Rend. Lincei Mat. Appl. 21 (2010), 275–286
DOI 10.4171/RLM/572

Calculus of Variations — *La teoria dei perimetri di Caccioppoli–De Giorgi e i suoi più recenti sviluppi*, by Luigi Ambrosio, communicated on 16 April 2010.

Dedicato a Renato Caccioppoli, un matematico geniale e visionario.

Abstract. — In this paper we illustrate the theory of sets of finite perimeter, starting from the pioneering intuitions of Caccioppoli and De Giorgi's seminal papers. In the second part of the paper we illustrate some more recent developments and open problems in metric measure spaces, in Carnot groups and in infinite-dimensional Gaussian spaces.

Key words: Sets of finite perimeter, Caccioppoli sets, currents.

AMS Subject Classification: 49Q15, 49Q20.

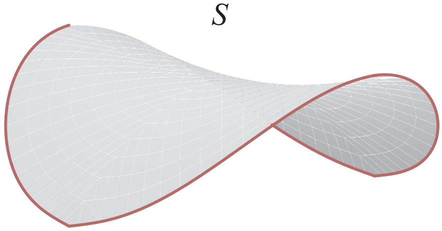
1. Introduzione

In questa conferenza vorrei presentare lo sviluppo della teoria dei perimetri. Partendo dalle idee pionieristiche, e considerate anche velleitarie da alcuni contemporanei, di Caccioppoli, vedremo come il suo programma verrà compiutamente sviluppato da De Giorgi, in una progressione impressionante di lavori dal 1953 (definizione di perimetro basata sul semigruppo del calore) al 1958 (proprietà isoperimetrica dell'ipersfera), fino alla regolarità parziale delle superfici minime nel 1960. Nella seconda parte della conferenza illustrerò invece alcuni recenti sviluppi della teoria, in spazi metrici di misura, in spazi di Carnot e in spazi Gaussiani.

2. Formule di Gauss–Green, Stokes e il calcolo dell'area

Lo studio del problema, posto dal fisico belga Plateau, di trovare le superfici di area minima aventi un contorno assegnato è stato una delle motivazioni più forti nella ricerca di:

(a) classi di superfici 2-dimensionali $\Gamma \subset \mathbf{R}^3$ *generalizzate* (con singolarità);
(b) metodi efficienti di calcolo della loro area superficiale.



Riguardo al problema di Plateau, anche se nel '31 Douglas aveva stabilito un risultato di esistenza per 2-superfici parametrizzate, mancava ancora una teoria generale. Una seconda linea di ricerca era quella di trovare le condizioni più generali possibili (su $\mathbf{V}$, E e Γ) per la validità delle formule di Gauss–Green e Stokes:

$$(GG) \qquad \int_E \operatorname{div} \mathbf{V}\, dx = \int_{\partial E} \langle \mathbf{V}, \boldsymbol{\nu}_E \rangle \, d\sigma_2$$

$$(S) \qquad \int_\Gamma \langle \operatorname{rot} \mathbf{V}, \mathbf{n}_\Gamma \rangle \, d\sigma_2 = \int_{\partial\Gamma} \langle \mathbf{V}, \boldsymbol{\tau}_{\partial\Gamma} \rangle \, d\sigma_1$$

Più in generale si poneva il problema di trovare una teoria efficiente e generale dell'integrazione delle forme differenziali su insiemi k-dimensionali in $\mathbf{R}^n$.

Nello studio del problema la scuola italiana (forse più delle altre) era fortemente ispirata da un lato dalla teoria dell'integrazione di Lebesgue ($k = n$), dall'altro dalla teoria delle curve rettificabili ($k = 1$), due teorie ormai "definitive" e di grande successo.

Nell'introduzione del lavoro [C1], Caccioppoli scrive:

"... Sta di fatto che è indispensabile stabilire queste teorie, se si vuole che siano feconde, nel loro campo naturale di validità; il problema della quadratura della superficie deve essere risoluto sullo stesso piano di generalità che quello della rettificazione delle curve, e se le difficoltà che si incontrano sono incomparabilmente maggiori, ciò non è imputabile che ad una complessità insita nella natura stessa delle cose. La generalità delle ipotesi assicura d'altronde spesso la generalità non solo, ma anche la semplicità e la coerenza dei risultati ultimi."

Scartata, sulla base di un controesempio di Schwarz, l'ovvia estensione della definizione 1-dimensionale (i.e. l'estremo superiore delle aree delle triangolazioni della superficie), molteplici definizioni di area erano state proposte in letteratura.

Nel contesto dei grafici di codimensione 1, spiccava in particolare quella di Lebesgue, studiata a fondo da Tonelli e Cesari:

$$\operatorname{Area}(\Gamma_f) = \inf\left\{ \liminf_{h\to\infty} \int_D \sqrt{1 + |\nabla f_h|^2}\, dx : f_h \in C^1(\overline{D}), \sup|f_h - f| \to 0 \right\},$$

ove $\Gamma_f \subset D \times \mathbf{R}$ è il grafico di f.

Per superfici non parametrizzate, Minkowski aveva invece proposto la seguente definizione:

$$\sigma_{n-1}(\Gamma) = \lim_{r \downarrow 0} \frac{\mathrm{Vol}(I_r(\Gamma))}{2r}, \quad \text{ove } I_r(\Gamma) \text{ è l'intorno di raggio } r \text{ di } \Gamma.$$

3. Lo stato dell'arte negli anni '40–'50

Nello stesso contesto, molta attenzione era stata dedicata alle misure Φ originate dalla costruzione di Carathèodory, che ora richiamiamo: data una funzione $\zeta \geq 0$ definita sui chiusi di $\mathbf{R}^n$ e $\delta > 0$, definiamo

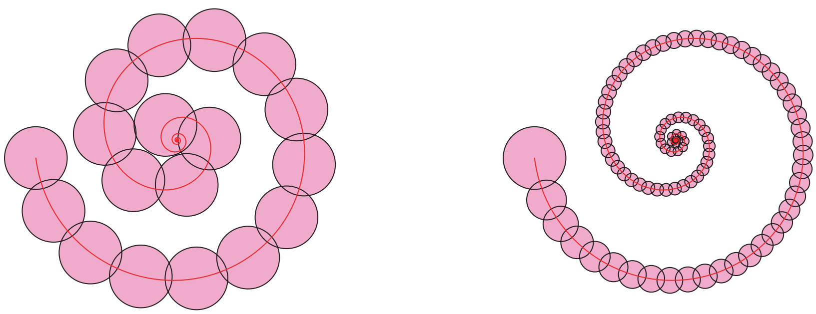
$$\Phi_\delta(\Gamma) := \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \zeta(S_i) : \Gamma \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i, \mathrm{diam}(S_i) < \delta\right\}.$$

A causa della monotonia di $\delta \mapsto \Phi_\delta$ la funzione $\Phi(\Gamma) = \lim_{\delta \downarrow 0} \Phi_\delta(\Gamma)$ è ben definita. Variando ζ si producono varie misure Φ, in particolare:

(a) $\zeta(S) = [\mathrm{diam}(S)]^k$, la misura k-dimensionale $\mathscr{H}^k$ di Hausdorff;
(b) $\zeta(S) = \sup_p \mathrm{Vol}(p(S))$, la misura k-dimensionale di Gross;
(c) $\zeta(S) = \sup_p \mathrm{Vol}(p(S))$ per i soli convessi S, la misura k-dimensionale di Carathéodory.

Per superfici *regolari* k-dimensionali tutte queste misure coincidono (a meno di costanti moltiplicative) con quella definibile elementarmente mediante parametrizzazioni locali.

La figura illustra la necessità di "forzare" i ricoprimenti ad essere piccoli, per avere che Φ coincide con l'area k-dimensionale elementarmente definita (sempre a meno di costanti moltiplicative), per k intero e $\zeta(S) = [\mathrm{diam}(S)]^k$.



Federer mostra ad esempio che la formula di Gauss–Green vale per domini E in $\mathbf{R}^n$ la cui frontiera *topologica* soddisfa $\mathscr{H}^{n-1}(\partial E) < +\infty$. Tuttavia, Caccioppoli è estremamente scettico sull'utilità di questi strumenti per una soluzione definitiva del problema dell'integrazione k-dimensionale in $\mathbf{R}^n$ e in [C2] scrive:

"... Basti ricordare la molteplicità quasi caotica delle definizioni di misura lineare o superficiale (Carathéodory, Gross, Hausdorff, Kolmogoroff, ecc.), la serie di esempi intesi a dimostrare queste a coppie non equivalenti tra loro, e le varie estensioni parziali della formola di Gauss–Green (Schauder, Federer, Lorentz, ecc.), spesso di una generalità artificiosa."

4. Il programma di Caccioppoli

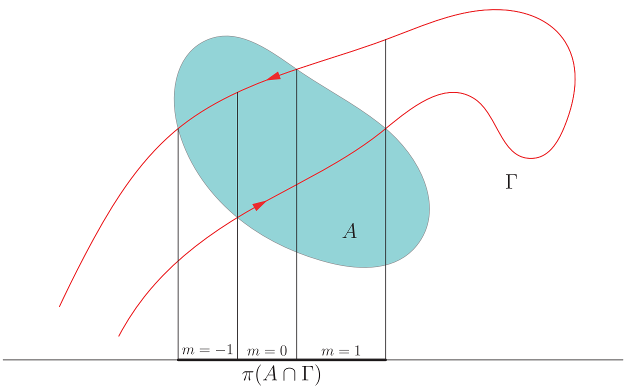
Due sono gli elementi caratterizzanti della teoria proposta da Caccioppoli e poi compiutamente realizzata da De Giorgi:

(a) Il considerare le ipersuperfici *orientate*, e quindi (almeno localmente) bordi di insiemi;
(b) L'abbandono definitivo, nello studio della formula di Gauss–Green, di ogni considerazione di tipo topologico, con l'uso pressoché esclusivo di tecniche di teoria della misura.

In particolare il punto (b), che si rivelerà decisivo, è fortemente contestato da L. C. Young, che recensisce in maniera sprezzante le note [C2], [C3] e scrive:

"... He states that his theory has many advantages over subsequent theories and that it desires to be independent of special topological investigations ... The reviewer has the strong impression that a careful analysis of the notions introduced so light-heartedly would lead more deeply into the topological background than the author considers desirable."

Consideriamo, come in figura, una superficie regolare *orientata* Γ, una porzione aperta A dello spazio $\mathbf{R}^3$, e un iperpiano π di proiezione. Seguendo Peano, Caccioppoli propone di considerare la funzione d'insieme



$$\varphi(A,\pi) = \int_{\pi(A\cap\Gamma)} m(x)\,dx$$

ove m è la molteplicità *algebrica* di $m^{-1}(x) \cap \Gamma$.

Si osserva che $\varphi(\cdot,\pi)$ è la restrizione agli insiemi aperti di una misura σ-additiva, avente massa totale minore dell'area superficiale elementarmente definita. Inoltre $\varphi(A,\pi)$ è esprimibile mediante un integrale superficiale nel modo seguente:

$$\varphi(A,\pi) = \int_{A\cap\Gamma} \langle \mathbf{n}, \mathbf{n}_\pi \rangle \, d\sigma_2,$$

ove $\mathbf{n}$ è il versore normale di Γ e $\mathbf{n}_\pi$ il versore normale a π. Quindi ciascuna di queste funzioni fornisce, localmente, una stima per difetto dell'area.

L'idea di Peano si basava sul procedimento di costruzione dell'elemento d'area a partire dalle misure $\varphi(A,\pi_{xy})$, $\varphi(A,\pi_{yz})$, $\varphi(A,\pi_{zx})$:

$$\mathrm{Area}(\Gamma) = \sup\left\{\sum_{k=1}^{p}\sqrt{\varphi^2(A_k,\pi_{xy}) + \varphi^2(A_k,\pi_{yz}) + \varphi^2(A_k,\pi_{zx})}\right\}$$

(il sup, al variare di tutte le partizioni finite $A_1,\ldots,A_p$ di Γ).

Caccioppoli osserva in [C3] che il membro destro della formula precedente continua ad avere senso nella classe degli insiemi E, da De Giorgi in poi chiamati di perimetro finito, caratterizzati dalla seguente proprietà:

esiste una successione (E_h) di *poliedri*, convergenti a E in *media* (i.e. tali che i volumi delle differenze simmetriche $(E\backslash E_h) \cup (E_h\backslash E)$ tendono a zero) tali che

$$\liminf_{h\to\infty} \mathrm{Area}(\partial E_h) < +\infty.$$

Si osservi anche che le misure $\varphi_h(\cdot,\pi)$ sono definibili elementarmente (essendo gli E_h dei poliedri) e che l'approssimazione in media è estremamente più debole di quella "uniforme" considerata in tutta la letteratura antecedente, anche nel contesto dei grafici. Infine, passando al limite per $h \to \infty$ nella formula di Gauss–Green relativa agli insiemi E_h si ottiene una "versione debole" della stessa formula:

$$\int_E \operatorname{div}\mathbf{V}\,dx\,dy\,dz = \int_{\mathbf{R}^3} \mathbf{V}_1\,d\varphi(\cdot,\pi_{yz}) + \int_{\mathbf{R}^3} \mathbf{V}_2\,d\varphi(\cdot,\pi_{zx}) + \int_{\mathbf{R}^3} \mathbf{V}_3\,d\varphi(\cdot,\pi_{xy}).$$

In questa formula sono scomparse la frontiera topologica e la normale esterna dell'insieme, sostituite dalle misure $\varphi(\cdot,\pi)$. L'abbandono di considerazioni "puntuali" o "topologiche" sta in questa scelta, certamente ardita (e, come abbiamo visto, contestata).

5. La discesa in campo di De Giorgi

Nel 1953–54 scende in campo De Giorgi, che:

(1) in [DG1] ottiene una espressione analitica del perimetro di un insieme, per molti versi assai più maneggevole di quella di Caccioppoli.
(2) in [DG2] mostra che la classe degli insiemi di perimetro $\leq C$ è *compatta* rispetto alla convergenza locale in media; quindi la definizione di Caccioppoli, se si vuole includere i poliedri e avere compattezza, è la più restrittiva possibile.
(3) in [DG2] mostra anche che la definizione di Caccioppoli *equivale* alla validità di una formula debole di Gauss–Green; quindi tutti i casi parziali considerati da Federer e altri autori rientrano nel quadro di Caccioppoli.
(4) in [DG4] mostra che la palla è l'unica soluzione del problema isoperimetrico anche nella classe degli insiemi di perimetro finito.

È importante ricordare, anche alla luce dei recenti sviluppi della teoria, la definizione di perimetro data da De Giorgi (che poi mostra l'equivalenza con altre definizioni). Indichiamo con $\Phi(t,x)$ la soluzione fondamentale dell'equazione del calore in $\mathbf{R}^n$:

$$\Phi(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right).$$

De Giorgi osserva che, posto $u(t,\cdot) = f * \Phi(t,\cdot)$ (la soluzione dell'equazione con dato iniziale $f \in L^\infty$), si ha che

$$t \mapsto \int_{\mathbf{R}^n} |\nabla_x u(t,x)|\,dx \quad \text{è non crescente in } (0,+\infty).$$

Posto $f = \chi_E$, definisce quindi

$$\text{Perimetro}(E) := \lim_{t\downarrow 0} \int_{\mathbf{R}^n} |\nabla_x u(t,x)|\,dx.$$

Questi risultati portano L. C. Young a una (parziale) autocritica, e nella sua recensione al lavoro [DG2] scrive:

"... he is able to show that his definition of perimeter coincides with the one proposed by Caccioppoli. This makes it possible to judge more clearly the precise scope of Caccioppoli's definitions."

L'obiettivo finale viene raggiunto da De Giorgi in [DG3], che sorprendentemente riconcilia la teoria di Caccioppoli con quella di Carathéodory, Hausdorff, Federer e con la teoria degli insiemi rettificabili: mostra infatti che esiste un insieme $\mathscr{F}E \subset \partial E$, detto *frontiera ridotta*, di misura di Hausdorff $(n-1)$-dimensionale (o di Gross, Carathèodory, etc.) finita su cui tutte le misure $\varphi(\cdot,\pi)$ sono concentrate.

Definite la misura perimetro $|D\chi_E|$ e la derivata distribuzionale $D\chi_E = v_E|D\chi_E|$, i punti $x \in \mathscr{F}E$ sono caratterizzati da:

$$\lim_{r\downarrow 0} \fint_{B_r(x)} |v_E(y) - v_{x,r}|^2 \, d|D\chi_E|(y) = 0, \quad \text{ove} \quad \bar{v}_{x,r} := \fint_{B_r(x)} v_E(y)|D\chi_E|(y).$$

Si ottiene così una nuova scrittura della formula di Gauss–Green proposta da Caccioppoli, ora molto più simile a quella classica:

$$\int_E \operatorname{div} \mathbf{V} \, dx \, dy \, dz = -\int_{\mathscr{F}E} \langle \mathbf{V}, \boldsymbol{v}_E \rangle \, d\mathscr{H}^2.$$

Infatti, l'unica differenza è che la frontiera $\mathscr{F}E$ e la normale interna v_E non devono essere intese nel senso convenzionale (di fatto, semplici esempi mostrano che la frontiera topologica può essere estremamente più grande di quella ridotta, e di misura di Lebesgue positiva).

A differenza di L. C. Young (non critico, ma tiepido anche nei confronti dei lavori di De Giorgi), Federer e i suoi collaboratori comprendono immediatamente l'importanza e la novità di questo nuovo approccio alla teoria dell'integrazione.

La tappa in un certo senso conclusiva di questo lungo percorso può essere considerato il lavoro di Federer e Fleming del '60, nel quale la teoria dell'integrazione k-dimensionale in $\mathbf{R}^n$ viene compiutamente sviluppata basandosi da un lato sulle idee introdotte da Caccioppoli e De Giorgi in codimensione 1, dall'altro usando la dualità tra oggetti geometrici e forme differenziali (un'idea introdotta da De Rham), nel contesto dalla teoria delle distribuzioni di Schwartz.

Nel lavoro vengono quindi introdotte le *correnti* k-dimensionali, poste in dualità con le forme k-dimensionali a supporto compatto. In codimensione 1 la teoria delle correnti coincide sostanzialmente con quella dei perimetri.

6. Gli sviluppi più recenti: spazi metrici di misura, gruppi di Carnot, spazi Gaussiani

6.1. Spazi metrici di misura

In uno spazio metrico di misura (X, d, μ) possono essere definiti:

- (Heinonen-Koskela) un "modulo" del gradiente $|\nabla f|$, per funzioni f Lipschitz;
- (Miranda) la classe delle funzioni BV, richiedendo l'esistenza di f_h Lipschitz tali che:

$$\lim_{h\to\infty} \int_X |f_h - f| \, d\mu = 0 \quad \text{e} \quad \liminf_{h\to\infty} \int_X |\nabla f_h| \, d\mu < \infty.$$

Usando questo approccio possono essere definiti insiemi di perimetro finito e una nozione di "misura di superficie" $|D\chi_E|$. Inoltre è possibile sviluppare gran parte della teoria degli spazi di Sobolev (e persino elementi di regolarità ellittica) assumendo la validità della 1-disuguaglianza di Poincaré:

$$\inf_{c\in\mathbb{R}}\int_{B_r(x_0)}|f(x)-c|\,d\mu(x)\leq Cr\int_{B_r(x_0)}|\nabla f|(x)\,d\mu(x).$$

Manca a questo livello di generalità una vera e propria struttura differenziale, e la nozione più appropriata di frontiera sembra quindi la *frontiera essenziale*:

$$\partial^* E := \left\{x : \limsup_{r\downarrow 0}\frac{\mu(B_r(x)\cap E)}{\mu(B_r(x))}>0, \limsup_{r\downarrow 0}\frac{\mu(B_r(x)\backslash E)}{\mu(B_r(x))}>0\right\}.$$

TEOREMA (Ambrosio, 2001). *Se μ è doubling e E ha perimetro finito esistono costanti λ, $\Lambda>0$ dipendenti solo dalla costante di doubling e dalle costanti nella disuguaglianza di Poincaré tali che* (*con* $\xi(B_r(x)) := \mu(B_r(x))/r$)

$$\lambda\mathscr{H}_\xi(A\cap\partial^* E)\leq|D\chi_E|(A\cap\partial^* E)\leq\Lambda\mathscr{H}_\xi(A\cap\partial^* E)\quad\forall A\in\mathscr{B}(X)$$

per ogni insieme di perimetro finito E.

La principale difficoltà deriva, in questo contesto, dalla mancanza del teorema di derivazione delle misure di Besicovitch. La difficoltà viene aggirata usando il fatto che le misure perimetro godono di particolari proprietà (di semicontinuità ad esempio) non soddisfatte da tutte le misure.

6.2. Perimetri in gruppi di Carnot

Un gruppo di Carnot $\mathbb{G}$ è un gruppo di Lie la cui algebra $\mathfrak{g}$ dei campi vettoriali invarianti a sinistra ammette una stratificazione:

$$\mathfrak{g} = V_1\oplus\cdots\oplus V_s.$$

Qui $V_{i+1} = [V_i, V_1]$ per $i\geq 1$, $V_s\neq\{0\}$ e $V_{s+1} = \{0\}$.

- s è il passo del gruppo e V_1 è lo spazio dei campi vettoriali *orizzontali*;
- $Q := \sum_1^s i\dim(V_i)$ è la dimensione *omogenea* di $\mathbb{G}$.

ESEMPIO. Il gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^1$ ha algebra di Lie generata da X, Y, T soddisfacenti:

$$[X,Y]=T,\quad [X,T]=0,\quad [Y,T]=0.$$

Quindi $V_1=\langle X,Y\rangle$, $V_2=\langle T\rangle$. In coordinate esponenziali $(x,y,t)\mapsto\exp(xX+yY+tT)$ i campi sono:

$$X=\partial_x+2y\partial_t,\quad Y=\partial_y-2x\partial_t,\quad T=-4\partial_t$$

e la legge di gruppo è

$$(x, y, t)(x', y', t') = (x + x', y + y', t + t' + 2xy' - 2x'y).$$

In $\mathbb{G}$ è possibile definite la misura di Haar $\mathrm{vol}_{\mathbb{G}}$ e una distanza d_{cc}, detta di Carnot–Carathéodory. Entrambe sono compatibili con le traslazioni e con opportune famiglie di dilatazioni δ_λ (in $\mathbb{H}^1$: $\delta_\lambda(x, y, t) = (\lambda x, \lambda y, \lambda^2 t)$).

In questo contesto gli insiemi di perimetro finito possono essere equivalentemente descritti mediante una formula di integrazione per parti lungo campi X_i che generano V_1

$$\int_E X_i \phi \, d\mathrm{vol}_{\mathbb{G}} = -\int_{\mathbb{G}} \phi \, d\mu_i \quad \phi \in C_c^\infty(\mathbb{G}),\ i = 1, \ldots, m$$

e le seguenti questioni si pongono in maniera naturale:

- Possiamo caratterizzare la misura perimetro $|D\chi_E| := |(\mu_1, \ldots, \mu_m)|$ in maniera più precisa (rispetto a quanto noto in spazi metrici di misura)?
- Qual'è il comportamento su piccole scale di un insieme di perimetro finito?

Teorema (Franchi-Serapioni-Serra Cassano). *Se $s \leq 2$ e E ha perimetro finito in $\mathbb{G}$, allora per $|D\chi_E|$-q.o. x gli insiemi*

$$E_{x,r} := \delta_{1/r}(x^{-1}E)$$

convergono localmente in misura in $\mathbb{G}$, per $r \downarrow 0$, a un semispazio verticale H_x.

In coordinate esponenziali H è un semispazio (Euclideo) t.c. $Y\chi_H = 0$ per ogni $Y \in V_i$, $i > 1$. In gruppi generali $\mathbb{G}$ il miglior risultato a oggi noto è:

Teorema (Ambrosio-Kleiner-LeDonne). *Se E ha perimetro finito in $\mathbb{G}$, allora per $|D\chi_E|$-q.o. x esistono un semispazio verticale H_x e $r_i \downarrow 0$ tali che*

$$\lim_{i\to\infty} E_{x,r_i} = H_x \quad \textit{localmente in misura in } \mathbb{G}.$$

6.3. Teoria dei perimetri in spazi Gaussiani

Sia X spazio uno di Hilbert separabile, sia γ misura Gaussiana non degenere in X, i.e. una misura finita tale che $B \mapsto \gamma(L^{-1}(B))$ è Gaussiana in $\mathbb{R}$ con varianza positiva (i.e. non una delta di Dirac) per ogni funzionale lineare e continuo $L : X \to \mathbb{R}$.

Indichiamo con $H \subset X$ spazio di Cameron-Martin di (X, γ):

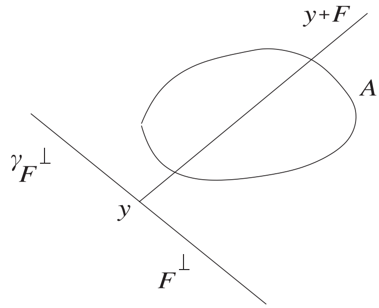
$$H := \{v \in X : (\tau_v)_\# \gamma \ll \gamma\}.$$

Si può mostrare che H è denso in X ma $\gamma(H) = 0$, se X ha dimensione infinita! (il modello tipico, in connessione con l'operatore differenziale $-\Delta u$, è $X = L^2$,

$H = H^1$). Esiste inoltre un sottospazio chiuso $\mathscr{H}$ di $L^2(X,\gamma)$ tale che $R : \mathscr{H} \to H$ definito da

$$Rf := \int_X xf(x)\,d\gamma(x)$$

è bigettivo. Si usa tale bigezione per munire H di una norma Hilbertiana, che rende l'immersione di H in X compatta.



Dato che le classi $L^p(\gamma)$ sono stabili per traslazioni lungo direzioni di H, usando la formula di integrazione per parti

$$\int_X f\partial_h g\,d\gamma = -\int_X g\partial_h f\,d\gamma + \int_X fgR^{-1}(h)\,d\gamma \quad h \in H$$

è possibile definire spazi di Sobolev di tipo W, operatori di regolarizzazione, spazi di Sobolev di tipo H (Gross, Malliavin, Ornstein-Uhlenbeck).

Più recentemente Fukushima-Hino e poi Ambrosio-Maniglia-Miranda-Pallara hanno considerato insiemi di perimetro finito e funzioni BV in questo contesto. Alla luce della teoria classica le seguenti questioni sono naturali:

- Esiste una misura di Hausdorff di codimensione 1 in X?
- Possiamo, con questa misura $\mathscr{H}$, riprodurre il risultato di De Giorgi $|D_\gamma\chi_E|(A) = \mathscr{H}(A \cap \partial^* E)$?

La prima domanda ha una risposta affermativa, grazie a un recente lavoro di (Feyel-De la Pradelle). Tali autori definiscono

$$\mathscr{H}^{\infty-1}(A) := \sup_F \mathscr{H}_F^{\infty-1}(A)$$

ove

$$\mathscr{H}_F^{\infty-1}(A) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}^m}\int_{F^\perp}\int_{A_y} e^{-|x|^2/2}\,d\mathscr{H}_F^{m-1}(x)\,d\gamma_{F^\perp}(y) \quad (m = \dim F).$$

Come illustrato anche in figura, $\gamma_F^\perp \times \gamma_F$ è una fattorizzazione di γ indotta da un sottospazio m-dimensionale F di H (γ_F è la Gaussiana standard in F, con la metrica indotta da H) e gli insiemi A_y sono le sezioni m-dimensionali di A, a y fissato.

Una prima parziale estensione del teorema di rappresentazione della misura perimetro di De Giorgi è stata ottenuta nel 2009 da Hino. Qui riproduciamo in termini un po' informali il suo risultato:

TEOREMA. *Esiste un insieme di Borel $\partial^* E$ tale che*

$$|D_\gamma \chi_E|(A) = \mathscr{H}^{\infty-1}(A \cap \partial^* E) \quad \forall A \in \mathscr{B}(X).$$

Restano comunque aperte le seguenti questioni:

- Esiste in questo contesto una nozione di frontiera ridotta/essenziale?
- Qual'è il comportamento degli insiemi di perimetro finito su piccole scale?

Dato che γ non è doubling (si ha persino $\gamma(B_{2r}(x))/\gamma(B_r(x)) \to +\infty$ per $r \downarrow 0$ per *ogni* x), i tradizionali teoremi di derivazione finito-dimensionali (Lebesgue, Vitali, Besicovitch) falliscono. Le prime indagini su questo problema suggeriscono che è molto più promettente investigare il comportamento per tempi piccoli del semigruppo di Ornstein-Uhlenbeck

$$P_t f(x) := \int_X f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y)\, d\gamma(y),$$

che gioca in questo contesto infinito-dimensionale il ruolo di semigruppo del calore. Si ritorna (sorprendentemente ma non troppo) all'intuizione di De Giorgi di definire il perimetro stesso mediante il semigruppo del calore.

BIBLIOGRAFIA ESSENZIALE

[C1] R. CACCIOPPOLI: *Trasformazioni piane, superficie quadrabili, integrali di superficie*. Rend. Circ. Mat. Palermo, 1930.

[C2] R. CACCIOPPOLI: *Elementi di una teoria generale dell'integrazione k-dimensionale in uno spazio n-dimensionale*. Atti IV Convegno UMI, 1951.

[C3] R. CACCIOPPOLI: *Misura e integrazione sugli insiemi dimensionalmente orientati*. Note I e II, Rend. Accad. Naz. Lincei, 1952.

[DG1] E. DE GIORGI: *Definizione ed espressione analitica del perimetro di un insieme*. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., 1953.

[DG2] E. DE GIORGI: *Su una teoria generale della misura $(r-1)$-dimensionale in uno spazio ad r dimensioni*. Ann. Mat. Pura Appl., 1954.

[DG3] E. DE GIORGI: *Nuovi teoremi relativi alle misure $(r-1)$-dimensionali in uno spazio ad r dimensioni*. Ricerche Mat., 1955.

[DG4] E. DE GIORGI: *Sulla proprietà isoperimetrica dell'ipersfera, nella classe degli insiemi aventi frontiera orientata di misura finita*, Atti Accad. Naz. Lincei Mem. Cl. Sci., 1958.

[DG5] E. De Giorgi: *Frontiere orientate di misura minima*, Seminario di Matematica della Scuola Normale, ETS Pisa, 1960.

Received 8 February 2010,
and in revised form 16 March 2010.

Scuola Normale Superiore di Pisa
Piazza dei Cavalieri, 7
56126 Pisa (Italy)
l.ambrosio@sns.it