Rev. Mat. Iberoamericana **18** (2002), 1–16

Stabilisation pour l'Équation des Ondes dans un Domaine Extérieur

Lassaad Aloui et Moez Khenissi

1. Introduction

On s'intéresse dans cet article, à la stabilisation de l'équation des ondes dans un domaine extérieur avec condition de Dirichlet. Plus précisément soit O un domaine borné et régulier de $\mathbb{R}^n$ (n impair) ; on considère l'équation des ondes suivante sur $\Omega = ^c\bar{O}$:

$$(E) \qquad \begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 & \text{sur } \mathbb{R}\times\Omega \\ u(0) = f_1, \partial_t u(0) = f_2 & \text{sur } \Omega. \\ u_{\mathbb{R}\times\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

avec les données initiales $f = (f_1, f_2) \in H(\Omega) = H_D \times L^2$, le complété de $(C_0^\infty(\Omega))^2$ pour la norme d'énergie.

Il est bien connu que l'équation (E) admet une unique solution globale u dans l'espace $C(\mathbb{R}, H_D) \cap C^1(\mathbb{R}, L^2)$. De plus l'énergie totale de la solution se conserve.

L'objet de ce travail est d'étudier le comportement de l'énergie locale définie par

$$E_R(f) = \|f\|_{H_R}^2 = \int_{\Omega\cap B_R} (|\nabla f_1(x)|^2 + |f_2(x)|^2)\, dx,$$

où B_R est une boule de rayon R contenant l'obstacle O.

De nombreux auteurs se sont penchés sur cette question (voir [St] et [MRS]). Nous citerons essentiellement Morawetz [Mo] qui a établi une décroissance polynômiale de cette énergie dans le cas d'un ouvert étoilé, résultat amélioré par Lax, Phillips et Morawetz [LMP] qui ont démontré la décroissance exponentielle.

2000 Mathematics Subject Classification : 35L05, 35P25, 93D15.
Keywords : Equation des Ondes, Scattering, Stabilisation.

En 1967 Lax et Phillips [LP] conjecturent que cette décroissance est équivalente au fait que l'obstacle est non captif. Cette équivalence est établie dans le premier sens par Ralston [Ra] et dans le deuxième sens par Melrose [Me] qui utilise en particulier le théorème de propagation des singularités de Melrose et Sjöstrand [MS2].

Nous citerons enfin le travail récent de N. Burq [Bu] qui établit dans un cadre analogue et pour des obstacles de géométrie quelconque la décroissance logarithmique de l'énergie locale.

Notre travail consiste à faire décroître exponentiellement cette énergie, en intervenant dans l'équation par un terme d'amortissement de type $a(x)\partial_t u$. On démontre ce résultat sous une hypothèse géometrique (microlocale) dite “Contrôle géometrique extérieur”, inspirée du cas interne (voir [BLR]). Ce théorème contient le résultat établi par Melrose.

La preuve est basée sur la théorie de Lax et Phillips [LP] adaptée au cas de l'équation dissipative. On utilise aussi des arguments d'analyse microlocale, en particulier le théorème de propagation des mesures de défaut microlocales établi par G. Lebeau [Le2].

2. Préliminaires

On va rappeler quelque résultats de la théorie de Lax-Phillips sur l'équation des ondes. Considérons l'équation des ondes libres suivante

$$(L) \qquad \begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 & \text{sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \\ u(0) = f_1, \partial_t u(0) = f_2 & \text{sur } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

avec $f = (f_1, f_2) \in H_0$, le complété de $(C_0^\infty(\mathbb{R}^n))^2$ pour la norme

$$\|f\|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla f_1(x)|^2 + |f_2(x)|^2)\, dx.$$

Il est bien connu que (L) admet une unique solution globale u.

Si on note $U_0(t)f = \begin{pmatrix} u(t) \\ \partial_t u(t) \end{pmatrix}$, alors $U_0(t)$ forme un groupe fortement continu et unitaire sur H_0, engendré par l'opérateur non borné $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}$ de domaine

$$D(A_0) = \{f \in H_0, A_0 f \in H_0\}.$$

Suivant Lax et Phillips, notons

$$D_{+,0} = \{f = (f_1, f_2) \in H_0 \text{ tel que } U_0(t)f = 0 \text{ sur } |x| \leq t,\ t \geq 0\}$$

l'espace des données sortantes,

$$D_{-,0} = \{f = (f_1, f_2) \in H_0 \text{ tel que } U_0(t)f = 0 \text{ sur } |x| \leq -t,\ t \leq 0\}$$

l'espace des données rentrantes. Et pour $R > 0$, posons :

$$U_0(R)D_{+,0} = D_{+,R} = \{f \in H_0 \text{ tel que } U_0(t)f = 0 \text{ sur } |x| \leq t + R\,, t \geq 0\}\,,$$

$$U_0(-R)D_{-,0} = D_{-,R} = \{f \in H_0 \text{ tel que } U_0(t)f = 0 \text{ sur } |x| \leq -t{+}R, t \leq 0\}.$$

Dans la suite on note D_+ et D_- au lieu de $D_{+,R}$ et $D_{-,R}$.

Les sous espaces D_+ et D_- de H_0 ont les propriétés suivantes :

a) D_+ et D_- sont fermés dans H_0.

b) En dimension impaire D_+ et D_- sont orthogonaux et $D_{+,0} \oplus D_{-,0} = H_0$.

c) $\overline{\bigcup_{t \in \mathbb{R}} U_0(t)D_\pm} = H_0$ et $\bigcap_{t \in \mathbb{R}} U_0(t)D_\pm = \{0\}$.

On va maintenant perturber le système (L) en introduisant un obstacle. Soit donc O un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, à bord ∂O de classe C^∞ ; on pose $\Omega = \mathbb{R}^n \backslash \bar{O}$, l'extérieur de O. Le système (L) devient

$$(E) \qquad \begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 & \text{sur } \mathbb{R}\times\Omega \\ u(0) = f_1, \partial_t u(0) = f_2 & \text{sur } \Omega. \\ u_{\mathbb{R}\times\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

avec $f = (f_1, f_2) \in H = H_D \times L^2$, le complété de $(C_0^\infty(\Omega))^2$ pour la norme

$$\|f\|^2 = \int_\Omega (|\nabla f_1(x)|^2 + |f_2(x)|^2)\, dx.$$

L'équation (E) admet une solution unique $u \in C(\mathbb{R}, H_D) \cap C^1(\mathbb{R}, L^2)$ et l'opérateur à un paramètre $U(t)$ défini sur H par $U(t)f = \begin{pmatrix} u(t) \\ \partial_t u(t) \end{pmatrix}$, constitue un groupe fortment continu et unitaire sur H, engendré par l'opérateur $A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}$ de domaine

$$D(A) = \{f \in H, \Delta f_1 \in L^2, f_2 \in H_D\}.$$

On peut identifier l'espace H à un sous-espace de H_0 de la façon suivante : si on pose pour $f \in H$, $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \in \Omega$ et 0 sinon, il est facile de voir que $\tilde{f} \in H_0$. On identifie alors f à $\tilde{f}$.

Soit $R > 0$ tel que $O \subset B_R = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| \leq R\}$. Pour étudier la perturbation due à la présence de l'obstacle O, Lax et Phillips introduisent l'opérateur $Z(t) = P^{+}U(t)P^{-}$ où P^{+}(resp. P^{-}) est la projéction sur $D_{+}^{\perp}$ (resp $D_{-}^{\perp}$) et ils montrent que la famille $(Z(t))_{t\geq 0}$ forme un semi-groupe de contractions. Cet opérateur permet d'étudier le comportement de l'énergie locale de la solution perturbée. Dans le cas où l'obstacle est non captif, Melrose [Me] démontre que $Z(T)$ est compact pour $T = T_R + 3R$, où T_R est le temps de sortie. Et il en déduit la décroissance exponentielle de l'énergie locale.

3. Enoncé du résultat

Soit $f = (f_1,f_2) \in H$, on considère l'équation amortie suivante :

$$(A) \qquad \begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + a(x)\partial_t u = 0 & \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \Omega \\ u(0) = f_1, \partial_t u(0) = f_2 & \text{sur } \Omega. \\ u_{/\mathbb{R}_+ \times \partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

où $a(x) \in C_+^\infty(\Omega)$; et notons $\omega = \{x \in \mathbb{R}^n / a(x) > 0\}$.

Nous utiliserons dans ce qui suit la notion de rayon bicaractéristique généralisé, dont le lecteur pourra trouver une définition précise, par exemple, dans [MS1] ou [Bu]].

Définition 3.1 (Contrôle géométrique extérieur (C.G.E.)) *Soient R et T deux réels strictement positifs. On dit que le couple (ω, T) vérifie le C.G.E. au dessus de B_R si seulement si tout rayon bicaractéristique généralisé γ, issu d'un point de $T^*(\mathbb{R}_+ \times B_R)$ est tel que*
$*$ γ quitte $\mathbb{R}_+ \times B_R$ avant l'instant T, ou
$*$ γ passe par $\mathbb{R}_+ \times \omega$ entre les instants 0 et T.

On peut, maintenant, énoncer notre résultat.

Théorème 3.1 *Soient $T > 0$ et $R > 0$ tel que (ω, T) vérifie le C.G.E. au dessus de B_R, alors il existe $c > 0$, $\alpha > 0$ telles que*

$$E_R(u(t)) \leq c\, e^{-\alpha t} E(0) \tag{3.1}$$

pour toute solution u de (A) à données $(f_0, f_1) \in H$ supportées dans B_R.

Remarques :

1. Lorsque l'obstacle est non captif, en prenant $a(x) = 0$ on retrouve le résultat de Melrose [Me].
2. Ce résultat est optimal, dans le sens où s'il existe un rayon captif ne passant pas par $\mathbb{R} \times \omega$ alors, en vertu du théorème de Ralston [Ra], la décroissance n'est pas uniforme.

4. Energie locale et semi-groupe de Lax-Phillips

Dans cette partie on va montrer que la solution de l'équation des ondes amortie est générée par un semi-groupe de contractions qu'on note $\{U_a(t); t \geq 0\}$. On va introduire ensuite le semi-groupe de Lax-Phillips $Z_a(t) = P^+U_a(t)P^-$, où P^+ et P^- sont respectivement les projections sur $(D^+)^\perp$ et $(D^-)^\perp$, les compléments orthogonaux des espaces des données sortantes et rentrantes. Ce semi-groupe a pour objectif de mesurer l'effet de l'obstacle O sur le comportement de la solution de l'équation des ondes libre.

Dans notre cas, on va montrer que la décroissance exponentielle de l'énergie locale est équivalente à celle de la norme de $Z_a(t)$.

Proposition 4.1 *L'opérateur*

$$A_a = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & -a \end{pmatrix}$$

de domaine

$$D(A_a) = \{f = (f_1, f_2) \in H \text{ tel que } A_a f \in H\}$$

est maximal dissipatif.

Preuve. Notons que

$$D(A_a) = D(A) = \{f = (f_1, f_2) \in H_D \times L^2; \Delta f_1 \in L^2, f_2 \in H_D\}\,.$$

Soit $f \in D(A)$, vérifions que $\mathrm{Re}(A_a f, f) \leq 0$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\,(A_a f, f) &= \mathrm{Re}\,(Af, f) + \mathrm{Re}\,(Bf, f) \qquad \text{où } Bf = (0, -af_2) \\ &= (Bf, f) = -\int_\Omega a(x)|f_2(x)|^2 dx \leq 0 \end{aligned}$$

donc A_a est dissipatif. Il reste alors à montrer que $\mathrm{Im}(Id - A_a) = H$.

Soit $g \in H$. Cherchons s'il existe $f \in D(A)$ vérifiant

$$f - A_a f = g\,. \tag{4.1}$$

Pour cela posons $g = (g_1, g_2)$. Puisque l'ensemble $\{(g_1, g_2) \in H/g_1 \in L^2\}$ est dense dans H alors on peut supposer que $g_1 \in H^1(\Omega)$ [LP] ; l'équation (4.1) est équivalente à :

$$\left\{ \begin{aligned} f_1 - f_2 &= g_1 \\ -\Delta f_1 + f_2 &= g_2 \end{aligned} \right.$$

ce qui donne

$$\begin{cases} f_2 = f_1 - g_1 & (1) \\ -\Delta f_1 + (1+a)f_1 = (1-a)g_1 + g_2 & (2) \end{cases}$$

Introduisons la forme bilinéaire $b(h,\psi)$ définie sur $H^1(\Omega)$ par

$$b(h,\psi) = \int_\Omega \nabla h \nabla \overline{\psi}\, dx + \int_\Omega (1+a) h\psi\, dx\,.$$

On a

$$|b(h,\psi)| \leq c\|h\|_{H^1}\|\psi\|_{H^1}.$$

b est alors continue, et $|b(h,h)| \geq c\|h\|^2_{H^1}$ c'.-à.-d. b est coercive.

Puisque $(1+a)g_1 + g_2 = \tilde{g} \in L^2$, alors la forme linéaire

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & H^1 & \rightarrow & \mathbb{C} \\ & \psi & \longmapsto & (\tilde{g},\psi) \end{array}$$

est continue. D'après le théorème de Lax Miligram, il existe un unique $h \in H^1$ tel que $b(h,\psi) = (g,\psi)$ pour toute $\psi \in H^1$.

C'est à dire l'équation (2) admet une unique solution $f_1 \in H^1$ au sens des distributions. D'après l'équation vérifiée par f_1, on déduit que $\Delta f_1 \in L^2$ et $f_2 \in H_D \cap L^2$, donc $f = (f_1, f_2) \in D(A)$ et elle vérifie l'équation (4.1). ■

On a A_a est maximal dissipatif, alors d'après le théorème de Hille Yosida, il engendre un semi-groupe de contractions $U_a(t)$ tel que si $f = (f_1, f_2) \in H$, $U_a(t)f$ est l'unique solution de l'équation

$$(E) \qquad \begin{cases} \partial_t V &=& A_a V \\ V(0) &=& f \end{cases}$$

avec $U_a(t)f \in C([0,+\infty[, H)$.

Si on pose $U_a(t)f = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$, on obtient :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u_1 - \Delta u_1 + a(x)\partial_t u_1 = 0 & \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \Omega \\ u_1(0) = f_1, \partial_t u_1(0) = f_2 & \text{sur } \Omega. \\ u_1 = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

et $u_2 = \partial_t u_1$.

On déduit alors que l'équation des ondes amortie (A) admet, pour $(f_1, f_2) \in H$, une unique solution $u \in C([0,+\infty[, H_D) \cap C^1([0,+\infty[, L^2)$.

Pour $t \geq 0$ on pose $Z_a(t) = P^+U_a(t)P^-$ où P^+ et P^- sont respectivement les projecteurs orthogonaux sur $D_+^\perp$ et $D_-^\perp$. La proposition suivante donne quelques propriétés de l'opérateur $Z_a(t)$.

Proposition 4.2 *On a*

a) $Z_a(t)D_+ = Z_a(t)D_- = \{0\}$.

b) $Z_a(t)$ *opère sur* $K = (D_+ \oplus D_-)^\perp$.

c) $(Z_a(t))_{t\geq 0}$ *est un semi-groupe sur* K.

Preuve. a) Soit $f \in D_-$ alors par définition de P^- on a $Z_a(t)f = 0$.

Soit $f \in D_+$, puisque D_+ et D_- sont orthogonaux [LP] alors $P^-f = f$ et donc pour déduire que $Z_a(t)f = 0$, il suffit de vérifier que $U_a(t)D_+ \subset D_+$.

Soit $f \in D_+$ et $U_a(t)f = \begin{pmatrix} u(t) \\ \partial_t u(t) \end{pmatrix}$ la solution correspondante avec $u(t)$ solution de (A).

Puisque $f \in D_+$ alors $u(t,x) = 0$ pour $|x| \leq t + R$ et $t \geq 0$. Comme Supp $(a) \subset B_R$ alors u vérifie

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 & \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \Omega \\ u(0) = f_1, \partial_t u(0) = f_2 & \text{sur } \Omega. \\ u_{/\mathbb{R}_+ \times \partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

D'après l'unicité de la solution de l'équation des ondes non amortie dans un domaine extérieur (voir [LP]), on conclut que $U_a(t)f = U(t)f$. Ce qui donne $U_a(t)f \in D_+$ car $U(t)f \in D^+$ (cf. [LP]).

b) Soit $f \in K = D_+^\perp \cap D_-^\perp$, montrons que $Z_a(t)f \in K$.

Il est trivial que $Z_a(t)f \in D_+^\perp$, il reste donc à vérifier que $Z_a(t)f \in D_-^\perp$.

$$Z_a(t)f = P^+U_a(t)P^-f = P^+U_a(t)f\,.$$

Soit $g \in D_-$, on a

$$(Z_a(t)f, g) = (P^+U_a(t)f, g) = (U_a(t)f, P^+g) = (f, U_a^*(t)g).$$

Pour achever la démonstration du point b) on donne le lemme suivant

Lemme 4.1 *Soit* $U_a^*(t)$ *l'adjoint de l'opérateur* $U_a(t)$.*Alors* $\forall\ f \in D_-$ *et* $\forall t \geq 0$, *on a*

$$U_a^*(t)f = U(-t)f.$$

Preuve. Puisque $U_a(t)$ est un semi-groupe engendré par A_a alors $U_a^*(t)$ est un semi-groupe engendré par $A_a^* = -A + B$.

On pose $V_a(t) = U_a^*(t)$. Soit $f \in D_-$, on a $V_a(t)f = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$ est tel que

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \partial_t v_1 & = & -v_2 \\ \partial_t v_2 & = & -\Delta v_1 - a v_2 \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t^2 v_1 - \Delta v_1 - a\partial_t v_1 = 0 \\ \partial_t v_1 \ = \ -v_2 \end{array} \right.$$

donc $V_a(t)f = \begin{pmatrix} v(t) \\ \partial_t w(t) \end{pmatrix}$, avec $v(t)$ solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t^2 v - \Delta v - a\partial_t v = 0, \qquad \forall t \geq 0 \\ (v(0), \partial_t v(0)) \ = \ (f_1, -f_2). \end{array} \right.$$

De même $U(-t)f = \begin{pmatrix} w(t) \\ -\partial_t w(t) \end{pmatrix}$ avec $w(t)$ solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t^2 w - \Delta w = 0, \qquad \forall t \geq 0 \\ (w(0), \partial_t w(0)) = (f_1, -f_2). \end{array} \right.$$

Posons $\tilde{v}(t) = v(-t)$ et $\tilde{w}(t) = w(-t)$ avec $t \leq 0$, alors $\tilde{v}(t)$ et $\tilde{w}(t)$ vérifient les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t^2 \tilde{v} - \Delta \tilde{v} - a(x)\partial_t \tilde{v} = 0 & \text{sur } \mathbb{R}_- \times \Omega \\ \tilde{v}(0) = f_1 & \text{sur } \Omega. \\ \partial_t \tilde{v}(0) = f_2 & \text{sur } \Omega. \\ \tilde{v}_{/\mathbb{R}_- \times \partial\Omega} = 0 & \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \partial_t^2 \tilde{w} - \Delta \tilde{w} = 0 & \text{sur } \mathbb{R}_- \times \Omega \\ \tilde{w}(0) = f_1 & \text{sur } \Omega. \\ \partial_t \tilde{w}(0) = f_2 & \text{sur } \Omega. \\ \tilde{w}_{/\mathbb{R}_- \times \partial\Omega} = 0 & \end{array} \right.$$

Puisque $f \in D_-$ alors $U(-t)f = 0$ pour $|x| \leq t + R$ et $t \geq 0$, donc $\tilde{w}(t) = 0$ sur $|x| \leq -t + R$ et $t \leq 0$. Or $\mathrm{Supp}(a) \subset B_R$ alors d'après l'unicité de la solution on déduit que $\tilde{w}(t) = \tilde{v}(t)$ pour $t \leq 0$, donc $w(t) = v(t)$ pour $t \geq 0$; et par suite $U_a^*(t)f = U(-t)f$. ■

D'après Lax et Phillips [LP] $U(-t)D_- \subset D_-$ pour tout $t \geq 0$. On déduit alors que $U_a^*(t)g \in D_-$ ce qui montre que $Z_a(t)f \in D_-^{\perp}$.

c) Soient s et $t \geq 0$ et $f \in K$. On a

$$Z_a(t)Z_a(s)f = P^+U_a(t)P^-P^+U_a(s)f = P^+U_a(t)P^+U_a(s)f\,.$$

Or $P^+U_a(t)P^+ = P^+U_a(t)$ (car $(P^+ - I)$ est la projéction orthogonale sur D_+) alors

$$Z_a(t)Z_a(s)f = P^+U_a(t)U_a(s)f = P^+U_a(t+s)f = Z_a(t+s)f$$

d'où la proposition 4.2. ■

On va rappeler dans la dernière proposition de cette partie la relation entre le semi-groupe $Z_a(t)$ et l'énergie locale. (voir [LP])

Proposition 4.3 *Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $\forall R > 0$, $\exists\, c, \alpha > 0$, $\|Z_a(t)f\| \le c\, e^{-\alpha t}\|f\|$, $\forall f \in H$.

b) $\forall \rho > 0$, $\exists\, c', \alpha' > 0$, $\|U_a(t)g\|_\rho \le c'\, e^{-\alpha' t}\|g\|$, $\forall g \in H_\rho$, *avec* $H_\rho = \{g = (g_1, g_2) \in H,$ *a support dans* $B_\rho \supset O\}$ *et*

$$\|g\|_\rho^2 = \int_{\substack{|x|<\rho \\ x\in\Omega}} (|\nabla g_1(x)|^2 + |g_2(x)|^2)\, dx\,.$$

Preuve. $a) \Longrightarrow b)$

Soit $\rho > 0$ et $g \in H_\rho$; pour $R = \rho$ on a $P^+h = P^-h = h$ sur B_ρ, $\forall h \in H$. On a donc

$$Z_a(t)g = P^+U_a(t)P^-g = P^+U_a(t)g = U_a(t)g \qquad \text{sur } B_\rho$$

d'où $\|U_a(t)g\|_\rho = \|Z_a(t)g\|_\rho \le \|Z_a(t)g\| \le c\, e^{-\alpha t}\|g\|$.

$b) \Longrightarrow a)$

Soit $R > 0$ puisque $(Z_a(t))_{t\ge 0}$ constitue un semi-groupe alors il suffit de montrer qu'il existe $T > 0$ tel que $\|Z_a(T)\| < 1$.

On commence par donner le lemme suivant

Lemme 4.2 *On a*

a) $U_a(t)D_-^\perp \subset D_-^\perp$, $\quad U(t)D_-^\perp \subset D_-^\perp$ *et* $U_0(t)D_-^\perp \subset D_-^\perp$ *pour tout* $t \ge 0$.

b) $U_0(t)D_-^\perp \subset D_+$ *pour tout* $t \ge 2R$.

c) Si on pose $M_a = U_a(2R) - U_0(2R)$ *alors on a :*

$$M_a f = 0 \quad \textit{pour } |x| > 3R \quad \textit{et } \|M_a f\| \le 2\|f\|_{5R}.$$

d) $Z_a(t) = P^+M_aU_a(t-4R)M_aP^-$, $\quad \forall t \ge 4R$.

Preuve. a) Soient $f \in D_-^\perp$ et $g \in D_-$, on a $(U_a(t)f, g) = (f, U_a^*(t)g)$. Comme $U_a^*(t)g \in D_-$, alors $(U_a(t)f, g) = 0$ et parsuite $U_a(t)f \in D_-^\perp$.

De la même façon on démontre les autres inclusions.

b) Il suffit de montrer que $U_0(2R)D_-^\perp \subset D_+$. D'après la théorie de représentation ([LP]), les espaces D_- et D_+ correspondent respectivement aux sous espaces $L^2(]-\infty, -R] \times S^{n-1})$ et $L^2([R, +\infty[\times S^{n-1})$. Puisque le groupe $U_0(t)$ opère comme une translation à droite sur L^2 alors $U_0(2R)D_-^\perp$ est représenté par $L^2([R,+\infty[\times S^{n-1})$ ce qui prouve b).

c) Soit $f\in H$, d'après le principe du domaine de dépendance

$$U_0(t)f=U_a(t)f \quad \text{sur } |x|>t+R, \quad t\geq 0$$

en particulier pour $t=2R$, $U_0(2R)f=U_a(2R)f$ sur $|x|>3R$.

En utilisant le même principe, on obtient :

$$\|U_0(2R)f\|_{3R}\leq \|f\|_{5R}$$

et

$$\|U_a(2R)f\|_{3R}\leq \|f\|_{5R}$$

ainsi

$$\|M_af\|=\|M_af\|_{3R}\leq 2\|f\|_{5R}.$$

d) On a

$$\begin{aligned}P^+M_aU_a(t-4R)M_aP^-f&=Z_a(t)f+P^+U_0(2R)U_a(t-4R)U_0(2R)P^-f\\&-P^+U_a(t-2R)U_0(2R)P^-f-P^+U_0(2R)U_a(t-2R)P^-f.\end{aligned}$$

D'après b), $U_0(2R)P^-f\in D_+$ donc le deuxième et le troisième termes sont nuls. D'après a), $U_a(t-2R)P^-f\in D_-^\perp$. En utilisant une autre fois b) on obtient $U_0(2R)U_a(t-2R)P^-f\in D^+$ ce qui montre que le quatrième terme est nul. ■

On revient à la démonstration de la Proposition 4.3. On choisit dans l'assertion 2) $\rho=5R$ et T assez grand tel que

$$\|U_a(t)g\|_{5R}\leq \frac{1}{8}\|g\| \quad , \text{ pour tout } \ g\in H_{5R}.$$

Soit $f\in H$, d'après le lemme précédent on a

$$\begin{aligned}\|Z_a(T+4R)f\|=&\|P^+M_aU_a(T)M_aP^-f\|\leq \|M_aU_a(T)M_aP^-f\|\\&\leq \|U_a(T)M_aP^-f\|_{5R}\leq \frac{1}{4}\|M_aP^-f\|\\&\leq \frac{1}{2}\|P^-f\|\leq \frac{1}{2}\|f\|\,.\end{aligned}$$

On pose $T'=T+4R$; soit $t>0$; il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $kT'\leq t\leq (k+1)T'$. Et on déduit

$$\|Z_a(t)f\|\|\leq \|Z_a(kT')f\|\leq \|(Z(T')f)\|^k\leq \left(\frac{1}{2}\right)^k\|f\|\leq c\,e^{-\alpha t}\,\|f\|.$$

■

5. Démonstration du théorème

Le point essentiel de la démonstration est le résultat suivant

Proposition 5.1 *Si le couple (ω, T_R) contrôle géométriquement Ω au dessus de B_R et (f_n) est une suite de K vérifiant $\|f_n\| = 1$ et $\|Z_a(T)f_n\| \to 1$ pour $T = T_R + 3R$, alors il existe une sous suite de (f_n) notée encore (f_n) et f une donnée de H telles que :*

$$f_n \rightharpoonup f \text{ dans } H \quad \text{et} \quad U_a(t)f_n \longrightarrow U_a(t)f \text{ dans } H^1_{loc}(\tilde{K}(T))$$

où $\tilde{K}(T) = \{(t,x) \in [0, +\infty[\times \Omega / |x| \le t - T + R; t \ge T\}$.

Preuve. Soit (f_n) une suite de K vérifiant les hypothèses de la proposition. On a (f_n) est bornée dans H alors elle admet une sous suite faiblement convergente vers un élément f de H. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de solutions associée à (f_n) et μ_a une mesure de défaut microlocale correspondante à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ [Ge1].

Montrons que $\mu_a = 0$ microlocalement dans $T^*\tilde{K}(T)$. Soit $q \in T^*(\tilde{K}(T))$ et γ un rayon bicaractéristique généralisé issu de q ; deux cas se posent :

1^{er} **cas :** γ, tracé dans le sens négatif du temps, ne rencontre pas $\partial\Omega$ ou bien rencontre $\partial\Omega$ pour la première fois en un instant $t_0 > 2R$.

Dans les deux sous cas $\gamma(0) \notin B(0, 2R)$. Puisque $\omega \subset B(0,R)$ alors $U_a(t)f_n = U_0(t)f_n$ au voisinage de $\gamma(0)$ et par suite $\mu_a = \mu_0$ au voisinage de $\gamma(0)$ où μ_0 est une mesure de défaut microlocale associeé à la suite $(U_0(t)f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ($U_0(t)f_n$ étant identifié à sa 1^{ere} composante).

Par hypothèse, (f_n) est une suite de K, d'après b) du lemme 4.2, $U_0(2R)f_n \in D_+$, donc $\mu_0 = 0$ microlocalement dans $T^*\tilde{K}(2R)$.

On pose

$$q' = \begin{cases} q & \text{pour le } 1^{\text{er}} \text{ sous cas,} \\ \gamma(t_1) & \text{pour le } 2^{\text{eme}} \text{ cas.} \end{cases}$$

avec $t_1 < t_0$ et $\gamma(t_1) \in T^*\tilde{K}(2R)$.

On a $\mu_0 = 0$ au voisinage de q'. D'après le théorème de propagation des mesures, $\mu_0 = 0$ au voisinage de $\gamma(0)$. De même alors pour μ_a.

En utilisant le théorème de propagation des mesures au bord [Le2], on déduit que $\mu_a = 0$ au voisinage de q.

2^{eme} **cas :** γ rencontre le bord $\partial\Omega$ pour $t_0 \le 2R$.

Dans ce cas γ est un rayon captif, car $\gamma(t_0), \gamma(T) \in B_R$ et $T - t_0 > T_R$. D'après l'hypothèse du C.G.E., γ rencontre la zone de stabilisation $[t_0, T] \times \omega$.

D'autre part on sait que $\|Z_a(T)f_n\| \longrightarrow 1$ et $\|f_n\| = 1$ alors

$$\|U_a(T)f_n\| \longrightarrow 1$$

et puisque

$$\|U_a(T)f_n\|^2 - \|f_n\|^2 = -\int_0^T \int_\Omega a(x)|\partial_t u_n|^2 dx\ dt$$

on obtient $(\partial_t u_n)$ converge vers 0 dans $L^2([0,T] \times \omega)$.

D'après [Ge1], Supp $(\mu_a) \subset \mathrm{Car}(\partial_t) = \{(t,x,\tau,\xi) \in T^*(\mathbb{R}_+ \times \Omega); \tau = 0\}$. Comme u_n vérifie l'équation des ondes, alors Supp $(\mu_a) \subset \{\tau^2 = |\xi|^2\}$, d'où $\mu_a = 0$ sur $T^*([0,T] \times \omega)$. En appliquant le théorème de propagation des mesures [Le2], on déduit que $\mu_a = 0$ au voisinage de q. ■

Proposition 5.2 *Sous les hypothèses du théorème 3.1, on a*

$$\|Z_a(T)\| < 1, \qquad \text{avec } T = T_R + 9R. \tag{5.1}$$

Preuve. Supposons que l'inégalité (5.1) est fausse, alors il existe une suite (f_n) de K telle que $\|f_n\| = 1$ et $\|Z_a(T)f_n\| \to 1$ quand $n \to +\infty$.

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée dans H, alors il existe une sous suite , qu'on continue à noter (f_n) qui converge faiblement dans H. On note f sa limite. L'operateur $Z_a(T)$ est continu dans H alors

$$Z_a(T)f_n \rightharpoonup Z_a(T)f \text{ quand } n \longrightarrow +\infty$$

Montrons que cette convergence est forte

$$\begin{aligned} Z_a(T)f_n &= P^+U_a(T)f_n = P^+U_a(2R)U_a(T-2R)f_n \\ &= P^+M_aU_a(T_R+7R)f_n + P^+U_0(2R)U_a(T_R+7R)f_n \end{aligned}$$

Comme $f_n \in K$ alors $U_a(T_R+7R)f_n \in D_-^\perp$, d'après b) du lemme 4.2

$$U_0(2R)U_a(T_R+7R)f_n \in D_+$$

ainsi

$$P^+U_0(2R)U_a(T_R+7R)f_n = 0$$

et par suite

$$Z_a(T)f_n = P^+M_aU_a(T_R+7R)f_n.$$

On a $\|Z_a(T)f_n\| \leq \|Z_a(T_R+3R)f_n\| \leq 1$ donc

$$\|Z_a(T_R+3R)f_n\| \longrightarrow 1.$$

D'après la proposition 5.1

$$U_a(t)f_n \longrightarrow U_a(t)f \quad \text{dans} \quad H^1_{loc}(\tilde{K}(T_R + 3R))$$

donc $U_a(T_R+7R)f_n \longrightarrow U_a(T_R+7R)f$ dans $H_{(|x|\leq 5R)}$. D'après c) du lemme 4.2

$$M_aU_a(T_R + 7R)f_n \longrightarrow M_aU_a(T_R + 7R)f$$

alors $P^+M_aU_a(T_R + 7R)f_n \longrightarrow P^+M_aU_a(T_R + 7R)f$. Comme $f_n \in K$ et $f_n \rightharpoonup f$ dans H alors $f \in K$. ce qui donne

$$Z_a(T)f_n \longrightarrow Z_a(T)f.$$

On obtient enfin une donnée f verifiant

$$\|Z_a(T)f\| = \|f\| = 1. \tag{5.2}$$

En effet, on a $\|f_n\| = 1$ et $f_n \rightharpoonup f$ alors $(f_n, f) \longrightarrow \|f\|^2$ et comme

$$|(f_n, f)| \leq \|f_n\|.\|f\| = \|f\|$$

alors $\|f\|^2 \leq \|f\|$ ce qui implique $\|f\| \leq 1$. D'autre part $\|Z_a(T)f_n\| \longrightarrow 1$ et $\|Z_a(T)f_n\| \longrightarrow \|Z_a(T)f\|$; par suite $\|Z_a(T)f\| = 1 \leq \|f\| \leq 1$ ce qui donne (5.2)

Montrons que cela est absurde.

En s'inspirant de [BLR], on définit l'ensemble $G_T = \{f \in K/\|Z_a(T)f\| = \|f\|\}$. En identifiant alors la donnée initiale à la solution correspondante, on donne dans le lemme suivant, une caractérisation de G_T et on vérifie, en particulier que c'est un sous espace vectoriel de K.

Lemme 5.1 *$G_t = \{f \in K/U_a(t)f \in D^\perp_+$ et $\partial_t u = 0$ sur $[0,t] \times \omega\}$, pour $t \geq 0$.*

On renvoie la preuve de ce lemme à la fin de l'article, et on revient à celle de la proposition 5.2.

1^{er} **étape :** G_T est de dimension finie, car sa sphère unité S_T est compacte. En effet soit $(f_n) \in S_T$ c'.-à.-d. $\|Z_a(T)f_n\| = \|f_n\| = 1$. (f_n) possède une sous suite faiblement convergente dans S_T vers une donnée f de H. Puisque $\|Z_a(T)f_n\| = 1$ et $f_n \rightharpoonup f$, comme dans ce qui précede on peut déduire que

$$Z_a(T)f_n \longrightarrow Z_a(T)f \quad \text{et } \|Z_a(T)f\| = \|f\| = 1.$$

Puisque $f_n \rightharpoonup f$ et $\|f_n\| = 1 = ||f\|$ alors on obtient une convergence forte de (f_n).

2^{eme} **étape :** (∂_t) opère sur G_T.

$*$) $\partial_t u$ est à énergie finie car $\|f\|+\|Af\|$ et $\|f\|$ sont deux normes équivalentes sur G_T qui est de dimension finie.

$*$) Si u est une solution de l'équation des ondes dissipative, $\partial_t u$ l'est aussi. Puisque $\partial_t u = 0$ sur $[0, t] \times \omega$ alors $\partial_t^2 u = 0$ sur $[0, t] \times \omega$.

$*$) Pour une donnée f telle que $\partial_t u = 0$ sur $[0, t] \times \omega$,on a $U_a(t)f = U(t)f$.

Puisque $\partial_t(U(t)f) = AU(t)f = U(t)Af$, alors $\partial_t u$ est solution de l'équation des ondes libre de donnée initiale Af.

Montrons alors que $U(t)Af \in D_+^\perp$. Soit $g \in D_+ \cap D(A)$, comme A est antiadjoint ($A^* = -A$) alors

$$(U(t)Af, g) = (AU(t)f, g) = -(U(t)f, Ag)$$

Il suffit donc de vérifier que $Ag \in D_+$; on a $g \in D_+$ donc $U(t)g = 0$ pour $|x| \leq R + t$, et $t \geq 0$.

Or $U(t)Ag = \partial_t(U(t)g)$, donc $U(t)Ag = 0$ pour $|x| \leq R + t$, et $t \geq 0$. Par suite $Ag \in D_+$.

3^{eme} **étape :** Fin de la preuve de la proposition 5.2.

On a trouvé que $G_T \neq \{0\}$ et comme ∂_t opère sur G_T qui est de dimension finie alors ∂_t admet une valeur propre λ et une fonction propre associée v de la forme $v(t, x) = e^{\lambda t} f(x)$. Cette fonction vérifie l'équation des ondes libre, on a donc

$$\left\{\begin{array}{rcl} (\lambda^2 - \Delta)f & = & 0 \\ f_{|\partial\Omega} & = & 0 \end{array}\right.$$

c'.-à.-d. la donnée $(f, \lambda f)$ est une fonction propre de A, ce qui est absurde d'après [LP]. ∎

Fin de la preuve du théorème

En combinant les résultats des propositions 4.3 et 5.2 on obtient l'in égalité (3.1) du théorème.

Preuve du lemme 5.1. Soit $f \in K$,

$$\begin{array}{rcl} f \in G_t & \Longleftrightarrow & \|Z_a(t)f\| = \|f\| \\ & \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{l} \partial_t u = 0 \text{ sur } [0, T] \times \omega \\ \|Z(t)f\| = \|f\| (\text{ car } U_a(t)f = U(t)f.) \end{array}\right. \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \|Z(t)f\| = \|f\| \iff & \|Z(t)f\| = \|P^+U(t)f\| = \|U(t)f\| \\ & \text{(car } U(t) \text{ est unitaire)} \\ \iff & U(t)f \in D_+^\perp. \end{aligned}$$

■

Références

[BLR] Bardos, C., Lebeau, G. et Rauch, J., Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilisation of waves from the boundary. *SIAM J. Control Optim.* **305** (1992), 1024–1065.

[Bu] Burq, N., Décroissance de l'energie locale de l'équation des ondes pour le problème extérieur et absence de résonance au voisinage du réel. *Acta Math.* **180** (1998), 16–29.

[Ge1] Gérard, P., Microlocal defect measures. *Comm. Partial Differential Equations* **16** (1991), 1761–1794.

[Ge2] Gérard, P., Oscillations and concentrations effets in semi-linear dispersive wave equation. *J. Funct. Anal.* **41** (1996), no. 1, 60–98.

[LMP] Lax, D., Morawetz, C. S., Phillips, R. S., Exponential decay of solution of the wave equation in the exterior of a star shaped obstacle. *Comm. Pure Appl. Math.* **16** (1963), 477–486.

[LP] Lax, P. D., Phillips, R. S., *Scattering theory decay.* Academic Press, New York, 1967.

[Le1] Lebeau, G., Control for hyperbolic equations. *Actes du colloque de Saint Jean de Monts* (1991).

[Le2] Lebeau, G., Equations des ondes amorties, en *Algebraic and Geometric Methods in Math.Physic*, A. Boutet de Monvel and V. Marchenko (eds), 73–109. Kluwer Academic, The Netherlands, 1996.

[Li] Lions, J. L., *Contrôlabilité exacte. Perturbation et stabilisation des systèmes distribués*, R.M.A., Masson, 1988.

[MS1] Melrose, R., Sjöstrand, J., Singularities of boundary value problems I. *Comm. Pure. Appl. Math.* **31** (1978), 593–617.

[MS2] Melrose, R., Sjöstrand, J., Singularities of boundary value problems II, *Comm. Pure. Appl. Math.* **35** (1982), 129–168.

[Me] Melrose, R., Singularities and energy decay in acoustical scattering. *Duke Math. J.* **46** (1979), 43–59.

[Mo] Morawetz, C. S., Decay for solutions of the exterior problem for the wave equation. *Comm. Pure. Appl. Math.* **28** (1975), 229–264.

[MRS] Morawetz, C. S. , Ralston, J., Strauss, W., Decay of solutions of the wave equation outside non-trapping obstacles. *Comm. Pure. Appl. Math.* **30** (1977), 447–508.

[Ra] Ralston, J., Solution of the wave equation with localized energy. *Comm. Pure. Appl. Math.* **22** (1969), 807–823.

[RT] Rauch, J., Taylor, M., Exponential decay of solutions for the hyperbolic equation in bouded domain. *Indiana Univ. Math. J.* **24** (1972), 74–86.

[St] Strauss, W. A., Dispersal of waves vanishing on the boundary of a exterior domain. *Comm. Pure. Appl. Math.* **28** (1975), 265–278.

Recibido: 16 de junio de 1999

Lassaad Aloui
Faculté des Sciences de Gabès
Département de Mathématiques et Informatique
Route de Médenine 6029
Gabès, Tunisie
`Lassaad.Aloui@fsg.rnu.tn`

Moez Khenissi
Faculté des Sciences de Gabès
Département de Mathématiques et Informatique
Route de Médenine 6029
Gabès, Tunisie
`Moez.Khenissi@fsg.rnu.tn`