|_E + \sqrt{t} \|\vec{u}(t)\|_{L^\infty}) < +\infty, \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \|\vec{u}(t)\|_{L^\infty} = 0 \} .$$

On vérifie d'abord que $e^{t\Delta} \vec{u}_0 \in E_\infty$. En effet, $\|e^{\Delta} f\|_{L^\infty} \leq C \|f\|_E$ est immédiat puisque $E \hookrightarrow \mathcal{S}'$ et $\|f(x - x_0)\|_E = \|f\|_E$, d'où $\|e^{t\Delta} f\|_{L^\infty} \leq (C/\sqrt{t}) \|f\|_E$ par homogénéité. Les inégalités

$$\|e^{t\Delta} \vec{u}_0\|_E \leq \|e^{\Delta}\|_1 \|\vec{u}_0\|_E \quad \text{et} \quad \|e^{t\Delta} \vec{u}_0\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{\sqrt{t}} \|\vec{u}_0\|_E$$

sont donc immédiates; $\lim_{t \rightarrow 0} \|e^{t\Delta} \vec{u}_0\|_{L^\infty} = 0$ vient alors de ce que \mathcal{S} est dense dans E .

On vérifie ensuite que

$$\begin{aligned} & \|e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{v}(s)\|_E \\ & \leq C \frac{1}{\sqrt{t-s}} \frac{1}{\sqrt{s}} (\|\vec{u}(s)\|_E \sqrt{s} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty} + \|\vec{v}(s)\|_E \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty}). \end{aligned}$$

Il suffit de prouver que

$$\|\Delta_j(\vec{u} \otimes \vec{v})\|_E \leq C (\|\vec{u}\|_E \|\vec{v}\|_{L^\infty} + \|\vec{v}\|_E \|\vec{u}\|_{L^\infty}),$$

puis que

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left\| \left\| e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \Omega \left(\frac{D}{2^j} \right) \right\| \right\|_1 \\ & \leq \sum_{2^j \sqrt{t-s} \leq 1} 2^j \left\| \mathbb{P} \vec{\nabla} \Omega(D) \right\|_1 \\ & \quad + \sum_{2^j \sqrt{t-s} > 1} \frac{1}{2^j (t-s)} \left\| \mathbb{P} \frac{1}{-\Delta} \vec{\nabla} \Omega(D) \right\|_1 \|\Delta e^\Delta\|_1 \\ & \leq C \frac{1}{\sqrt{t-s}}. \end{aligned}$$

(ce qui donne $\|e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{v}(s)\|_{\dot{B}_E^{0,1}} \leq (C/\sqrt{t-s}) (\|\vec{u}\|_E \|\vec{v}\|_{L^\infty} + \|\vec{v}\|_E \|\vec{u}\|_{L^\infty})$).

On a en particulier

$$\|e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{v}(s)\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{\sqrt{t-s}} \|\vec{u}\|_{L^\infty} \|\vec{v}\|_{L^\infty}$$

et

$$\begin{aligned} & \|e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{v}(s)\|_{L^\infty} \\ & \leq \frac{C}{\sqrt{t-s}} \|e^{((t-s)/2)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{v}(s)\|_E \|\vec{u}\|_{L^\infty} \\ & \leq \frac{C}{t-s} (\|\vec{u}\|_E \|\vec{v}\|_{L^\infty} + \|\vec{v}\|_E \|\vec{u}\|_{L^\infty}) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} & \|e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{v}(s)\|_{L^\infty} \\ & \leq \frac{C}{(t-s)^{3/4}} \sqrt{\|\vec{u}\|_{L^\infty} \|\vec{v}\|_{L^\infty}} \sqrt{\|\vec{u}\|_E \|\vec{v}\|_{L^\infty} + \|\vec{u}\|_{L^\infty} \|\vec{v}\|_E}. \end{aligned}$$

Comme

$$\int_0^t \frac{ds}{\sqrt{s} \sqrt{t-s}} = \int_0^1 \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma} \sqrt{1-\sigma}} < +\infty$$

et

$$\int_0^t \frac{ds}{s^{1/4} (t-s)^{3/4}} = \int_0^1 \frac{d\sigma}{\sigma^{1/4} (1-\sigma)^{3/4}} < +\infty$$

on voit que $B(\cdot, \cdot)$ est bilinéaire continu de $E_\infty \times E_\infty$ dans E_∞ .

On considère alors $F(\vec{u})(t) = e^{t\Delta} \vec{u}_0 + B(\vec{u}, \vec{u})(t)$ et on va montrer que pour un bon choix de $R > 0$, F est une contraction de la boule $B(0, R) \subset E_\infty$ dans elle-même. En effet, si μ est la norme de l'opérateur B sur $E_\infty \times E_\infty$, on a

$$\|F(\vec{u})\|_{E_\infty} \leq \|e^{t\Delta} \vec{u}_0\|_{E_\infty} + \mu \|\vec{u}\|_{E_\infty}^2$$

et

$$\begin{aligned} \|F(\vec{u}) - F(\vec{v})\|_{E_\infty} &= \|B(\vec{u}, \vec{u}) - B(\vec{v}, \vec{v})\|_{E_\infty} \\ &\leq \|B(\vec{u} - \vec{v}, \vec{u})\|_{E_\infty} + \|B(\vec{v}, \vec{u} - \vec{v})\|_{E_\infty} \\ &\leq \mu \|(\vec{u} - \vec{v})\|_{E_\infty} (\|\vec{u}\|_{E_\infty} + \|\vec{v}\|_{E_\infty}) \end{aligned}$$

et il suffit de choisir R tel que

$$\begin{cases} \|e^{t\Delta} \vec{u}_0\|_{E_\infty} + \mu R^2 \leq R, \\ 2\mu R < 1. \end{cases}$$

La valeur

$$R = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\mu \|e^{t\Delta} \vec{u}_0\|_{L^\infty}}}{2\mu}$$

remplit les deux conditions et de plus $R < 2 \|e^{t\Delta} \vec{u}_0\|_{E_\infty} \leq 2C \|\vec{u}_0\|_E$. Pour $\|\vec{u}_0\|_E < (2\mu)/C$, il existe un unique point fixe $\vec{u} \in B(0, R) \subset E_\infty$ de l'application F .

3.2. Existence locale (Théorème 2.B).

Lorsque \vec{u}_0 est trop grand, la condition (12) ne suffit plus à assurer la contractivité de l'application F : en effet $\|B(\vec{u}, \vec{u} - \vec{v})\|_E$ se contrôle par

$$\begin{aligned} \sup_{s>0} \|\vec{u}(s)\|_E \sup_{s>0} \sqrt{s} \|\vec{u}(s) - \vec{v}(s)\|_{L^\infty} \\ + \sup_{s>0} \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} \sup_{s>0} \|\vec{u}(s) - \vec{v}(s)\|_E \end{aligned}$$

et dans le premier terme $\sup_{s>0} \|\vec{u}(s)\|_E$ ne peut plus être rendu assez petit pour garantir que F soit contractante. On va donc demander à E de vérifier une forme modifiée de (12) où le poids de la norme sera atténué

il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$

$$(13) \quad \begin{aligned} \text{il existe } M(\varepsilon) > 0 \text{ tels que pour tous } f, g \in E \cap L^\infty \\ \|\Delta_0(fg)\|_E \leq M(\varepsilon) \|f\|_E \|g\|_{L^\infty} + \varepsilon \|g\|_E \|f\|_{L^\infty}^\alpha \|f\|_E^{1-\alpha}. \end{aligned}$$

A nouveau, (13) est vérifiée par les espaces que nous considérons : pour L^3 ou $\dot{M}_{p,3}$ c'est immédiat puisque $\|\Delta_0(fg)\|_E \leq \|f\|_E \|g\|_{L^\infty}$. Pour $E = \dot{F}_p^{s,q}$, $E = \dot{B}_p^{s,q}$, $p < 3$, $s = 3/p - 1$, on le vérifie en utilisant à nouveau le paraproduit de Bony : on a $\|\Delta_0(fg)\|_E \approx \|\Delta_0(fg)\|_{L^p}$ et on sait déjà que $\|\Delta_0(\pi(f,g))\|_E \leq C \|f\|_E \|g\|_{L^\infty}$ et $\|\Delta_0(R(f,g))\|_E \leq C \|f\|_E \|g\|_{L^\infty}$ de sorte qu'il ne reste à étudier que $\|\Delta_0(\pi(g,f))\|_{L^p}$. On écrit

$$\Delta_0\pi(g,f) = \Delta_0\pi((S_3g - S_{-3}g), S_Lf) + \Delta_0\pi((S_3g - S_{-3}g), f - S_Lf).$$

On a

$$\begin{aligned} \|\Delta_0\pi((S_3g - S_{-3}g), f - S_Lf)\|_{L^p} &\leq C \|S_3g - S_{-3}g\|_{L^\infty} \|f - S_Lf\|_{L^p} \\ &\leq C' \|g\|_{L^\infty} \|f\|_E 2^{-L(3/p-1)}. \end{aligned}$$

Pour $I = \|\Delta_0\pi((S_3g - S_{-3}g), S_Lf)\|_{L^p}$ on remarque que I se majore par

$$\|S_3g - S_{-3}g\|_{L^p} \|S_Lf\|_{L^\infty} \leq C \|g\|_E \|f\|_{L^\infty}$$

et, en choisissant $\rho > 3 > p$ et $1/q + 1/\rho = 1/p$, que I se majore également par

$$\begin{aligned} \|S_3g - S_{-3}g\|_{L^q} \|S_L f\|_{L^\rho} &\leq C \|g\|_E \sum_{j < L} \|\Delta_j f\|_{L^\rho} \\ &\leq C \|g\|_E \sum_{j < L} 2^{j(1-3/\rho)} \|f\|_E \\ &\leq C' \|g\|_E \|f\|_E 2^{L(1-3/\rho)}. \end{aligned}$$

En faisant la moyenne géométrique de ces deux estimations, on obtient pour $L < 0$

$$\begin{aligned} &\|\Delta_0 \pi(g, f)\|_{L^p} \\ &\leq C \|g\|_{L^\infty} \|f\|_E 2^{L(1-3/p)} + C' \|g\|_E \|f\|_E^{1/2} \|f\|_{L^\infty}^{1/2} 2^{L(1/2-3/(2\rho))}. \end{aligned}$$

On obtient que E vérifie (13) en prenant $\alpha = 1/2$ et en choisissant, pour $\varepsilon > 0$ fixé, L tel que $C' 2^{L(1/2-3/(2\rho))} < \varepsilon$.

Nous pouvons maintenant démontrer le point B du Théorème 1. On considère à nouveau $F(\vec{u})(t) = e^{t\Delta} \vec{u}_0 + B(\vec{u}, \vec{u})(t)$ et on va montrer qu'il existe $T > 0$, $\rho > 0$ et $R > 0$ tels que l'application F soit une contraction de l'espace $E_{T,\rho,R}$ défini par

$$\begin{aligned} E_{T,\rho,R} &= \{ \vec{u}(t) \in C([0, T[, (E)^3) : \\ &\sup_{0 < s < T} \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} \leq \rho, \sup_{0 < s < T} \|\vec{u}(s)\|_E \leq R, \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \|\vec{u}(t)\|_{L^\infty} = 0 \} \end{aligned}$$

qui est un fermé du Banach $E_{T,\infty}$, l'analogie sur $[0, T[$ de E_∞ , normé par

$$\|\vec{u}\|_{E_{T,\infty}} = \sup_{0 < s < T} \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} + \sup_{0 < s < T} \|\vec{u}(s)\|_E.$$

On commence par vérifier le lemme suivant.

Lemme 5. *Pour $\vec{u}, \vec{v} \in E_{T,\infty}$ et $\varepsilon > 0$ on a*

$$\begin{aligned} &\|B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_{\dot{B}_E^{0,1}} + \|B(\vec{v}, \vec{u})(t)\|_{\dot{B}_E^{0,1}} \\ &\leq C (\varepsilon \sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s)\|_E (\sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty})^\alpha (\sup_{0 < s < t} \|\vec{v}(s)\|_E)^{1-\alpha} \\ (14) \quad &+ M(\varepsilon) \sup_{0 < s < t} \|\vec{v}(s)\|_E \sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} \end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{t} \|B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_{L^\infty} + \sqrt{t} \|B(\vec{v}, \vec{u})(t)\|_{L^\infty} \\
 & \leq C \left(\varepsilon^{1/2} \sqrt{\sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s)\|_E \sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty}} \right. \\
 & \quad \cdot \sqrt{\left(\sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty} \right)^{\alpha+1} \left(\sup_{0 < s < t} \|\vec{v}(s)\|_E \right)^{1-\alpha}} \\
 (15) \quad & \quad + M(\varepsilon)^{1/2} \sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} \\
 & \quad \cdot \sqrt{\sup_{0 < s < t} \|\vec{v}(s)\|_E \sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty}} \Big).
 \end{aligned}$$

En particulier, si $\lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{s} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty} = 0$, on a bien

$$\lim_{s \rightarrow 0} \|B(\vec{u}, \vec{v})(s)\|_{L^\infty} = 0 \quad \text{et} \quad B(\vec{u}, \vec{v}) \in C([0, T[, (\dot{B}_E^{0,1})^3).$$

PREUVE DU LEMME. Les transformations de Riezs opèrent continûment sur $\dot{B}_E^{0,1}$, de sorte qu'on peut se ramener à l'étude de l'opérateur scalaire

$$A(u, v)(t) = \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \sqrt{-\Delta} (uv)(s) ds.$$

On remarque d'abord que α défini par $e^\Delta \sqrt{-\Delta} = \alpha(D)$ vérifie $|\alpha(x)| \leq C/(1 + |x|^4)$: il suffit de remarquer que

$$(1 + |x|^4) \alpha(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} (\text{Id} + \Delta_\xi^2) (|\xi| e^{-\xi^2}) e^{i\langle x, \xi \rangle} d\xi$$

et que

$$\Delta_\xi^2 (|\xi| e^{-|\xi|^2}) = C \delta + \beta(\xi)$$

où $\beta(\xi)$ est $\mathcal{O}(1/|\xi|^2)$ au voisinage de 0 et à décroissance rapide à l'infini, de sorte que $\beta \in L^1$. Cela entraîne pour $f \in E_1$, $\|\alpha * f\|_{L^\infty} \leq C \|f\|_{E_1}$ puisque

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^3} \sup_{\max_i |y_i - k_i| \leq 1} |\alpha(y)| < +\infty,$$

et donc $\alpha * f \in C_0$ (par densité de \mathcal{S} dans E_1 et puisque pour $\alpha \in L^1$ on a $\alpha * f \in C_0$ lorsque $f \in \mathcal{S}$). En particulier pour $u, v \in E$, $\sqrt{-\Delta} e^\Delta(uv) \in \mathcal{S}'_0$.

Pour montrer l'inégalité (14), il suffit d'estimer

$$I = \int_0^t \|e^{(t-s)\Delta} \sqrt{-\Delta} uv(s)\|_{\dot{B}_E^{0,1}} ds.$$

Pour cela, on écrit

$$I = \int_0^t \sum_{j \in \mathbb{Z}} I_j ds$$

avec

$$I_j(s) = \|\Delta_j e^{(t-s)\Delta} \sqrt{-\Delta} uv(s)\|_E.$$

$I_j(s)$ se contrôle facilement

$$\begin{aligned} I_j(s) &\leq \inf \left\{ \|e^{(t-s)\Delta}\|_1 \left\| \sqrt{-\Delta} \Omega\left(\frac{D}{2^j}\right) \right\|_1, \right. \\ &\quad \left. \|\Delta^2 e^{(t-s)\Delta}\|_1 \left\| \frac{\sqrt{-\Delta}}{\Delta^2} \Omega\left(\frac{D}{2^j}\right) \right\|_1 \right\} \|\Delta_j uv(s)\|_E \\ &\leq C \inf \left\{ 2^j, \frac{2^j}{(4^j(t-s))^2} \right\} \|\Delta_j uv(s)\|_E \\ &\leq C' \inf \left\{ 2^j, \frac{2^j}{(4^j(t-s))^2} \right\} \\ &\quad \cdot (M(\varepsilon) \|v(s)\|_E \|u(s)\|_{L^\infty} \\ &\quad + \varepsilon \|u(s)\|_E \|v(s)\|_{L^\infty}^\alpha (2^j \|v(s)\|_E)^{1-\alpha}) \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} I &\leq C \left(\varepsilon \sup_{0 < s < t} \|u(s)\|_E \left(\sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|v(s)\|_{L^\infty} \right)^\alpha \left(\sup_{0 < s < t} \|v(s)\|_E \right)^{1-\alpha} \right. \\ &\quad \cdot \int_0^t \sum_{j \in \mathbb{Z}} \inf \left\{ 2^j, \frac{2^j}{(4^j(t-s))^2} \right\} \frac{2^{j(1-\alpha)}}{s^{\alpha/2}} ds \\ &\quad + C M(\varepsilon) \sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|u(s)\|_{L^\infty} \sup_{0 < s < t} \|v(s)\|_E \\ &\quad \cdot \int_0^t \sum_{j \in \mathbb{Z}} \inf \left\{ 2^j, \frac{2^j}{(4^j(t-s))^2} \right\} \frac{ds}{\sqrt{s}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq C \left(\varepsilon \sup_{0 < s < t} \|u(s)\|_E \left(\sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|v(s)\|_{L^\infty} \right)^\alpha \left(\sup_{0 < s < t} \|v(s)\|_E \right)^{1-\alpha} \right. \\ &\quad \left. + M(\varepsilon) \sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|u(s)\|_{L^\infty} \sup_{0 < s < t} \|v(s)\|_E \right) \end{aligned}$$

car les deux intégrales se majorent respectivement par

$$\int_0^t \frac{ds}{s^{\alpha/2} (t-s)^{1-\alpha/2}} = \int_0^1 \frac{d\sigma}{\sigma^{\alpha/2} (1-\sigma)^{1-\alpha/2}}$$

et par

$$\int_0^t \frac{ds}{\sqrt{s} \sqrt{t-s}} = \int_0^1 \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma} \sqrt{1-\sigma}}.$$

Pour (15) on part de l'inégalité (qu'on vient de démontrer)

$$\begin{aligned} &\|e^{((t-s)/2)\Delta} \sqrt{-\Delta} (uv)(s)\|_E \\ &\leq C \left(\frac{1}{s^{\alpha/2}} \frac{1}{(t-s)^{1-\alpha/2}} \varepsilon \|u(s)\|_E (\sqrt{s} \|v(s)\|_{L^\infty})^\alpha \|v(s)\|_E^{1-\alpha} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{s}} \frac{1}{\sqrt{t-s}} M(\varepsilon) \sqrt{s} \|u(s)\|_{L^\infty} \|v(s)\|_E \right) \end{aligned}$$

et de

$$\|e^{((t-s)/2)\Delta} w(s)\|_{L^\infty} \leq C \frac{1}{\sqrt{t-s}} \|w(s)\|_E$$

pour en conclure

$$\begin{aligned} &\|e^{(t-s)\Delta} \sqrt{-\Delta} (uv)(s)\|_{L^\infty} \\ &\leq C \left(\frac{\varepsilon}{s^{\alpha/2} (t-s)^{3/2-\alpha/2}} \|u(s)\|_E (\sqrt{s} \|v(s)\|_{L^\infty})^\alpha \|v(s)\|_E^{1-\alpha} \right. \\ &\quad \left. + \frac{M(\varepsilon)}{\sqrt{s} (t-s)} \sqrt{s} \|u(s)\|_{L^\infty} \|v(s)\|_E \right), \end{aligned}$$

par ailleurs

$$\|e^{(t-s)\Delta} \sqrt{-\Delta} uv(s)\|_{L^\infty} \leq C \frac{1}{s} \frac{1}{\sqrt{t-s}} \sqrt{s} \|u(s)\|_{L^\infty} \sqrt{s} \|v(s)\|_{L^\infty}$$

d'où en moyennant

$$\begin{aligned} &\|e^{(t-s)\Delta} \sqrt{-\Delta} uv(s)\|_{L^\infty} \\ &\leq C \left(\varepsilon^{1/2} \frac{1}{s^{\alpha/4+1/2}} \frac{1}{(t-s)^{1-\alpha/4}} \right. \\ &\quad \cdot \sqrt{\|u(s)\|_E \sqrt{s} \|u(s)\|_{L^\infty} (\sqrt{s} \|v(s)\|_{L^\infty})^{\alpha+1} \|v(s)\|_E^{1-\alpha}} \\ &\quad \left. + M(\varepsilon)^{1/2} \frac{1}{s^{3/4}} \frac{1}{(t-s)^{3/4}} \sqrt{s} \|u(s)\|_{L^\infty} \sqrt{\|v(s)\|_E \sqrt{s} \|v(s)\|_{L^\infty}} \right) \end{aligned}$$

et (15) est démontrée car les deux intégrales se majorent respectivement par

$$\int_0^t \frac{ds}{s^{\alpha/4+1/2} (t-s)^{1-\alpha/2}} = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^1 \frac{d\sigma}{\sigma^{\alpha/4+1/2} (1-\sigma)^{1-\alpha/2}}$$

et par

$$\int_0^t \frac{ds}{s^{3/4} (t-s)^{3/4}} = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^1 \frac{d\sigma}{\sigma^{3/4} (1-\sigma)^{3/4}}.$$

Le lemme est donc démontré.

FIN DE LA DÉMONSTRATION. Il s'agit de trouver T, R et ρ pour que F soit contractante sur $E_{T,R,\rho}$ et laisse $E_{T,R,\rho}$ stable. On écrit

$$\|F(\vec{u}) - F(\vec{v})\|_{E_{T,\rho,R}} = B(\vec{u} - \vec{v}, \vec{u}) + B(\vec{v}, \vec{u} - \vec{v})$$

et on applique (14) et (15) pour obtenir, pour $\vec{u}, \vec{v} \in E_{T,\rho,R}$

$$\begin{aligned} & \|F(\vec{u}) - F(\vec{v})\|_{E_{T,\infty}} \\ & \leq C \sup_{0 < s < T} \|\vec{u}(s) - \vec{v}(s)\|_{E_{T,\infty}} (\varepsilon R + M(\varepsilon) \rho + \sqrt{\varepsilon} \sqrt{R} \rho + \sqrt{M(\varepsilon)} \rho) \end{aligned}$$

de sorte que on va imposer

$$\varepsilon R + M(\varepsilon) \rho + \sqrt{\varepsilon} \sqrt{R} \rho + \sqrt{M(\varepsilon)} \rho < \frac{1}{C},$$

il suffit de prendre

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon < \frac{1}{3CR}, \\ \rho < \min \left\{ \frac{1}{9C^2 \varepsilon R}, \frac{1}{3C(M(\varepsilon) + \sqrt{M(\varepsilon)})} \right\} \end{array} \right\}.$$

ce qui fixe le choix de ρ en fonction de R .

Il reste à assurer que $E_{T,\rho,R}$ soit stable sous l'action de F . Il suffit d'écrire pour $\vec{u} \in E_{T,\rho,R}$, pour $t < T$

$$\begin{aligned} \|F(\vec{u})(t)\|_E & \leq \|e^{t\Delta} \vec{u}_0\|_E + \|B(\vec{u}, \vec{u})(t)\|_E \\ & \leq \|\vec{u}_0\|_E + C \varepsilon R \rho^\alpha R^{1-\alpha} + C M(\varepsilon) \rho R \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \sqrt{t} \|F(\vec{u})(t)\|_{L^\infty} \\ & \leq \sqrt{t} \|e^{t\Delta} \vec{u}_0\|_{L^\infty} + C \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\rho R} \sqrt{\rho^{1+\alpha} R^{1-\alpha}} + C \sqrt{M(\varepsilon)} \rho \sqrt{\rho R}. \end{aligned}$$

Si on impose à ρ les conditions supplémentaires

$$\begin{aligned} \rho & \leq \min \left\{ \frac{1}{4 C M(\varepsilon)}, \frac{1}{(4 R^{1-\alpha} C \varepsilon)^{1/\alpha}} \right\}, \\ \rho & \leq \min \left\{ \frac{1}{(16 C^2 \varepsilon R^{2-\alpha})^{1/\alpha}}, \frac{1}{(4 C M(\varepsilon)^{1/2})^2 R} \right\}, \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \|F(\vec{u})(t)\|_E & \leq \|\vec{u}_0\|_E + \frac{R}{2}, \\ \sqrt{t} \|F(\vec{u})(t)\|_{L^\infty} & \leq \sqrt{t} \|e^{t\Delta} \vec{u}_0\|_{L^\infty} + \frac{\rho}{2}. \end{aligned}$$

On prend donc $R = 2 \|\vec{u}_0\|_E$, ρ assez petit (en fonction de R), puis T tel que $\sup_{0 < t < T} \sqrt{t} \|e^{t\Delta} \vec{u}_0\|_{L^\infty} \leq \rho/2$ et la démonstration est terminée : $E_{T,\rho,R}$ est stable et F y est contractante.

4. Unicité des solutions “mild” : les espaces limites “réguliers”.

Nous nous intéressons dans cette section et dans les suivantes au problème de l'unicité des solutions dans $F = \mathcal{C}([0, T[, E^3)$ pour un espace limite E . Rappelons que l'existence de solutions “mild” a été établie à l'aide d'un théorème de point fixe dans le sous-espace $F_* = \{\vec{u} \in F : \sqrt{t} \vec{u} \in (L^\infty([0, T[\times \mathbb{R}^3))^3, \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \|\vec{u}\|_\infty = 0\}$. L'unicité dans F_* est donc immédiate et le problème est de s'affranchir de la contrainte $\sqrt{t} \vec{u} \in (L^\infty([0, T[\times \mathbb{R}^3))^3$.

4.1. Un cas élémentaire : le théorème de Le Jan et Sznitman.

Récemment Le Jan et Sznitman ont montré qu'il existait des espaces limites E tels que l'opérateur bilinéaire $(\vec{u}, \vec{v}) \rightarrow B(\vec{u}, \vec{v})$ opérait

continûment sur $L^\infty(]0, T[, E^3)$ de sorte que le problème de l'unicité se résolvait directement dans $L^\infty(]0, T[, E^3)$ [LJS].

Théorème (Y. Le Jan-A. S. Sznitman). *Soit $\Delta\text{PM} = \{u(x) \in \mathcal{S}'_0 : \sup_{\xi \in \mathbb{R}^3} |\xi|^2 |\widehat{u}(\xi)| < \infty\}$. Alors*

$$B(\vec{u}, \vec{v})(t) = \int_0^t \mathbb{P} e^{(t-s)\Delta} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{v})(s) ds$$

est bicontinu de

$$L^\infty(]0, \infty[, (\Delta\text{PM})^3) \times L^\infty(]0, \infty[, (\Delta\text{PM})^3)$$

dans

$$L^\infty(]0, \infty[, (\Delta\text{PM})^3).$$

Nous en donnons ici une preuve due à M. Cannone [CAN 2].

Lemme 6. *Soient $\vec{f}, \vec{g} \in (\Delta\text{PM})^3$. Alors*

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^3} |\xi| |\mathcal{F}(\vec{f})(\xi) * \mathcal{F}(\vec{g})(\xi)| \leq C \sup_{\xi \in \mathbb{R}^3} |\xi|^2 |\mathcal{F}(\vec{f})(\xi)| \sup_{\xi \in \mathbb{R}^3} |\xi|^2 |\mathcal{F}(\vec{g})(\xi)|.$$

PREUVE. Il suffit de montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\xi - \eta|^2 |\eta|^2} d\eta \leq C \frac{1}{|\xi|},$$

c'est immédiat puisque l'intégrande est bien intégrable (au voisinage de 0, de ξ et à l'infini) et que l'intégrale définit bien une fonction radiale homogène de degré -1 de ξ .

PREUVE DU THÉORÈME. On veut évaluer

$$\sup_{t>0} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^3} |\xi|^2 \left| \int_0^t \mathcal{F}(\mathbb{P} e^{(t-s)\Delta} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{v})(s))(\xi) ds \right|.$$

En passant aux composantes et en majorant, on a

$$\begin{aligned} & \sup_{t>0} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^3} |\xi|^2 \int_0^t e^{-(t-s)|\xi|^2} |\xi| |(\widehat{u} * \widehat{v})(s, \xi)| ds \\ & \leq C \left(\sup_{s>0} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^3} |\xi|^2 |\widehat{u}(s, \xi)| \right) \left(\sup_{s>0} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^3} |\xi|^2 |\widehat{v}(s, \xi)| \right) \sup_{t>0} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^3} (1 - e^{-t|\xi|^2}) \\ & = C \left(\sup_{s>0} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^3} |\xi|^2 |\widehat{u}(s, \xi)| \right) \left(\sup_{s>0} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^3} |\xi|^2 |\widehat{v}(s, \xi)| \right). \end{aligned}$$

Le résultat de Le Jan et Sznitman nous a permis alors de résoudre le problème de l'unicité pour $E = \Delta\mathcal{H}^1 = \{u \in \mathcal{S}'_0 : \Delta u \in \mathcal{H}^1\} = \dot{F}_1^{2,2}$, un sous-espace de L^3 que nous étudions comme cas d'école plus simple que L^3 :

Corollaire 2. *Si $\|\vec{u}_0\|_{\Delta\mathcal{H}^1}$ est assez petite, la solution globale à la Kato est l'unique solution dans $C([0, +\infty[, (\Delta\mathcal{H}^1)^3)$.*

PREUVE. On remarque d'abord que $\Delta\mathcal{H}^1$ est un sous-espace de ΔPM . Soit $\vec{v}(t)$ une autre solution dans $C([0, T[, (\Delta\mathcal{H}^1)^3)$ avec même donnée initiale $\vec{u}_0(x) = \vec{v}(0, x)$. Nous donnons à cela la signification suivante

$$\vec{v}(t) = e^{t\Delta} \vec{u}_0 - \int_0^t \mathbb{P} e^{(t-s)\Delta} \vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \otimes \vec{v})(s) ds, \quad \text{dans } \mathcal{S}'.$$

Soit $t_0 = \sup \{t \geq 0 : \vec{u}(s) \equiv \vec{v}(s) \text{ sur } [0, t]\}$ (évidemment cet ensemble n'est pas vide). Supposons $t_0 < T$.

On a, en posant $\vec{u}(t) - \vec{v}(t) = \vec{w}(t)$

$$\begin{aligned} & \|\vec{w}(t)\|_{\Delta\text{PM}} \\ &= \|B(\vec{u}, \vec{u})(t) - B(\vec{v}, \vec{v})(t)\|_{\Delta\text{PM}} \\ &= \|B(\vec{w}, \vec{u})(t) + B(\vec{v}, \vec{w})(t)\|_{\Delta\text{PM}} \\ &\leq C \sup_{0 < s < t} \|\vec{w}(s)\|_{\Delta\text{PM}} \left(\sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s)\|_{\Delta\text{PM}} + \sup_{0 < s < t} \|\vec{v}(s)\|_{\Delta\text{PM}} \right) \\ &\leq C \sup_{0 < s < t} \|\vec{w}(s)\|_{\Delta\text{PM}} \left(2 \sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s)\|_{\Delta\mathcal{H}^1} + \sup_{0 < s < t} \|\vec{w}(s)\|_{\Delta\mathcal{H}^1} \right). \end{aligned}$$

$\vec{u}(t)$ étant la solution à la Kato, pour tout $t > 0$, $\|\vec{u}(s)\|_{\Delta\mathcal{H}^1} < 1/(4C)$ pourvu que $\|\vec{u}_0\|_{\Delta\mathcal{H}^1} < \delta < \delta_0(\Delta\mathcal{H}^1)$.

Par ailleurs il existe $t_1 > t_0$ tel que $\sup_{0 < s < t_1} \|\vec{w}(s)\|_{\Delta\mathcal{H}^1} < 1/(4C)$ grâce à la continuité de $\vec{u}(t)$, $\vec{v}(t)$ et à la définition de t_0 .

Donc

$$\sup_{0 < s < t_1} \|\vec{w}(s)\|_{\Delta\text{PM}} \leq \frac{3}{4} \sup_{0 < s < t_1} \|\vec{w}(s)\|_{\Delta\text{PM}},$$

d'où $\vec{w}(s) \equiv 0$ sur $[0, t_1[$ dans ΔPM et donc dans $\Delta\mathcal{H}^1$, ce qui contredit la définition de t_0 .

Il est intéressant de remarquer, comme l'a fait M. Cannone [CAN 2], que l'espace ΔPM dans lequel on peut démontrer la bicontinuité de l'opérateur bilinéaire n'est rien d'autre qu'un espace de Besov. En effet

$$\Delta\text{PM} = \dot{B}_{\text{PM}}^{2,\infty} = \{f \in \mathcal{S}'_0 : \sup_{j \in \mathbb{Z}} 2^{2j} \|\Delta_j f\|_{\text{PM}} < +\infty\}.$$

C'est cette remarque qui nous a permis d'étendre ce premier résultat d'unicité à d'autres espaces fonctionnels limites simples comme nous allons le voir dans la section suivante.

4.2. Espaces limites réguliers.

Nous allons caractériser dans ce paragraphe les espaces fonctionnels pour lesquels on peut adapter immédiatement la méthode utilisée pour $\Delta\mathcal{H}^1$.

Définition 6. *Un espace fonctionnel limite régulier pour les équations "mild" de Navier-Stokes est un espace E limite au sens de la Définition 3 qui vérifie de plus la propriété suivante*

$$(16) \quad \text{il existe } C > 0 \text{ tel que pour tous } f, g \in E, \\ \|\Delta_0(fg)\|_E \leq C \sup_{j \in \mathbb{Z}} \|\Delta_j f\|_E \sup_{j \in \mathbb{Z}} \|\Delta_j g\|_E.$$

On remarquera que la propriété (16) peut se ré-écrire

$$\|\Delta_j(fg)\|_E \leq C 2^j \|f\|_{\dot{B}_E^{0,\infty}} \|g\|_{\dot{B}_E^{0,\infty}}.$$

Soit X un espace de Banach; on notera $C_*([0, T[, X)$ le sous-espace des fonctions $f(t, x)$ de $L^\infty([0, T[, X)$ qui sont continues de $[0, T[\rightarrow X$ au sens des distributions.

Lemme 7. *Soit E un espace limite régulier, $T \in]0, \infty]$ et $\vec{u}(t), \vec{v}(t) \in C([0, T[, (E)^3)$.*

Alors pour tout $t \in]0, T[$ l'intégrale

$$B(\vec{u}, \vec{v})(t) = - \int_0^t \mathbb{P} e^{(t-s)\Delta} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{v})(s) ds$$

converge au sens des distributions vers un élément de $(\dot{B}_E^{0,\infty})^3$.

De plus $B(\vec{u}, \vec{v})(t) \in C_*([0, T[, (\dot{B}_E^{0,\infty})^3)$ et en particulier

$$\lim_{t \rightarrow 0} B(\vec{u}, \vec{v})(t) = 0$$

dans $(\mathcal{S}')^3$ et

$$\|B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_{\dot{B}_E^{0,\infty}} \leq C \sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s)\|_{\dot{B}_E^{0,\infty}} \sup_{0 < s < t} \|\vec{v}(s)\|_{\dot{B}_E^{0,\infty}},$$

pour tout $t \in [0, T[$.

PREUVE. Les transformées de Riesz agissant continûment sur $\dot{B}_E^{0,\infty}$, on peut encore une fois démontrer le lemme pour l'opérateur scalaire

$$A(u, v)(t) = \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \sqrt{-\Delta} u v(s) ds.$$

On a que $e^{(t-s)\Delta} \sqrt{-\Delta} u v(s) \in E$, pour tout $s \in [0, t[$ et aussi,

$$\int_0^\theta e^{(t-s)\Delta} \sqrt{-\Delta} u v(s) ds$$

converge dans $E \subseteq \mathcal{S}'_0$ pour tout $\theta \in [0, t[$.

On montre maintenant que pour tout $\phi \in \mathcal{S}$ il existe

$$\lim_{\theta \rightarrow t} \left\langle \int_0^\theta e^{(t-s)\Delta} \sqrt{-\Delta} u v(s) ds, \phi \right\rangle$$

et que cette limite est dans \mathcal{S}'_0 . On a

$$\begin{aligned} & \left\langle \int_0^\theta e^{(t-s)\Delta} \sqrt{-\Delta} u v(s) ds, \phi \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta_j \int_0^\theta e^{(t-s)\Delta} \sqrt{-\Delta} u v(s) ds, \phi \right\rangle \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left\langle \Delta_j \int_0^\theta e^{(t-s)\Delta} \sqrt{-\Delta} u v(s) ds, \Omega\left(\frac{D}{2^j}\right) \phi \right\rangle \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^j \left\langle \frac{1}{2^j} \Delta_j \int_0^\theta e^{(t-s)\Delta} \sqrt{-\Delta} u v(s) ds, \Omega\left(\frac{D}{2^j}\right) \phi \right\rangle \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^j \left\langle f_j(\theta), \Omega\left(\frac{D}{2^j}\right) \phi \right\rangle \end{aligned}$$

où on a appelé

$$f_j(\theta) = \frac{1}{2^j} \Delta_j \int_0^\theta e^{(t-s)\Delta} \sqrt{-\Delta} u v(s) ds .$$

On a que $f_j(\theta) \in E$ et $f_j(\theta) \rightarrow f_j(t)$ dans E .

De plus, $\|f_j(\theta)\|_{L^\infty} \leq C$, pour tous $j \in \mathbb{Z}$, $\theta \in [0, t]$; en effet

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2^j} \int_0^\theta \|e^{(t-s)\Delta} \sqrt{-\Delta} \Delta_j(uv)(s)\|_{L^\infty} ds \\ & \leq \frac{1}{2^j} \int_0^\theta \left\| e^{(t-s)\Delta} \sqrt{-\Delta} \Omega\left(\frac{D}{2^j}\right) \right\|_1 2^j \|\Delta_j(uv)(s)\|_E ds \\ & \leq \int_0^\theta \inf \left\{ 2^j, \frac{2^j}{(4^j(t-s))^2} \right\} 2^j \|u(s)\|_{\dot{B}_E^{0,\infty}} \|v(s)\|_{\dot{B}_E^{0,\infty}} ds \\ & \leq \int_0^\infty \inf \left\{ 1, \frac{1}{\sigma^2} \right\} d\sigma \sup_{0 < s < t} \|u(s)\|_{\dot{B}_E^{0,\infty}} \sup_{0 < s < t} \|v(s)\|_{\dot{B}_E^{0,\infty}} \\ & \leq C \sup_{0 < s < t} \|u(s)\|_{\dot{B}_E^{0,\infty}} \sup_{0 < s < t} \|v(s)\|_{\dot{B}_E^{0,\infty}} . \end{aligned}$$

On conclut que

$$\lim_{\theta \rightarrow t} \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^j \left\langle f_j(\theta), \Omega\left(\frac{D}{2^j}\right) \phi \right\rangle = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle 2^j f_j(t), \phi \rangle$$

grâce au théorème de convergence dominée, et donc dans \mathcal{S}'

$$\int_0^t e^{(t-s)\Delta} \sqrt{-\Delta} u v(s) ds = \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^j f_j(t) .$$

Enfin on a que

$$S_0(A(u, v)(t)) = \sum_{j \leq 0} 2^j S_0 f_j(t) \in C_0$$

car

$$\|S_0 f_j(t)\|_{L^\infty} \leq C , \quad \text{pour tout } j \in \mathbb{Z}$$

et $S_0 f_j(t) \in C_0$, ce qui entraîne que $A(u, v)(t) \in \mathcal{S}'_0$, pour tout $t \in [0, T[$.

Il faut maintenant prouver que

$$\sup_{j \in \mathbb{Z}} \int_0^t \|\Delta_j e^{(t-s)\Delta} \sqrt{-\Delta} uv(s)\|_E ds < \infty.$$

Or, d'après le Lemme 3, Section I

$$\begin{aligned} & \int_0^t \|\Delta_j e^{(t-s)\Delta} \sqrt{-\Delta} uv(s)\|_E ds \\ & \leq \int_0^t \inf \left\{ 2^j, \frac{2^j}{(4^j (t-s))^2} \right\} \|\Delta_j(uv)\|_E ds \\ & \leq C \sup_{0 < s < t} \|u(s)\|_{\dot{B}_E^{0,\infty}} \sup_{0 < s < t} \|v(s)\|_{\dot{B}_E^{0,\infty}} \int_0^{4^j t} \frac{1}{1+\sigma^2} d\sigma \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

On obtient donc le théorème d'unicité suivant.

Théorème 3. *Soit E un espace fonctionnel limite régulier pour les équations de Navier-Stokes. Alors si $\vec{u}(t) \in C([0, +\infty[, (E)^3)$ est la solution à la Kato avec donnée initiale \vec{u}_0 telle que $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$ et $\|\vec{u}_0\|_E \leq \delta_0(E)$ et si pour un $T \in]0, +\infty]$, $\vec{v}(t) \in C([0, T[, (E)^3)$ et $\vec{v}(t) = e^{t\Delta} \vec{u}_0 + B(\vec{v}, \vec{v})(t)$ dans \mathcal{S}' , alors $\vec{v}(t) = \vec{u}(t)$ sur $[0, T[$.*

PREUVE. Remarquons tout d'abord que si

$$\vec{v}(t) = e^{t\Delta} \vec{u}_0 - \int_0^t \mathbb{P} e^{(t-s)\Delta} \vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \otimes \vec{v})(s) ds$$

du lemme précédent il s'ensuit que $\vec{v}(0) = \vec{u}_0$, ce qui justifie qu'il s'agit bien là d'une autre solution avec même donnée initiale.

Il suffit maintenant tout simplement de reprendre mot à mot la preuve de l'unicité dans l'espace $\Delta\mathcal{H}^1$. En substituant $\dot{B}_E^{0,\infty}$ à l'espace $\Delta\mathcal{PM}$ et E à $\Delta\mathcal{H}^1$ on obtient l'inégalité suivante

$$\|\vec{w}(t)\|_{\dot{B}_E^{0,\infty}} \leq C \sup_{0 < s < t} \|\vec{w}(s)\|_{\dot{B}_E^{0,\infty}} \left(2 \sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s)\|_E + \sup_{0 < s < t} \|\vec{v}(s)\|_E \right).$$

d'où on peut conclure.

EXEMPLES.

Proposition 2. *Pour $1 \leq p < 3$, $1 \leq q < +\infty$, $s = 3/p - 1$, $\dot{B}_p^{s,q}$ et $\dot{F}_p^{s,q}$ sont des espaces fonctionnels limites réguliers, pour les équations de Navier-Stokes. En particulier $\dot{H}^{1/2} = \dot{B}_2^{1/2,2}$ est un espace limite régulier.*

PREUVE. On utilise le paraproduit de Bony

$$\begin{aligned} \Delta_0(fg) &= \Delta_0\left(\sum_{|l|\leq 2} \Delta_l f S_{l-2} g\right) + \Delta_0\left(\sum_{|l|\leq 2} \Delta_l g S_{l-2} f\right) \\ &\quad + \Delta_0\left(\sum_{l\geq -3} \Delta_l f \sum_{\varepsilon=-2}^2 \Delta_{l+\varepsilon} g\right) \\ &= \Delta_0 \alpha + \Delta_0 \beta + \Delta_0 \gamma. \end{aligned}$$

On a

$$\|\Delta_0 \alpha\|_{L^p} \leq \sum_{l=-2}^2 \|\Delta_l f\|_{L^p} \|S_{l-2} g\|_{L^\infty} \leq C \|f\|_{\dot{B}_p^{s,\infty}} \|g\|_{\dot{B}_p^{s,\infty}}$$

et $\|\Delta_0 \beta\|_{L^p}$ se contrôle de manière similaire.

Venons au contrôle de $\Delta_0 \gamma$. On pose $q = +\infty$ si $1 \leq p < 3/2$, $q = 3$ si $3/2 \leq p < 3$. On a alors $p < q$, $1/p + 1/q \leq 1$ et $3/q > 1 - s = 2 - 3/p$. En posant $r = pq/(p+q)$ il résulte $1 \leq r \leq p$ et

$$\begin{aligned} \left\| \Delta_l f \left(\sum_{\varepsilon=-2}^2 \Delta_{l+\varepsilon} g \right) \right\|_{L^r} &\leq \|\Delta_l f\|_{L^p} \left\| \sum_{\varepsilon=-2}^2 \Delta_{l+\varepsilon} g \right\|_{L^q} \\ &\leq C 2^{-ls} 2^{-l\varepsilon} 2^{l(3/p-3/q)} \|f\|_{\dot{B}_p^{s,\infty}} \|g\|_{\dot{B}_p^{s,\infty}} \\ &= C 2^{l(1-s-3/q)} \|f\|_{\dot{B}_p^{s,\infty}} \|g\|_{\dot{B}_p^{s,\infty}}. \end{aligned}$$

de sorte que

$$\|\Delta_0 \gamma\|_{L^p} \leq \|\Delta_0 \gamma\|_{L^r} \leq C \sum_{j\geq -3} 2^{j(1-s-3/q)} \|f\|_{\dot{B}_p^{s,\infty}} \|g\|_{\dot{B}_p^{s,\infty}}.$$

Il faut remarquer que pour $\dot{B}_p^{s,\infty}$ le résultat est vrai quitte à se restreindre à l'adhérence de \mathcal{S} .

REMARQUE. Le résultat d'unicité du Théorème D vaut aussi sans la condition de petitesse de la donnée initiale. Ce même résultat dans les espaces de Besov, dans les deux cas de donnée petite ou quelconque, a été obtenu de manière indépendante par J. Y. Chemin [CHE].

5. Unicité dans l'espace L^3 .

Nous passons maintenant au résultat principal de cet article: l'unicité L^3 . Nous commençons par le cas des petites normes, comme pour la section précédente, pour lequel la démonstration est simple. Le cas général sera traité ensuite.

5.1. Unicité des solutions "mild" globales avec donnée initiale petite en norme L^3 .

L'existence d'une solution "mild" dans L^3 est classique [KAT 2]. Par ailleurs nous l'avons retrouvée dans le Théorème B, Section 3.

Si on reprend cependant la preuve de l'unicité dans E limite "régulier", on s'aperçoit que finalement on n'a fait que plonger E dans l'espace plus grand $\dot{B}_E^{0,\infty}$ dans lequel l'opérateur bilinéaire $B(\vec{u}, \vec{v})(t)$ est bicontinu. Dans le cas de L^3 le candidat naturel est le Besov $\dot{B}_3^{0,\infty}$, qui cependant présente deux sortes d'obstructions. D'abord le produit $\vec{u} \otimes \vec{v}$ n'est pas en général bien défini dans \mathcal{S}' , $\dot{B}_3^{0,\infty}$ ne s'injectant pas dans L^2_{loc} . Ensuite, même en se restreignant aux éléments de $L^3 \subset \dot{B}_3^{0,\infty}$ on ne peut plus établir la bicontinuité car la majoration

$$\|\Delta_0(uv)\|_{L^3} \leq C \|u\|_{\dot{B}_3^{0,\infty}} \|v\|_{\dot{B}_3^{0,\infty}}$$

ne vaut plus. Par exemple, soient $u_0 \in L^3$, \hat{u}_0 à support dans la boule de centre 0 et de rayon 1, $u_j(x) = u_0(x) e^{i2^j \langle x, \vec{e}_1 \rangle}$ et $v_j(x) = u_0(x) e^{-i2^j \langle x, \vec{e}_1 \rangle}$; en définissant alors $u_N = \sum_{j=1}^N (1/j) u_j$ et $v_N = \sum_{j=1}^N v_j$ on a que u_N et v_N appartiennent à L^3 et $\Delta_j u_N \approx (1/j) u_j$, $\Delta_j v_N \approx v_j$, mais dans le paraproduit

$$\left\| \Delta_0 \left(\sum_{j \geq -3} \Delta_j u_N \Delta_j v_N \right) \right\|_{L^3} \not\leq C \|u_N\|_{\dot{B}_3^{0,\infty}} \|v_N\|_{\dot{B}_3^{0,\infty}}$$

car

$$\|u_N\|_{\dot{B}_3^{0,\infty}} = C \sup_{1 \leq j \leq N} \frac{1}{j}, \quad \|v_N\|_{\dot{B}_3^{0,\infty}} = C \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^N \frac{1}{j}$$

n'est pas dominé par $\sup_{1 \leq j \leq N} 1/j$.

Toujours en reprenant la preuve de l'unicité dans E limite régulier, on peut remarquer qu'il a été essentiel d'écrire

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{w} = B(\vec{w}, \vec{u}) + B(\vec{v}, \vec{w}),$$

ce qui conduit à la majoration

$$\|\vec{w}(t)\|_{\dot{B}_E^{0,\infty}} \leq C \sup_{0 < s < t} \|\vec{w}(s)\|_{\dot{B}_E^{0,\infty}} \left(\sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s)\|_E + \sup_{0 < s < t} \|\vec{v}(s)\|_E \right).$$

Cela suggère de préciser l'appartenance fonctionnelle de $\vec{w}(t)$ et d'envisager donc une bicontinuité de l'opérateur $B(\vec{u}, \vec{w})(t)$ qui ne serait plus "symétrique".

On commence par remarquer que si $\vec{u}, \vec{v} \in C([0, +\infty[, (L^3)^3)$ alors

$$\vec{w}(t) = B(\vec{u}, \vec{u})(t) - B(\vec{v}, \vec{v})(t) \in \dot{B}_3^{0,\infty},$$

pour tout $t > 0$, car

$$\|B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_{\dot{B}_3^{0,\infty}} \leq C \sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s)\|_{L^3} \sup_{0 < s < t} \|\vec{v}(s)\|_{L^3}.$$

En effet, il suffit encore une fois d'étudier l'opérateur scalaire $A(u, v)(t)$.

L'estimation sur $\| \mathbb{P} e^{(t-s)\Delta} \vec{\nabla} \Omega(D/2^j) \|_1$ obtenue dans la Section 3 nous amène à

$$\|\Delta_j A(u, v)(t)\|_{L^3} \leq C \int_0^t \inf \left\{ 2^j, \frac{2^j}{(4^j (t-s))^2} \right\} \|\Delta_j(uv)(s)\|_{L^3} ds.$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} \|\Delta_j(uv)(s)\|_{L^3} &\leq C 2^j \|\Delta_j(uv)(s)\|_{L^{3/2}} \\ &\leq C \| \omega(D) \|_1 2^j \|u(s)\|_{L^3} \|v(s)\|_{L^3} \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\|\Delta_j A(u, v)(t)\|_{L^3} \leq C \int_0^{4^j t} \frac{1}{1 + \sigma^2} d\sigma \sup_{0 < s < t} \|u(s)\|_{L^3} \sup_{0 < s < t} \|v(s)\|_{L^3}.$$

On a de plus les résultats suivants.

Lemme 8. *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $T \in]0, +\infty]$, pour tout $\vec{u}(t), \vec{v}(t) \in C([0, T[, (L^3)^3)$, pour tout $\vec{w} \in C([0, T[, (\dot{B}_2^{1/2, \infty})^3)$ on a pour $0 < t < T$*

$$\begin{aligned} \|B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_{\dot{B}_2^{1/2, \infty}} &\leq C \sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s)\|_{L^3} \sup_{0 < s < t} \|\vec{v}(s)\|_{L^3} \\ \|B(\vec{v}, \vec{w})(t)\|_{\dot{B}_2^{1/2, \infty}} + \|B(\vec{w}, \vec{v})(t)\|_{\dot{B}_2^{1/2, \infty}} \\ &\leq C \sup_{0 < s < t} \|\vec{v}(s)\|_{L^3} \sup_{0 < s < t} \|\vec{w}(s)\|_{\dot{B}_2^{1/2, \infty}} . \end{aligned}$$

PREUVE. Toujours concernant l'opérateur scalaire il s'agit de montrer que

$$(17) \quad \|A(u, v)(t)\|_{\dot{B}_2^{1/2, \infty}} \leq C \sup_{0 < s < t} \|u(s)\|_{L^3} \sup_{0 < s < t} \|v(s)\|_{L^3}$$

$$(18) \quad \|A(u, w)(t)\|_{\dot{B}_2^{1/2, \infty}} \leq C \sup_{0 < s < t} \|u(s)\|_{L^3} \sup_{0 < s < t} \|w(s)\|_{\dot{B}_2^{1/2, \infty}} .$$

La démonstration de (17) est immédiate. On a même $A(u, v) \in \dot{B}_{3/2}^{1, \infty} \subset \dot{B}_2^{1/2, \infty}$. En effet, l'estimation

$$2^j \|\Delta_j(uv)(s)\|_{L^{3/2}} \leq \|\omega(D)\|_1 2^j \|u(s)\|_{L^3} \|v(s)\|_{L^3}$$

donne comme dans la remarque précédente

$$\begin{aligned} 2^j \|\Delta_j A(u, v)(t)\|_{L^{3/2}} \\ \leq C \int_0^t \inf \left\{ 2^j, \frac{2^j}{(4^j(t-s))^2} \right\} 2^j \|\Delta_j(uv)(s)\|_{L^{3/2}} ds \\ \leq \int_0^{4^j t} \frac{1}{1+\sigma^2} d\sigma \sup_{0 < s < t} \|u(s)\|_{L^3} \sup_{0 < s < t} \|v(s)\|_{L^3} . \end{aligned}$$

(18) se démontre de manière analogue, en remplaçant l'estimation

$$2^j \|\Delta_j(uv)\|_{L^{3/2}} \leq C 2^j \|u\|_{L^3} \|v\|_{L^3}$$

par

$$2^{j/2} \|\Delta_j(vw)\|_{L^2} \leq C 2^j \|v\|_{L^3} \|w\|_{\dot{B}_2^{1/2, \infty}} .$$

Pour établir cette inégalité, on écrit, toujours suivant la technique du paraproduit de Bony

$$\begin{aligned} \Delta_j(vw) &= \Delta_j\left(\sum_{|l-j|\leq 2} \Delta_l v S_{l-2} w\right) + \Delta_j\left(\sum_{|l-j|\leq 2} \Delta_l w S_{l-2} v\right) \\ &\quad + \Delta_j\left(\sum_{l\geq j-3} \Delta_l v \left(\sum_{\varepsilon=-2}^2 \Delta_{l+\varepsilon} w\right)\right) \\ &= \Delta_j \alpha_j + \Delta_j \beta_j + \Delta_j \gamma_j . \end{aligned}$$

On contrôle $\|\Delta_j \alpha_j\|_{L^2}$ en remarquant que

$$\|\Delta_j v\|_{L^3} \leq \|\omega(D)\|_1 \|v\|_{L^3}$$

et que

$$\begin{aligned} \|S_{l-2} w\|_{L^6} &\leq \sum_{k\leq l-3} \|\Delta_k w\|_{L^6} \\ &\leq C \sum_{k\leq l-3} 2^k \|\Delta_k w\|_{L^2} \\ &\leq C \sum_{k\leq l-3} 2^{k/2} \|w\|_{\dot{B}_2^{1/2,\infty}} \\ &\leq C 2^{l/2} \|w\|_{\dot{B}_2^{1/2,\infty}} . \end{aligned}$$

On contrôle $\|\Delta_j \beta_j\|_{L^2}$ en remarquant que

$$\|\Delta_l w\|_{L^2} \leq 2^{-l/2} \|w\|_{\dot{B}_2^{1/2,\infty}}$$

et que

$$\|S_{l-2} v\|_{L^\infty} \leq C 2^l \|v\|_{L^3} .$$

Enfin on contrôle $\|\Delta_j \gamma_j\|_{L^2}$ en remarquant que

$$\|\Delta_j v\|_{L^3} \leq \|\omega(D)\|_1 \|v\|_{L^3}$$

et

$$\|\Delta_l w\|_{L^2} \leq 2^{-l/2} \|w\|_{\dot{B}_2^{1/2,\infty}} ,$$

d'où

$$\|\Delta_j \gamma_j\|_{L^{6/5}} \leq C \|v\|_{L^3} \|w\|_{\dot{B}_2^{1/2,\infty}} \sum_{l \geq j} 2^{-l/2} \leq C 2^{-j/2} \|v\|_{L^3} \|u\|_{\dot{B}_2^{1/2,\infty}},$$

puis que $\|\Delta_j \gamma_j\|_{L^2} \leq C 2^j \|\Delta_j \gamma_j\|_{L^{6/5}}$ en utilisant une inégalité de Bernstein.

On est donc en mesure de démontrer le théorème d'unicité des solutions "mild" des équations de Navier-Stokes globales en temps avec donnée initiale petite.

Théorème 1 (Donnée initiale petite). *Si $\vec{u}(t) \in C([0, +\infty[, (L^3)^3)$ est la solution à la Kato avec donnée initiale \vec{u}_0 telle que $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$ et $\|\vec{u}_0\|_{L^3} < \delta < \delta_0(L^3)$ et si pour un $T \in]0, +\infty]$ il existe $\vec{v}(t) \in C([0, T[, (L^3)^3)$ vérifiant $\vec{v}(t) = e^{t\Delta} \vec{u}_0 + B(\vec{v}, \vec{v})(t)$ dans \mathcal{S}' , alors $\vec{u}(t) = \vec{v}(t)$ dans $[0, T[$.*

PREUVE. (17) nous assure que si \vec{v} est une solution "mild" avec $\vec{v}(t) \in C([0, T[, (L^3)^3)$, alors pour tout $t \in]0, T[$, $\vec{v}(t) - e^{t\Delta} \vec{u}_0 \in (\dot{B}_2^{1/2,\infty})^3$ et il en va de même pour $\vec{u}(t) - e^{t\Delta} \vec{u}_0 \in (\dot{B}_2^{1/2,\infty})^3$, donc pour $\vec{w}(t) = \vec{u}(t) - \vec{v}(t)$. Comme $\vec{w} = B(\vec{w}, \vec{u}) + B(\vec{v}, \vec{w})$, (18) nous donne pour $t \in]0, T[$

$$\begin{aligned} & \sup_{0 < s < t} \|\vec{w}(s)\|_{\dot{B}_2^{1/2,\infty}} \\ & \leq C \sup_{0 < s < t} \|\vec{w}(s)\|_{\dot{B}_2^{1/2,\infty}} \left(\sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s)\|_{L^3} + \sup_{0 < s < t} \|\vec{v}(s)\|_{L^3} \right). \end{aligned}$$

Cela entraîne d'une façon analogue au cas régulier que $\vec{u}(t) = \vec{v}(t)$ dans $\dot{B}_2^{1/2,\infty} \subset \mathcal{S}'$ et donc dans L^3 où se trouvent les deux solutions.

5.2. Le cas des données initiales petites en norme $\dot{B}_q^{3/q-1,\infty}$, $3 < q < 6$.

On sait d'après les travaux de M. Cannone [CAN 1] qu'on peut obtenir l'existence d'une solution globale dans L^3 même en affaiblissant la condition sur la donnée initiale \vec{u}_0 et notamment en imposant que

$\|\vec{u}_0\|_{\dot{B}_q^{3/q-1,\infty}}$ soit petite, ce qui revient à lui demander une propriété d'oscillation. Le théorème prouvé est le suivant.

Théorème (Cannone). *Soit q fixé dans $3 < q \leq 6$. Il existe une constante absolue $\tilde{\delta} > 0$ telle que pour toute donnée initiale $\vec{u}_0 \in L^3$ avec $\|\vec{u}_0\|_{\dot{B}_q^{3/q-1,\infty}} < \tilde{\delta}$ et $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$, il existe une unique solution globale "mild" $\vec{u}(t, x)$ des équations de Navier-Stokes ayant les propriétés suivantes*

$$(19) \quad \begin{cases} \vec{u}(t) \in C([0, +\infty[, (L^3)^3), \\ t^{1/2-3/(2q)} \vec{u}(t) \in C([0, +\infty[, (L^q)^3), \\ \lim_{t \rightarrow 0} t^{1/2-3/(2q)} \|\vec{u}(t)\|_{L^q} = 0. \end{cases}$$

En outre,

$$(20) \quad \|\vec{u}(t)\|_{\dot{B}_q^{3/q-1,\infty}} \leq C \|\vec{u}_0\|_{\dot{B}_q^{3/q-1,\infty}} .$$

On remarque que dans ce cadre on n'obtient aucun contrôle pour la norme $\sup_{t>0} \|u(t)\|_{L^3}$ de la solution. Cependant on peut rétablir l'unicité de ladite solution quitte à montrer une nouvelle bicontinuité de l'opérateur bilinéaire.

Théorème 4. *Il existe δ_0 vérifiant $0 < \delta_0 \leq \tilde{\delta}$ tel que si $\|\vec{u}_0\|_{\dot{B}_q^{3/q-1,\infty}} < \delta_0$ la solution \vec{u} vérifiant (19) pour $q \in]3, 6[$ est l'unique solution dans $C([0, +\infty[, (L^3)^3)$.*

Le pivot de la démonstration est le lemme suivant.

Lemme 9. *Soit $q \in]3, 6[$. Il existe $C > 0$ tel que pour tout $T \in]0, \infty]$, pour tout $\vec{u}(t) \in C([0, T[, (\dot{B}_q^{3/q-1,\infty})^3)$, pour tout $\vec{w}(t) \in L^\infty(]0, T[, (\dot{B}_2^{1/2,\infty})^3)$ on a, pour tout t tel que $0 < t < T$*

$$\begin{aligned} & \|B(\vec{u}, \vec{w})(t)\|_{\dot{B}_2^{1/2,\infty}} + \|B(\vec{w}, \vec{u})(t)\|_{\dot{B}_2^{1/2,\infty}} \\ & \leq C \sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s)\|_{\dot{B}_q^{3/q-1,\infty}} \sup_{0 < s < t} \|\vec{w}(s)\|_{\dot{B}_2^{1/2,\infty}} . \end{aligned}$$

PREUVE. Il s'agit encore une fois de démontrer, à l'aide du paraproduit

$$\|\Delta_0(uw)\|_{L^2} \leq C \|u\|_{\dot{B}_q^{3/q-1,\infty}} \|w\|_{\dot{B}_2^{1/2,\infty}} .$$

On a

$$\|\Delta_j u\|_L^q \leq 2^{j(1-3/q)} \|u\|_{\dot{B}_q^{3/q-1,\infty}}$$

et

$$\|S_j w\|_L^p \leq C 2^{j(1-3/p)} \|w\|_{\dot{B}_2^{1/2,\infty}} , \quad \text{si } p > 3 .$$

Si p est choisi tel que en plus $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$ (ce qui est possible grâce à la restriction $q < 6$) on obtient le contrôle de $\|\Delta_0 \left(\sum_{j=-2}^2 \Delta_j u S_{j-2} w \right)\|_{L^2}$.

On a aussi

$$\|\Delta_j w\|_{L^2} \leq 2^{-j/2} \|w\|_{\dot{B}_2^{1/2,\infty}} \quad \text{et} \quad \|S_j u\|_L^q \leq C 2^{j(1-3/q)} \|u\|_{\dot{B}_q^{3/q-1,\infty}}$$

d'où par Bernstein le contrôle de

$$\left\| \Delta_0 \left(\sum_{j=-2}^2 \Delta_j w S_{j-2} u \right) \right\|_{L^2}$$

puisque $1/2 < 1/2 + 1/q < 1$.

Reste le contrôle de

$$\left\| \Delta_0 \left(\sum_{j \geq -3} \Delta_j u \sum_{\varepsilon=-2}^2 \Delta_{j+\varepsilon} w \right) \right\|_L^2 .$$

On a

$$\|\Delta_j w\|_L^2 \leq 2^{-j/2} \|w\|_{\dot{B}_2^{1/2,\infty}} \quad \text{et} \quad \|\Delta_j u\|_L^q \leq C 2^{j(1-3/q)} \|u\|_{\dot{B}_q^{3/q-1,\infty}}$$

d'où

$$\sum_{j \geq -3} \|\Delta_j u\|_L^q \|\Delta_{j+\varepsilon} w\|_L^2 \leq C \|u\|_{\dot{B}_q^{3/q-1,\infty}} \|w\|_{\dot{B}_2^{1/2,\infty}} , \quad -2 \leq \varepsilon \leq 2$$

car $-1/2 - 3/q + 1 < 0$ et donc, par Bernstein,

$$\begin{aligned} & \left\| \Delta_0 \left(\sum_{j \geq -3} \Delta_j u \sum_{\varepsilon=-2}^2 \Delta_{j+\varepsilon} w \right) \right\|_L^2 \\ & \leq \left\| \Delta_0 \left(\sum_{j \geq -3} \Delta_j u \sum_{\varepsilon=-2}^2 \Delta_{j+\varepsilon} w \right) \right\|_{L^{2q/(2+q)}} \end{aligned}$$

car $1/2 < 1/2 + 1/q < 1$.

PREUVE DU THÉORÈME. En écrivant à nouveau

$$\vec{w} = \vec{u} - \vec{v} = B(\vec{w}, \vec{u}) + B(\vec{v}, \vec{w})$$

on obtient du lemme précédent pour tout $t < T$

$$\begin{aligned} & \sup_{0 < s < t} \|\vec{w}(s)\|_{\dot{B}_2^{1/2, \infty}} \\ & \leq C \sup_{0 < s < t} \|\vec{w}(s)\|_{\dot{B}_2^{1/2, \infty}} \\ & \quad \cdot \left(2 \sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s)\|_{\dot{B}_q^{3/q-1, \infty}} + \sup_{0 < s < t} \|\vec{w}(s)\|_{\dot{B}_q^{3/q-1, \infty}} \right). \end{aligned}$$

On conclut alors grâce à l'estimation (20) et à l'inclusion $L^3 \hookrightarrow \dot{B}_q^{3/q-1, \infty}$, $3 < q < 6$.

5.3. Unicité des solutions “mild” locales.

L'idée novatrice pour démontrer le résultat d'unicité d'une solution dans L^3 a été celle d'exploiter une bicontinuité non symétrique de l'opérateur intégrale $B(\vec{u}, \vec{v})(t)$. Cette même idée conduit au résultat suivant.

Théorème 1. *Soient $\vec{u}_0 \in (L^3)^3$ telle que $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$, $T \in]0, +\infty]$ et $\vec{u}(t), \vec{v}(t) \in C([0, T[, (L^3)^3)$ tel que $\vec{u}(t) = e^{t\Delta} \vec{u}_0 + B(\vec{u}, \vec{u})(t)$ et $\vec{v}(t) = e^{t\Delta} \vec{u}_0 + B(\vec{v}, \vec{v})(t)$ dans \mathcal{S}' . Alors $\vec{u}(t) = \vec{v}(t)$ dans $[0, T[$.*

Le lemme de continuité est en effet le suivant.

Lemme 10. *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $T \in]0, +\infty]$, pour tout \vec{u} avec $t^{1/8} \vec{u}(t) \in C([0, T[, (L^4)^3)$ et pour tout $\vec{w}(t) \in C([0, T[, (\dot{B}_2^{1/2, \infty})^3)$ on a pour tout $t \in]0, T[$*

$$\begin{aligned} & \|B(\vec{u}, \vec{w})(t)\|_{\dot{B}_2^{1/2, \infty}} + \|B(\vec{w}, \vec{u})(t)\|_{\dot{B}_2^{1/2, \infty}} \\ & \leq C \sup_{0 < s < T} s^{1/8} \|\vec{u}(s)\|_{L^4} \sup_{0 < s < T} \|\vec{w}(s)\|_{\dot{B}_2^{1/2, \infty}}. \end{aligned}$$

PREUVE. On considère encore l'opérateur scalaire

$$A(u, w)(t) = \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \sqrt{\Delta} u w(s) ds .$$

On veut évaluer

$$\begin{aligned} & 2^{j/2} \|\Delta_j A(u, w)(t)\|_{L^2} \\ & \leq \int_0^t \left\| \left\| e^{(t-s)\Delta} \sqrt{-\Delta} \Omega\left(\frac{D}{2^j}\right) \right\| \right\|_1 2^{j/2} \|\Delta_j(u w)\|_{L^2} ds , \end{aligned}$$

on est ramené donc à estimer $\|\Delta_j(u w)\|_{L^2}$.

A l'aide du paraproduit on obtient

$$\|\Delta_j(u w)\|_{L^2} \leq C 2^{j/4} \|u\|_{L^4} \|w\|_{\dot{B}_2^{1/2, \infty}} .$$

En effet on a

$$\|S_j u\|_{L^4} \leq C \|u\|_{L^4} ,$$

$$\|\Delta_j w\|_{L^4} \leq C 2^{3j/4} \|\Delta_j w\|_{L^2} \leq C 2^{j/4} \|w\|_{\dot{B}_2^{1/2, \infty}} ,$$

d'où l'estimation

$$\left\| \Delta_j \left(\sum_{|k-j| \leq 2} \Delta_k w S_{k-2} u \right) \right\|_{L^2} \leq C 2^{j/4} \|w\|_{\dot{B}_2^{1/2, \infty}} \|u\|_{L^4} .$$

On a aussi

$$\|\Delta_j u\|_{L^4} \leq C \|u\|_{L^4} ,$$

$$\begin{aligned} \|S_j w\|_{L^4} & \leq \sum_{k < j} \|\Delta_k w\|_{L^4} \\ & \leq \sum_{k < l-2} 2^{3k/4} 2^{-k/2} \|w\|_{\dot{B}_2^{1/2, \infty}} \\ & \leq 2^{j/4} \|w\|_{\dot{B}_2^{1/2, \infty}} , \end{aligned}$$

d'où l'estimation

$$\left\| \Delta_j \left(\sum_{|k-j| \leq 2} \Delta_k u S_{k-2} w \right) \right\|_{L^2} \leq C 2^{j/4} \|w\|_{\dot{B}_2^{1/2, \infty}} \|u\|_{L^4} .$$

Enfin on a

$$\begin{aligned}
& \left\| \Delta_j \left(\sum_{k \geq j-3} \Delta_k w \sum_{\varepsilon=-2}^2 \Delta_{k+\varepsilon} u \right) \right\|_{L^2} \\
& \leq C 2^{3j/4} \sum_{k \geq j-3} \sum_{\varepsilon=-2}^2 \|\Delta_k w \Delta_{k+\varepsilon} u\|_{L^{4/3}} \\
& \leq C 2^{3j/4} \|w\|_{\dot{B}_2^{1/2, \infty}} \|u\|_{L^4} \sum_{k \geq j-3} 2^{-k/2} \\
& \leq C 2^{j/4} \|w\|_{\dot{B}_2^{1/2, \infty}} \|u\|_{L^4} .
\end{aligned}$$

On conclut donc que

$$\begin{aligned}
& 2^{j/2} \|\Delta_j A(u, w)(t)\|_{L^2} \\
& \leq \int_0^t \inf \left\{ 2^j, \frac{2^j}{((t-s) 2^{2j})^2} \right\} 2^{j/2} \|\Delta_j(u w)(s)\|_{L^2} ds \\
& \leq C \int_0^t \frac{2^{7j/4}}{1 + ((t-s) 2^{2j})^2} \frac{1}{s^{1/8}} ds \\
& \quad \cdot \sup_{0 < s < T} s^{1/8} \|\vec{u}(s)\|_{L^4} \sup_{0 < s < T} \|\vec{w}(s)\|_{\dot{B}_2^{1/2, \infty}} \\
& \leq C \int_0^t \frac{1}{((t-s) 2^{2j})^{7/8}} \frac{2^{7j/8}}{s^{1/8}} ds \\
& \quad \cdot \sup_{0 < s < T} s^{1/8} \|\vec{u}(s)\|_{L^4} \sup_{0 < s < T} \|\vec{w}(s)\|_{\dot{B}_2^{1/2, \infty}} \\
& \leq C \sup_{0 < s < T} s^{1/8} \|\vec{u}(s)\|_{L^4} \sup_{0 < s < T} \|\vec{w}(s)\|_{\dot{B}_2^{1/2, \infty}} .
\end{aligned}$$

PREUVE DU THÉORÈME. Il suffit de décomposer

$$\begin{aligned}
\vec{w}(t) &= B(\vec{w}, \vec{u})(t) + B(\vec{v}, \vec{w})(t) \\
&= B(\vec{w}, \vec{u} - e^{s\Delta} \vec{u}_0) + B(\vec{v} - e^{s\Delta} \vec{u}_0, \vec{w}) \\
&\quad + B(\vec{w}, e^{s\Delta} \vec{u}_0) + B(e^{s\Delta} \vec{u}_0, \vec{w}) .
\end{aligned}$$

Comme $\vec{u}(t)$ et $\vec{v}(t)$ sont dans $C([0, T[, (L^3)^3)$, les deux premiers ter-

mes se traitent comme dans le cas global puisque

$$\begin{aligned} \sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s) - e^{s\Delta} \vec{u}_0\|_{L^3} &\longrightarrow 0, \\ \sup_{0 < s < t} \|\vec{v}(s) - e^{s\Delta} \vec{u}_0\|_{L^3} &\longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Pour les deux derniers, grâce au lemme on a que

$$\begin{aligned} \|B(e^{t\Delta} \vec{u}_0, \vec{w})(t)\|_{\dot{B}_2^{1/2, \infty}} + \|B(\vec{w}, e^{t\Delta} \vec{u}_0)(t)\|_{\dot{B}_2^{1/2, \infty}} \\ \leq C \sup_{0 < s < t} s^{1/8} \|e^{s\Delta} \vec{u}_0\|_{L^4} \sup_{0 < s < t} \|\vec{w}(s)\|_{\dot{B}_2^{1/2, \infty}} \end{aligned}$$

où $\sup_{0 < s < t} s^{1/8} \|e^{s\Delta} \vec{u}_0\|_{L^4} \longrightarrow 0$ si $t \longrightarrow 0$.

Nous avons ainsi obtenu l'unicité locale. Soit alors $t_0 = \sup \{t : \vec{u}(s) = \vec{v}(s), \text{ pour tout } s \in [0, t]\}$. Si $t_0 < T$ on a $\vec{u}(t_0) = \vec{v}(t_0)$ par continuité ; si on appelle $\vec{U}(t) = \vec{u}(t + t_0)$ et $\vec{V}(t) = \vec{v}(t + t_0)$, elles restent solutions "mild" avec donnée initiale $\vec{u}(t_0)$. Donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\vec{U}(t) = \vec{V}(t)$ dans $[0, \varepsilon[$, ce qui contredit la définition de t_0 . On a alors $t_0 = T$ et $\vec{u}(t) = \vec{v}(t)$ dans $[0, T[$.

REMARQUES. 1) Il faut préciser que dans les lemmes de bicontinuité qui ont permis d'obtenir dans L^3 les résultats d'unicité globale et locale, le choix des espaces a été tout à fait arbitraire. En effet l'espace $\dot{B}_2^{1/2, \infty}$ peut être remplacé par tous les $\dot{B}_q^{3/q-1, \infty}$ avec $q \in]3/2, 3[$ tout comme l'espace des \vec{u} telles que $\sup_{0 < s < T} s^{1/8} \|\vec{u}(s)\|_{L^4} < \infty$ peut être remplacé par celui où $\sup_{0 < s < T} s^{1/2-3/(2q)} \|\vec{u}(s)\|_{L^q} < \infty$ avec $q \in]3, 6[$.

2) Nous donnons dans la Section 7 une autre démonstration des mêmes résultats d'unicité en utilisant pour les espaces de Besov la norme équivalente

$$\sup_{t > 0} \|(t \Delta e^{t\Delta})f\|_{\dot{B}_p^{s, \infty}}$$

qui se révèle plus adaptée à la structure du terme bilinéaire (voir aussi [CP]).

6. Unicité dans les espaces limites. Espaces de Morrey-Campanato.

Dans cette dernière partie nous allons présenter une nouvelle formulation des résultats précédents dans un cadre tout à fait général qui comprendra aussi l'adhérence des fonctions dans la classe de Schwartz dans les espaces de Morrey-Campanato homogènes $\dot{M}_{p,3}$. Rappelons-en la définition.

$$\dot{M}_{p,q} = \{f \in M_p : \sup_{R>0} \|R^{3/q} f(Rx)\|_{M_p} < \infty\}$$

pour tout p, q tels que $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ où

$$\|f\|_{M_p} = \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3} \|f \mathbf{1}_{|x-x_0|<1}\|_{L^p}.$$

(Pour $p = 1$, on remplace L^1 par l'espace des mesures bornées).

Introduisons maintenant les espaces de Besov sur ces espaces $\dot{M}_{p,q}$ (voir aussi [KY]).

Définition 7. Pour tout $p, q, 1 \leq p \leq q \leq +\infty$ et $s \in \mathbb{R}$

$$\dot{B}_{p,q}^{s,\infty} = \{f \in \mathcal{S}'_0 : \sup_{j \in \mathbb{Z}} 2^{js} \|\Delta_j f\|_{\dot{M}_{p,q}} < +\infty\}.$$

On vérifie facilement les propriétés suivantes.

$$(21) \text{ Pour } p, p' \text{ tels que } 1 \leq p \leq p' \text{ } \|f\|_{M_p} \leq \|f\|_{M_{p'}}.$$

(22) Pour p, p', q tels que $1 \leq p \leq p', p \leq q \leq +\infty$ et pour toute f telle que $f \in \dot{M}_{p,q} \cap L^\infty$

$$\|f\|_{\dot{M}_{p',q^{p'/p}}} \leq \|f\|_{L^\infty}^{1-p/p'} \|f\|_{\dot{M}_{p,q}}^{p/p'}.$$

$$(23) \|\Delta_j f\|_{L^\infty} \leq C_{p,q} 2^{3j/q} \|\Delta_j f\|_{\dot{M}_{p,q}}.$$

(24) $\dot{B}_{p,q}^{s,\infty} \subset \dot{B}_{p',q'}^{s',\infty}$ pour s, s', p, q, p', q' tels que $p' \geq p, q' = qp'/p, s' = s - 3/q(1 - p/p')$.

(25) Pour p, q, p', q' tels que $1/p + 1/p' \leq 1, 1/q + 1/q' \leq 1, f \in \dot{M}_{p,q}, g \in \dot{M}_{p',q'}$ alors $fg \in \dot{M}_{p'',q''}$ où $1/p + 1/p' = 1/p'', 1/q + 1/q' = 1/q''$.

(26) Pour p, q tels que $1 \leq p \leq q < +\infty$ et $f \in \dot{M}_{p,q}$ alors $f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta_j f$ dans \mathcal{S}' .

On aboutit finalement au théorème d'unicité suivant.

Théorème 2C. *Soit E un espace limite. Si E vérifie de plus que, pour tout $f \in E$,*

$$\left(\int_{|x|<1} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq C \|f\|_E$$

pour un $p > 2$, alors si $\vec{u}_0 \in (E)^3$ telle que $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$, si $T \in]0, \infty]$, si $\vec{u}(t), \vec{v}(t) \in C([0, T[, (E)^3)$ vérifient dans \mathcal{S}'

$$\vec{u}(t) = e^{t\Delta} \vec{u}_0 + B(\vec{u}, \vec{u})(t), \vec{v}(t) = e^{t\Delta} \vec{u}_0 + B(\vec{v}, \vec{v})(t),$$

alors $\vec{u}(t) = \vec{v}(t)$, pour tous $t \in [0, T[$.

REMARQUES. 1) Si l'espace limite E vérifie que, pour tout $f \in E$,

$$\left(\int_{|x|<1} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq C \|f\|_E$$

pour $p > 2$, alors $E \subset \dot{M}_{p,3} \subset \dot{M}_{2,3}$.

En effet $E \subset M_p$ car pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^3$,

$$\left(\int_{|x-x_0|<1} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq C \|f\|_E$$

grâce à l'invariance par translation de la norme.

Par ailleurs $E \subset \dot{M}_{p,3}$ car

$$R \left(\int_{|x-x_0|<1} |f(Rx)|^p dx \right)^{1/p} \leq RC \|f(Rx)\|_E \leq C \|f\|_E$$

pour tous $x_0 \in \mathbb{R}^3$, $R > 0$, grâce à l'invariance par dilatation.

2) Pour tout p tel que $1 \leq p \leq 3$ on a

$$\|\lambda f(\lambda x)\|_{\dot{M}_{p,3}} = \|f\|_{\dot{M}_{p,3}}, \quad \text{pour tout } \lambda > 0.$$

3) Il suffit donc de prouver le Théorème 2C pour E l'adhérence de \mathcal{S} dans $\dot{M}_{p,3}$.

En complète analogie avec le cas L^3 , on peut établir le lemme suivant.

Lemme 11. *Pour tous $\vec{u}(t) \in C([0, T[, (\dot{M}_{p,3})^3)$, $\vec{v}(t)$ telle que $\sqrt{t} \vec{v}(t) \in C([0, T[, (\dot{M}_{8/3,4})^3)$, pour tout $\vec{w}(t) \in C([0, T[, (\dot{B}_{4/3,2}^{1/2,\infty})^3)$, on a pour tout $t < T$*

$$(27) \quad \|B(\vec{u}, \vec{u})(t)\|_{\dot{B}_{4/3,2}^{1/2,\infty}} \leq C \left(\sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s)\|_{\dot{M}_{p,3}} \right)^2,$$

$$(28) \quad \begin{aligned} & \|B(\vec{u}, \vec{w})(t)\|_{\dot{B}_{4/3,2}^{1/2,\infty}} + \|B(\vec{w}, \vec{u})(t)\|_{\dot{B}_{4/3,2}^{1/2,\infty}} \\ & \leq C \sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s)\|_{\dot{M}_{p,3}} \sup_{0 < s < t} \|\vec{w}(s)\|_{\dot{B}_{4/3,2}^{1/2,\infty}}, \end{aligned}$$

$$(29) \quad \begin{aligned} & \|B(\vec{v}, \vec{w})(t)\|_{\dot{B}_{4/3,2}^{1/2,\infty}} + \|B(\vec{w}, \vec{v})(t)\|_{\dot{B}_{4/3,2}^{1/2,\infty}} \\ & \leq C \sup_{0 < s < t} s^{1/8} \|\vec{v}(s)\|_{\dot{M}_{8/3,4}} \sup_{0 < s < t} \|\vec{w}(s)\|_{\dot{B}_{4/3,2}^{1/2,\infty}}. \end{aligned}$$

PREUVE. On remarque que l'opérateur $B(\vec{u}, \vec{u})$ est bien défini dans $\dot{M}_{2,3} \times \dot{M}_{2,3} \rightarrow \dot{M}_{1,3/2}$ car, sur l'opérateur scalaire, on a

$$\|A(u, u)(t)\|_{\dot{M}_{1,3/2}} \leq C \sqrt{t} \left(\sup_{0 < s < T} \|u(s)\|_{\dot{M}_{2,3}} \right)^2.$$

Pour montrer le point (27), on a que

$$\begin{aligned} & 2^j \|\Delta_j A(u, u)(t)\|_{\dot{M}_{1,3/2}} \\ & \leq \int_0^t 2^j \left\| \left\| e^{(t-s)\Delta} \sqrt{-\Delta} \Omega\left(\frac{D}{2^j}\right) \right\|_1 \|\Delta_j u^2(s)\|_{\dot{M}_{1,3/2}} \right\| ds \\ & \leq \left(\int_0^t \inf \left\{ 2^{2j}, \frac{2^{2j}}{(2^{2j}(t-s))^2} \right\} ds \right) \left(\sup_{0 < s < t} \|u(s)\|_{\dot{M}_{2,3}} \right)^2 \\ & \leq C \left(\sup_{0 < s < t} \|u(s)\|_{\dot{M}_{2,3}} \right)^2 \end{aligned}$$

et on conclut grâce à l'inclusion (24) $\dot{B}_{1,3/2}^{1,\infty} \subset \dot{B}_{4/3,2}^{1/2,\infty}$.

Pour le point (28) on a

$$\begin{aligned} & 2^{j/2} \|\Delta_j A(u, w)(t)\|_{\dot{M}_{4/3,2}} \\ & \leq \int_0^t \inf \left\{ 2^j, \frac{2^j}{(2^j(t-s))^2} \right\} 2^{j/2} \|\Delta_j(uw)(s)\|_{\dot{M}_{4/3,2}} ds. \end{aligned}$$

À l'aide du paraproduit on verra que

$$(30) \quad 2^{j/2} \|\Delta_j(u w)\|_{\dot{M}_{4/3,2}} \leq C 2^j \|u\|_{\dot{M}_{p,3}} \|w\|_{\dot{B}_{4/3,2}^{1/2,\infty}}$$

donc

$$2^{j/2} \|\Delta_j A(u, w)(t)\|_{\dot{M}_{4/3,2}} \leq C \sup_{0 < s < t} \|u(s)\|_{\dot{M}_{p,3}} \sup_{0 < s < t} \|w(s)\|_{\dot{B}_{4/3,2}^{1/2,\infty}} .$$

Pour montrer (30) on rappelle que

$$\begin{aligned} \Delta_j(u w) &= \Delta_j \left(\sum_{|l-j| \leq 2} \Delta_l w S_{l-2} u \right) + \Delta_j \left(\sum_{|l-j| \leq 2} \Delta_l u S_{l-2} w \right) \\ &\quad + \Delta_j \left(\sum_{l \geq j-3} \Delta_l w \sum_{\varepsilon=-2}^2 \Delta_{l+\varepsilon} u \right) \\ &= \alpha_j + \beta_j + \gamma_j . \end{aligned}$$

Pour α_j on écrit

$$\begin{aligned} 2^{j/2} \|\alpha_j\|_{\dot{M}_{4/3,2}} &\leq C 2^{j/2} \sum_{|l-j| \leq 2} \|\Delta_l w\|_{\dot{M}_{4/3,2}} \sum_{k < l-2} \|\Delta_k u\|_{L^\infty} \\ &\leq C \|w\|_{\dot{B}_{4/3,2}^{1/2,\infty}} 2^{j/2} 2^{-j/2} \sum_{k \leq j} 2^k \|u\|_{\dot{M}_{2,3}} \\ &\leq C 2^j \|w\|_{\dot{B}_{4/3,2}^{1/2,\infty}} \|u\|_{\dot{M}_{2,3}} \end{aligned}$$

grâce à (23).

Pour β_j on a que, grâce à (24), $\dot{B}_{4/3,2}^{1/2,\infty} \subset \dot{B}_{4,6}^{-1/2,\infty}$ et donc

$$\begin{aligned} 2^{j/2} \|\beta_j\|_{\dot{M}_{4/3,2}} &\leq C 2^{j/2} \sum_{|l-j| \leq 2} \sum_{k < l-2} \|\Delta_k w\|_{\dot{M}_{4,6}} \|\Delta_l u\|_{\dot{M}_{p,3}} \\ &\leq C 2^{j/2} \|w\|_{\dot{B}_{4/3,2}^{1/2,\infty}} \|u\|_{\dot{M}_{2,3}} \sum_{k \leq j} 2^{k/2} \\ &\leq C 2^j \|w\|_{\dot{B}_{4/3,2}^{1/2,\infty}} \|u\|_{\dot{M}_{2,3}} . \end{aligned}$$

Pour γ_j on a $\dot{B}_{4/3,2}^{1/2,\infty} \subset \dot{B}_{r,(3/2)r}^{2/r-1,\infty}$ avec $r = p/(p-1) < 2$ et $r \geq 4/3$, car on peut assumer $p \leq 4$, ce qui donne, grâce à (22), (23) et (25)

$$\begin{aligned} & 2^{j/2} \|\gamma_j\|_{\dot{M}_{4/3,2}} \\ & \leq 2^{j/2} \|\gamma_j\|_{\dot{M}_{2(1-2/(3p)),2}} \\ & \leq C 2^{j/2} \|\gamma_j\|_{\dot{M}_{1,1/(1-2/(3p))}} 2^{3j(1-2/(3p))(1-1/(2(1-2/(3p))))} \\ & \leq C 2^{-j} 2^{3j(1-2/(3p))} \sum_{k \geq j-5} \|w\|_{\dot{B}_{r,(3/2)r}^{2/r-1,\infty}} 2^{k(1-2/r)} \|u\|_{\dot{M}_{p,3}} \\ & \leq C 2^j \|w\|_{\dot{B}_{4/3,2}^{1/2,\infty}} \|u\|_{\dot{M}_{2,3}} \end{aligned}$$

car $1 - 2/r + 3 - 2/p = 2$.

Enfin pour le point (29) nous allons montrer à l'aide du paraproduit l'estimation

$$(31) \quad 2^{j/2} \|\Delta_j(vw)\|_{\dot{M}_{4/3,2}} \leq C 2^{3/4j} \|v\|_{\dot{M}_{8/3,4}} \|w\|_{\dot{B}_{4/3,2}^{1/2,\infty}}$$

qui donne

$$\begin{aligned} & 2^{j/2} \|\Delta_j A(v, w)(t)\|_{\dot{M}_{4/3,2}} \\ & \leq C \int_0^t \inf \left\{ 2^j, \frac{2^j}{2^{2j}(t-s)^2} \right\} 2^{j/2} \|\Delta_j(vw)(s)\|_{\dot{M}_{4/3,2}} ds \\ & \leq C \int_0^t 2^{(7/4)j} \frac{1}{1 + (2^{2j}(t-s))^2} \frac{1}{s^{1/8}} \|w(s)\|_{\dot{B}_{4/3,2}^{1/2,\infty}} s^{1/8} \|v(s)\|_{\dot{M}_{8/3,4}} ds \\ & \leq C \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{7/8}} \frac{1}{s^{1/8}} ds \sup_{0 < s < t} \|w(s)\|_{\dot{B}_{4/3,2}^{1/2,\infty}} \sup_{0 < s < t} s^{1/8} \|v(s)\|_{\dot{M}_{8/3,4}} . \end{aligned}$$

Pour montrer (31) il suffit de remarquer que, de manière tout à fait analogue au point (28), on a

$$\begin{aligned} 2^{j/2} \|\alpha_j\|_{\dot{M}_{4/3,2}} & \leq C \|w\|_{\dot{B}_{4/3,2}^{1/2,\infty}} \sum_{k \leq j} 2^{(3/4)k} \|\Delta_k v\|_{\dot{M}_{8/3,4}} \\ & \leq C 2^{(3/4)j} \|w\|_{\dot{B}_{4/3,2}^{1/2,\infty}} \|v\|_{\dot{M}_{8/3,4}} \end{aligned}$$

grâce à (23).

Ensuite

$$\begin{aligned} 2^{j/2} \|\beta_j\|_{\dot{M}_{4/3,2}} &\leq 2^{j/2} \sum_{|l-j|\leq 2} \sum_{k<l-2} \|\Delta_k w\|_{\dot{M}_{8/3,4}} \|\Delta_l v\|_{\dot{M}_{8/3,4}} \\ &\leq C 2^{j/2} \|w\|_{\dot{B}_{4/3,2}^{1/2,\infty}} \|v\|_{\dot{M}_{8/3,4}} \sum_{k\leq j} 2^{k/4} \\ &\leq C 2^{(3/4)j} \|w\|_{\dot{B}_{4/3,2}^{1/2,\infty}} \|v\|_{\dot{M}_{8/3,4}}, \end{aligned}$$

grâce à l'inclusion (24) $\dot{B}_{4/3,2}^{1/2,\infty} \subset \dot{B}_{8/3,4}^{-1/4,\infty}$ et à (25).

Enfin

$$\begin{aligned} 2^{j/2} \|\gamma_j\|_{\dot{M}_{4/3,2}} &\leq 2^{j/2} \|\gamma_j\|_{\dot{M}_{8/9,4/3}} 2^{(3/4)j} \\ &\leq C 2^{(5/4)j} \sum_{k\geq j-5} \|w\|_{\dot{B}_{4/3,2}^{1/2,\infty}} \|v\|_{\dot{M}_{8/3,4}} \\ &\leq C 2^{(3/4)j} \|w\|_{\dot{B}_{4/3,2}^{1/2,\infty}} \|v\|_{\dot{M}_{8/3,4}}. \end{aligned}$$

PREUVE DU THÉORÈME. La démonstration est tout à fait similaire au cas local L^3 . Il est bon de faire quand-même une précision. Pour montrer l'unicité de la solution, on est amené à écrire la majoration suivante

$$\|\vec{u}(t) - \vec{v}(t)\|_{\dot{B}_{4/3,2}^{1/2,\infty}} = \|\vec{w}(t)\|_{\dot{B}_{4/3,2}^{1/2,\infty}} \leq \sup_{0 < s < t} \|\vec{w}(s)\|_{\dot{B}_{4/3,2}^{1/2,\infty}} A(t)$$

où

$$\begin{aligned} A(t) &= 2 \sup_{0 < s < t} s^{1/8} \|e^{s\Delta} \vec{u}_0\|_{\dot{M}_{8/3,4}} + \sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s) - e^{s\Delta} \vec{u}_0\|_{\dot{M}_{p,3}} \\ &\quad + \sup_{0 < s < t} \|\vec{v}(s) - e^{s\Delta} \vec{u}_0\|_{\dot{M}_{p,3}}. \end{aligned}$$

Pour affirmer que $A(t) \rightarrow 0$ pour $t \rightarrow 0$, il faut souligner que la donnée \vec{u}_0 est bien dans $E \hookrightarrow \dot{M}_{p,3}$ et que le semigroupe de la chaleur agit continûment sur E .

7. Remarques finales.

7.1. Sur l'existence des solutions "mild".

L'unicité des solutions pour un espace limite E a finalement été démontrée dans l'espace plus grand $\dot{M}_{p,3}$. Il pouvait en être de même pour l'existence des solutions "mild". Nous avons toujours supposé $E \subset L^2_{\text{loc}}$ ce qui, entraîne $E \subset \dot{M}_{2,3}$. On peut donc montrer d'abord l'existence de solution "mild" dans $\dot{M}_{2,3}$ puis un résultat de propagation de la régularité initiale: si la donnée est plus précisément dans E alors la solution reste dans E .

On peut même abandonner l'hypothèse $E \subset L^2_{\text{loc}}$: elle n'intervient que pour la discussion de l'unicité des solutions dans E (car il faut alors que $\vec{u} \otimes \vec{v}$ ait un sens dans E^3). Pour l'existence, grâce aux propriétés de régularisation du noyau de la chaleur, on se ramène à des calculs dans $E \cap L^\infty$ et $\vec{u} \otimes \vec{v}$ a toujours un sens. Le cadre de l'existence de solutions "mild" est donc l'espace de Morrey-Campanato $\dot{M}^{1,3}$ [KAT 3] ou l'espace de Besov $\dot{B}^{r-1,\infty}_{1,3/r}$, $0 < r < 1$ [KY].

7.2. L'espace de Lorentz $L^{3,\infty}$ et l'unicité L^3 .

Nous avons remarqué que dans le cas d'un espace limite régulier, l'unicité dans E découlait immédiatement du fait que l'opérateur bilinéaire scalaire A est continu sur l'espace $L^\infty(\dot{B}_E^{0,\infty})$. Pour L^3 , cette démonstration ne marchait pas, A n'étant pas continu sur $L^\infty(\dot{B}_3^{0,\infty})$. Cependant, Y. Meyer s'est inspiré de notre démarche pour chercher un autre espace limite B qui contienne L^3 et tel que A soit continu sur $L^\infty(B)$. Dans [MEY], il prouve que $B = L^{3,\infty}$ convient. De plus, cette estimation n'est même pas réellement nouvelle (voir la remarque à ce sujet dans [LEM])!

7.3. Encore une démonstration de l'unicité L^3 .

On peut faire une démonstration plus directe (sans le paraproduit) de l'unicité L^3 . Eviter d'utiliser le paraproduit permet de sortir du cadre \mathbb{R}^3 et d'envisager le cas d'un ouvert à bord (*cf.* la section suivante).

Par souci de simplicité, nous nous limitons au cas des solutions globales en temps.

Comme on l'a vu, l'unicité dans $C([0, +\infty[, (L^3(\mathbb{R}^3))^3)$ des solutions "mild" de Navier-Stokes se ramène à des estimations de continuité de l'opérateur scalaire

$$\begin{aligned} A(u, v)(t) &= \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \sqrt{-\Delta} u v(s) ds \\ &= \int_0^t (t-s) \Delta e^{(t-s)\Delta} \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} u v(s) \frac{ds}{t-s} \\ &= \int_0^t Q_{t-s} \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} u v(s) \frac{ds}{t-s} \end{aligned}$$

de

$$L^\infty(]0, +\infty[, L^3(\mathbb{R}^3)) \times L^\infty(]0, +\infty[, L^3(\mathbb{R}^3))$$

dans

$$L^\infty(]0, +\infty[, \dot{B}_2^{1/2, \infty}(\mathbb{R}^3))$$

et de

$$L^\infty(]0, +\infty[, L^3(\mathbb{R}^3)) \times L^\infty(]0, +\infty[, \dot{B}_2^{1/2, \infty}(\mathbb{R}^3))$$

dans

$$L^\infty(]0, +\infty[, \dot{B}_2^{1/2, \infty}(\mathbb{R}^3)).$$

Les mêmes résultats restent vrais dans le cas de $L^n(\mathbb{R}^n)$, quitte à choisir opportunément l'espace de Besov. Nous présentons maintenant notre nouvelle preuve en nous plaçant dans \mathbb{R}^n .

Il nous suffira en fait de remarquer que les espaces de Besov peuvent être aussi caractérisés à travers le même noyau de convolution $Q_t = t \Delta e^{t\Delta}$ qui apparaît dans l'intégrale. En effet, dans \mathbb{R}^n on a pour $s < \min\{2, n/p\}$

$$\begin{aligned} \|f\|_{\dot{B}_p^{s, \infty}} &\simeq \sup_{j \in \mathbb{Z}} \|\Delta_j f\|_{\dot{B}_p^{s, \infty}} \\ &\simeq \sup_{t > 0} \|t \Delta e^{t\Delta} f\|_{\dot{B}_p^{s, \infty}} \\ &\simeq \sup_{t > 0} \|(t \Delta)^2 e^{t\Delta} f\|_{\dot{B}_p^{s, \infty}} . \end{aligned}$$

Cela nous permet de ramener le problème de la bicontinuité à l'opérateur plus simple $(1/\sqrt{-\Delta}) u v$, grâce au lemme suivant.

Lemme 12. Soient $T \in]0, +\infty]$ et $f(t) \in L^\infty(]0, T[, \dot{B}_{2n/3}^{1/2, \infty}(\mathbb{R}^n))$.
Alors il existe $C > 0$ (indépendant de f) tel que

$$\left\| \int_0^t Q_{t-s} f(s) \frac{ds}{t-s} \right\|_{\dot{B}_{2n/3}^{1/2, \infty}} \leq C \sup_{0 < s < t} \|f(s)\|_{\dot{B}_{2n/3}^{1/2, \infty}} .$$

PREUVE. On évalue

$$\begin{aligned} \sup_{\theta > 0} \left\| Q_\theta \int_0^t Q_{t-s} f(s) \frac{ds}{t-s} \right\|_{\dot{B}_{2n/3}^{1/2, \infty}} \\ \leq \sup_{\theta > 0} \int_0^t \frac{(t-s)\theta}{(t-s+\theta)^2} \|\tilde{Q}_{\theta+t-s} f(s)\|_{\dot{B}_{2n/3}^{1/2, \infty}} \frac{ds}{t-s} \end{aligned}$$

où $\tilde{Q}_{\theta+t-s} f(s) = (\theta+t-s)^2 \Delta^2 e^{(\theta+t-s)\Delta} f(s)$.

Grâce à l'équivalence des normes on majore par

$$\begin{aligned} \left(\sup_{\theta > 0} \int_0^t \frac{\theta}{(t-s+\theta)^2} ds \right) \sup_{0 < s < t} \|f(s)\|_{\dot{B}_{2n/3}^{1/2, \infty}} \\ \leq C \sup_{\theta > 0} \frac{t}{t+\theta} \sup_{0 < s < t} \|f(s)\|_{\dot{B}_{2n/3}^{1/2, \infty}} \\ \leq C \sup_{0 < s < t} \|f(s)\|_{\dot{B}_{2n/3}^{1/2, \infty}} . \end{aligned}$$

Pour terminer, il ne nous reste qu'à établir les bicontinuités souhaitées pour l'opérateur $(1/\sqrt{-\Delta})uv$.

Lemme 13. Il existe un $C > 0$ tel que pour tous $u, v \in L^n(\mathbb{R}^n)$, pour tout $w \in \dot{B}_{2n/3}^{1/2, \infty}(\mathbb{R}^n)$ on a

$$(32) \quad \left\| \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} uv \right\|_{\dot{B}_{2n/3}^{1/2, \infty}} \leq C \|u\|_{L^n} \|v\|_{L^n} ,$$

$$(33) \quad \left\| \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} uw \right\|_{\dot{B}_{2n/3}^{1/2, \infty}} \leq C \|u\|_{L^n} \|w\|_{\dot{B}_{2n/3}^{1/2, \infty}} .$$

PREUVE. Pour montrer l'inégalité (32) on observe que si $u, v \in L^n(\mathbb{R}^n)$ alors $uv \in L^{n/2}(\mathbb{R}^n)$ et aussi

$$\sqrt{-\Delta} \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} uv \in L^{n/2}(\mathbb{R}^n) \subset \dot{B}_{n/2}^{0, \infty}(\mathbb{R}^n) .$$

Donc

$$\frac{1}{\sqrt{-\Delta}} uv \in \dot{B}_{n/2}^{1,\infty}(\mathbb{R}^n) \subset \dot{B}_q^{s,\infty}(\mathbb{R}^n)$$

pour $n/2 \leq q$ et $s = n/q - 1$.

Pour (33), on vérifie immédiatement que, pour $n/(n-1) < p < n$, $1/\sqrt{-\Delta}$ est continu de $L^n(\mathbb{R}^n) \times L^p(\mathbb{R}^n)$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ et de $L^n(\mathbb{R}^n) \times \dot{L}^{p,1}(\mathbb{R}^n)$ dans $\dot{L}^{p,1}(\mathbb{R}^n)$, d'où, en interpolant, de

$$L^n(\mathbb{R}^n) \times [L^p(\mathbb{R}^n), \dot{L}^{p,1}(\mathbb{R}^n)]_{s,\infty}$$

dans

$$[L^p(\mathbb{R}^n), \dot{L}^{p,1}(\mathbb{R}^n)]_{s,\infty} = \dot{B}_p^{s,\infty}(\mathbb{R}^n)$$

pour $0 < s < 1$ [BL].

En effet, la multiplication par $u \in L^n(\mathbb{R}^n)$ envoie $L^p(\mathbb{R}^n)$ dans $L^q(\mathbb{R}^n)$ avec $1/q = 1/n + 1/p$ pour $n/(n+1) \leq p \leq +\infty$ (Hölder) et $1/\sqrt{-\Delta}$ envoie $L^r(\mathbb{R}^n)$ dans $L^t(\mathbb{R}^n)$ avec $1/t = 1/r - 1/n$ pour $1 < r < n$ (Sobolev). La continuité de $v \mapsto (1/\sqrt{-\Delta}) uv$ et $v \mapsto u(1/\sqrt{-\Delta})v$ sur $L^p(\mathbb{R}^n)$ est donc immédiate.

7.4. Le cas des ouverts à bord.

Que se passe-t-il si l'on considère le problème de l'unicité L^n pour des solutions de l'équation de Navier-Stokes sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$? (On cherche des solutions nulles sur le bord $\partial\Omega$).

Si Ω est borné, une donnée L^n est L^2 et l'on pourra utiliser le théorème de Von Wahl [WAH] pour conclure que les solutions de Leray coïncident avec (la) solution $C([0, T[, (L^n)^n)$ de sorte que l'unicité est immédiate. Dans l'esprit du théorème de Von Wahl on rappelle aussi le résultat d'unicité dans le tore prouvé par I. Gallagher [GAL].

Dans le cas d'un domaine extérieur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Nicolas Depauw [DEP] a utilisé nos méthodes pour montrer l'unicité dans $L^n(\Omega)$ pour $n > 3$.

Références.

- [BL] Bergh, J., Löfström, J., *Interpolation spaces. An introduction*. Springer-Verlag, 1976.
- [BON] Bony, J. M., Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **14** (1981), 209-246.

- [BRO] Browder, F. E., Nonlinear equations of evolution. *Ann. of Math.* **80** (1964), 485-523.
- [CAN 1] Cannone, M., *Ondelettes, Paraproducts et Navier-Stokes*. Diderot Editeur, 1995.
- [CAN 2] Cannone, M., *Fluides en cascade*. Groupe de travail "Ondelettes et Navier-Stokes". Université d'Evry, 1996-1997.
- [CP] Cannone, M., Planchon, F., The regularity of the bilinear term for solutions to the incompressible Navier-Stokes equations. *Revista Mat. Iberoamericana* **16** (2000), 1-16.
- [CHE] Chemin, J. Y., Sur l'unicité pour l'équation de Navier-Stokes tridimensionnelle. Séminaire X-EDP Centre de Mathématiques. Ecole Polytechnique, 1996-1997.
- [FJW] Frazier, M., Jawerth, B., Weiss, G., Littlewood-Paley theory and the study of function spaces. Monograph in the CBM-AMS. Regional Conference Series in Mathematics **79**, A.M.S., 1991.
- [GAL] Gallagher, I., The Tridimensional Navier-Stokes Equations with almost Bidimensional Data: Stability, Uniqueness and Life Span. *IMRN* **18**, 1997.
- [KAT 1] Kato, T., Non linear evolution equations in Banach spaces. *Proceedings of the Symposium on Applied Mathematics*. A.M.S. **17** (1965), 50-67.
- [KAT 2] Kato, T., Strong L^p solutions of the Navier-Stokes equations in \mathbb{R}^m with applications to weak solutions. *Math. Z.* **187** (1984), 471-480.
- [KAT 3] Kato, T., Strong solutions of the Navier-Stokes equations in Morrey spaces. *Math. Z.* **187** (1984), 471-480.
- [KY] Kozono, H., Yamazaki, M., Semilinear heat equations and the Navier-Stokes equation with distributions in new function spaces as initial data. *Comm. Partial Diff. Equations* **19** (1994), 959-1014.
- [LEM] Lemarié-Rieusset, P. G., Some remarks on the Navier-Stokes equations in \mathbb{R}^3 . *J. Math. Phys.* **39** (1998), 4108-4118.
- [LER] Leray, J., Sur le mouvement d'un liquide visqueux remplissant l'espace. *Acta Math.* **63** (1934), 193-248.
- [LJS] Le Jan, Y., Sznitman, A. S., Stochastic cascades and 3-dimensional Navier-Stokes equations. *C. R. Acad. Sci. Paris* **324** (1997), 823-826.
- [MEY] Meyer, Y., *Wavelets, Paraproducts and Navier-Stokes Equations*. Current developments in mathematics. International Press, 1996.
- [ORU] Oru, F., Rôle des oscillations dans quelques problèmes d'analyse non linéaire. Thèse, École Normale Supérieure de Cachan, 1998.
- [DEP] Depauw, N., Solutions peu régulières des équations d'Euler et Navier-Stokes sur un domaine à bord. Thèse, Paris XIII, 1998.

- [PEE] Peetre, J., *New thoughts on Besov spaces*. Duke Univ. Math. Series, 1976.
- [PLA] Planchon, F., Solutions globales et comportement asymptotique pour les équations de Navier-Stokes. Thèse, CMAT Ecole Polytechnique, 1996.
- [RIB] Ribaud, F., Analyse de Littlewood-Paley pour la résolution d'équations paraboliques semilinéaires. Thèse, Université de Paris XI, 1996.
- [TRI] Triebel, H., *Theory of functions spaces*. Monographs in Mathematics **78** Birkhauser Verlag, 1983.
- [WAH] Von Wahl, W., The equations of Navier-Stokes and abstract parabolic equations. Vieweg & Sohn, 1985.
- [WEI] Weissler, F. B., The Navier-Stokes initial value problem in L^p . *Arch. Rational Mech. Anal.* **74** (1981), 219-230.

Recibido: 10 de junio de 1.998

Revisado: 30 de marzo de 1.999

Giulia Furioli, Pierre Gilles Lemarié-Rieusset et Elide Terraneo
Département de Mathématiques
Université d'Évry
Bd. des Coquibus
91025 Évry Cédex, FRANCE
furioli@lami.univ-evry.fr
lemarie@lami.univ-evry.fr
terraneo@lami.univ-evry.fr