Publ. RIMS, Kyoto Univ.
27 (1991), 367–374

Spectre D'Operateurs de Schrödinger avec Potentiel et Champ Magnetique Polynomiaux

par

Pierre LEVY-BRUHL*

§1. Présentation des Résultats

Soient $(a_j)_{j=1,\dots,n}$ et $(V_k)_{k=1,\dots,p}$ des polynômes réels de la variable $x = (x_1, \dots, x_n)$ de $\boldsymbol{R}^n$. Notant $D_j = (1/i)\dfrac{\partial}{\partial x_j}$, on considère l'opérateur:

$$P = \sum_{1 \le j < n} (D_j - a_j(x))^2 + \sum_{1 \le k < p} (V_k(x))^2 . \tag{1–1}$$

On sait que l'opérateur non borné défini par P dans $L^2(\boldsymbol{R}^n)$ est essentiellement auto-adjoint à partir de $C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$, et on étudie le spectre de son unique extension auto-adjointe, encore notée P.

Ce problème a fait l'objet de nombreux travaux, et nous renvoyons à l'introduction de [H-M] pour une brève discussion de ceux-ci. Les auteurs de cet article caractérisent le spectre essentiel d'opérateurs du type [1–1], dans le cas plus général où les a_j et V_k ont seulement un comportement polynômial, mais ne déterminent pas la nature de ce spectre. L'objet du présent travail est en particulier de montrer qu'un opérateur de la forme [1–1] n'a jamais de spectre singulier continu. Les résultats que nous obtenons précisent et complètent certains de ceux du livre [J], sur lesquels nous reviendrons dans les paragraphes suivants.

Signalons enfin l'article [Iw] où un exemple d'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique (non polynômial), en dimension deux, dont le spectre est absolument continu, est traité en détail, et la note [H] dont certains résultats sont généralisés ici, et qui a en partie inspiré le présent travail.

Le principal résultat obtenu est:

Communiqué per H. Araki, le 17 octobre 1988. Revu le 27 octobre 1989.
1991 Mathematics Subject classification: 35P05
* Université de Reims, Mathématiques; BP 347; 51062 Reims cedex, France.

Théorème 1–1. *Soit $\Sigma \subset \mathbf{R}^+$ le spectre de P. Σ est de l'un des trois types suivant:*

1) $\Sigma = \{\lambda_k / k \in \mathbf{N}\}$, *suite tendant vers* $+\infty$ *de valeurs propres isolées de multiplicité finie.*

2) $\Sigma = \{\lambda_k / k \in \mathbf{N}\}$, *suite tendant vers* $+\infty$ *de valeurs propres isolées toutes de multiplicité infinie.*

3) $\Sigma = [a, \infty[$ *est absolument continu.*

On verra au paragraphe suivant comment lire sur P dans quel cas on se trouve. Hors du cas 1), qui se produit si et seulement si P set à résolvante compacte, le spectre de P est égal à son spectre essentiel, et le spectre singulier continu de P est toujours vide.

La démonstration du théorème 1–1 repose sur le lien entre P et les représentations des groupes nilpotents, déjà exploité dans certains des articles cités ci-dessus, et les résultats de [H.N] dont nous utiliserons les notations.

§2. L'opérateur P et les Groupes Nilpotents. Cas 1) et 2) du théorème 1.1

Comme dans [H-M], considérons l'algèbre de Lie $\mathscr{G}$ vérifiant les propriétés suivantes: (n, p, r sont des entiers positifs).

2.1.a: $\mathscr{G}$ est nilpotente graduée de rang r, c'est à dire que:
$\mathscr{G} = \mathscr{G}_1 \oplus \cdots \oplus \mathscr{G}_r$, $[\mathscr{G}_i, \mathscr{G}_j] \subset \mathscr{G}_{i+j}$, avec $\mathscr{G}_{i+j} = \{0\}$ si $i + j > r$.

2.1.b: $\mathscr{G}_1 = \mathscr{G}'_1 \oplus \mathscr{G}''_1$ avec dim $\mathscr{G}'_1 = n$, dim $\mathscr{G}''_1 = p$.

2.1.c: $\mathscr{G}_1$ engendre $\mathscr{G}$.

2.1.d: Si $\mathscr{H} = \mathscr{G}''_1 \oplus \mathscr{G}^2$, où $\mathscr{G}^2 = \bigoplus_{i=2}^{r} \mathscr{G}_i$, alors $[\mathscr{H}, \mathscr{H}] = \{0\}$.

2.1.e: $\mathscr{G}$ est de dimension maximale pour les propriétés précédentes.

Les (a_j) et (V_k) étant polynômiaux, on choisit pour entier r le suprémum de l'ensemble $\{1 + d^\circ V_k, 1 + d^\circ a_j\}_{1 \le k \le p, 1 \le j \le n}$, où d° désigne le degré du polynôme.

Soit (Y'_j) une base de $\mathscr{G}'_1$, (Y''_k) une base de $\mathscr{G}''_1$. On définit une représentation unique de $\mathscr{G}$ en posant:

$$\Pi(Y'_j) = \partial_j - i a_j(x), \; \Pi(Y''_k) = i V_k(x).$$

P s'écrit alors: $P = \Pi(-\sum_{1 \le j \le n} Y'^2_j - \sum_{1 \le k \le p} Y''^2_k) = \Pi(\mathscr{P})$.

En utilisant [H-N] (p.30) on voit que Π est unitairement équivalente à la représentation induite $\Pi_{\tilde{\ell}, \mathscr{H}}$, où $\mathscr{H}$ est l'idéal défini ci-dessus, et où $\tilde{\ell}$ est la forme linéaire sur $\mathscr{H}$ définie par:

$$\tilde{\ell}(Y''_k) = V_k(0), \; \tilde{\ell}((\mathrm{ad}\; Y')^\alpha\, Y''_k) = \partial^\alpha V_k(0),$$

$$\tilde{\ell}((\mathrm{ad}\; Y')^\alpha [Y'_i, Y'_j]) = \partial^\alpha(\partial_j a_i - \partial_i a_j)(0).$$

L'étude de P est ramenée à celle de $\Pi_{\tilde{\ell},\mathscr{H}}(\mathscr{P})$.

Notons $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n, \tilde{\ell}/_{\mathscr{H}})$ l'élément générique de $\tilde{\ell} + \mathscr{H}^{\perp}$, et Π_ℓ la représentation unitaire irréductible du groupe connexe simplement connexe G d'algèbre de Lie $\mathscr{G}$, associée à ℓ par la théorie de Kirillov.

Proposition 2–1. *Si le représentation $\Pi_{\tilde{\ell},\mathscr{H}}$ est irréductible, P est à résolvante compacte, et le cas* 1) *du théorème* 1–1 *est réalisé.*

Compte-tenu de l'hypoellipticité de $\mathscr{P}$, ce résultat est contenu dans [H-N], pages 178 et 179. On est donc amené à étudier l'irréductibilité de $\Pi_{\tilde{\ell},\mathscr{H}}$. La représentation $\Pi_{\tilde{\ell},\mathscr{H}}$ est irréductible si et seulement si l'algèbre $\Pi_{\tilde{\ell},\mathscr{H}}(\mathscr{U}(\mathscr{G}))$ est l'algèbre de Weyl des opérateurs à coefficients polynômiaux sur $\boldsymbol{R}^n$.

Si on pose $b_{jk}(x) = [D_j - a_j(x), D_k - a_k(x)] = \dfrac{\partial a_j}{\partial x_k}(x) - \dfrac{\partial a_k}{\partial x_j}(x)$ (qui est le champ magnétique dont on sait que c'est de lui, (et de V), que dépend la théorie spectrale de P), puis:

$$M(x) = \sum_{\substack{\alpha \in \boldsymbol{N}^n \\ 1 \le i \le p \\ 1 \le j,k \le n}} |\partial^\alpha b_{j,k}(x)| + |\partial^\alpha V_i(x)|. \tag{2–2}$$

On constate que $\Pi_{\tilde{\ell},\mathscr{H}}$ est irréductible si et seulement si $M(x) \to \infty$ quand $|x| \to \infty$. (cf. [H-M], théorème 1.1, où cette fonction est utilisée dans un cadre plus général non polynômial.).

J. Nourrigat m'a signalé la condition suffisante suivante pour qu'il en soit ainsi (cf. aussi [J] proposition 7–1–3 et 7–3–1):

Lemma 2–2. *Si $\{h \in \boldsymbol{R}^n,\ h \cdot \nabla b_{jk} \equiv h \cdot \nabla V_i \equiv 0$ pour tout $(i, j, k)\} = \{0\}$, alors*

$$M(x) \longrightarrow \infty \ \textit{quand}\ |x| \longrightarrow \infty.$$

Donnons la preuve du lemme 2.2 dans le cas d'un seul polynôme V. Soit $\|x_n\| \to \infty$, avec $\sum_\alpha |\partial^\alpha V(x_n)| \le C$. Soit T_n, $n \in \boldsymbol{N}$, l'application linéaire de $\boldsymbol{R}^n$ dans l'espace vectoriel E des polynômes de degré inférieur ou égal à $d^\circ V$:

$$T_n(h) = (h \cdot \nabla)\ V(x_n + \cdot).$$

Puisque $\{h | h \cdot \nabla V \equiv 0\} = \{0\}$, il existe une constante $\tilde{C} > 0$ telle que:

$$\|h\| \le \tilde{C}\, \|T_n(h)\|_E, \quad \text{où}\ \|P\|_E = \sum_\alpha |\partial^\alpha P(0)|.$$

Soit en effet h fixé de norme 1; si la suite $\|T_n(h)\|_E$ tendait vers 0, le polynôme $g = h \cdot \nabla(V)$ vérifierait $\sum_\alpha \|\partial^\alpha g(x_n)\| \to 0$, donc serait nul, en contradiction avec l'hypothèse du lemme. Par équivalence de norme, on a une inégalité du même type avec la norme: $\|P\|_E = \sup\limits_{\|x\| \le 1} |P(x)|$. D'où, en notant encore $\tilde{C}$ la constante:

$$\|h\| \leq \tilde{C} \sup_{\|x-x_n\|\leq 1} |h\cdot\nabla V(x)|, \ \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

En appliquant cette inégalité à $h = x_n$, on a:

$$\|x_n\| \leq \tilde{\tilde{C}}(1 + \sup_{\|x-x_n\|\leq 1} |x\cdot\nabla V(x)|)$$

(on a utilisé l'hypothèse $\sum_\alpha |\partial^\alpha V(x_n)| \leq C\cdot$).

En aplliquant l'identité d'Euler à chaque composante homogène de V, on majore $\sup_{\|x-x_n\|\leq 1} |x\cdot\nabla V(x)|$ par $C'\sum_\alpha|\partial^\alpha V(x_n)|$. On obtient une contradiction avec l'hypothèse $\|x_n\| \to \infty$.

On en déduit en particulier que si $\Pi_{\tilde{\ell},\mathscr{H}}$ n'est pas irréductible, il existe $h \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, tel que $h\cdot\nabla V_i \equiv 0$ et $h\cdot\nabla b_{jk} \equiv 0$ pour tout (i, j, k). Par une rotation des axes de coordonnées, on se ramène à $h = (1, 0, \ldots, 0)$, et il en résulte que les V_i et b_{jk} sont indépendantes de x_1. Par le changement de jauge $\exp\left(i\int^{x_1} a_1(t, x_2 \ldots x_n)dt\right)$ on se ramène à $a_1 \equiv 0$, et donc au cas où $a_2, \ldots, a_n$ sont aussi indépendants de x_1. D'où le lemme suivant (voir aussi [J] remarque 7–1–4):

Lemma 2–3. *Si $\Pi_{\tilde{\ell},\mathscr{H}}$ n'est pas irréductible, P est unitairement équivalent à un opérateur du type*:

$$(2\text{–}3) \qquad (D_1 - a_1(x_2, \ldots, x_n))^2 + \sum_{2\leq j\leq n} (D_j - a_j(x_2, \ldots, x_n))^2 + \sum_{1\leq k\leq p} (V_k(x_2, \ldots, x_n))^2.$$

Sous la forme (2–3) après transformation de Fourier en x_1, on obtient un opérateur $P_{\xi_1}(x_2, \ldots, x_n)$. Celui-ci est l'image de $\mathscr{P}$ par $\Pi_{\ell,\mathscr{H}_1}$, où $\ell/_{\mathscr{H}_1} = \tilde{\ell}$ et $\mathscr{H}$ de codimension un dans $\mathscr{H}_1$. On réitère la procédure jusqu'à obtenir les images de $\mathscr{P}$ par les représentations unitaires irréductibles de G, associées aux éléments de $\ell + \mathscr{H}^\perp$. On a ainsi écrit P concrètement sous la forme $\int^\oplus \Pi_\ell(\mathscr{P})d\mu(\ell_1, \ldots, \ell_n)$, où $d\mu$ est une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n = \mathscr{H}^\perp$. Si $\Pi_{\tilde{\ell},\mathscr{H}}$ n'est pas irréductible, deux cas se présentent:

α) Soit $G\cdot(\tilde{\ell} + \mathscr{H}^\perp)$ est constitué d'une seule orbite, et si ℓ est sur cette orbite, $\Pi_{\tilde{\ell},\mathscr{H}} \sim \infty\cdot\Pi_\ell$ ($\sim$ signifiant l'équivalence unitaire des représentations).

β) Soit $G\cdot(\tilde{\ell}+\mathscr{H}^{\perp})$ est constitué de plus d'une orbite, et on verra qu'il est alors constitué d'une infinité d'orbites, auquel cas $\Pi_{\tilde{\ell},\mathscr{H}}$ est équivalente à une intégrale hilbertienne de Π_{ℓ}, $\ell\in\tilde{\ell}+\mathscr{H}^{\perp}$, avec une mesure équivalente à la mesure de Lebesgue.

Remarquons que dans ce qui précède, on n'a fait qu'expliciter dans le cas simple étudié ici les résultats de [G], [C-G-G]. en décomposant la représentation $\Pi_{\tilde{\ell},\mathscr{H}}$ en intégrale hilbertienne d'irréductibles. Du cas α) précédent on déduit:

Proposition 2–4. *Si $G\cdot(\tilde{\ell}+\mathscr{H}^{\perp})$ est constitué d'une seule orbite de la représentation coadjointe, mais $\Pi_{\tilde{\ell},\mathscr{H}}$ non irréductible, P admet pour spectre une suite de valeurs propres de multiplicité infinite, tendant vers* $+\infty$ (*cas* 2) *du théorème* 1).

Ces valeurs propres sont celles des $\Pi_{\ell}(\mathscr{P})$, indépendantes de ℓ dans $\tilde{\ell}+\mathscr{H}^{\perp}$. (Voir au dernier paragraphe des exemples).

Dans le cas β) où $G\cdot(\tilde{\ell}+\mathscr{H}^{\perp})$ n'est pas une seule orbite, on va étudier plus précisément la dépendance en ℓ des valeurs propres de $\Pi_{\ell}(\mathscr{P})$.

§3. Les $\Pi_{\ell}(\mathscr{P})$ Forment une Famille holomorphe en ℓ_1. Spectre de Lebesgue

On utilise les faits suivants, prouvés dans [LB2]: Soit Q un opérateur homogène invariant à gauche sur un groupe de Lie nilpotent gradué de rang r, tel que $\Pi_{\ell}(Q)$ soit injectif dans $\mathscr{S}$, (espace des vecteurs C^{∞} de la représentation, qui est dans ce cas l'espace de Schwartz des fonctions C^{∞} à décroissance rapide) pour tout ℓ non nulle, nulle sur $\mathscr{G}_r$. On fixe une base de $\mathscr{G}_1^*$, et on note $(\ell_1,\ldots,\ell_m)$ les coordonnées de $\ell\in\mathscr{G}_1^*$. Il existe un ouvert de Zariski $\mathscr{Z}$ de $\mathscr{G}_2^*\oplus\cdots\oplus\mathscr{G}_r^*$ et une réalisation des représentations Π_{ℓ} pour $\ell\in\mathscr{G}_1^*\times\mathscr{Z}$ telle que, pour chaque i de $(1,\ldots,m)$ la famille $\ell_1\to\Pi_{\ell}(QQ^*)$ se prolonge en une famille holomorphe de type A d'opérateurs auto-adjoints, dépendant continument des paramètres ℓ_k, $k\neq i$, et $\ell/_{\mathscr{G}_2^*\oplus\ldots\oplus\mathscr{G}_r^*\cap\mathscr{Z}}$. Remarquons que dans la situation plus simple (1–1) il existe une polarisation commune qui est un idéal contenant $\mathscr{G}^2$ pour toutes les formes linéaires ℓ telles que $\ell/\mathscr{H}=\tilde{\ell}$. La forme des opérateurs $\Pi_{\ell}(\mathscr{P})$ est donnée dans [H-N] p.25, et on en déduit facilement ce qui précède.

Puisque $\mathscr{P}$ est hypoelliptique, on est dans la situation précédente, et il en résulte, [K] p.392, que les valeurs propres de $\Pi_{\ell}(\mathscr{P})$ sont représentées par une suite $\lambda_k(\ell_1,\ldots,\ell_n,\tilde{\ell}/_{\mathscr{H}})$ de fonctions continues, analytiques en ℓ_j (j compris entre 1 et n), les autres ℓ_k étant fixés. On choisira l'entier j à la proposition 3.2.

Revenant à l'écriture de $\Pi_{\tilde{\ell},\mathscr{H}}$ comme intégrale hilbertienne des $\Pi_{\ell'}/\ell\in\tilde{\ell}+\mathscr{H}^{\perp}$, avec une mesure équivalente à la mesure de Lebesgue sur $\boldsymbol{R}^n$, on déduit que le spectre de P est absolument continu de la propriété:

(3.1) $\quad\exists j,\ \forall(\ell_1,\ldots,\ell_{j-1},\ell_{j+1},\ldots,\ell_n),\quad\forall k,\ \ell_j\longrightarrow\lambda_k(\ell)$ non constante.

En effet, en effectuant d'abord l'intégration en ℓ_j, on obtiendra un opérateur à spectre de Lebesgue (adaptation de [R-S] théorème XIII 8–6) et les intégrations suivantes ne modifieront pas la nature du spectre ([R-S]) théorème XIII 8–5 (f)).

Il reste à prouver (3–1), qui résultera de la proposition suivante, compte tenu de l'analyticité des $\lambda_k(\ell)$:

Proposition 3.2. *Soit σ_ℓ la plus petite valeur propre de $\Pi_\ell(\mathscr{P})$. Si $G\cdot(\tilde{\ell}+\mathscr{H}^\perp)$ est constitué de plus d'une orbite, il existe un indice $j\in(1,\ldots,n)$ tel que*:

$$|\ell_j|\longrightarrow\infty\Longrightarrow\sigma_\ell\longrightarrow+\infty.$$

La construction de $\mathscr{G}$ donne directement une base de Jordan-Hölder contenant les Y'_j et Y''_k. Il existe une partition de cette base telle que l'orbite de tout point de $\tilde{\ell}+\mathscr{H}^\perp$ contienne un et un seul point de la forme $(0, r(\ell_1,\ldots,\ell_n))$ (paramétrisation des orbites rappelée par exemple dans [LB2], proposition 2.1 [c], corollaire III. 1–8.) Chaque composante est une fraction rationnelle en $(\ell_1,\ldots,\ell_n)$, et au moins l'une d'entre elles est non constante (sinon tous les points de $\tilde{\ell}+\mathscr{H}^\perp$ seraient sur la même orbite). La forme explicite de r prouve que l'une de ces composantes est une forme linéaire non nulle en ℓ_j, indépendante des autres ℓ_k. Il existe donc k tel que $r_k(\ell)$ tende vers l'infini quand $|\ell_j|$ tends vers l'infini. On utilise alors les résultats suivants de [LB2], p. 597, (2.8) et dernières lignes: $|||\cdot|||$ étant une norme quasi-homogène sur $\mathscr{G}^*$, on note: $|\ell| = \inf\{|||\ell'|||,\ \ell'\in G\cdot\ell\}$. Alors:

$$r_k(\ell)\longrightarrow\infty\Longrightarrow|\ell|\longrightarrow\infty \tag{3–2}$$

$\mathscr{P}$ étant auto-adjoint positif hypoellitique, on utilise directement le théorème de Hulanicki, Jenkins, Ludwig exploité dans [LB2], p. 597, (2.9):

$$\exists C>0,\quad \sigma_\ell\geq C|\ell|^2. \tag{3–3}$$

La proposition 3–2 est prouvée, et on en déduit:

Proposition 3.4. *Si $G(\tilde{\ell}+\mathscr{H}^\perp)$ n'est pas réduit à une seule orbite, le spectre de P est absolument continu* (*cas* 3) *du théorème* 1–1)

On généralise ainsi le théorème 7–3–5 de [J].

§ 4. Exemples et Généralisations

$$P_1=(D_{x_1}-2x_2x_3)^2+(D_{x_2}+x_1x_3)^2+(D_{x_3}-2x_2x_1)^2$$

est à spectre absolument continu ($\mathscr{G}$ est de dimension 8, $\mathscr{H}$ de dimension 5, $G\cdot(\tilde{\ell}+\mathscr{H}^\perp)$ paramétré par $\mathbb{R}$). Par contre, si V est un polynôme non constant,

$$P_2=P_1+(V(x_2))^2$$

est à résolvante compacte. L'opérateur de Schrödinger à champ magnétique constant $P_3 = D_{x_3}^2 + \left(D_{x_1} - \frac{x_2}{2}\right)^2 + \left(D_{x_2} + \frac{x_1}{2}\right)^2$ est à spectre de Lebesgue, alors qu'en dimension deux $P_4(\xi) = \xi^2 + \left(D_{x_1} - \frac{x_2}{2}\right)^2 + \left(D_{x_2} + \frac{x_1}{2}\right)^2$ (cas des niveaux de Landau) a une suite de valeurs propres de multiplicité infinie. Il en va de même pour: $p_5 = (D_{x_1} + x_1 x_2)^2 + \left(D_{x_2} + \frac{x_1^2}{2}\right)^2 + (D_{x_3} + x_1 + x_2^2)^2$.

Par les mêmes méthodes, on peut déterminer la nature du spectre d'un opérateur de la forme $\Pi_{\tilde{\ell},\mathscr{H}}(QQ^*)$ où Q est homogène invariant à gauche sur un groupe nilpotent gradué, vérifiant la condition d'injectivité du début du § 3. On peut utiliser la décomposition de $\Pi_{\tilde{\ell},\mathscr{H}}$ obtenue par [G], [C-G-G] comme intégrale hilbertienne des Π_ℓ, ℓ dans $\tilde{\ell} + \mathscr{H}^\perp$. La caractérisation du spectre est la même que dans les théorèmes 1–1, selon le nombre d'orbites de $G \cdot (\tilde{\ell}, \mathscr{H}^\perp)$. Pour utiliser l'argument du § 3, c'est à dire obtenir une famille holomorphe en un certain paramètre, en lequel les valeurs propres ne soient pas constantes, on est amené à faire l'hypothèse que $\mathscr{H}$ contient $\mathscr{G}_2 \oplus \cdots \oplus \mathscr{G}_r$.

Bibliographie

[C-G] Corwin, L. and Greenleaf, F. P., *Representations of nilpotent Lie groups and their applications*, Livre à paraitre.

[C-G-G] Corwin, L., Grelaud, G. and Greenleaf, F. P., Direct integral decomposition, *Trans. A.M.S.*, **304**, (1987), 549–583.

[G] Grelaud, G., Thèse d'Etat, *Université de Poitiers*, 1984.

[H] Helffer, B., On a conjecture of P. Jorgensen and W. Klink, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **23** (1987), 1007–1013.

[H-M] Helffer, B. and Mohamed, A., Caractérisation du spectre essentiel de l'opérateur de Schrödinger avec un champ magnétique, *Ann. Fourier*, **38**, (1988), 95–112.

[H-N] Helffer, B. and Nourrigat, J., *Hypoellipticité maximale pour des opérateurs polynômes de champs de vecteurs*, *Birkhäuser*, 1985.

[Iw] Iwatsuka, A., Examples of Absolutely continuous Schrödinger operators in magnetic fields, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **21** (1985), 385–401.

[J] Jorgensen, P.E.T., *Operators and representation theory*, *North Holland Mathematics Studies*, **147**, Amsterdam, 1988.

[J-K] Jorgensen, P.E.T. and Klink, W. H., Quantum mechanics and nilpotent groups, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **21** (1985), 969–999.

[K] Kato, T., *Perturbation theory for linear operators*, *Springer Verlag*, 1980 (2ème édition).

[LB1] Lévy-Bruhl, P., Conditions suffisantes de résolubilité locale I, *Comm. in P.D.E*, **9**, (1984), 839–888.

[LB2] ———, Conditions suffisantes de résolubilité locale II, *Trans. A.M.S.*, **293**, (1986), 593–603.

[R-S] Reed, M. and Simon, B., *Methods of modern mathematical physics*, **4** *Academic Press*, 1978.