Rev. Mat. Iberoamericana **22** (2006), no. 1, 339–356

Point fixe d'une application non contractante

Pierre Gilles Lemarié–Rieusset

Abstract

We study a multilinear fixed-point equation in a closed ball of a Banach space where the application is 1-Lipschitzian: existence, uniqueness, approximations, regularity.

Nous nous proposons de résoudre le problème de point fixe suivant :

Théorème 1. *Soit $k \geq 2$. Soient E un espace de Banach et T_k une application k-linéaire continue sur E*

$$\|T_k(x_1, \ldots, x_k)\|_E \leq C_0 \|x_1\|_E \ldots \|x_k\|_E\,.$$

On pose

$$r_k = (C_0 k)^{-\frac{1}{k-1}} \frac{k-1}{k} \qquad et \qquad R_k = \frac{k}{k-1} r_k\,.$$

B_k désignera la boule fermée $B_k = \bar{B}(0, R_k)$. Soit enfin $x_0 \in E$ avec $\|x_0\|_E \leq r_k$. Alors l'équation $x = x_0 + T_k(x, \ldots, x)$ a une et une seule solution x_∞ dans B_k.

Le cas où $\|x_0\| \leq \delta < r_k$ est classique et facile : l'application $F : x \mapsto x_0 + T(x, \ldots, x)$ envoie continument la boule fermée $\bar{B}(0, \frac{k}{k-1}\delta)$ sur elle-même et y est contractante de facteur $(\frac{\delta}{r_k})^{k-1}$. Nous nous intéressons donc au cas limite $\delta = r_k$. Dans le cas $k = 2$, Auscher et Tchamitchian [1] ont montré qu'il y avait existence et unicité de la solution dans la boule $\bar{B}(0, 2r_2)$ pour $\|x_0\|_E \leq r_2$. Nous généralisons ce résultat au cas $k \geq 2$, en donnant une démonstration élémentaire. De plus, nous étudions la convergence de plusieurs méthodes de résolution et nous établissons un résultat de régularité qui généralise au cas limite $\delta = r_k$ les résultats de persistance de Furioli et al. [2] et de Zahrouni [4].

2000 Mathematics Subject Classification : 47J99, 65J99, 76D05.
Keywords : Fixed point, iterative approximation, Besov spaces, Navier-Stokes equations.

1. Quelques inégalités élémentaires pour les applications k-linéaires

Dans cette section, nous formulons des inégalités immédiates permettant de comparer le comportement d'une application k-linéaire à l'application polynôme x^k.

Lemme 1. *Soit $k \geq 2$. Soient E un espace de Banach et T_k une application k-linéaire continue sur E*

$$\|T_k(x_1, \dots, x_k)\|_E \leq C_0 \|x_1\|_E \dots \|x_k\|_E \,.$$

On note DT_k la différentielle de l'application $x \mapsto T_k(x, \dots, x)$:

$$DT_k(x).y = T_k(y, x, \dots, x) + T_k(x, y, x, \dots, x) + \dots + T_k(x, \dots, x, y)\,.$$

Alors, si A et B sont deux réels positifs et x et y deux vecteurs de E tels que $\|x\|_E \leq A$ et $\|y\|_E \leq B$, on a les inégalités suivantes :

i) $\|T_k(x, \dots, x)\|_E \leq C_0 A^k$

ii) $\|T_k(x, \dots, x) - T_k(y, \dots, y)\|_E \leq C_0 \|x - y\|_E \frac{A^k - B^k}{A - B}$

iii) *Pour $z \in E$,*

$$\|T_k(x, \dots, x, z) - T_k(y, \dots, y, z)\|_E \leq C_0 \|z\|_E \|x - y\|_E \, \frac{A^{k-1} - B^{k-1}}{A - B}$$

iv) $\|DT_k(y).x\|_E \leq C_0 k B^{k-1} A$

v)

$$\begin{aligned} \|T_k(x, \dots, x) - T_k(y, \dots, y) - DT_k(y).(x - y)\|_E \\ \leq C_0 \|x - y\|_E^2 \frac{A^k - B^k - k B^{k-1}(A - B)}{(A - B)^2} \end{aligned}$$

Démonstration. i) est immédiat. Pour démontrer ii), il suffit d'utiliser la multi-linéarité pour écrire

$$T_k(x, \dots, x) - T_k(y, \dots, y) = \sum_{j=1}^{k} T_k(x_{j,1}, \dots, x_{j,k})$$

avec $x_{j,k} = y$ pour $k < j$, $x_{j,j} = x - y$ et $x_{j,k} = x$ pour $k > j$. On a donc

$$\begin{aligned} \|T_k(x, \dots, x) - T_k(y, \dots, y)\|_E &\leq C_0 \|x - y\|_E \sum_{j=1}^{k} \|y\|_E^{j-1} \|x\|_E^{k-j} \\ &\leq C_0 \|x - y\|_E \sum_{j=1}^{k} B^{j-1} A^{k-j} \end{aligned}$$

et donc $\|T_k(x, \dots, x) - T_k(y, \dots, y)\|_E \leq C_0 \|x - y\|_E \frac{A^k - B^k}{A - B}$.

iii) est une conséquence directe de ii), par $(k-1)$-linéarité de $(x_1, \ldots, x_{k-1}) \mapsto T_k(x_1, \ldots, x_{k-1}, z)$. iv) est immédiat.

Enfin, v) est immédiat par multi-linéarité :

$$\begin{aligned} T_k(x, \ldots, x) &- T_k(y, \ldots, y) - DT_k(y).(x-y) \\ &= \sum_{j=1}^{k} T_k(x_{j,1}, \ldots, x_{j,k}) - DT_k(y).(x-y) \\ &= \sum_{j=1}^{k} \big(T_k(y, \ldots, y, x-y, x, \ldots, x) - T_k(y, \ldots, y, x-y, y, \ldots, y)\big) \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{l=1}^{k-j} T_k(x_{j,1}, \ldots, x_{j,j}, x_{j+l,j+1}, \ldots, x_{j+l,k})\,. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \|T_k(x, \ldots, x) - T_k(y, \ldots, y) - DT_k(y).(x-y)\|_E& \\ &\leq C_0 \|x-y\|_E^2 \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{l=1}^{k-j} \|y\|_E^{j+l-2} \|x\|_E^{k-j-l} \\ &\leq C_0 \|x-y\|_E^2 \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{l=1}^{k-j} B^{j+l-2} A^{k-j-l} \\ &= C_0 \|x-y\|_E^2 \frac{A^k - B^k - kB^{k-1}(A-B)}{(A-B)^2}\,. \end{aligned}$$

■

2. L'équation réelle

Pour résoudre l'équation dans E, on se ramènera à comparer celle-ci à l'équation polynomiale $t = r_k + C_0 t^k$.

Lemme 2. *Soit $k \geq 2$. Soient $r_k = (C_0 k)^{-\frac{1}{k-1}} \frac{k-1}{k}$ et $R_k = \frac{k}{k-1} r_k$. R_k est la seule racine réelle positive de l'équation polynomiale $t = r_k + C_0 t^k$. De plus, les suites itératives suivantes convergent vers R_k :*

i) *si $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_{n+1} = r_K + C_0 \alpha_n^k$, alors $0 \leq \alpha_n \leq \alpha_{n+1} \to R_k$ et $\alpha_{n+1} - \alpha_n \sim \frac{2R_k}{k-1} \frac{1}{n^2}$.*

ii) *si $\beta_0 = 0$ et $\beta_{n+1} = r_K + C_0 \beta_n^{k-1} \beta_{n+1}$, alors $0 \leq \beta_n \leq \beta_{n+1} \to R_k$ et $\beta_{n+1} - \beta_n \sim \frac{2R_k}{k} \frac{1}{n^2}$.*

iii) *si $\gamma_0 = 0$ et $\gamma_{n+1} = r_k + C_0 \gamma_n^k + k C_0 \gamma_n^{k-1}(\gamma_{n+1} - \gamma_n)$ alors $0 \leq \gamma_n \leq \gamma_{n+1} \to R_k$ et il existe une constante C telle que $\gamma_{n+1} - \gamma_n \sim C 2^{-n}$.*

Démonstration. Il est immédiat par récurrence que $\alpha_n \leq R_k$. Enfin $\alpha_1 \geq \alpha_0$ et par récurrence α_n est croissante. Elle converge donc vers R_k, qui est la seule solution réelle positive de $t = r_k + C_0 t^k$. Enfin, on pose $\epsilon_n = R_k - \alpha_n$; de l'égalité $\alpha_{n+1} = R_k - C_0 R_k^k + C_0 \alpha_n^k$, on tire

$$\epsilon_{n+1} = C_0 R_k^k (1 - (1 - \frac{\epsilon_n}{R_k})^k) = \epsilon_n - \frac{(k-1)}{2R_k}\,\epsilon_n^2 + o(\epsilon_n^2)$$

et il est alors classique que $\epsilon_n \sim \frac{2R_k}{k-1}\frac{1}{n}$ et donc $\alpha_{n+1} - \alpha_n \sim \frac{2R_k}{k-1}\frac{1}{n^2}$.

On montre par récurrence que β_n reste inférieur ou égal à R_k : $\beta_{n+1} \leq r_k + C_0 R_k^{k-1}\beta_{n+1}$, d'où

$$(1 - C_0 R_k^{k-1})\beta_{n+1} = \frac{k-1}{k}\beta_{n+1} \leq r_k = \frac{k-1}{k} R_k.$$

Par ailleurs, $\beta_1 = r_k \geq \beta_0 = 0$ et par récurrence la suite $\beta_{n+1} = \frac{r_k}{1 - C_0 \beta_n^{k-1}}$ est croissante ; elle converge donc vers R_k. Enfin, on pose $\eta_n = R_k - \beta_n$; de l'égalité $\beta_{n+1} = R_k - C_0 R_k^k + C_0 \beta_n^{k-1}\beta_{n+1}$, on tire

$$\eta_{n+1} = C_0 R_k^k (1 - (1 - \frac{\eta_n}{R_k})^{k-1}(1 - \frac{\eta_{n+1}}{R_k}))$$

d'où (puisque $C_0 R_k^k = \frac{R_k}{k}$)

$$\eta_{n+1} = \eta_n\big(1 - \frac{\eta_{n+1}}{R_k} - \frac{(k-2)}{2R_k}\eta_n + o(\eta_n)\big) = \eta_n\big(1 - \frac{k}{2R_k}\eta_n + o(\eta_n)\big)$$

et il est alors classique que $\eta_n \sim \frac{2R_k}{k}\frac{1}{n}$.

On vérifie par récurrence sur n que $0 \leq \gamma_n < R_k$. En effet, on a

$$\gamma_{n+1} = \frac{r_k - C_0(k-1)\gamma_n^k}{1 - C_0 k \gamma_n^{k-1}} = \frac{k-1}{k}\,\frac{R_k^k - \gamma_n^k}{R_k^{k-1} - \gamma_n^{k-1}}$$

et la formule des accroissements finis pour la fonction $t \mapsto t^{\frac{k}{k-1}}$ sur $[\gamma_n^{k-1}, R_k^{k-1}]$ nous donne bien que $\gamma_{n+1} < R_k$.

De plus, la fonction $t \mapsto t^{\frac{k}{k-1}}$ étant convexe, on voit que la suite γ_n est croissante et converge donc vers R_k. Enfin, on pose $R_k - \gamma_n = \zeta_n$. De l'identité

$$R_k - \gamma_{n+1} = C_0(R_k^k - \gamma_n^k - k\gamma_n^{k-1}(\gamma_{n+1} - \gamma_n)),$$

on tire

$$R_k - \gamma_{n+1} = \frac{C_0(R_k^k - \gamma_n^k - k\gamma_n^{k-1}(R_k - \gamma_n))}{1 - kC_0\gamma_n^{k-1}} = \frac{(R_k^k - \gamma_n^k - k\gamma_n^{k-1}(R_k - \gamma_n))}{k(R_k^{k-1} - \gamma_n^{k-1})},$$

d'où $\zeta_{n+1} = \frac{1}{2}\zeta_n + O(\zeta_n^2)$. Cela prouve que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \zeta_n < \infty$ et que

$$\zeta_n \sim 2^{-n}\zeta_0 \prod_{j=0}^{\infty} \frac{2\zeta_j}{\zeta_{j-1}}.$$

■

3. La méthode de Picard

Comme dans l'article d'Auscher et Tchamitchian [1], l'existence et l'unicité du point fixe sont démontrées par le fait que toutes les suites de Picard de terme initial dans la boule $\bar{B}(0, R_k)$ convergent vers la même limite.

Théorème 2. *Soit $k \geq 2$. Soient E un espace de Banach et T_k une application k-linéaire continue sur E*

$$\|T_k(x_1, \dots, x_k)\|_E \leq C_0 \|x_1\|_E \dots \|x_k\|_E .$$

On pose

$$r_k = (C_0 k)^{-\frac{1}{k-1}} \frac{k-1}{k} \text{ et } R_k = \frac{k}{k-1} r_k, .$$

B_k désignera la boule fermée $B_k = \bar{B}(0, R_k)$. Soit enfin $x_0 \in E$ avec $\|x_0\|_E \leq r_k$. Alors :

i) *l'équation $x = x_0 + T_k(x, \dots, x)$ a une et une seule solution x_∞ dans B_k.*

ii) *(Méthode de Picard) Si $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par récurrence par $y_0 \in B_k$ et $y_{n+1} = x_0 + T_k(y_n, \dots, y_n)$ alors $\limsup_{n \to \infty} n \|y_n - x_\infty\|_E < \infty$.*

Démonstration. On pose $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = x_0 + T_k(a_n, \dots, a_n)$, $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_{n+1} = r_K + C_0 \alpha_n^k$. Il est immédiat que $\|a_n\|_E \leq \alpha_n$.

Par ailleurs, $\|a_1 - a_0\|_E = \|x_0\|_E \leq r_k = \alpha_1 - \alpha_0$ et (en utilisant l'inégalité ii) du Lemme 1)

$$\begin{aligned} \|a_{n+2} - a_{n+1}\|_E &= \|T_k(a_{n+1}, \dots, a_{n+1}) - T_k(a_n, \dots, a_n)\|_E \\ &\leq C_0 \|a_{n+1} - a_n\|_E \frac{\alpha_{n+1}^k - \alpha_n^k}{\alpha_{n+1} - \alpha_n} \end{aligned}$$

d'où

$$\|a_{n+2} - a_{n+1}\|_E \leq C_0 \|a_{n+1} - a_n\|_E \frac{\alpha_{n+1}^k - \alpha_n^k}{\alpha_{n+1} - \alpha_n} = (\alpha_{n+2} - \alpha_{n+1}) \frac{\|a_{n+1} - a_n\|_E}{\alpha_{n+1} - \alpha_n}$$

et donc par récurrence on a $\|a_{n+1} - a_n\|_E \leq \alpha_{n+1} - \alpha_n$. Cela entraîne que a_n converge vers un point fixe x_∞.

Considérons maintenant la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Il est immédiat que $\|y_n\|_E \leq R_k$ pour tout n. De plus, $\|y_0 - a_0\|_E = \|y_0\|_E \leq R_k = R_k - \alpha_0$. On écrit alors (en utilisant l'inégalité ii) du Lemme 1)

$$\|y_{n+1} - a_{n+1}\|_E = \|T_k(y_n, \dots, y_n) - T_k(a_n, \dots, a_n)\|_E \leq C_0 \|y_n - a_n\|_E \frac{R_k^k - \alpha_n^k}{R_k - \alpha_n}$$

d'où $\|y_{n+1} - a_{n+1}\|_E \leq C_0 \|y_n - a_n\|_E \frac{R_k^k - \alpha_n^k}{R_k - \alpha_n} = (R_k - \alpha_{n+1}) \frac{\|y_n - a_n\|_E}{R_k - \alpha_n}$ et donc par récurrence on a $\|y_n - a_n\|_E \leq R_k - \alpha_n$. En particulier, $\|x_\infty - y_n\| \leq 2(R_k - \alpha_n)$. Cela entraîne l'unicité du point fixe. ∎

4. Une méthode implicite d'approximation

Il peut être parfois utile d'utiliser d'autres méthodes d'approximation pour exploiter certaines propriétés de l'application multi-linéaire T_k. Par exemple, nous allons voir qu'un schéma implicite élémentaire converge encore vers le point fixe.

Théorème 3. *Sous les hypothèses et notations du théorème 1, on a également le résultat d'approximation suivant : Si $z_0 \in B_k$ et si $z_{n+1} \in B_k$ est solution de l'équation linéaire $z_{n+1} = x_0 + T_k(z_n, \ldots, z_n, z_{n+1})$ alors*

$$\limsup_{n\to\infty} n\|z_n - x_\infty\|_E < \infty.$$

Démonstration. On pose

$$b_0 = 0 \quad \text{et} \quad b_{n+1} = x_0 + T_k(b_n, \ldots, b_n, b_{n+1}),$$
$$\beta_0 = 0 \quad \text{et} \quad \beta_{n+1} = r_K + C_0\beta_n^{k-1}\beta_{n+1}.$$

On montre par récurrence que $\|b_n\|_E$ et $\|z_n\|_E$ sont inférieurs ou égaux à R_k : par exemple,

$$\|b_{n+1}\|_E \le r_k + C_0 R_k^{k-1}\|b_{n+1}\|_E,$$

d'où

$$(1 - C_0 R_k^{k-1})\|b_{n+1}\|_E = \frac{k-1}{k}\|b_{n+1}\|_E \le r_k = \frac{k-1}{k}R_k.$$

Par ailleurs,

$$\|b_1 - b_0\|_E = \|x_0\|_E \le r_k = \beta_1 - \beta_0$$

et

$$\begin{aligned}
\|b_{n+2} - b_{n+1}\|_E &= \|T_k(b_{n+1}, \ldots, b_{n+1}, b_{n+2}) - T_k(b_n, \ldots, b_n, b_{n+1})\|_E \\
&\le \|T_k(b_{n+1}, \ldots, b_{n+1}, b_{n+2}) - T_k(b_{n+1}, \ldots, b_{n+1}, b_{n+1})\|_E \\
&\qquad + \|T_k(b_{n+1}, \ldots, b_{n+1}, b_{n+1}) - T_k(b_n, \ldots, b_n, b_{n+1})\|_E \\
&\le C_0\beta_{n+1}^{k-1}\|b_{n+2} - b_{n+1}\|_E + C_0\beta_{n+1}\|b_{n+1} - b_n\|_E \tfrac{\beta_{n+1}^{k-1} - \beta_n^{k-1}}{\beta_{n+1} - \beta_n}
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\|b_{n+2} - b_{n+1}\|_E &\le \frac{C_0}{1 - C_0\beta_{n+1}^{k-1}}\|b_{n+1} - b_n\|_E \frac{\beta_{n+1}^{k-1} - \beta_n^{k-1}}{\beta_{n+1} - \beta_n} \\
&= (\beta_{n+2} - \beta_{n+1})\frac{\|b_{n+1} - b_n\|_E}{\beta_{n+1} - \beta_n}
\end{aligned}$$

et donc par récurrence on a $\|b_{n+1} - b_n\|_E \le \beta_{n+1} - \beta_n$. Cela entraîne que b_n converge vers le point fixe x_∞.

Considérons maintenant la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a

$$\|z_0 - b_0\|_E = \|z_0\|_E \leq R_k = R_k - \beta_0.$$

On écrit alors

$$\begin{aligned}\|z_{n+1} - b_{n+1}\|_E &= \|T_k(z_n, \dots, z_n, z_{n+1}) - T_k(b_n, \dots, b_n, b_{n+1})\|_E \\ &\leq \|T_k(z_n, \dots, z_n, z_{n+1}) - T_k(z_n, \dots, z_n, b_{n+1})\|_E \\ &\quad + \|T_k(z_n, \dots, z_n, b_{n+1}) - T_k(b_n, \dots, b_n, b_{n+1})\|_E \\ &\leq C_0 R_k^{k-1}\|z_{n+1} - b_{n+1}\|_E + C_0\beta_{n+1}\|z_n - b_n\|_E \tfrac{R_k^{k-1} - \beta_n^{k-1}}{R_k - \beta_n}\end{aligned}$$

d'où

$$\|z_{n+1} - b_{n+1}\|_E \leq \frac{C_0}{1 - C_0 R_k^{k-1}}\|z_n - b_n\|_E \frac{R_k^{k-1} - \beta_n^{k-1}}{R_k - \beta_n} = (R_k - \beta_{n+1})\frac{\|z_n - b_n\|_E}{R_k - \beta_n}$$

et donc par récurrence on a $\|z_n - b_n\|_E \leq R_k - \beta_n$. En particulier, $\|x_\infty - z_n\| \leq 2(R_k - \beta_n)$. ■

5. La méthode de Newton

Théorème 4 (Méthode de Newton). *Sous les hypothèses et notations du théorème 1, on a également le résultat d'approximation suivant : si $w_0 = 0$ et si $w_{n+1} \in B_k$ est solution de l'équation linéaire*

$$w_{n+1} = x_0 + T_k(w_n, \dots, w_n) + DT_k(w_n).(w_{n+1} - w_n)$$

(où DT_k est la différentielle de l'application $w \mapsto T_k(w, \dots, w)$) alors

$$\limsup_{n\to\infty} 2^n \|w_n - x_\infty\|_E < \infty\,.$$

Démonstration. On pose $\gamma_0 = 0$ et

$$\gamma_{n+1} = r_k + C_0\gamma_n^k + kC_0\gamma_n^{k-1}(\gamma_{n+1} - \gamma_n).$$

On montre par récurrence que $\|w_{n+1} - w_n\|_E \leq \gamma_{n+1} - \gamma_n$ et donc aussi que $\|w_{n+1}\|_E \leq \gamma_{n+1}$. On remarque d'abord que c'est vrai pour $n = 0$ puisque $\|w_1 - w_0\|_E = \|x_0\|_E \leq r_k = \gamma_1 - \gamma_0$. Pour passer au rang $n+1$, on remarque que

$$\|DT_k(w_{n+1})\|_{op} \leq C_0 k \|w_{n+1}\|_E^{k-1} \leq C_0 k \gamma_{n+1}^{k-1} < 1,$$

de sorte que w_{n+2} est bien défini.

On écrit alors

$$\begin{aligned}\|w_{n+2}-w_{n+1}\|_E = \|&T_k(w_{n+1},,\dots,w_{n+1}) + DT_k(w_{n+1}).(w_{n+2}-w_{n+1})\\ &- T_k(w_n,\dots,w_n) - DT_k(w_n).(w_{n+1}-w_n)\|_E\\ \le \|&DT_k(w_{n+1}).(w_{n+2}-w_{n+1})\|_E + \|T_k(w_{n+1},\dots,w_{n+1})\\ &- T_k(w_n,\dots,w_n) - DT_k(w_n).(w_{n+1}-w_n)\|_E\end{aligned}$$

On utilise alors les inégalités iv) et v) du Lemme 1 pour obtenir

$$\|DT_k(w_{n+1}).(w_{n+2}-w_{n+1})\|_E \le C_0 k\gamma_{n+1}^{k-1}\|w_{n+2}-w_{n+1}\|_E$$

et

$$\begin{aligned}\|T_k(w_{n+1},\dots,w_{n+1}) - &T_k(w_n,\dots,w_n) - DT_k(w_n).(w_{n+1}-w_n)\|_E\\ &\le C_0\|w_{n+1}-w_n\|_E^2\frac{\gamma_{n+1}^k-\gamma_n^k-k\gamma_n^{k-1}(\gamma_{n+1}-\gamma_n)}{(\gamma_{n+1}-\gamma_n)^2}\end{aligned}$$

d'où par l'hypothèse de récurrence

$$\|w_{n+2}-w_{n+1}\|_E \le \frac{1}{1-C_0k\gamma_{n+1}^{k-1}}\,C_0\big(\gamma_{n+1}^k-\gamma_n^k-k\gamma_n^{k-1}(\gamma_{n+1}-\gamma_n)\big) = \gamma_{n+2}-\gamma_{n+1}.$$

■

6. Amélioration de la régularité

On se place toujours dans les hypothèses du Théorème 1. Si on suppose de plus que, pour un autre espace de Banach F, l'application k-linéaire envoie continument $(x_1,\dots,x_k)$ dans F lorsque les x_i appartiennent à (l'adhérence de $F\cap E$ dans) E et que l'un au moins des x_i appartient également à F (ce qui s'écrit qu'il existe une constante C_1 telle que pour tous $x_1,\dots,x_k\in F$ on ait

$$\|T(x_1,\dots,x_k)\|_F \le C_1 \min_{1\le i\le k}\Big((\|x_i\|_F+\|x_i\|_E)\prod_{j\neq i}\|x_j\|_E\Big)$$

alors on va montrer que si $x_0\in F$ et $\|x_0\|_E\le r_k$ la solution x_∞ dans B_k de $x = x_0 + T_k(x,\dots,x)$ vérifie encore $x_\infty\in F$ (ceci sans aucune condition de taille sur $\|x_0\|_F$). De plus, les suites itératives considérées dans les théorèmes 2, 3 et 4 convergent vers x_∞ dans F également.

Pour alléger les notations (quitte à remplacer F par $E\cap F$), on peut supposer que F s'injecte continument dans E.

Théorème 5 (Amélioration de la régularité). *Sous les hypothèses et notations du théorème 1, si F est un espace de Banach qui s'injecte continument dans E et si pour tous $x_1, \dots, x_k \in F$ on a*

$$\|T(x_1, \dots, x_k)\|_F \leq C_1 \min_{1 \leq i \leq k} \big(\|x_i\|_F \prod_{j \neq i} \|x_j\|_E\big)$$

alors si $x_0 \in F$ et $\|x_0\|_E \leq r_k$ la solution x_∞ dans B_k de $x = x_0 + T_k(x, \dots, x)$ vérifie $x_\infty \in F$.

Plus précisément, on a :

i) *Si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par récurrence par $y_0 \in B_k \cap F$ et $y_{n+1} = x_0 + T_k(y_n, \dots, y_n)$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $y_n \in F$ et de plus $\limsup_{n\to\infty} n\|y_n - x_\infty\|_E < \infty$.*

ii) *si $z_0 \in B_k \cap F$ et si $z_{n+1} \in B_k$ est solution de l'équation linéaire $z_{n+1} = x_0 + T_k(z_n, \dots, z_n, z_{n+1})$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $z_n \in F$ et de plus $\limsup_{n\to\infty} n\|z_n - x_\infty\|_F < \infty$.*

iii) *si $w_0 = 0$ et si $w_{n+1} \in B_k$ est solution de l'équation $w_{n+1} = x_0 + T_k(w_n, \dots, w_n) + DT_k(w_n).(w_{n+1} - w_n)$ (où DT_k est la différentielle de l'application $w \mapsto T_k(w, \dots, w)$) alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $w_n \in F$ et de plus $\limsup_{n\to\infty} 2^n\|w_n - x_\infty\|_F < \infty$.*

Démonstration. Comme pour le théorème 2, on considère d'abord la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = x_0 + T_k(a_n, \dots, a_n)$. Il est immédiat par récurrence que $a_n \in F$ pour tout n. De plus,

$$\begin{aligned}\|a_{n+2} - a_{n+1}\|_F &= \|T_k(a_{n+1}, \dots, a_{n+1}) - T_k(a_n, \dots, a_n)\|_E \\ &\leq C_1\|a_{n+1} - a_n\|_E \; k \sup(\|a_n\|_F, \|a_{n+1}\|_F)\big(\sup(\|a_n\|_E, \|a_{n+1}\|_E)\big)^{k-2}\end{aligned}$$

Or on sait que $\|a_n\|_E \leq R_k$ pour tout n et que

$$\limsup_{n\to\infty} n^2\|a_{n+1} - a_n\|_E \leq \frac{2R_k}{k-1}.$$

Il existe donc une constante C_2 qui ne dépend pas de n telle que

$$\|a_{n+2} - a_{n+1}\|_F \leq C_2 \frac{1}{n^2} \sup(\|a_n\|_F, \|a_{n+1}\|_F).$$

Si $M_n = \sup_{l\leq n} \|a_l\|_F$, on a $M_{n+2} \leq (1 + \frac{C_2}{n^2})M_{n+1}$. Comme

$$\prod_{n\geq 1} 1 + \frac{C_2}{n^2} < \infty,$$

on voit que $\sup_{n\in\mathbb{N}} M_n < \infty$ et donc $\sup_{n\in\mathbb{N}} n^2\|a_{n+1} - a_n\|_F < \infty$. Cela prouve que a_n converge dans F et donc que $x_\infty \in F$.

Considérons maintenant la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il est immédiat par récurrence que $y_n \in F$ pour tout n. De plus,

$$\begin{aligned}\|y_{n+1}-x_\infty\|_F &= \|T_k(y_n,\dots,y_n)-T_k(x_\infty,\dots,x_\infty)\|_F\\ &\le C_1\|y_n-x_\infty\|_E\ k\sup(\|y_n\|_F,\|x_\infty\|_F)\big(\sup(\|y_n\|_E,\|x_\infty\|_E)\big)^{k-2}\\ &\le C_1\|y_n-x_\infty\|_E\ k(\|y_n-x_\infty\|_F+\|x_\infty\|_F)\ R_k^{k-2}\end{aligned}$$

Or on sait que $\limsup_{n\to\infty} n\|y_n-x_\infty\|_E<\infty$. Il existe donc une constante C_3 qui ne dépend pas de n telle que

$$\|y_{n+1}-x_\infty\|_F \le C_3\frac{1}{n}(\|y_n-x_\infty\|_F+\|x_\infty\|_F).$$

On choisit alors n_0 tel que $\frac{C_3}{n_0}\le\frac12$ et on choisit Γ tel que $2C_3\|x_\infty\|_F\le\Gamma$ et $n_0\|y_{n_0+1}-x_\infty\|_F\le\Gamma$. Il est alors immédiat par récurrence que pour $n\ge n_0$ on a $\|y_{n+1}-x_\infty\|_F\le\frac{\Gamma}{n}$. Le point i) est donc démontré.

Pour démontrer le point ii), on commence par vérifier que z_n appartient bien à F. Mais c'est immédiat par récurrence puisque si $z_n\in F$ et $z_{n+1}\in E$ on a bien $T_k(z_n,\dots,z_n,z_{n+1})\in F$.

On écrit alors

$$\begin{aligned}\|z_{n+1}-x_\infty\|_F &= \|T_k(z_n,\dots,z_n,z_{n+1})-T_k(x_\infty,\dots,x_\infty,x_\infty)\|_F\\ &\le \|T_k(z_n,\dots,z_n,z_{n+1})-T_k(z_n,\dots,z_n,x_\infty)\|_F\\ &\quad+\|T_k(z_n,\dots,z_n,x_\infty)-T_k(x_\infty,\dots,x_\infty,x_\infty)\|_F\\ &\le C_1R_k^{k-2}\|z_n\|_F\|z_{n+1}-x_\infty\|_E\\ &\quad+C_1(k-1)\sup(\|z_n\|_F,\|x_\infty\|_F)\|z_n-x_\infty\|_E R_k^{k-2}\end{aligned}$$

Or on sait que $\limsup_{n\to\infty} n\|z_n-x_\infty\|_E<\infty$. Il existe donc une constante C_4 qui ne dépend pas de n telle que

$$\|z_{n+1}-x_\infty\|_F\le C_4\frac{1}{n}(\|z_n-x_\infty\|_F+\|x_\infty\|_F)$$

et on conclut comme pour la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour démontrer le point iii), on commence par vérifier que w_n appartient bien à F. Mais c'est immédiat par récurrence puisque si $w_n\in F$ et $w_{n+1}\in E$ on a bien $DT_k(w_n).w_{n+1}\in F$.

On écrit alors

$$\begin{aligned}\|w_{n+1}-x_\infty\|_F &= \|T_k(w_n,\dots,w_n)+DT_k(w_n).(w_{n+1}-w_n)-T_k(x_\infty,\dots,x_\infty)\|_F\\ &\le \|DT_k(w_n).(w_{n+1}-w_n)\|_F+\|T_k(w_n,\dots,w_n)-T_k(x_\infty,\dots,x_\infty)\|_F\\ &\le C_1kR_k^{k-2}\|w_n\|_F\|w_{n+1}-w_n\|_E\\ &\quad+C_1kR_k^{k-2}\min(\|w_n\|_F,\|x_\infty\|_F)\|)\|w_n-x_\infty\|_E\end{aligned}$$

Or on sait que $\limsup_{n\to\infty} 2^n \|w_n - x_\infty\|_E < \infty$. Il existe donc une constante C_5 qui ne dépend pas de n telle que

$$\|w_{n+1} - x_\infty\|_F \leq C_5 2^{-n}(\|w_n - x_\infty\|_F + \|x_\infty\|_F)$$

et on conclut facilement : on choisit n_0 tel que $\frac{C_5}{2^{n_0}} \leq \frac{1}{2}$ et on choisit Γ tel que $2C_5\|x_\infty\|_F \leq \Gamma$ et $2^{n_0}\|w_{n_0+1} - x_\infty\|_F \leq \Gamma$. Il est alors immédiat par récurrence que pour $n \geq n_0$ on a $\|w_{n+1} - x_\infty\|_F \leq \frac{\Gamma}{2^n}$. ■

7. Cas d'un contrôle plus faible

Les résultats du Théorème 5 restent valables même si on suppose qu'il faut contrôler la norme dans F de tous les arguments x_i (au lieu d'un seul dans le Théorème 5), pourvu que l'influence de tous les termes sauf un ne soit que partielle :

Théorème 6. *Les résultats du Théorème 5 restent valables sous l'hypothèse plus faible que, pour un $\theta \in]0,1[$ et une constante C_1, on a pour tous $x_1, \dots, x_k \in F$*

$$\begin{aligned}&\|T(x_1,\dots,x_k)\|_F \\ &\quad \leq C_1 \min_{1\leq i\leq k}\Big(\|x_i\|_F \prod_{l\neq i}\|x_l\|_E + \sum_{j\neq i}\|x_i\|_F^{\theta}\|x_j\|_E^{\theta}\|x_i\|_E^{1-\theta}\|x_j\|_F^{1-\theta}\prod_{l\neq i,j}\|x_l\|_E\Big)\end{aligned}$$

La démonstration du théorème 6 suit le modèle du théorème 5. La principale difficulté est de justifier que z_n et w_n appartiennent bien à F. Cela se vérifie par le lemme suivant :

Lemme 3. *Soient E et F deux espaces de Banach tels que F s'injecte continument dans E. Soit L un opérateur linéaire continu de E dans E et de F dans F tel que*

- i) *la norme d'opérateur de L sur E soit strictement plus petite que 1 : $\|Lx\|_E \leq A_1\|x\|_E$ avec $A_1 < 1$*
- ii) *pour un $\theta \in]0,1[$, L soit continu de $[F,E]_{\theta,1}$ dans F : $\|Lx\|_F \leq A_2\|x\|_F^{1-\theta}\|x\|_E^{\theta}$.*

Alors $Id - L$ est inversible sur F. Plus précisément, on a

$$\limsup_{k\to\infty}\|L^k\|_{\mathcal{L}(F,F)}^{\frac{1}{k}} \leq A_1.$$

Démonstration du lemme 3. Si $x \in E$, on a

$$(Id - L)^{-1}x = \sum_{k \in \mathbb{N}} L^k x.$$

Or, si $x \in F$, on a

$$\|L^{k+1}x\|_F = \|L(L^k x)\|_F \le A_2 \|L^k x\|_F^{1-\theta} (A_1^k \|x\|_E)^\theta.$$

Si on choisit Γ assez grand pour que $A_2\|x\|_E^\theta \le A_1 \Gamma^\theta$ et $\|x\|_F \le \Gamma$, on obtient par récurrence que $\|L^k x\|_F \le \Gamma A_1^k$. En particulier, on a (si $\|x\|_E \le A_3 \|x\|_F$)

$$\|L^k\|_{\mathcal{L}(F,F)} \le \big(1 + A_3 (\frac{A_1}{A_2})^{\frac{1}{\theta}}\big) A_1^k.$$

■

Démonstration du théorème 6. Comme pour le théorème 5, on considère d'abord la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = x_0 + T_k(a_n, \dots, a_n)$. On a

$$\begin{aligned} \|a_{n+2} - a_{n+1}\|_F &= \|T_k(a_{n+1}, \dots, a_{n+1}) - T_k(a_n, \dots, a_n)\|_F \\ &\le C_1 k \Big(\|a_{n+1} - a_n\|_E \ \sup(\|a_n\|_F, \|a_{n+1}\|_F) \big(\sup(\|a_n\|_E, \|a_{n+1}\|_E) \big)^{k-2} \\ &\quad + \|a_{n+1} - a_n\|_E^\theta \ \|a_{n+1} - a_n\|_F^{1-\theta} \times \\ &\qquad \times \sup(\|a_n\|_F, \|a_{n+1}\|_F)^\theta \big(\sup(\|a_n\|_E, \|a_{n+1}\|_E) \big)^{k-1-\theta} \Big) \end{aligned}$$

Or on sait que $\|a_n\|_E \le R_k$ pour tout n et que

$$\limsup_{n \to \infty} n^2 \|a_{n+1} - a_n\|_E \le \frac{2R_k}{k-1}.$$

Il existe donc une constante C_2 qui ne dépend pas de n telle que

$$\begin{aligned} \|a_{n+2} - a_{n+1}\|_F \le C_2 \Big(& \frac{1}{n^2} \sup(\|a_n\|_F, \|a_{n+1}\|_F) \\ & + \frac{1}{n^{2\theta}} \sup(\|a_n\|_F, \|a_{n+1}\|_F)^\theta \|a_{n+1} - a_n\|_F^{1-\theta} \Big). \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young, on voit que pour tout $\epsilon > 0$ il existe une constante $D_2(\epsilon)$ qui ne dépend pas de n telle que

$$\|a_{n+2} - a_{n+1}\|_F \le \epsilon \|a_{n+1} - a_n\|_F + D_2(\epsilon) \frac{1}{n^2} \sup(\|a_n\|_F, \|a_{n+1}\|_F).$$

On prend $\epsilon = 1/4$. Si

$$M_n = \sum_{l=1}^n \|a_l - a_{l-1}\|_F \qquad \text{et} \qquad \omega_n = \frac{\|a_{n+1} - a_n\|_F}{M_{n+1}},$$

on a

$$\omega_{n+1} \le \frac{\omega_n}{4} + \frac{D_2}{n^2}.$$

Pour $n \geq 3$, on a donc

$$n^2 \omega_{n+1} \leq D_2 + \frac{9}{16}(n-1)^2 \omega_n$$

et donc

$$\omega_{n+1} \leq \frac{\sup(16D_2/7, 4\omega_3)}{n^2} = \frac{E_2}{n^2}.$$

Cela donne

$$M_{n+2} \leq \Big(1 - \frac{E_2}{n^2}\Big)^{-1} M_{n+1}.$$

On a donc $\sup_{n\in\mathbb{N}} M_n < \infty$ et donc

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} n^2 \|a_{n+1} - a_n\|_F < \infty.$$

Cela prouve que a_n converge dans F et donc que $x_\infty \in F$.

Pour estimer y_n, on écrit

$$\begin{aligned}
\|y_{n+1} - x_\infty\|_F &= \|T_k(y_n, \dots, y_n) - T_k(x_\infty, \dots, x_\infty)\|_F \\
&\leq C_1 k\big(\|y_n - x_\infty\|_E \ \sup(\|y_n\|_F, \|x_\infty\|_F)\big(\sup(\|y_n\|_E, \|x_\infty\|_E)\big)^{k-2} \\
&\quad + \|y_n - x_\infty\|_E^\theta \|y_n - x_\infty\|_F^{1-\theta} \times \\
&\qquad \times \ \sup(\|y_n\|_F, \|x_\infty\|_F)^\theta \big(\sup(\|y_n\|_E, \|x_\infty\|_E)\big)^{k-1-\theta}\big)
\end{aligned}$$

Or on sait que $\limsup_{n\to\infty} n\|y_n - x_\infty\|_E < \infty$. Il existe donc une constante C_3 qui ne dépend pas de n telle que

$$\begin{aligned}
&\|y_{n+1} - x_\infty\|_F \\
&\quad \leq C_3\big(\frac{1}{n}\sup(\|y_n\|_F, \|x_\infty\|_F) + \frac{1}{n^\theta}\sup(\|y_n\|_F, \|x_\infty\|_F)^\theta \|y_n - x_\infty\|_F^{1-\theta}\big)\,.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young, on voit que pour tout $\epsilon > 0$ il existe une constante $D_3(\epsilon)$ qui ne dépend pas de n telle que

$$\|y_{n+1} - x_\infty\|_F \leq \epsilon\|y_n - x_\infty\|_F + D_3(\epsilon)\frac{1}{n}(\|y_n - x_\infty\|_F + \|x_\infty\|_F)\,.$$

On prend $\epsilon = 1/4$. On choisit alors $n_0 \geq 2$ tel que $\frac{D_3}{n_0} \leq \frac{1}{4}$ et on choisit Γ tel que $4D_3\|x_\infty\|_F \leq \Gamma$ et $n_0\|y_{n_0+1} - x_\infty\|_F \leq \Gamma$. Il est alors immédiat par récurrence que pour $n \geq n_0$ on a $\|y_{n+1} - x_\infty\|_F \leq \frac{\Gamma}{n}$.

Pour estimer z_n, on écrit

$$\begin{aligned}
&\|z_{n+1} - x_\infty\|_F = \|T_k(z_n, \dots, z_n, z_{n+1}) - T_k(x_\infty, \dots, x_\infty, x_\infty)\|_F \\
&\leq \|T_k(z_n, \dots, z_n, z_{n+1}) - T_k(z_n, \dots, z_n, x_\infty)\|_F \\
&\quad + \|T_k(z_n, \dots, z_n, x_\infty) - T_k(x_\infty, \dots, x_\infty, x_\infty)\|_F \\
&\leq C_1\big(\|z_{n+1} - x_\infty\|_E \ \sup(\|z_n\|_F, \|x_\infty\|_F)\big(\sup(\|z_n\|_E, \|x_\infty\|_E)\big)^{k-2} \\
&\quad + \|z_{n+1} - x_\infty\|_E^\theta \ \|z_{n+1} - x_\infty\|_F^{1-\theta} \times \\
&\qquad\qquad \times \sup(\|z_n\|_F, \|x_\infty\|_F)^\theta \big(\sup(\|z_n\|_E, \|x_\infty\|_E)\big)^{k-1-\theta}\big) \\
&\quad + C_1(k-1)\big(\|z_n - x_\infty\|_E \ \sup(\|z_n\|_F, \|x_\infty\|_F)\big(\sup(\|z_n\|_E, \|x_\infty\|_E)\big)^{k-2} \\
&\quad + \|z_n - x_\infty\|_E^\theta \ \|z_n - x_\infty\|_F^{1-\theta} \times \\
&\qquad\qquad \times \sup(\|z_n\|_F, \|x_\infty\|_F)^\theta \big(\sup(\|z_n\|_E, \|x_\infty\|_E)\big)^{k-1-\theta}\big)
\end{aligned}$$

Or on sait que $\limsup_{n\to\infty} n\|z_n - x_\infty\|_E < \infty$. Il existe donc une constante C_4 qui ne dépend pas de n telle que

$$\begin{aligned}
\|z_{n+1} - x_\infty\|_F \leq C_4\Big(&\frac{\sup(\|z_n\|_F, \|x_\infty\|_F)}{n} + \big(\frac{\sup(\|z_n\|_F, \|x_\infty\|_F)}{n}\big)^\theta \times \\
&\times \left(\|z_n - x_\infty\|_F^{1-\theta} + \|z_{n+1} - x_\infty\|_F^{1-\theta}\right)\Big) .
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young, on voit que pour tout $\epsilon > 0$ il existe une constante $D_4(\epsilon)$ qui ne dépend pas de n telle que

$$\|z_{n+1}-x_\infty\|_F \leq \epsilon(\|z_n-x_\infty\|_F+\|z_{n+1}-x_\infty\|_F)+D_4(\epsilon)\frac{1}{n}(\|z_n-x_\infty\|_F+\|x_\infty\|_F) .$$

On prend $\epsilon = 1/5$. On obtient alors

$$\|z_{n+1} - x_\infty\|_F \leq \frac{1}{4}\|z_n - x_\infty\|_F + \frac{5}{4}D_4\frac{1}{n}(\|z_n - x_\infty\|_F + \|x_\infty\|_F)$$

et on conclut comme pour la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour estimer w_n, on écrit

$$\begin{aligned}
&\|w_{n+1} - x_\infty\|_F \\
&= \|T_k(w_n, , \dots, w_n) + DT_k(w_n).(w_{n+1} - w_n) - T_k(x_\infty, \dots, x_\infty)\|_F \\
&\leq \|DT_k(w_n).(w_{n+1} - w_n)\|_F + \|T_k(w_n, \dots, w_n) - T_k(x_\infty, \dots, x_\infty)\|_F \\
&\leq C_1 k R_k^{k-2}\|w_n\|_F\|w_{n+1}-w_n\|_E + C_1 k R_k^{k-2}\min(\|w_n\|_F, \|x\|_F)\|)\|w_n - x_\infty\|_E \\
&\leq C_1 k R_k^{k-2}\big(\|w_{n+1} - w_n\|_E \ \|w_n\|_F \\
&\qquad\qquad + \|w_{n+1} - w_n\|_E^\theta \ \|w_{n+1} - w_n\|_F^{1-\theta} \ \|w_n\|_F^\theta \ \|w_n\|_F^{1-\theta}\big) \\
&\quad + C_1 k R_k^{k-2}\big(\|w_n - x_\infty\|_E \ \sup(\|w_n\|_F, \|x_\infty\|_F) \\
&\quad + \|w_n - x_\infty\|_E^\theta \ \|w_n - x_\infty\|_F^{1-\theta} \times \\
&\qquad\qquad \times \sup(\|w_n\|_F, \|x_\infty\|_F)^\theta \big(\sup(\|w_n\|_E, \|x_\infty\|_E)\big)^{1-\theta}\big)
\end{aligned}$$

Or on sait que $\limsup_{n\to\infty} 2^n \|w_n - x_\infty\|_E < \infty$. Il existe donc une constante C_5 qui ne dépend pas de n telle que

$$\|w_{n+1} - x_\infty\|_F \leq C_5 \Big(\frac{\sup(\|w_n\|_F, \|x_\infty\|_F)}{2^n} + \big(\frac{\sup(\|w_n\|_F, \|x_\infty\|_F)}{2^n}\big)^\theta \times \\ \times (\|w_n - x_\infty\|_F^{1-\theta} + \|w_{n+1} - x_\infty\|_F^{1-\theta}) \Big) .$$

En utilisant l'inégalité de Young, on voit que pour tout $\epsilon > 0$ il existe une constante $D_5(\epsilon)$ qui ne dépend pas de n telle que

$$\|w_{n+1} - x_\infty\|_F \leq \epsilon \big(\|w_n - x_\infty\|_F + \|w_{n+1} - x_\infty\|_F \big) \\ + D_4(\epsilon) \frac{1}{2^n} \big(\|w_n - x_\infty\|_F + \|w_\infty\|_F \big) .$$

On prend $\epsilon = 1/5$. On obtient alors

$$\|w_{n+1} - x_\infty\|_F \leq \frac{1}{4} \|w_n - x_\infty\|_F + \frac{5}{4} D_5 \frac{1}{2^n} (\|w_n - x_\infty\|_F + \|x_\infty\|_F)$$

et on conclut facilement : on choisit n_0 tel que

$$\frac{5}{4} D_5 \frac{1}{2^{n_0}} \leq \frac{1}{4}$$

et on choisit Γ tel que

$$\frac{5}{4} D_5 \|x_\infty\|_F \leq \frac{\Gamma}{4} \qquad \text{et} \qquad 2^{n_0} \|w_{n_0+1} - x_\infty\|_F \leq \Gamma.$$

Il est alors immédiat par récurrence que pour $n \geq n_0$ on a $\|w_{n+1} - x_\infty\|_F \leq \frac{\Gamma}{2^n}$. ■

8. Exemple

Dans [2], Furioli, Lemarié–Rieusset, Zahrouni et Zhioua étudient la régularité des solutions de Koch et Tataru pour les équations de Navier–Stokes. Ils considèrent donc les équations suivantes sur $\vec{u}(t, x)$, $t \in]0, \infty[$, $x \in \mathbb{R}^3$:

$$\partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u}), \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$$

où $\mathbb{P}$ est le projecteur orthogonal sur les champs de vecteurs à divergence nulle. La résolution du problème de Cauchy associé à la valeur initiale $\vec{u}_0$ revient à étudier les solutions de l'équation intégrale

$$\vec{u} = e^{t\Delta} \vec{u}_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} . (\vec{u} \otimes \vec{u}) \, ds .$$

On définit donc l'opérateur bilinéaire B par

$$B(\vec{u}, \vec{v})(t) = \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} . (\vec{u} \otimes \vec{v}) \, ds .$$

Le résultat fondamental de Koch et Tataru [3] est alors le suivant :

Théorème 7 *L'opérateur B est bilinéaire continu sur l'espace $E = \mathcal{E}^3$ où $\mathcal{E}$ est l'espace des fonctions f définies sur $]0,\infty[\times\mathbb{R}^3$ telles que :*

i) $\sqrt{t}\ f(t,x) \in L^\infty(]0,\infty[\times\mathbb{R}^3)$

ii) $\sup_{0<t, x_0\in\mathbb{R}^3} \dfrac{1}{t^{3/2}} \displaystyle\int\int_{0<s<t, |x-x_0|<\sqrt{t}} |f|^2\ ds\ dx < \infty$

iii) $\sup_{0<t} \|f(t,.)\|_{\dot{B}_\infty^{-1,\infty}} < \infty.$

Le problème de Cauchy sera alors bien posé si $\vec{u}_0$ vérifie la condition de Koch et Tataru : $e^{t\Delta}\vec{u}_0$ appartient à E avec une norme petite (Théorème 1). Si de plus $\vec{u}_0$ vérifie une condition d'intégrabilité ou de régularité, cette condition est préservée en tout temps (Théorèmes 5 et 6) : si $\vec{u}_0 \in (\mathcal{S}')^3$ vérifie la condition de Koch et Tataru et si $\vec{u}$ est la solution associée à $\vec{u}_0$, si de plus $\vec{u}_0$ appartient à l'un des espaces de Banach G suivants

i) espace de Lebesgue $G = L^p, 1 \le p \le \infty$

ii) espace de Besov homogène $G = \dot{B}_p^{s,q}, 1 \le p \le \infty, 1 \le q \le \infty$, $s > -1$

alors si $\vec{u}_0 \in G^3$ on a $\vec{u} \in L^\infty(]0,\infty[, G^3)$.

Dans [2], la démonstration de ce résultat de persistance de régularité passe par la démonstration que $\vec{u}_0$ et $\vec{u}$ appartiennent à un certain espace de Banach $F = X^3$:

i) Cas des espaces de Lebesgue :

Si $G = L^p$, on choisit $X = L^\infty(]0,\infty[, L^p)$. Il suffit de remarquer qu'on a

$$\|fg\|_p \le \|f\|_p\ \|g\|_\infty \qquad \text{et} \qquad \|f * g\|_p \le \|f\|_p\ \|g\|_1.$$

Il est alors immédiat que B est continu de $E \times F$ vers F et de $F \times E$ vers F. Par exemple,

$$\begin{aligned}\|B(\vec{\alpha},\vec{\beta})\|_p &\le C \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} \frac{1}{\sqrt{s}} \sqrt{s} \|\vec{\alpha}(s)\|_\infty\ \|\vec{\beta}(s)\|_p\ ds \\ &\le C' \sup_{t>0} \sqrt{t} \|\vec{\alpha}(t)\|_\infty \sup_{t>0} \|\vec{\beta}(t)\|_p.\end{aligned}$$

ii) Cas des espaces singuliers ($G = \dot{B}_p^{s,q}, s < 0$) :

On choisit

$$X = \{f \ /\ t^{-s/2} f(t,x) \in L^q(]0,\infty[, \frac{dt}{t}, L^p(dx))\}.$$

Il est encore facile de vérifier que B est continu de $E \times F$ vers F et de $F \times E$ vers F.

iii) Cas des espaces de régularité nulle ($G = \dot{B}_p^{s,q}, s = 0$) :
On remarque que $\dot{B}_p^{0,q} \cap \dot{B}_\infty^{-1,\infty} \subset \dot{B}_{2p}^{-1/2,\infty}$. On peut alors choisir

$$X = \{f \ / \ \sup_{t>0} t^{1/4} \|f(t,.)\|_{2p} < \infty\} .$$

iv) Cas des espaces réguliers ($G = \dot{B}_p^{s,q}, s > 0$) :
On choisit

$$X = L^\infty(]0,\infty[, \dot{B}_p^{s,q}) .$$

On part de l'inégalité bien connue

$$\|fg\|_{\dot{B}_p^{s,q}} \leq \|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}} \|g\|_\infty + \|f\|_\infty \|g\|_{\dot{B}_p^{s,q}} .$$

Elle permet de démontrer que B est continue de $(E \cap F) \times (E \cap F)$ vers F. Mais pour appliquer le théorème 6, il faut affaiblir le rôle de la norme $\|g\|_{\dot{B}_p^{s,q}}$. Pour cela, on montre dans [2] que, pour $s > 0$, si $s/(s+1) < \lambda < 1$, si $f \in \dot{B}_p^{s,q} \cap \dot{B}_\infty^{-1,\infty}$ et $g \in \dot{B}_p^{s,q} \cap L^\infty$, alors on peut décomposer fg en $fg = u + v$ où

$$\|u\|_{\dot{B}_p^{s,q}} \leq C_1 \ \|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}} \ \|g\|_\infty$$

et

$$\|v\|_{\dot{B}_p^{s-\lambda,q}} \leq C_2 \ (\|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}} \ \|g\|_\infty)^{1-\lambda} \ (\|f\|_{\dot{B}_\infty^{-1,\infty}} \ \|g\|_{\dot{B}_p^{s,q}})^\lambda .$$

On obtient alors

$$\|B(\vec{\alpha}, \vec{\beta})\|_{\dot{B}_p^{s,q}} \leq C_3 A + C_4 B$$

avec

$$A = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} \frac{1}{\sqrt{s}} \sqrt{s} \|\vec{\alpha}(s)\|_\infty \ \|\vec{\beta}(s)\|_{\dot{B}_p^{s,q}} \ ds$$

et

$$B = \int_0^t (t-s)^{-1/2-\lambda/2} s^{-1/2+\lambda/2} \ \omega(s) \ ds$$

où

$$\omega(s) = \|\vec{\beta}(s)\|_{\dot{B}_p^{s,q}}^{1/r} \ \|\vec{\beta}(s)\|_{\dot{B}_\infty^{-1,\infty}}^{1/r'} \ \|\vec{\alpha}(s)\|_{\dot{B}_p^{s,q}}^{1/r'} \ (\sqrt{s}\|\vec{\alpha}(s)\|_\infty)^{1/r} ,$$

$r = 1/(1-\lambda)$ et $r' = 1/\lambda$. D'où

$$\|B(\vec{\alpha}, \vec{\beta})\|_{\dot{B}_p^{s,q}} \leq C_5 (\|\vec{\alpha}\|_E \|\vec{\beta}\|_F + \|\vec{\beta}\|_F^{1/r} \ \|\vec{\beta}\|_E^{1/r'} \ \|\vec{\alpha}\|_F^{1/r'} \ \|\vec{\alpha}\|_E^{1/r}) .$$

Références

[1] Auscher, P. et Tchamitchian, P. : Espaces critiques pour le système des équations de Navier–Stokes. Preprint, 1999.

[2] Furioli, G., Lemarié-Rieusset, P.G., Zahrouni, E., et Zhioua, A. : Un théorème de persistance de la régularité en norme d'espaces de Besov pour les solutions de Koch et Tataru des équations de Navier–Stokes dans $\mathbb{R}^3$. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **330** (2000), 339–342.

[3] Koch, H. and Tataru, D. : Well-posedness for the Navier–Stokes equations. *Adv. Math.* **157** (2001), 22–35.

[4] Zahrouni, E. : Un théorème de régularité pour l'équation de Burgers généralisée. Preprint, Université de Monastir, 2001.

Recibido: 11 de febrero de 2004

Pierre Gilles Lemarié–Rieusset
Département de mathématiques
Université d'Evry, boulevard F. Mitterrand
91025 Evry cedex, France
Pierre-Gilles.Lemarie@univ-evry.fr