Rend. Lincei Mat. Appl. 22 (2011), 269–290
DOI 10.4171/RLM/600

Mathematical Analysis — *Metodi topologici, disequazioni variazionali e traiettorie di rimbalzo elastico*, by Antonio Marino, communicated on 15 April 2011.

Dedicato a Giovanni Prodi.

Abstract. — The first part of this exposition briefly outlines the story of the encounter between two research streams active in Italy and particularly in Pisa in the second half of the twentieth century: Nonlinear Analysis led by Giovanni Prodi and Variational Inequalities led by Guido Stampacchia. This meeting was favoured by an independent proposal of Ennio De Giorgi. In the second part some recent outcomes concerning elastic bounce trajectories are reported.

Key words: Variational inequalities, ϕ-convex functions, elastic bounce trajectories, asymptotically critical points, Lusternik-Schnirelmann category, S^1 relative index.

A.M.S. Subject Classification Numbers: 35A15, 35J85, 37K05, 49J40, 58E05, 58E30, 58E40.

1. Introduction

Queste note si propongono di delineare brevemente alcuni tratti del filone di studi che sorse dall'incontro fra due scuole ricerca attive in Italia nella seconda metà del '900 e di annunciarne anche alcuni recenti sviluppi. Si tratta della scuola in "analisi non lineare" guidata da Giovanni Prodi e della scuola sulle "disequazioni variazionali" della quale era leader Guido Stampacchia. Questi due matematici si trovavano entrambi a Pisa negli anni '60 e '70 e fu un'idea di un altro grandissimo matematico, Ennio De Giorgi, che risiedeva allora nella stessa città a favorire, possiamo dire casualmente, quell'incontro.

Dedicando questa pubblicazione a Giovanni Prodi desidero prima di tutto ricordare il debito di riconoscenza che ha contratto con lui la scuola matematica italiana, in particolare per l'introduzione in Italia delle idee e dei metodi della cosiddetta "analisi non lineare". Fu Giovanni Prodi a riintrodurre in Italia questi concetti, a partire dagli anni '60 del '900, dopo una pausa seguita agli studi di Renato Caccioppoli e di Carlo Miranda.

Fin dalla prima metà del '900 un indirizzo di ricerca sostanzialmente nuovo era nato e si stava diffondendo in Europa e in America: lo studio dei problemi non lineari di Analisi matematica mediante l'analisi della struttura "globale" degli spazi topologici. Questi concetti avevano le loro radici nelle idee sviluppate fra analisi e geometria, ancora verso la fine dell'800, da H. Poincaré (fu fondamentale il suo testo "Analysis situs") e proseguiti da L. Brower, K. Borsuk,

L. Lusternik, L. Schnirelmann, M. Morse e molti altri. Già negli anni '50 questi metodi si erano rivelati dotati di una forza straordinaria nello studio delle equazioni integrali e differenziali, attraverso le ricerche di M. Krasnosel'skĭi, R. Caccioppoli, C. Miranda, J. Leray, R. Palais, O. Ladyzhenskaya e molti altri. Basterebbe questo breve e del tutto incompleto elenco di grandi nomi per comprendere con quanto impeto queste ricerche si andavano sviluppando nella ricerca scientifica internazionale.

Dobbiamo a Prodi e alla sua grande scuola iniziata negli anni '60 se la comunità matematica italiana ha potuto rientrare in questo affascinante filone di ricerche. In quella scuola hanno potuto formarsi numerosissimi allievi, alcuni dei quali sono assurti a posizioni di grande prestigio internazionale.

Negli anni '70 le disequazioni variazionali, con i brillanti studi di J. L. Lions, G. Sampacchia, di H. Brezis e di molti altri matematici prestigiosi, si erano rivelate lo strumento adatto ad affrontare ad esempio problemi con vincoli unilaterali o problemi alla base dei quali ci sono funzionali solo semicontinui (era ben noto che la stessa equazione parabolica semilineare del calore è di questo tipo). Ma fino ad allora in questa giovanissima teoria i funzionali erano in sostanza perturbazioni di funzionali convessi e i vincoli erano convessi e quindi davano luogo a situazioni non rilevanti dal punto di vista della struttura topologica.

Nello stesso periodo, casualmente, De Giorgi propose ad alcuni (allora) giovani matematici di studiare il concetto di quelle che chiamammo "curve di massima pendenza" (o "steepest descent curves") di un funzionale in uno spazio metrico. Casualmente fra quei giovani si trovava qualche allievo della scuola di Prodi e ne nacque un filone di studi che poté compiere alcuni passi avanti nell'applicare i metodi topologici anche allo studio di alcune alcune classi di problemi, legati alla geometria o alla analisi, che coinvolgono funzionali non regolari su vincoli non convessi.

Quelle nozioni—ne vedremo una—sono ideate col preciso scopo di studiare alcune classi di problemi differenziali. Per questo, ad esempio, a differenza di altre teorie di analisi non regolare (come quella di F. H. Clarke), presentano alcune notevoli dissimmetrie tipiche di quei problemi.

Nel paragrafo 3 ricordiamo, per dare qualche idea, due esempi tipici di questi problemi: le geodetiche con ostacolo e gli autovalori dell'operatore di Laplace in presenza di un ostacolo. Nei paragrafi successivi ci occuperemo invece di più recenti sviluppi del problema del rimbalzo elastico. Uno strumento che ci è utile sono le funzioni Φ-convesse che richiamiamo nel paragrafo 2.

2. Le funzioni Φ-convesse

Vogliamo qui richiamare brevemente la definizione e qualche proprietà delle funzioni Φ-convesse perché ci sono utili per tutto il seguito. Esse furono introdotte dopo le curve di massima pendenza, come versione negli spazi lineari delle curve di massima pendenza negli spazi metrici (vedi in particolare [18]).

È evidente che si tratta di nozioni evidentemente "asimmetriche", nel senso che non trattano f e $-f$ nello stesso modo. Come abbiamo detto ciò è dovuto al fatto che questa teoria, come già quella delle funzioni convesse, ha lo scopo di studiare certe classi di equazioni e disequazioni alle derivate parziali di tipo ellittico o parabolico; ed è ben noto che queste hanno in generale proprietà caratterizzate da una netta asimmetria.

Sia H uno spazio di Hilbert. Denotiamo con $(\,\cdot\,)$ e con $\|\ \|$ rispettivamente il suo prodotto scalare e la sua norma. Sia W un sottoinsieme aperto di H e sia $f : W \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una assegnata funzione su W. Poniamo

$$D(f) = \{u \in W \mid f(u) \in \mathbb{R}\}.$$

Richiamiamo anzitutto la nozione di sottodifferenziale comunemente nota come sottoddifferenziale di Fréchet.

Definizione 2.1. *Se $u \in D(f)$ diciamo sottodifferenziale di f in u l'insieme (eventualmente vuoto) $\partial^- f(u)$ degli α di H tali che*

$$\liminf_{v \to u} \frac{f(v) - f(u) - (\alpha \cdot v - u)}{\|v - u\|} \geq 0.$$

È evidente che $\partial^- f(u)$ è un sottoinsieme chiuso e convesso di H.

Se $\partial^- f(u) \neq \emptyset$ diciamo gradiente inferiore di f in u e denotiamo con $\operatorname{grad}^- f(u)$ l'elemento di minima norma di $\partial^- f(u)$.

Diciamo che un punto u di $D(f)$ è un punto inferiormente stazionario per f se $0 \in \partial^- f(u)$.

Osserviamo subito che se f è una funzione differenziabile in u o convessa (se $W = H$), il sottodifferenziale qui introdotto coincide evidentemente con quello usuale.

Sia ora $\Phi : W^2 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funzione continua.

Definizione 2.2. *Diciamo che f è una funzione Φ-convessa se*

$$f(v) - f(u) - (\alpha \cdot v - u) \geq \Phi(u, v, f(u), f(v), \|\alpha\|)\|v - u\|^2$$

per ogni u e v in $D(f)$ e per ogni α in $\partial^- f(u)$.

Diciamo che f è Φ-convessa di ordine γ, dove $\gamma \in \mathbb{R}^+$, se

$$|\Phi(u, v, f(u), f(v), \|\alpha\|)| \leq \Phi_0(u, v, f(u), f(v))\|\alpha\|^\gamma,$$

dove Φ_0 è una funzione continua.

Dunque nel "resto" compare anche la norma del sottodifferenziale. Notiamo subito che se $\partial^- f(u) = \emptyset$ la condizione di ϕ-convessità in u è automaticamente verificata.

Vediamo subito qualche esempio semplice.

- *La funzione $f : H \to \overline{\mathbb{R}}$ che per ogni u di H è definita da: $f(u) = 0$ se $\|u\| \geq 1$ e $f(u) = +\infty$ se $\|u\| < 1$ è Φ-convessa di ordine 1 (se scambiamo i valori 0 e 1 la f è convessa).*

- *Se $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ è una funzione convessa, oppure è la somma di una funzione convessa e di una funzione di classe C^2, e se M è una sottovarietà di classe C^2 di $\mathbb{R}^N$ allora la funzione h definita da $h(u) = g(u)$ se $u \in M$ e $h(u) = +\infty$ se $u \in \mathbb{R}^N \setminus M$ è Φ-convessa di ordine* 1.

  È interessante notare che nel caso classico in cui g è di classe C^2 un punto u di M è un punto stazionario vincolato per g su M se e solo se $0 \in \partial^- h(u)$.

In generale: per studiare la funzione $f : W \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ su un "vincolo" V, dove $V \subseteq W$, studieremo la funzione $f + I_V : W \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, dove $I_V(u) = 0$ se $u \in V$ e $I_V(u) = +\infty$ se $u \in H \setminus V$.

Il seguente teorema esprime una proprietà chiave delle funzioni Φ-convesse che ha permesso di affrontare equazioni e disequazioni di tipo parabolico in situazioni nuove, ad esempio su certe classi di vincoli non regolari e non convessi (vedi la sezione 3). Questo strumento inoltre ci ha permesso di fare ricorso ai metodi topologici del calcolo delle variazioni anche nello studio di disequazioni variazionali ad esempio di tipo ellittico, sempre su vincoli non convessi (sezione 3), o ancora altri problemi come quello dei rimbalzi.

Teorema 2.3. *Supponiamo che f sia Φ-convessa di ordine* 2 *e semicontinua inferiormente e sia u_0 un punto di $D(f)$.*

Allora esiste $\delta > 0$ ed esiste una ed una sola $U : [0, \delta[\to D(f)$ assolutamente continua e tale che: $U(0) = u_0$, $\partial^- f(U(s)) \neq \emptyset$ non appena $s > 0$ e

$$U'_+(s) = -grad^- f(U(s)), \quad per\ ogni\ s\ in\ ]0, \delta[, \tag{2.3.1}$$

dove $U'_+(s)$ è la derivata destra di U in s.

Inoltre $f \circ U$ è assolutamente continua e

$$(f \circ U)'_+(s) = -\|grad^- f(U(s))\|^2, \quad per\ ogni\ s\ in\ ]0, \delta[.$$

Infine la coppia di funzioni $(U, f \circ U)$ dipende con continuità il $L^\infty[0, \delta[)$ dalla coppia $(u_0, f(u_0))$ (ma U non non dipende con continuità da u_0).

Le curve U di questo tipo sono dette "curve di massima pendenza" di f. Prima di esse, all'inizio di queste ricerche, furono introdotte in collaborazione con De Giorgi e poi studiate in vari lavori (vedi [16], [28]) le curve di massima pendenza in spazi metrici. Furono queste curve lo strumento usato per ottenere i primi teoremi di molteplicità di soluzioni per disequazioni differenziali che riguardarono le geodetiche con ostacolo.

In seguito sono state studiate equazioni del tipo della 2.3.1 in cui in luogo di $grad^- f$ si considera un operatore più generale non necessariamente gradiente di una funzione.

Il teorema precedente permette di ottenere anche per queste funzioni il classico collegamento fra il numero dei punti inferiormente critici di f e le proprietà topologiche dei suoi sottolivelli.

Riferiamoci ad esempio alla categoria di Lusternik e Schnirelman.

TEOREMA 2.4. *Supponiamo che $f : H \to \overline{\mathbb{R}}$ sia Φ-convessa di ordine 2 e semicontinua inferiormente.*

Siano a e b numeri reali tali che $a < b$ e tali che per ogni c di $[a, b]$ valga la $(PS)_c$ e cioè: se (u_h) è una successione in $D(f)$ tale che $\partial^- f(u_h) \neq \emptyset$ e $grad^- f(u_h)$ tende a 0 e $f(u_h)$ tende a c allora esiste una sottosuccessione (u_{h_k}) che converge ad un u in $D(f)$ tale che $0 \in \partial^- f(u)$ e anche $f(u) = c$.

Allora il numero dei punti inferiormente critici u di f con $f(u)$ in $[a, b]$ è non inferiore a $cat^*(f^b, f^a)$, dove cat^* è la categoria di Lusternik e Schnirelman rispetto alla "metrica del grafico": $d^*(u, v) = \|v - u\| + |f(v) - f(u)|$.

Ricordiamo qui che se X è uno spazio topologico e Y e Z sono suoi sottoinsiemi tali che $Z \subset Y$, la categoria relativa $cat_X(Y, Z)$ di Y rispetto a Z in X è il minimo degli interi n tali che esistono i sottoinsiemi chiusi A_0 $A_1, \dots, A_n$ di X tali che $A \subset A_0 \cup \dots \cup A_n$ e gli $A_1, \dots, A_n$ siano contrattili in X e Z sia un sottoinsieme di A_0 e sia retratto di deformazione di A_0.

Se un tale n non esiste si pone $cat_X(Y, Z) = +\infty$.

Se $X = Y$ poniamo $cat(X, Z) := cat_X(Y, Z)$

Per completare questo paragrafo osserviamo che se ci si propone solo di valutare il numero dei punti critici di funzioni non regolari mediante i metodi topologici e non si è interessati anche allo studio dei problemi di evoluzione allora è possibile cercare di fare ricorso ai metodi diretti che furono introdotti in [15] e [19] mediante la nozione di "pendenza debole". Fra i lavori che hanno seguito questa impostazione vedi ad esempio [11], [9] e [10].

3. LE GEODETICHE E LE MEMBRANE CON OSTACOLO

Il primo problema che fu possibile affrontare anche grazie alle curve di massima pendenza fu quello delle geodetiche con ostacolo, che presentano una situazione quanto mai lontana dalla convessità. Sulla base delle nuove idee fu possibile risolvere il corrispondente problema di evoluzione e questo offrì immediatamente la possibilità di studiare la molteplicità dei cammini geodetici rispetto ad un ostacolo fra due punti assegnati (vedi [35]). Furono usate le curve di massima pendenza in spazi metrici che erano appena state introdotte ed al momento erano le sole disponibili, ma qui possiamo esporre l'idea della dimostrazione mediante le funzioni Φ-convesse.

Il problema delle geodetiche "senza ostacolo" è stato oggetto di uno dei più brillanti risultati ottenuti con i metodi topologici, un risultato che, nella sua forma più compiuta, è dovuto al concorso di alcuni grandi matematici come L. Lusternik, L. Schnirelman, M. Morse e J. P. Serre. Quel teorema (vedi ad es [43]) afferma che:

se M è una varietà compatta e priva di bordo, per ogni coppia di punti A e B di M esistono infinite geodetiche su M da A a B.

Noi prendemmo in esame il caso in cui si frapponga un "ostacolo" al cammino delle geodetiche. Per focalizzare il problema considerammo il caso di un ostacolo in $\mathbb{R}^N$. Vediamo dunque un risultato tipico fra quelli dimostrati in [35] anche in presenza di un campo di forze conservativo.

Sia Ω un sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$ aperto, limitato e di classe C^2 e sia V un potenziale su $\mathbb{R}^N \backslash \Omega$. Indichiamo con $\nu(x)$ la normale entrante in Ω nel punto x di $\partial\Omega$ e sia $T > 0$ un "tempo" assegnato. Supporremo che $N \geq 2$.

Definizione 3.1. *Diciamo che una $q : [0, T] \to \mathbb{R}^N \backslash \Omega$ è una geodetica rispetto a Ω e a V se: q e $\dot{q}$ sono assolutamente continue ed esiste $\Lambda : [0, T] \to [0, +\infty]$ tale che*

$$\ddot{q}(t) - \mathit{grad}\, V(q(t)) = 0 \text{ su } [0, T] \backslash C(q), \quad \text{dove } C(q) = \{t \mid q(t) \in \partial\Omega\},$$
$$\ddot{q}(t) - \mathit{grad}\, V(q(t)) = \Lambda(t)\nu(q(t)) \text{ in } C(q).$$

Siano ora A e B due punti in $\mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}$.

Definizione 3.2. *Sia Γ lo spazio delle curve $q : [0, T] \to \mathbb{R}^N \backslash \Omega$ di classe $W^{1,2}$ tali che $q(0) = A$ e $q(T) = B$, e sia $\mathscr{L} : L^2(0, T; \mathbb{R}^N) \to \overline{\mathbb{R}}$ il "funzionale integrale di Lagrange" definito da*

$$\mathscr{L}(q) = \int_0^T \left(\frac{1}{2}|\dot{q}|^2 - V(q)\right) dt \quad \text{se } q \in \Gamma,$$
$$\mathscr{L}(q) = +\infty \quad \text{se } q \in L^2 \backslash \Gamma.$$

Teorema 3.3.

(a) *$\mathscr{L}$ è una funzione Φ-convessa di ordine 2.*
(b) *Una curva $U : [0, \delta[\to \Gamma$ di massima pendenza per $\mathscr{L}$ è caratterizzata dalla seguente disequazione parabolica rispetto all'ostacolo Ω:*

$$(3.3.1) \quad \frac{\partial q}{\partial s}(s, t) = \ddot{q}(s, t) - \mathit{grad}\, V(q(s, t)) + \\ -[(\ddot{q}(s, t) - \mathit{grad}\, V(q(s, t))) \cdot \nu(q(s, t))] \vee 0 \; 1_{C(q)} \nu(q(s, t))$$

dove $1_{C(q)}$ vale 1 su $C(q)$ e 0 fuori e si è posto $U(s)(t) = q(s, t)$.
(c) *I punti inferiormente stazionari di $\mathscr{L}$ sono geodetiche rispetto ad Ω e a V che congiungono A e B nel tempo T.*

Se ne deduce, grazie a 2.3, il seguente teorema sulle disequazioni di tipo parabolico rispetto all'ostacolo Ω.

Teorema 3.4. *Per ogni q_0 in Γ esiste una ed una sola $U : [0, +\infty[\to \Gamma$ che soddisfa la 3.3.1 e tale che $U(0) = q_0$. Inoltre U e $\mathscr{L} \circ U$ dipendono con continuità da $(q_0, \mathscr{L}(q_o))$.*

A questo punto, con questi strumenti, possiamo affrontare anche il teorema di molteplicità.

Teorema 3.5. *Quali che siano V, $T > 0$ e i punti A e B in $\mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}$, esistono infinite geodetiche $q : [0, T] \to \mathbb{R}^N \backslash \Omega$ rispetto a Ω e al potenziale V tali che $q(0) = A$ e $q(T) = B$.*

La dimostrazione discende sostanzialmente dal teorema 2.4 e dai seguenti fatti:

(I) $\mathscr{L} : L^2(0, T; \mathbb{R}^N) \to \overline{\mathbb{R}}$ è Φ-convessa di ordine 2 e, per ogni c in $\mathbb{R}$, soddisfa la (PSc).
(II) Per il fondamentale teorema di Serre (vedi [43]) la categoria di Lusternik e Schnirelmann di Γ nella metrica di $W^{1,2}$ è uguale a $+\infty$.
(III) La metrica del grafico di $\mathscr{L}$ induce la stessa topologia indotta dalla metrica di $W^{1,2}$ (anche se le due metriche non sono equivalenti).

Furono in seguito studiati con questi metodi da D. Scolozzi numerosi altri problemi riguardanti le geodetiche con ostacolo, ad esempio le geodetiche su una varietà aventi gli estremi vincolati a delle sottovarietà.

Fra i vari problemi che coinvolgono sia i metodi topologici che le curve di massima pendenza e questo tipo di analisi "sottodifferenziale" ne abbiamo incontrati alcuni nei quali intervengono degli "autovalori", ad esempio nel caso dell'operatore di Laplace rispetto ad un ostacolo e nel caso delle posizioni di equilibrio di una piastra "well clamped", soggetta a sforzi interni variabili in presenza di ostacoli. Citiamo qui a titolo di esempio il caso dell'operatore di Laplace (vedi [13] e [14]).

Sia dunque Ω un sottoinsieme aperto e limitato di $\mathbb{R}^N$ e consideriamo qui il caso in cui la condizione di ostacolo sia data da due funzioni reali φ_1 e φ_2 definite su Ω e tali che $\varphi_1 \leq \varphi_2$. Consideriamo anche una funzione di Caratheodory $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ed un numero $\rho > 0$. Con $\| \ \|$ indichiamo qui la norma in $L^2(\Omega)$. Poniamo:

$$S_\rho = \{u \in L^2(\Omega) \mid \|u\|_{L^2} = \rho\}, \quad K = \{u \in L^2(\Omega) \mid \varphi_1 \leq u \leq \varphi_2\}.$$

Lo studio riguarda gli autovalori di $\Delta u + g(x, u)$ rispetto al vincolo $K \cap S_\rho$. Nel caso classico il vincolo è la sola S_ρ e l'equazione è $\Delta u + g(x, u) = \lambda u$. Assumiamo qui che valgano le seguenti ipotesi semplificate:

$$g \text{ è di classe } C^1 \text{ rispetto ad } s, g'_s(x, s) \text{ è limitata, } g(x, 0) \in L^2(\Omega),$$
$$\varphi_1, \varphi_2 \in W^{2,2}(\Omega) \cap C(\Omega).$$

Come nel classico "calcolo differenziale" è importante che i due vincoli K e S_ρ si intersechino bene. Su questo punto riportiamo qui qualche considerazione e rimandiamo a [14] per lo studio completo.

Osservazione 3.6.

(a) *Se $\rho > \|(\varphi_1 \vee 0) + (\varphi_2 \wedge 0)\|$ allora $K \cap S_\rho \neq \emptyset$.*
(b) *Se non esiste un sottoinsieme aperto Ω' di Ω tale che $\varphi_1 < 0$ in Ω' e $\varphi_1 \in W_0^{1,2}(\Omega')$ o tale che $\varphi_2 > 0$ in Ω' e $\varphi_2 \in W_0^{1,2}(\Omega')$, allora per ogni*

$\rho > 0$, K e S_ρ non sono "tangenti" in nessun punto, e cioè non esiste u in $K \cap S_\rho$ tale che $-\partial^- 1_K(u) \cap \partial^- 1_{S_\rho}(u) \neq \{0\}$.

Teorema 3.7. *Supponiamo che K e $S\rho$ non siano tangenti.*

Allora il funzionale $\mathscr{E} : L^2(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$, definito da

$$\mathscr{E}(u) = \int_\Omega \Big(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \int_0^{u(x)} g(x,s)\,ds\Big)\,dx \quad \textit{se } u \in K \cap S_\rho$$

$$\mathscr{E}(u) = +\infty \quad \textit{se } u \in L^2(\Omega) \backslash (K \cap S_\rho),$$

è Φ-convesso di ordine 1 e semicontinuo inferiormente.

Per ogni u in $K \cap S_\rho$ risulta che $\partial^- \mathscr{E}(u) \neq \emptyset$ se e solo se $u \in W^{2,2}(\Omega)$. Inoltre se $u \in K \cap S_\rho$ e $\partial^- \mathscr{E}(u) \neq \emptyset$ esiste un numero reale λ tale che $\mathrm{grad}^- f(u) = -A(\lambda, u)$, dove

$$A(\lambda,u) = \begin{cases} \Delta u + g(x,u) - \lambda u & \textit{in } \{x \mid \varphi_1(x) < u(x) < \varphi_2(x)\} \\ (\Delta u + g(x,u) - \lambda u) \vee 0 & \textit{in } \{x \mid \varphi_1(x) = u(x) < \varphi_2(x)\} \\ (\Delta u + g(x,u) - \lambda u) \wedge 0 & \textit{in } \{x \mid \varphi_1(x) < u(x) = \varphi_2(x)\}. \\ 0 & \textit{in } \{x \mid \varphi_1(x) = u(x) = \varphi_2(x)\}. \end{cases}$$

Vale dunque il seguente teorema sulle disequazioni di tipo ellittico su $K \cap S_\rho$.

Teorema 3.8. *Supponiamo che K e $S\rho$ non siano tangenti.*

Allora per ogni u_o in $K \cap S_\rho$ esiste una ed una sola $U : [0,\delta[\to L^2(\Omega)$ di massima pendenza per $\mathscr{E}$ tale che $U(0) = u_o$. Di conseguenza esiste $\Lambda : [0,\delta[\to \mathbb{R}$ tale che per ogni s in $[0,\delta[$

$$U'^{+}(s) = A(\Lambda(s), U(s)), \quad \|U(s)\| = \rho, \quad U(s) \in K.$$

U ed $\mathscr{E} \circ U$ dipendono con continuità da $(u_0, \mathscr{E}(u_0))$.

A questo punto è possibile mettere in atto i metodi topologici per ottenere ad esempio il risultato che segue.

Teorema 3.9. *Sia $\rho > 0$ e supponiamo che K e S_ρ non siano tangenti. Allora, se valgono le ipotesi di simmetria:*

$$\varphi_2 = -\varphi_1, \quad g(x,-s) = -g(x,s) \quad \textit{per ogni } x \textit{ e } s$$

esistono infinite coppie $(-u_h, u_h)$ in $K \cap S_\rho$ ed infiniti "autovalori" λ_h tali che $A(\lambda_h, u_h) = 0$.

4. Le traiettorie di rimbalzo elastico

Vediamo qui alcuni risultati riguardanti le traiettorie di rimbalzo elastico che precedono le ricerche che vengono richiamate nei paragrafi successivi.

Diamo anzitutto una definizione. Sia Ω un sottoinsieme aperto, limitato e regolare in $\mathbb{R}^N$: il biliardo, e denotiamo con $\nu(x)$ la normale entrante in Ω, per x in $\partial\Omega$. Siano A e B due assegnati punti di Ω e sia $T > 0$ un istante assegnato. Supponiamo che su Ω agisca un campo di forze conservativo dipendente eventualmente dal tempo, il cui potenziale $V : [0, T] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ sia regolare. Con ∇V indicheremo il gradiente di V rispetto a x.

Definizione 4.1. *Sia q in $W^{1,2}(0, T; \mathbb{R}^N)$. Diciamo che q è una traiettoria di rimbalzo elastico in Ω da A a B se:*

$$q(t) \in \overline{\Omega} \text{ per ogni } t, \quad q(0) = A, \quad q(t) = B \quad e$$

(a) *esiste una misura di Radon $\mu \geq 0$ su $[0, T]$ il cui supporto sia contenuto in $C(q) := \{t \mid q(t) \in \partial\Omega\}$ e sia tale che*

$$\ddot{q} + \nabla V(t, q) = \mu\nu(q);$$

(b) *Legge di conservazione dell'energia: l'energia totale*

$$E(t) := \frac{1}{2}|\dot{q}(t)|^2 + V(t, q(t))$$

è tale che per ogni φ in $C^\infty(0, T; \mathbb{R})$ risulti:

$$\int_0^T E\dot{\varphi}\, dt = \int_0^T \nabla V(t, q)\dot{q}\varphi + V(t, q)\dot{\varphi}\, dt,$$

$$\text{cioè} \quad \int_0^T \frac{1}{2}|\dot{q}|^2\dot{\varphi}\, dt = \int_0^T \nabla V(t, q)\dot{q}\varphi\, dt$$

Se $\mu \neq 0$ diciamo che q è una "vera" traiettoria di rimbalzo elastico.

Noi diciamo che μ è la misura della reazione scalare associata a q. Dunque le incognite sono due: q e μ.

Possiamo osservare che la (a) di 4.1 equivale alla seguente disequazione variazionale *rovesciata*:

$$\int_0^T (\dot{q}\dot{\delta} + \nabla(V(t, q)\delta)\, dt \leq 0$$

$$\text{per ogni } \delta \text{ in } W_0^{1,2}(0, T; \mathbb{R}^N) \text{ tale che } \nu(q)\delta \geq 0 \text{ in } C(q),$$

e descrive tutte le possibili traiettorie di rimbalzo elastico o no.

Il problema delle traiettorie di rimbalzo elastico è stato studiato sia dal punto di vista del problema di Cauchy che da quello delle traiettorie fra estremi fissi o delle traiettorie periodiche.

Per il problema di Cauchy sono molto interessanti i lavori [8] e [12]. Le altre due classi di problemi presentano situazioni interessanti dal punto di vista delle strutture topologiche.

Il problema del rimbalzo elastico con estremi fissati (il "problema della illuminazione") è stato oggetto di vari lavori ottenuti approssimando in vario modo il biliardo.

Ma ci si può chiedere anzitutto se esista un "principio di Hamilton" per il rimbalzo elastico, e cioè se esista un funzionale del tipo dell'integrale della lagrangiana, definito su un opportuno spazio di curve da A a B, i cui punti stazionari, in qualche senso, soddisfino la definizione ora data.

Ci risulta che il problema in questi termini non abbia fin'ora ricevuto risposta.

Nel caso in cui Ω è convesso un approccio variazionale è stato possibile. Nel 1984, in [17], Degiovanni ha dimostrato il seguente teorema.

Teorema 4.2. *Se Ω è convesso e su esso agisce un campo di forze conservativo, esistono infinite traiettorie di rimbalzo elastico in Ω da A a B.*

L'idea iniziale che faceva supporre vera la tesi consisteva nel riguardare Ω come una piastra, con una faccia superiore Ω^+ ed una inferiore Ω^- comunicanti fra loro attraverso $\partial\Omega$. Se ad esempio $V = 0$ le cercate traiettorie di rimbalzo in Ω possono essere viste, proprio perché Ω è convesso, come la proiezione sul piano della piastra delle geodetiche che collegano A e B *girando intorno alla piastra*. Di fatto la dimostrazione era ottenuta considerando le geodetiche su una successione di rigonfiamenti "lenticolari" di Ω (ottenuti rigonfiando Ω^+ e Ω^- e lasciando ferma $\partial\Omega$) e adattando a tali "biconvex lens like manifolds" il classico teorema sulle geodetiche su varietà compatte (vedi [43]) che abbiamo già citato nel paragrafo 3.

Sul biliardo convesso furono in seguito (vedi [22] e [23]) ottenuti risultati più fini, in assenza di forze esterne, dando una minorazione del numero delle traiettorie con un assegnato numero di punti di rimbalzo.

Se il biliardo non è convesso noti controesempi (vedi ad esempio [40]) mostrano che in generale può non esistere nessuna traiettoria di rimbalzo da A a B, se questi punti di Ω non sono presi in modo opportuno. Nel caso in cui Ω sia molto sottile, del tipo di una "fibra ottica", alcuni risultati sono stati ottenuti in [39].

Non sono numerosi i lavori che conosco riguardanti l'esistenza e la molteplicità delle traiettorie di rimbalzo periodiche in un "biliardo" Ω in $\mathbb{R}^N$. Un risultato pionieristico fu ottenuto da G. D. Birkoff negli anni '20 del novecento. Egli mostrò (vedi [7] e [38]) che se $N = 2$ e Ω è convesso esistono infinite traiettorie periodiche di rimbalzo, in assenza di forze agenti. Un risultato molto interessante fu trovato in [4] da V. Benci e F. Giannoni. Essi mostrarono che per ogni $T > 0$ abbastanza piccolo esiste una traiettoria T-periodica di rimbalzo elastico in Ω avente al più $N + 1$ punti di rimbalzo. Per giungere al risultato questi autori anzitutto approssimavano la reazione elastica della "sponde" del biliardo con una successione di potenziali ausiliari che tende a 0 in Ω, mentre ognuno di essi tende a $+\infty$ su $\partial\Omega$. In tal modo era possibile individuare una successione q_n di punti critici per gli integrali di Lagrange associati ai problemi approssimanti, aventi un indice generalizzato di Morse-Conley (vedi [3]) non superiore a $N + 1$ e convergente ad una q che risulta essere una traiettoria di rimbalzo elastico. Infine gli autori con una acuta analisi collegano l'indice di Morse delle q_n con il numero di rimbalzi di q.

Altri lavori particolarmente interessanti a nostra conoscenza sono ad es. [6], [25], [44], [39]. In [25] Giannoni mostra che esistono almento $N+1$ "traiettorie di rimbalzo principali" in un biliardo convesso. Si tratta di traiettorie che come le corde principali colpiscono perpendicolarmente $\partial\Omega$. In [44] si trova uno studio approfondito delle traiettorie principali nel caso piano. In [39] R. Peirone considera le traiettorie periodiche di rimbalzo in un dominio Ω sottile come una fibra ottica.

5. Le traiettorie di rimbalzo elastico come "punti asintoticamente critici" nella metrica di L^2

Quando si studia la molteplicità delle soluzioni di una problema p approssimandolo con una successione di problemi p_n sorge una difficoltà: può accadere che successioni di distinte soluzioni u_n e v_n di p_n convergano verso un medesimo limite. Se i problemi p_n sono di tipo variazionale, nel senso che le loro soluzioni sono, in qualche senso, i punti critici di funzionali f_n definiti su opportuni spazi, può accadere che si possa predire che i limiti delle $f_n(u_n)$ e $f_n(v_n)$ siano diversi e questo aiuta a superare la difficoltà. In altri casi questo non è possibile.

In [27] e in [31] abbiamo introdotto i "punti asintoticamente critici" per una successione di funzionali e abbiamo mostrato, in varie situazioni, che la loro molteplicità può essere valutata nel modo consueto mediante le caratteristiche topologiche dei sottolivelli degli f_n. Siamo stati ispirati dal lavoro [24] nel quale si considerava un solo funzionale su una successione crescente di sottospazi. Per non dilungarci troppo consideriamo qui il caso dei funzionali regolari, anche se per il problema del rimbalzo noi dobbiamo utilizzare, come vedremo, il seguente teorema 5.3 nel caso delle funzioni Φ-convesse.

Consideriamo una successione di funzionali $f_n : H \to \mathbb{R}$ di classe C^1, definiti sullo spazio H che ad esempio è uno spazio di Hilbert o una varietà riemanniana, ed anche un funzionale f definito su una parte $D(f)$ di H.

Definizione 5.1. *Diciamo che un punto u di W è un punto asintoticamente critico per (f_n, f) se esiste una successione n_k in $\mathbb{N}$, strettamente crescente, ed esiste una successione u_k in W tale che*

$$u_k \to u, \quad grad\, f_{n_k}(u_k) \to 0, \quad f_{n_k}(u_k) \to f(u)$$

Definizione 5.2. *Sia c in $\mathbb{R}$. Diciamo che vale la condizione $\nabla(f_n, f, c)$ se per ogni successione n_k in $\mathbb{N}$, strettamente crescente, e per ogni successione u_k in W tale che*

$$grad\, f_{n_k}(u_k) \to 0, \quad f_{n_k}(u_k) \to c$$

esiste una sottosuccessione n_{k_j} tale che u_{k_j} converga ad un punto u di W tale che $f(u) = c$.

Si noti che questo è il solo legame che imponiamo fra le funzioni f_n e f, al punto che si può sopprimere f sostituendolo con opportune ipotesi.

TEOREMA 5.3. *Siano a e b in* $\mathbb{R}$ *con* $a < b$, *e supponiamo che valga la condizione* $\nabla(f_n, f, c)$ *per ogni c in* $[a, b]$. *Allora il numero dei punti u asintoticamente critici per* (f_n, f), *con* $f(u) \in [a, b]$ *è non inferiore a*

$$\limsup_{n \to +\infty} cat(f_n^b, f_n^a).$$

Qui $cat(f_n^b, f_n^a)$ indica la categoria relativa di f_n^b rispetto a f_n^a. Analoghi enunciati valgono se si considera il genere o la categoria invariante o l'indice rispetto alla azione di un gruppo.

Mediante 2.3 si prova che il teorema vale anche se le funzioni f_n sono Φ-convesse.

Fra i problemi che abbiamo potuto affrontare con questo metodo (vedi [26], [31] e [32]) vogliamo qui parlare del problema di rimbalzo considerato in [33], perché in questo caso si presenta un'altra difficoltà che ci ha indotto a considerare funzionali non regolari. Quindi anche qui ci siamo trovati all'incrocio fra l'analisi non lineare e l'analisi sottodifferenziale.

A titolo di esempio consideriamo qui il caso delle curve di rimbalzo con estremi fissati. Con i simboli già introdotti nella sezione 4, introduciamo come è naturale i "potenziali ausiliari" ωU dove $U : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ è una opportuna funzione tale che $U(x) = 0$ se $x \in \overline{\Omega}$ e $U(x) > 0$ se $x \notin \overline{\Omega}$ e $\omega \to +\infty$. Se estendiamo V a tutto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ possiamo dunque introdurre alcuni "naturali" integrali di Lagrange, secondo la seguente definizione.

DEFINIZIONE 5.4. *Posto*

$$\mathbb{X}(A, B) = \{q \in W^{1,2}(0, T; \mathbb{R}^N) \mid q(0) = A, q(T) = B\},$$
$$\mathbb{X}_\Omega(A, B) = \{q \in W^{1,2}(0, T; \mathbb{R}^N) \mid q(0) = A, q(T) = B, q(t) \in \overline{\Omega}\ \forall t\},$$

introduciamo l' integrale di Lagrange $\mathscr{L} : \mathbb{X}_\Omega(A, B) \to \mathbb{R}$ *definito da*

$$\mathscr{L}(q) = \int_0^T \Big(\frac{1}{2}|\dot{q}|^2 - V(t, q)\Big)\, dt, \quad \text{per ogni } q \text{ in } \mathbb{X}_\Omega(A, B),$$

e gli integrali di Lagrange ausiliari $\mathscr{L}_\omega : W^{1,2}(0, T; \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ *definiti da*

$$\mathscr{L}_\omega(q) = \int_0^T \Big(\frac{1}{2}|\dot{q}|^2 - V(t, q)\Big)\, dt - \omega \int_0^T U(q)\, dt, \quad \text{se } q \in \mathbb{X}(A, B).$$

A questo punto dobbiamo però constatare che i punti asintoticamente critici di $(\mathscr{L}_\omega, \mathscr{L})$ non sono in generale traiettorie di rimbalzo elastico perché soddisfano solo la (a) di 4.1.

Abbiamo però constatato con sorpresa che *se invece si considera la metrica di* $L^2(0, T; \mathbb{R}^N)$ *al posto di quella "spontanea" di* $W^{1,2}(0, T; \mathbb{R}^N)$ *allora la situa-*

zione cambia in modo favorevole: i punti asintoticamente critici rispetto alla metrica di L^2 sono traiettorie di rimbalzo elastico. Essi infatti sono una drastica selezione dei punti asintoticamente critici rispetto a $W^{1,2}$ perché, in sostanza, $\|grad_{W^{1,2}} \mathscr{L}_\omega\|_{W^{1,2}}$ è maggiorato da $\|grad_{L^2} \mathscr{L}_\omega\|_{L^2}$ e quest'ultimo può anche valere $+\infty$.

Teorema 5.5. *Sia dato R in $\mathbb{R}$.*
Consideriamo i funzionali $\mathscr{L}_{R,\omega} : L^2(0,T;\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definiti da

$$\mathscr{L}_{R,\omega}(q) = \mathscr{L}_\omega(q) \quad \text{se } q \in \mathbb{X}(A,B) \text{ e } \mathscr{L}(q) \le R,$$
$$\mathscr{L}_{R,\omega}(q) = +\infty \quad \text{se } q \in L^2 \backslash \mathbb{X}(A,B) \text{ o } \mathscr{L}(q) > R.$$

Allora, rispetto alla metrica di L^2 risulta che:
i punti asintoticamente critici q di $(\mathscr{L}_{R,\omega}, \mathscr{L})$ sono traiettorie di rimbalzo elastico in Ω e $\mathscr{L}(q) \le R$,
se non esistono traiettorie di rimbalzo elastico q in Ω con $\mathscr{L}(q) = R$ i funzionali $\mathscr{L}_{R,\omega}$ sono Φ-convessi di ordine 1 in un opportuno intorno di $\mathbb{X}_\Omega$ e vale la condizione $\nabla(\mathscr{L}_{R,\omega}, \mathscr{L})$.

Dunque la molteplicità delle traiettorie di rimbalzo elastico in Ω può essere studiata mediante il teorema 5.3, come mostriamo nel seguito.

6. Biforcazione per il rimbalzo con estremi fissati

Con gli stessi simboli introdotti nelle sezioni 4 e 5 supponiamo che valgano le ipotesi seguenti.

Ipotesi (V). $0 \in \Omega$ e il potenziale V che agisce su Ω nell'intervallo di tempo $[0,T]$ è del tipo:

$$V(t,x) = \frac{\lambda}{2}\beta(t)x \cdot x + x_0(t) \cdot x, \quad \forall \lambda \text{ in } \Lambda_0,\ \forall t \text{ in } [0,T],\ \forall x \text{ in } \Omega,$$

dove β è una matrice simmetrica $N \times N$ con i coefficienti in $L^2(0,T;\mathbb{R})$, non identicamente nulla, $x_0 \in L^2(0,T;\mathbb{R}^N)$ e λ è un parametro reale che varia in un intervallo aperto Λ_0.

Come abbiamo ricordato se Ω non è convesso può darsi che non esista nessuna traiettoria di rimbalzo in Ω fra A e B. Con l'ipotesi che segue imponiamo un legame fra Ω, i punti A e B e il potenziale V.

Ipotesi (Λ_0). Per ogni λ in Λ_0 esiste una curva $q_{0,\lambda}$ in $W^{1,2}(0,T;\mathbb{R}^N)$ tale che

$$\ddot{q}_{0,\lambda} + \lambda\beta(t)q_{0,\lambda} + x_0(t) = 0 \quad \text{in } [0,T],$$
$$q_{0,\lambda}(0) = A, \quad q_{0,\lambda}(T) = B, \quad q_{0,\lambda}(t) \in \Omega \quad \forall t \text{ in } [0,T],$$
$$q_{0,\lambda} \text{ in } W^{1,2}(0,T;\mathbb{R}^N) \text{ dipende con continuità da } \lambda.$$

Definizione 6.1. *Valga l'ipotesi* (V). *Diciamo che un numero λ di Λ_0 è un punto di transizione per il problema del rimbalzo elastico in Ω se esiste una successione λ_n che tende a λ e una successione q_n di vere traiettorie di rimbalzo elastico rispetto al potenziale $\lambda_n \beta(x) \cdot x$ tali che:*

le corrispondenti reazioni μ_n tendono a zero: $\mu_n([0,T]) \to 0$,

q_n tende in $W^{1,2}$ ad una $q : [0,T] \to \overline{\Omega}$ tale che

$$\ddot{q} + \lambda\beta(t)q + x_0(t) = 0, \quad q(0) = A, \quad q(T) = B. \tag{6.1.1}$$

Si osservi che, a meno di sottosuccessioni, la convergenza delle q_n ad una q con le proprietà qui indicate è conseguenza della prima parte della definizione.

Osservazione 6.2. *Valgano le ipotesi* (V) *e* (Λ_0). *Allora se un numero λ di Λ_o è un punto di transizione esso è autovalore del problema*

$$\ddot{\delta} + \lambda\beta(t)\delta = 0, \quad \delta : [0,T] \to \mathbb{R}^n, \quad \delta \neq 0. \tag{6.2.1}$$

Ora possiamo dare una caratterizzazione dell'ipotesi (Λ_0) nel nostro caso.

Osservazione 6.3. *Valga l'ipotesi* (V) *e sia λ_i un autovalore di* 6.2.1.

Se vale (Λ_0) *e se $\lambda_i \in \Lambda_0$ allora $q_{0,\lambda_i} : [0,T] \to \Omega$ è la curva che minimizza la funzione $\int_0^T (|\dot{q}|^2 - x_0 \cdot q)\,dt$ fra quelle che risolvono* 6.1.1 *per $\lambda = \lambda_i$.*

Se viceversa esiste una $q : [0,T] \to \Omega$ che risolve 6.1.1 *per $\lambda = \lambda_i$ e minimizza la funzione $\int_0^T (|\dot{q}|^2 - x_0 \cdot q)\,dt$ fra le q che risolvono la* 6.1.1 *per $\lambda = \lambda_i$, allora vale la condizione* (Λ_0) *per un opportuno intervallo Λ_0 che contiene λ_i e inoltre $q_{0,\lambda_i} = q$.*

Possiamo ora dare il teorema di biforcazione. Per semplificare la scrittura denoteremo ancora con $\mathscr{L}$ l'integrale di Lagrange associato al potenziale $V(t,x) = \frac{\lambda}{2}\beta(t)x \cdot x$:

$$\mathscr{L}(q) = \frac{1}{2}\int_0^T (|\dot{q}|^2 - \lambda\beta(t)q \cdot q)\,dt$$

senza mettere in evidenza la dipendenza da λ.

Teorema 6.4. *Nelle ipotesi* (V) *e Λ_0 valgono i seguenti fatti:*

(a) *per ogni λ in Λ_0 esiste una vera traiettoria di rimbalzo elastico q_λ in Ω da A a B;*
(b) *se λ_i è un autovalore di* 6.2.1 *e $\lambda_i \in \Lambda_0$ allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni λ in $]\lambda_i - \varepsilon, \lambda_i[$, se $\lambda_i > 0$ (in $]\lambda_i, \lambda_i + \varepsilon[$, se $\lambda_i < 0$), esiste una seconda vera traiettoria di rimbalzo elastico η_λ, distinta da q_λ e tale che*

$$\mathscr{L}(q_\lambda) < \mathscr{L}(\eta_\lambda);$$

(c) *se λ_i è un autovalore di* 6.2.1 *e $\lambda_i \in \Lambda_0$ e se Ω è strettamente stellato rispetto a q_{0,λ_i} (cioè rispetto ad ogni punto $q_{0,\lambda_i}(t)$) allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni λ*

in $]\lambda_i - \varepsilon, \lambda_i[$, *se* $\lambda_i > 0$ (*in* $]\lambda_i, \lambda_i + \varepsilon[$, *se* $\lambda_i < 0$) *esistono una seconda e una terza vere traiettorie di rimbalzo elastico da* A *a* B, $q_{1,\lambda}$ *e* $q_{2,\lambda}$ *tali che*

$$\mathscr{L}(q_{j,\lambda}) < \mathscr{L}(\eta_\lambda), \quad \text{per } j = 1, 2.$$

Un cenno alla dimostrazione Come abbiamo detto la dimostrazione consiste in due passi:

(passo 1) grazie al teorema 5.5 ci riconduciamo allo studio dei punti asintoticamente critici rispetto alla norma di L^2 dei funzionali $(\mathscr{L}_{R,\omega}, \mathscr{L})$, tenendo conto del fatto che i funzionali $\mathscr{L}_{R,\omega}$ sono Φ-convessi rispetto a tale norma in un opportuno intorno di $\mathbb{X}_\Omega$,
(passo 2) grazie al teorema 5.3 studiamo le proprietà topologiche dei sottolivelli degli $\mathscr{L}_{R,\omega}$.

Per il secondo passo, oltre ad alcune considerazioni standard usiamo il seguente "∇-teorema".

Teorema 6.5 (Un ∇-teorema). *Sia* H *uno spazio di Hilbert, siano* $\mathbb{X}_1$, $\mathbb{X}_2$ *e* $\mathbb{X}_3$ *tre suoi sottospazi chiusi tali che* $H = \mathbb{X}_1 \oplus \mathbb{X}_2 \oplus \mathbb{X}_3$ *e* $\dim \mathbb{X}_1 \oplus \mathbb{X}_2 < +\infty$.

Siano poi S *una sfera in* $\mathbb{X}_2 \oplus \mathbb{X}_3$ *e* Δ *un sottoinsieme compatto di* $\mathbb{X}_1 \oplus \mathbb{X}_2$, *tali che* $S \cap (\mathbb{X}_1 \oplus \mathbb{X}_2) \subset$ *parte interna di* Δ.

Infine sia $f : H \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^1 *soddisfacente le condizioni:*

1. $\sup f(\partial\Delta \cup \mathbb{X}_2) < \inf f(S)$, *dove* $\partial\Delta$ *è la frontiera di* Δ *in* $\mathbb{X}_1 \oplus \mathbb{X}_2$,
2. *posto* $a = \inf f(S)$ *e* $b = \sup f(\Delta)$, *valga la condizione di Palais-Smale a tutti i livelli di* $[a, b]$,
3. *condizione* $\nabla(f, \mathbb{X}_2 \oplus \mathbb{X}_3, [a, b])$*: esiste* $\delta > 0$ *tale che*

$$\inf\{\|P_{u\oplus\mathbb{X}_2\oplus\mathbb{X}_3}\, grad\, f(u)\| \mid dist(u, \mathbb{X}_2 \oplus \mathbb{X}_3) \le \delta, a \le f(u) \le b\} > 0$$

dove $P_{u\oplus\mathbb{X}_2\oplus\mathbb{X}_3}$ *è la proiezione ortogonale su* $span(u) \oplus \mathbb{X}_2 \oplus \mathbb{X}_3$.

Allora f *ha due punti critici* u_1 *e* u_2 *tali che* $a \le f(u_i) \le b$.

L'idea chiave di questo teorema, e degli altri ∇-teoremi (vedi [30]), sta in sostanza nel fatto che condizioni del tipo della $\nabla(f, \mathbb{X}_2 \oplus \mathbb{X}_3, [a, b])$ sul gradiente fanno sì che possiamo introdurre delle condizioni di vincolo che non introducono nuovi punti stazionari ma arricchiscono la topologia dei sottolivelli di f. In questo caso in sostanza il vincolo C è dato da $C = \{u \mid \|P_{\mathbb{X}1}(u)\| \ge \varepsilon\}$, dove $P_{\mathbb{X}1}$ è la proiezione su $\mathbb{X}_1$ che si annulla su $\mathbb{X}_2 \oplus \mathbb{X}_3$ e ε è un numero positivo opportunamente piccolo. Se $\tilde{f}$ è la f ristretta a C, risulta che i punti critici di $\tilde{f}$ sono i punti critici di f mentre $cat(\tilde{f}^b, \tilde{f}^a) \ge 2$, dove cat è la categoria relativa di Lusternik e Schnirelmann.

Possiamo notare che, nelle ipotesi fatte, se si suppone anche che i punti critici di f non siano degeneri allora l'ipotesi $\nabla(f, \mathbb{X}_2 \oplus \mathbb{X}_3, [a, b])$ e il conseguente ricorso al ∇-teorema non sono necessari perché la tesi vale per motivi homologici.

7. Biforcazione per le traiettorie periodiche di rimbalzo

Con C. Saccon (vedi [34]) stiamo anche studiando il problema delle traiettorie di rimbalzo periodiche di un periodo assegnato. Vediamo qui in anteprima alcuni risultati che abbiamo ottenuto riguardo alla biforcazione multipla di "rami" di tali traiettorie. Stiamo attualmente ancora studiando la possibilità di ottenere maggiori informazioni al riguardo.

Consideriamo ancora in $\mathbb{R}^N$ un "biliardo" Ω aperto, limitato e di classe C^2 e supponiamo che su di esso agisca un potenziale regolare $V(x)$ che non dipende dal tempo. Sia ancora ν la normale entrante in Ω su $\partial\Omega$.

In questo caso una traiettoria di rimbalzo, periodica di un assegnato periodo $T > 0$, è una curva q dello spazio

$$W_T^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N) = \{q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N \mid \text{q è T-periodica}, \ q \in W^{1,2}(0, T; \mathbb{R}^N)\}$$

caratterizzata dalle condizioni:

$$q(t) \in \overline{\Omega} \text{ per ogni } t, \quad \text{inoltre}$$

(a) esiste una misura di Radon $\mu \geq 0$ su $\mathbb{R}$ il cui supporto sia contenuto in $C(q) := \{t \mid q(t) \in \partial\Omega\}$ e sia tale che

$$\ddot{q} + \nabla V(q) = \mu\nu(q);$$

(b) Legge di conservazione dell'energia: l'energia totale

$$E(t) := \frac{1}{2}|\dot{q}(t)|^2 + V(q(t))$$

è costante.

Ricordiamo che se $\mu \neq 0$ diciamo che q è una "vera" traiettoria di rimbalzo elastico.

Valgono anche qui osservazioni analoghe a quelle che riguardano la definizione 4.1

Nel caso delle traiettorie periodiche in presenza di un potenziale V che non dipende dal tempo occorre osservare prima di tutto che se q è una soluzione allora tutte le q_θ definite da $q_\theta(t) = q(t + \theta)$ sono soluzioni, quale che sia θ in $\mathbb{R}$.

Dunque in questo caso si pone il noto problema di non considerare le q_θ come soluzioni distinte da q.

D'altra parte, analogamente al caso con estremi assegnati, anche il problema periodico può essere affrontato mediante dei funzionali $\mathscr{L}^T$ e $\mathscr{L}^T_{\omega,R}$ del tutto analoghi a quelli introdotti in 5.4 e in 5.5 (li riportiamo in 7.6). Ma proprio perché supponiamo che V non dipenda dal tempo *questi funzionali sono invarianti rispetto al gruppo delle trasformazioni $\mathscr{T}_\theta$* che qui richiamiamo.

DEFINIZIONE 7.1. *Poniamo*

$$L^2_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N) = \{q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N \mid q \text{ è } T\text{-periodica}, \ q \in L^2(0, T; \mathbb{R}^N)\}.$$
$$\mathscr{T}_\theta : L^2_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N) \to L^2_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N) \ (\theta \in \mathbb{R}) \text{ tali che } \mathscr{T}_\theta(q)(t) = q(t+\theta), \ \forall t \text{ in } \mathbb{R}.$$

Diciamo che il gruppo $\mathscr{T}$ è l'azione di S_1, che q e $q_\theta = \mathscr{T}_\theta(q)$ sono S_1 equivalenti e che $\{\mathscr{T}_\theta(q) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ è l'orbita di q.

Dunque il problema presenta una simmetria rispetto alla azione di S_1. Come spesso accade in presenza di simmetrie, anche in questo caso è la simmetria che, insieme alle tecniche già viste, permette di dimostrare che esiste un certo numero di orbite distinte di soluzioni.

IPOTESI (β). Supponiamo che $0 \in \Omega$ e che $V(x) = \frac{1}{2}(\beta x \cdot x)$ per ogni x in $\overline{\Omega}$, dove β è una matrice $N \times N$, reale e simmetrica.

Siano $\omega_1^2, \omega_2^2, \ldots, \omega_{N_\beta}^2$ ($\omega_i > 0$) gli autovalori positivi di β, siano E_i i corrispondenti autospazi e sia $\dim E_i$ la loro molteplicità.

Come gli studenti sanno (?!) per ogni i fra 1 e N_β l'equazione

$$(*) \qquad \ddot{q} + \beta q = 0$$

ha uno spazio di soluzioni periodiche di periodo $T_i = \frac{2\pi}{\omega_i}$ di dimensione $2 \dim E_i$ che si svolgono nello spazio E_i. Denotiamo con $\mathscr{E}_i$ tale spazio Chiameremo periodi "principali" di $(*)$ questi T_i.

Naturalmente se un numero $T > 0$ è multiplo di alcuni periodi principali la $(*)$ ammette anche soluzioni di periodo T: le combinazioni lineari delle soluzioni relative ai singoli periodi dei quali T è multiplo.

DEFINIZIONE 7.2. *Sia $T > 0$. Se T è multiplo di qualche T_i poniamo:*

$$J_T = \left\{ i \in \{1, \ldots, N_\beta\} \,\middle|\, \frac{T}{T_i} \in \mathbb{N} \right\}$$

e diciamo molteplicità di T il numero

$$m(T) = \sum_{i \in J_T} \dim E_i.$$

Abbiamo ora gli ingredienti per formulare il seguente teorema di biforcazione per le traiettorie periodiche di rimbalzo in Ω.

TEOREMA 7.3. *Valga l'ipotesi (β) e supponiamo che Ω sia stellato rispetto all'origine. Sia $\overline{T} > 0$ un multiplo di qualche T_i.*

Allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni T in $]\overline{T} - \varepsilon, \overline{T}[$ esistono $m(\overline{T})$ vere traiettorie di rimbalzo rispetto a V in Ω, periodiche di periodo T, non S^1-equivalenti e non costanti, $q_{1,T}, \ldots, q_{m(\overline{T}),T}$, tali che per ogni $h = 1, \ldots, m(\overline{T})$ risulti che se $T \to \overline{T}$

allora, a meno di sottosuccessioni, $q_{h,T} \to \bar{q}_h$ uniformemente, dove $\bar{q}_h$ è una soluzione $\overline{T}$-periodica e non costante di $(*)$.

Attenzione: non è necessariamente vero che $\bar{q}_h$ stia nello spazio generato dagli $\mathscr{E}_i$ tali che T sia multiplo di T_i. Per questo si veda il teorema 7.5.

Possiamo ora esplicitare alcune conseguenze di 7.3.

Teorema 7.4. *Valga l'ipotesi (β) e supponiamo che Ω sia stellato rispetto all'origine. Sia T_i un periodo principale che non sia multiplo di nessun altro T_j.*

Allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni T in $]T_i - \varepsilon, T_i[$ esistono $\dim E_i$ vere traiettorie di rimbalzo rispetto a V in Ω, periodiche di minimo periodo T, non S^1-equivalenti e non costanti, $q_{1,T}, \ldots, q_{\dim E_i, T}$, tali che per ogni $h = 1, \ldots, \dim E_i$ risulti che se $T \to T_i$ allora, a meno di sottosuccessioni, $q_{h,T} \to \bar{q}_h$ uniformemente, dove $\bar{q}_h$ è una soluzione T_i periodica e non costante di $(*)$.

Per mettere in luce il quadro che emerge da 7.3 consideriamo la relazione di equivalenza fra i periodi principali di $(*)$ definita da

$$T_i \sim T_j \quad \text{se} \quad \frac{T_i}{T_j} \in \mathbb{Q}.$$

Se $\mathscr{P}$ è una classe di equivalenza dei periodi principali di $(*)$ rispetto a $\sim$, indichiamo con $T_{\mathscr{P}}$ il minimo comune multiplo dei T_i di $\mathscr{P}$ e con $\mathscr{E}_{\mathscr{P}}$ lo spazio delle soluzioni di $(*)$ generato dagli $\mathscr{E}_i$ tali che $T_i \in \mathscr{P}$. Risulta che

$$m(T_{\mathscr{P}}) = \sum_{T_i \in \mathscr{P}} \dim E_i = \frac{1}{2} \dim \mathscr{E}_{\mathscr{P}}.$$

Teorema 7.5.

(a) *Sia $\mathscr{P}$ una classe di equivalenza dei periodi principali di $(*)$ rispetto a $\sim$. Allora esiste $\varepsilon > 0$ ed esistono $m(T_{\mathscr{P}})$ "rami di biforcazione" $q_{1,T}, \ldots, q_{m(T_{\mathscr{P}}),T}$ con T in $]T_{\mathscr{P}} - \varepsilon, T_{\mathscr{P}}[$, di vere traiettorie T-periodiche di rimbalzo elastico in Ω rispetto a V, non S_1-equivalenti e non costanti, le quali, se $T \to T_{\mathscr{P}}$, si avvicinano in L^∞ allo spazio $\mathscr{E}_{\mathscr{P}}$.*

Di conseguenza, se $T \to T_{\mathscr{P}}$, le $q_{h,T}$ tendono uniformemente, a meno di sottosuccessioni, ad una $\bar{q}_h$ di $\mathscr{E}_{\mathscr{P}}$.

(b) *Indichiamo con N^+ la dimensione dell'autospazio positivo di β. Esistono in tutto N^+ rami di biforcazione di vere traiettorie di rimbalzo elastico in Ω, rispetto a V.*

Come nel caso degli estremi assegnati, i passi fondamentali della dimostrazione sono:

(a) lo studio dei punti asintoticamente critici *rispetto alla norma di L^2* dei funzionali $\mathscr{L}^T_{R,\omega}$ e $\mathscr{L}^T$ $(\omega \to +\infty)$, del tutto analoghi a quelli introdotti in 5.4 e in 5.5, che definiamo qui di seguito,

(b) la struttura topologica indotta dalla azione di S_1 (richiamata in 7.1), rispetto alla quale i funzionali $\mathscr{L}^T_{R,\omega}$ e $\mathscr{L}^T$ sono invarianti.

DEFINIZIONE 7.6. *Se poniamo*

$$W^{1,2}_T(\mathbb{R},\mathbb{R}^N) = \{q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N \mid q \text{ è } T\text{-periodica}, \ q \in W^{1,2}(0,T;\mathbb{R}^N)\}$$

$$\mathscr{L}(q) = \int_0^T \left(\frac{1}{2}|\dot q|^2 - V(q)\right) dt \quad \text{se } q \in W^{1,2}_T(\mathbb{R},\mathbb{R}^N)$$

allora $\mathscr{L}^T_{\omega,R} : L^2_T(\mathbb{R},\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *è definito da*

$$\mathscr{L}^T_{\omega,R}(q) = \mathscr{L}(q) - \omega \int_0^T U(q)\,dt \quad \text{se } q \in W^{1,2}_T(\mathbb{R},\mathbb{R}^N) \text{ e } \mathscr{L}(q) \le R$$

$\mathscr{L}^T_{\omega,R}(q) = +\infty$ *altrove in* L^2.

Se poniamo $\mathbb{X}^T_\Omega = \{q \in W^{1,2}_T(\mathbb{R},\mathbb{R}^N) \mid q(t) \in \overline{\Omega}\ \forall t\}$

allora $\mathscr{L}^T : \mathbb{X}^T_\Omega \to \mathbb{R}$ *è definito da*

$\mathscr{L}^T(q) = \mathscr{L}(q)$ *se* $q \in \mathbb{X}^T_\Omega$.

Ricordiamo che $\omega \to +\infty$ e ωU è una famiglia di potenziali ausiliari, con $U(x) = 0$ se $x \in \overline{\Omega}$, $U(x) > 0$ se $x \in \mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}$.

Riguardo al passo (a) si verifica agevolmente che valgono proprietà analoghe a quelle esposte in 5.

Riguardo al passo (b) un punto cruciale è esposto nel seguente teorema.

Sia E uno spazio di normato sul quale agisca l'azione $\mathscr{T}$ di S_1 e siano $\mathbb{X}_1$, $\mathbb{X}_2$ e $\mathbb{X}_3$ tre suoi sottospazi chiusi e $\mathscr{T}$ invarianti, tali che $H = \mathbb{X}_1 \oplus \mathbb{X}_2 \oplus \mathbb{X}_3$ e $\dim \mathbb{X}_1 \oplus \mathbb{X}_2 < +\infty$. Sia D un intorno invariante di 0 in $\mathbb{X}_1 \oplus \mathbb{X}_2$ e sia S_ρ una sfera in $\mathbb{X}_2 \oplus \mathbb{X}_3$ di raggio $\rho > 0$ tale che $\rho < \inf\{\|u\| \mid u \in \partial_{\mathbb{X}_1 \oplus \mathbb{X}_2} D\}$.

TEOREMA 7.7. *Supponiamo che* $Fix(\mathscr{T}) \cap (\mathbb{X}_1 \oplus \mathbb{X}_2) \subset \mathbb{X}_1$.

Inoltre siano A e B due sottoinsiemi chiusi e invarianti di E tali che

$$(\partial_{\mathbb{X}_1 \oplus \mathbb{X}_2} D) \cup (D \cap \mathbb{X}_1) \subset A \subset B \backslash S_\rho, \quad \overline{D} \subset B$$

Allora $i_{\mathscr{T}}(B,A)$ *è non inferiore a* $\frac{1}{2} \dim \mathbb{X}_2$.

Con $i_{\mathscr{T}}(B,A)$ abbiamo denotato il "$\mathscr{T}$-indice relativo di B rispetto ad A". È una nozione che ci è stata utile e che abbiamo definito nel seguente modo del tutto naturale:

DEFINIZIONE 7.8. *Sa A e B sono due sottoinsiemi chiusi $\mathscr{T}$-invarianti di E tali che $A \subset B$ allora $i_{\mathscr{T}}(B,A)$ è il minimo numero k tale che esistano due sottoinsiemi chiusi e $\mathscr{T}$-invarianti di B, F_0 e F_1, tali che:*

$$B = F_0 \cup F_1, \quad A \subset F_0, \quad A \text{ sia un } \mathscr{T}\text{-retratto di } F_0 \text{ e } i_{\mathscr{T}}(F_1) \le k.$$

Nella dimostrazione del teorema 7.7 gioca un ruolo determinante il seguente risultato contenuto nel fondamentale lavoro di R. Fadell, S. Husseini e P. H. Rabinowitz, esposto in [21].

Teorema 7.9. *Supponiamo che* $Fix(\mathscr{T}) \cap (\mathbb{X}_1 \oplus \mathbb{X}_2) \subset \mathbb{X}_1$.

Se $h : \overline{D} \to E$ *è una mappa equivariante tale che* $h(x) = x$ *per ogni* x *di* $\partial_{\mathbb{X}_1 \oplus \mathbb{X}_2} D \cup (D \cap \mathbb{X}_1$ *allora* $i_{\mathscr{T}}(h^{-1}(S_\rho)) \geq \frac{1}{2} \dim \mathbb{X}_2$.

References

[1] T. Bartsch - M. Clapp, *Critical point theory for indefinite functionals with symmetries*, J. Funct. Anal., 138(1):107–136, 1996.

[2] V. Benci, *A geometrical index for the group S^1 and some applications to the study of periodic solutions of ordinary differential equations*, Comm. Pure Appl. Math., 34(4):393–432, 1981.

[3] V. Benci, *A new approach to the Morse-Conley theory and some applications*, Ann. Mat. Pura Appl., 158(4):231–305, 1989.

[4] V. Benci - F. Giannoni, *Periodic bounce trajectories with a low number of bounce points*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 6(1):73–93, 1989.

[5] V. Benci - F. Giannoni, *Periodic bounce trajectories with a low number of bounce points*, Ann. Inst. H. Poincaré, 6(1):73–93, 1989.

[6] H. Berestycki - J.-M. Lasry - G. Mancini - B. Ruf, *Existence of multiple periodic orbits on star-shaped hamiltonian surfaces*, Comm. Pure Appl. Math., 38(3):253–289, 1985.

[7] G. D. Birkhoff, *Dynamical Systems*, Number 9 in Colloquium Publications. A.M.S., 1966.

[8] G. Buttazzo - D. Percivale, *On the approximation of the elastic bounc problem on riemanian manifolds*, J. Diff. Eq., 47:227–245, 1983.

[9] A. Canino, *Multiplicity of solutions of quasilinear elliptic equations*, Topol. Methods. Nonlinear Anal., 6 no. 2:357–370, 1995.

[10] A. Canino, *A bifourcation result of Böhme-Marino type for quasilinear elliptic equations*, Topol. Methods, Nonlinear Anal., 31 no. 1:1–17, 2008.

[11] A. Canino - M. Degiovanni, *Non smooth critical point theory and quasilinear elliptic equations*, Topological methods in differential equations and inclusions (Montreal, PQ, 1994), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 472, 1995.

[12] M. Carriero - A. Leaci - E. Pascali, *Convergenza per l'equazione degli integrali primi associati al problema del rimbalzo unidimensionale*, Ann. Mat. Pura Appl., 133:227–256, 1983.

[13] G. Chobanov - A. Marino - D. Scolozzi, *Evolution equation for the eigenvalue problem for the laplace operator with respect to an obstacle*, Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat., 14(5):139–162, 1990.

[14] G. Chobanov - A. Marino - D. Scolozzi, *Multiplicity of eigenvalues for the laplace operator with respect to an obstacle, and nontangency conditions*, Nonlinear Anal., 15(3):199–215, 1990.

[15] J. N. Corvellec - M. Degiovanni - M. Marzocchi, *Deformation properties for continuous functionals and critical point theory*, Topol. Methods. Nonlinear Anal., 1 no. 1:151–171, 1993.

[16] E. De Giorgi - A. Marino - M. Tosques, *Problemi di evoluzione in spazi metrici e curve di massima pendenza*, Atti Accademia Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) 68:180–187, 1980.

[17] M. Degiovanni, *Multiplicity of solutions for the bounce problem*, J. Diff. Eq., 54(3):414–428, 1984.

[18] M. Degiovanni - A. Marino - M. Tosques, *Evolution equations with lack of convexity*, Nonlinear Anal. T.M.A., 9:1401–1443, 1985.

[19] M. Degiovanni - M. Marzocchi, *A critical point theory for nonsmooth functionals*, Ann. Mat. Pura Appl., (4)167:73–100, 1994.

[20] M. Degiovanni, *On topological and metric critical point theory*, J. Fixed Point Theory, no. 1:85–102, 2010.

[21] E. R. Fadell - S. Husseini - P. H. Rabinowitz, *Borsuk-Ulam theorems for arbitrary s^1 actions and applications*, Trans. Am. Math. Soc., 274(1):345–360, 1982.

[22] M. Farber, *Topology of billiard probelms, part I*, Duke Math. J., 115(2):559–585, 2002.

[23] M. Farber, *Topology of billiard probelms, part II*, Duke Math. J., 115(2):587–561, 2002.

[24] G. Fournier - D. Lupo - M. Ramos - M. Willem, *Limit relative category and critical point theory*, In U. K. C. K. R. T. Jones - H. O. Walther, editors, Dynamics Reported, pages 1–24, Springer, Berlin, 1994.

[25] F. Giannoni, *Periodic bounce solutions of dynamical conservative and their minimal period*, Nonlinear Analysis, Vol. 14 no. 1:263–285, 1990.

[26] A. Marino - D. Mugnai, *Asymptotical multiplicity and some reversed variational inequalities*, Topol. Meth. Nonlinear Anal., 17:43–62, 2002.

[27] A. Marino - D. Mugnai, *Asymptotically critical points and their multiplicity*, Topol. Meth. Nonlinear Anal., 20:29–38, 2002.

[28] A. Marino - C. Saccon - M. Tosques, *Curves of maximal slope and parabolic variational inequalities on non convex constraints*, In Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Serie IV, Vol. XVI, Fasc. 2:281–330, 1989 Charles University of Prague, 1993.

[29] A. Marino - C. Saccon, *Some elements of subdifferential analysis and some eigenvalue problems for eigenvalue problems*, In Autumn School: Variational Inequalities, pages 1–26. S. Charles University of Prague, 1993.

[30] A. Marino - C. Saccon, *Some variational theorems of mixed type and elliptic problems with jumping nonlinearities*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, XXV:631–665, 1997.

[31] A. Marino - C. Saccon, *Nabla theorems and multiple solutions for some noncooperative elliptic systems*, Topol. Meth Nonlinear Anal., 17:213–237, 2001.

[32] A. Marino - C. Saccon, *Asymptotically critical points and multiple elastic bounce trajectories*, Topol. Meth. Nonlinear Anal., 30:351–395, 2007.

[33] A. Marino - C. Saccon, *Asymptotically critical points and multiple solutions in the elastic bounce problem*, In F. Giannessi - A. Maugeri, editors, Variational Analysis and Applications, volume 79, pages 651–663. Springer, 2005.

[34] A. Marino - C. Saccon, to appear.

[35] A. Marino - D. Scolozzi, *Geodetiche con ostacolo*, Boll. Un. Mat. Ital., B(6) 2:1–31, 1983.

[36] A. Marino - M. Tosques, *Some variational problems with lack of convexity and some partial differential inequalities*, In Method of Nonconvex Analysis, volume 1446 of Lecture Notes in Math., pages 58–83, Berlin, 1990. Springer, Varenna, 1989.

[37] J. Mawhin - M. Willem, *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems*, Number 74 in Applied Mathematical Sciences, Springer, 1989.
[38] J. Moser - E. J. Zehnder, *Notes on Dynamical Systems*, Number 12 in Courant Lecture Notes, A.M.S., 2005.
[39] R. Peirone, *Billiards in tubular neighborhoods of manifolds of codimension* 1, Comm. Math. Phys., 207(1):67–80, 1999.
[40] L. Penrose - R. Penrose, *Puzzles for Christmas*, New Scientist, 25 December 1958.
[41] D. Percivale, *Uniqueness in elastic bounce problems*, J. Diff. Eq., 54:1984, 1985.
[42] J. Rauch, *Illumination of bounded domains*, Amer. Math. Monthly, pages 359–361, 1978.
[43] J. T. Schwartz, *Nonlinear functional analysis*, Gordon and Breach New York, 1969.
[44] M. Struwe, *Sattelpunkte oder Variationsprinzipien in Geometrie und Mechanik*, Elem. Math., 52 (1997), no. 2, 45–59.

Received 14 December 2010,
and in revised form 22 March 2011.

Dipartimento di Matematica
Leonida Tonelli
Largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
Italy
marino@dm.unipi.it