Publ. RIMS, Kyoto Univ.
29 (1993), 121-151

Solutions Holomorphes et Singulières d'Équations aux Dérivées Partielles Singulières Non Linéaires

par

Raymond GÉRARD* et Hidetoshi TAHARA**

Introduction

Dans l'article [5], nous avons étudié les solutions holomorphes et singulières d'équations aux dérivées partielles singulières non linéaires du premier ordre du type Briot-Bouquet. L'objet du présent travail est d'étendre les résultats de [5] aux équations d'ordre quelconque. Le cas où l'équation est linéaire a été étudié par Tahara [11] et [12].

Notations:

$\boldsymbol{N}=\{0, 1, 2, \cdots\}$, ensemble des entiers naturels;

$\boldsymbol{N}^*=\boldsymbol{N}\setminus\{0\}$;

$x=(x_1, \cdots, x_n)\in\boldsymbol{C}^n$, $t\in\boldsymbol{C}$.

Pour tout $\alpha=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)\in\boldsymbol{N}^n$ nous noterons

$$|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}.$$

Définissons:

$$I_m=\{(j, \alpha)\in\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}^n;\ j+|\alpha|\leqq m \text{ et } j<m\},$$

$$\delta=\text{le cardinal de } I_m,$$

$$Z=\{Z_{j,\alpha}\}_{(j,\alpha)\in I_m}\in\boldsymbol{C}^{\delta}.$$

Soit $\varDelta$ un polydisque centré à l'origine de $\boldsymbol{C}_t\times\boldsymbol{C}^n_x\times\boldsymbol{C}^{\delta}_Z$; notons

$$\varDelta_0=\varDelta\cap\{t=0,\ Z=0\}.$$

Soit $F(t, x, Z)$ une fonction de (t, x, Z) définie dans le polydisque $\varDelta$ qui satisfait aux hypothèses suivantes:

(A_1) $F(t, x, Z)$ est holomorphe dans $\varDelta$;

Communiqué par T. Kawai, février le 28, 1992.
1991 Mathematics Subject Classification: 35C10.

* Institut de Recherche Mathématique Alsacien, Université Louis Pasteur, 10 rue du Général Zimmer, 67084 Strasbourg, France.

* Department of Mathematics, Sophia University, Kioicho, Chiyoda-ku, 102 Tokyo, Japan.

(A_2) $F(0, x, 0)\equiv 0$ dans Δ_0 ;

(A_3) $\dfrac{\partial F}{\partial Z_{j,\alpha}}(0, x, 0)\equiv 0$ dans Δ_0 si $|\alpha|>0$.

Introduisons également:

-$\mathcal{R}(\boldsymbol{C}\setminus\{0\})$ le revêtement universel de $\boldsymbol{C}\setminus\{0\}$;

-$S_\theta=\{t\in\mathcal{R}(\boldsymbol{C}\setminus\{0\})\,;\ |\arg t|<\theta\}$ un secteur dans $\mathcal{R}(\boldsymbol{C}\setminus\{0\})$;

-$S(\varepsilon(s))=\{t\in\mathcal{R}(\boldsymbol{C}\setminus\{0\})\,;\ 0<|t|<\varepsilon(\arg t)\}$ où $\varepsilon(s)$ est une fonction définie sur $\boldsymbol{R}_s$ continue et strictement positive;

-$D_r=\{x\in\boldsymbol{C}^n\,;\ |x_i|\leqq r,\ i=1, \cdots, n\}$;

-$\boldsymbol{C}\{x\}$ l'anneau des germes de fonctions holomorphes à l'origine de $\boldsymbol{C}_x^n$;

-$\boldsymbol{C}_r\{x\}$ le sous anneau de $\boldsymbol{C}\{x\}$ des fonctions holomorphes dans D_r ;

-$\tilde{\mathcal{O}}_+$ l'ensemble des fonctions $u(t, x)$ vérifiant les conditions suivantes:

i) il existe une fonction $\varepsilon(s)$ définie sur $\boldsymbol{R}_s$ continue et strictement positive et un nombre réel strictement positif r tels que $u(t, x)$ soit holomorphe dans $S(\varepsilon(s))\times D_r$;

ii) il existe un nombre réel $a>0$ tel que pour tout $\theta>0$ et toute partie compacte K de D_r

$$\max_{x\in K}|u(t, x)|=O(|t|^a)$$

lorsque t tend vers zéro dans S_θ.

Le problème. *Déterminer toutes les solutions de l'équation aux dérivées partielles*

$$\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^m u=F\left(t, x, \left\{\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^j\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u\right\}_{(j,\alpha)\in I_m}\right) \tag{E}$$

qui appartiennent à $\tilde{\mathcal{O}}_+$.

Désignons par $\rho_1(x), \cdots, \rho_m(x)$ les fonctions de x racines du polynôme

$$C(\rho\,;x)=\rho^m-\sum_{j<m}\left(\frac{\partial F}{\partial Z_{j,0}}(0, x, 0)\right)\rho^j.$$

Ces fonctions seront appelées les *fonctions caractéristiques* de l'équation (E) et $C(\rho\,;x)$ le *polynôme caractéristique* de (E).

Notons

$$\begin{aligned} &J_+=\{i\in\{1, \cdots, m\}\,;\ \mathrm{Re}\,\rho_i(0)>0\},\\ &\mu=\text{le cardinal de } J_+. \end{aligned} \tag{0.1}$$

Lorsque $\mu=0$ cette condition signifie donc que $\mathrm{Re}\,\rho_i(0)\leqq 0$ pour tout $i=1, \cdots, m$. Lorsque $\mu\geqq 1$ quitte à changer la numérotation nous pouvons supposer que:

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\,\rho_i(0)>0 & \text{pour } 1\leqq i\leqq\mu,\\ \mathrm{Re}\,\rho_i(0)\leqq 0 & \text{pour } \mu+1\leqq i\leqq m. \end{cases} \tag{0.2}$$

Sous la condition de Poincaré (cf. [5], [6]) nous pouvons donner une réponse au problème posé ci-dessus.

Théorème Principal.

(I) (Solutions holomorphes). *Si* $\rho_i(0) \notin \boldsymbol{N}^*$ *pour tout* $i=1, \cdots, m$, *l'équation* (E) *a une solution unique* $u_0(t, x)$ *holomorphe au voisinage de l'origine de* $\boldsymbol{C}_t \times \boldsymbol{C}_x^n$ *vérifiant* $u_0(0, x) \equiv 0$.

(II) (Solutions singulières). *Soit* $\mathcal{S}_+$ *l'ensemble des solutions de* (E) *appartenant à* $\tilde{\mathcal{O}}_+$. *Alors nous avons*:

(II-1) *Si* $\mu=0$, $\mathcal{S}_+=\{u_0(t, x)\}$.

(II-2) *Si* $\mu \geqq 1$ *et si*

i) $\rho_i(0) \neq \rho_j(0)$ *pour* $1 \leqq i \neq j \leqq \mu$;

ii) $C(1; 0) \neq 0$;

iii) $C(i+j_1\rho_1(0)+\cdots+j_\mu \rho_\mu(0); 0) \neq 0$ *pour tout* $(i, j) \in \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}^\mu$ *satisfaisant à* $i+|j| \geqq 2$;

alors pour tout $\varphi_1(x), \cdots, \varphi_\mu(x) \in \boldsymbol{C}\{x\}$ *l'équation* (E) *admet une solution* $U(\varphi_1(x), \cdots, \varphi_\mu(x))$ *appartenant à* $\tilde{\mathcal{O}}_+$ *de la forme*

$$U(\varphi_1(x), \cdots, \varphi_\mu(x))=\sum_{i \geqq 1} u_i(x) t^i$$
$$+\sum_{\substack{i+2m|j| \geqq k+2m \\ |j| \geqq 1}} \varphi_{i,j,k}(x) t^{i+j_1\rho_1(x)+\cdots+j_\mu\rho_\mu(x)}(\log t)^k$$

avec $\varphi_{0,e_p,0}(x)=\varphi_p(x)$, $p=1, \cdots, \mu$ *où* $e_1=(1, 0, \cdots, 0), \cdots, e_\mu=(0, \cdots, 0, 1)$. *De plus, nous avons*

$$\mathcal{S}_+=\{U(\varphi_1(x), \cdots, \varphi_\mu(x)) ; \varphi_p(x) \in \boldsymbol{C}\{x\},\ p=1, \cdots, \mu\}.$$

Remarques. (1) Quand $m=1$, ce théorème nous redonne le résultat de Gérard-Tahara [5].

(2) Lorsque l'équation est linéaire, un résultant plus complet a été donné dans Tahara [11] et [12].

L'exemple suivant explique la différence entre le cas linéaire et le cas non linéaire.

Exemple. Considérons

$$t\frac{\partial u}{\partial t}=(1+2\sqrt{-1})u+atu\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{0.3}$$

où $(t, x) \in \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C}$ et $a \in \boldsymbol{C}$. Si $a=0$ l'équation (0.3) est linéaire, et si $a \neq 0$ (0.3) est non linéaire. Alors:

(1) Par le théorème principal nous avons

$$\mathcal{S}_+=\{U(\varphi(x)) ; \varphi(x) \in \boldsymbol{C}\{x\}\}$$

et $U(\varphi(\lambda))$ est de la forme

$$U(\varphi(x))=\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k(x)t^{1+2\sqrt{-1}+2k(1+\sqrt{-1})},$$

où les coefficients $\varphi_k(x)$ $(k\geqq 0)$ sont déterminés par $\varphi_0(x)=\varphi(x)$ et

$$\varphi_k(x)=\frac{a}{k(2+2\sqrt{-1})}\sum_{i+j=k-1}\varphi_i(x)\left(\frac{d\varphi_j(x)}{dx}\right), \qquad k\geqq 1.$$

(2) Si nous prenons $\varphi(x)=x$, la solution $U(\varphi(x))$ se réduit à

$$u^*=xt^{1+2\sqrt{-1}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{a}{2+2\sqrt{-1}}t^{2+2\sqrt{-1}}\right)^k.$$

Le domaine de la convergence de u^* est

$$\begin{cases} \mathcal{R}(\boldsymbol{C}\setminus\{0\})\times\boldsymbol{C}, & \text{quand } a=0, \\ S(\varepsilon(s))\times\boldsymbol{C}, & \text{quand } a\neq 0 \end{cases}$$

avec $\varepsilon(s)=(2\sqrt{2}/|a|)^{1/2}e^s$.

(3) Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions $u(t, x)$ de (0.3) telles que $u(t, x)$ soit holomorphe dans $S(\varepsilon(s))\times D_r$ pour une fonction $\varepsilon(s)>0$ et un nombre $r>0$. Alors:

$$\begin{cases} \mathcal{S}=\mathcal{S}_+, & \text{quand } a=0, \\ \mathcal{S}\supsetneqq\mathcal{S}_+, & \text{quand } a\neq 0. \end{cases}$$

La preuve est comme ce qui suit. Quand $a=0$, $\mathcal{S}=\mathcal{S}_+$ est la conséquence de Tahara [11]. Quand $a\neq 0$, l'équation (0.3) admet une famille de solutions de la forme

$$\frac{-2-2\sqrt{-1}}{a}\frac{x+c}{t}, \qquad c\in\boldsymbol{C}$$

qui n'appartiennent pas à $\mathcal{S}_+$.

(4) Lorsque $a\neq 0$, il semble difficile de déterminer la structure de $\mathcal{S}$. Nous présentons ceci comme un problème ouvert.

Cet article est présenté de la manière suivante. Dans le § 1 nous donnons les solutions holomorphes de (E). Dans les § 2 et 3 nous construisons une famille de solutions appartenant à $\tilde{\mathcal{O}}_+$. La discussion des paragraphes 1, 2 et 3 est basée sur les résultats de [7]. Dans le § 4 nous rappelons la théorie asymptotique développée dans Tahara [14]. L'utilisation de tous ces résultats nous permet de démontrer le théorème principal dans le § 5.

§ 1. Solutions Holomorphes

Dans cette section, nous rappelons un résultat de [7] sur la convergence des solutions séries formelles d'équations aux dérivées partielles singulières non linéaires.

Soient $m \in \boldsymbol{N}^*$, $d \in \boldsymbol{N}^*$, $t=(t_1, \cdots, t_d) \in \boldsymbol{C}^d$ et $x=(x_1, \cdots, x_n) \in \boldsymbol{C}^n$ et $a_{i,j}(x)$ $(1 \leqq j \leqq i \leqq d)$ des fonctions holomorphes dans un disque $D_r=\{x \in \boldsymbol{C}^n ; |x_i| \leqq r, i=1, \cdots, n\}$ et introduisons le champ de vecteurs

$$\tau=\sum_{i=1}^{d}\Big(\sum_{j=1}^{i} a_{i,j}(x) t_j\Big) \frac{\partial}{\partial t_i}.$$

Notons :

$$I(m)=\{(\alpha, \beta, \gamma) \in \boldsymbol{N}^d \times \boldsymbol{N}^d \times \boldsymbol{N}^n ;\ |\alpha|=|\beta| \leqq m \text{ et } |\beta|+|\gamma| \leqq m\},$$

$$\delta(m)=\text{le cardinal de } I(m),$$

$$Z=\{Z_{\alpha, \beta, \gamma}\}_{(\alpha, \beta, \gamma) \in I(m)}.$$

Soit $G_2(x)(t_1, \cdots, t_d, Z)$ une fonction holomorphe de $(x, t_1, \cdots, t_d, Z)$ définie dans un polydisque centré à l'origine de $\boldsymbol{C}^n \times \boldsymbol{C}^d \times \boldsymbol{C}^{\delta(m)}$ ayant la forme suivante :

$$G_2(x)(t_1, \cdots, t_d, Z)=\sum_{|p|+|q| \geq 2} g_{p,q}(x) t_1^{p_1} \cdots t_d^{p_d} Z^q,$$

où

$$p=(p_1, \cdots, p_d) \in \boldsymbol{N}^d, \quad |p|=p_1+\cdots+p_d,$$

$$q=\{q_{\alpha, \beta, \gamma}\}_{(\alpha, \beta, \gamma) \in I(m)} \in \boldsymbol{N}^{\delta(m)},$$

$$|q|=\sum_{(\alpha, \beta, \gamma) \in I(m)} q_{\alpha, \beta, \gamma},$$

$$Z^q=\prod_{(\alpha, \beta, \gamma) \in I(m)}(Z_{\alpha, \beta, \gamma})^{q_{\alpha, \beta, \gamma}}$$

et pour tout p, q tel que $|p|+|q| \geqq 2$ les fonctions $g_{p,q}(x)$ sont holomorphes dans un même disque centré à l'origine de $\boldsymbol{C}^n$.

Pour simplifier la présentation nous écrivons $\nabla^m u$ pour

$$\left\{t^\alpha\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)^\beta\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^\gamma u\right\}_{(\alpha, \beta, \gamma) \in I(m)}$$

où

$$\alpha=(\alpha_1, \cdots, \alpha_d) \in \boldsymbol{N}^d, \quad \beta=(\beta_1, \cdots, \beta_d) \in \boldsymbol{N}^d, \quad \gamma=(\gamma_1, \cdots, \gamma_n) \in \boldsymbol{N}^n,$$

$$t^\alpha=t_1^{\alpha_1} \cdots t_d^{\alpha_d}, \quad \Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)^\beta=\Big(\frac{\partial}{\partial t_1}\Big)^{\beta_1} \cdots\Big(\frac{\partial}{\partial t_d}\Big)^{\beta_d}, \quad \Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^\gamma=\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big)^{\gamma_1} \cdots\Big(\frac{\partial}{\partial x_n}\Big)^{\gamma_n}.$$

Soient $c_j(x)$ $(0 \leqq j \leqq m-1)$ et $b_i(x)$ $(1 \leqq i \leqq d)$ des fonctions holomorphes dans D_r. On peut donc considérer l'équation

$$(\mathrm{E}_1) \qquad (\tau^m+c_{m-1}(x) \tau^{m-1}+\cdots+c_0(x)) u=\sum_{i=1}^{d} b_i(x) t_i+G_2(x)(t_1, \cdots, t_d, \nabla^m u)$$

qui est un cas particulier de l'équation étudiée dans [7].

Dans cet article, par *série formelle* nous entendons une série formelle en t de la forme

$$\hat{u}(t, x)=\sum_{|p|\geq 1} u_p(x)t_1^{p_1}\cdots t_d^{p_d} \tag{1.1}$$

où les coéfficients $u_p(x)$ sont tous holomorphes dans un même polydisque centré à l'origine de C^n; une *solution formelle* de (E_1) est par définition une série formelle de la forme $\hat{u}(t, x)$ qui vérifie formellement (E_1).

Désignons par $\lambda_1(x), \cdots, \lambda_m(x)$ les racines du polynôme

$$P(\lambda; x)=\lambda^m+\sum_{j<m} c_j(x)\lambda^j .$$

D'après le § 3 de [7] nous avons:

Théorème 1. *Si l'origine de C n'appartient pas à l'enveloppe convexe dans C de l'ensemble de points $\{a_{1,1}(0), \cdots, a_{d,d}(0)\}$, alors:*

(1) *Toute solution formelle de* (E_1) *est convergente au voisinage de l'origine de $C^d\times C^n$.*

(2) *Si*

$$\sum_{i=1}^{d} p_i a_{i,i}(0)-\lambda_j(0)\neq 0 \qquad \textit{pour tout}$$

$$(p_1, \cdots, p_d)\in N^d\setminus\{(0, \cdots, 0)\} \quad \textit{et} \quad j=1, \cdots, m;$$

l'équation (E_1) *admet une solution formelle unique qui donne une solution holomorphe unique $u(t, x)$ vérifiant $u(0, x)\equiv 0$.*

L'équation (E) introduite dans l'introduction étant un cas particulier d'équations (E_1) nous avons:

Corollaire 1. *Si $\rho_i(0)\notin N^*$ pour tout $i=1, \cdots, m$, l'équation* (E) *admet une solution unique $u(t, x)$ holomorphe au voisinage de l'origine de $C\times C^n$ vérifiant $u(0, x)\equiv 0$.*

Pour d'autres résultats concernant l'existence de solutions holomorphes, voir Gérard [2] et [3] ainsi que Madi-Yoshino [10].

§ 2. Solutions Singulières: Cas Spécial

Dans cette section, nous étudions une classe assez restreinte d'équations aux dérivées partielles singulières non linéaires et construisons une famille de solutions singulières appartenant à $\tilde{\mathcal{O}}_+$. Cette classe restreinte d'équations a l'advatage dans la recherche des solutions appartenant à $\tilde{\mathcal{O}}_+$ de pouvoir être réduite à une équation (E_1) et de permettre l'utilisation du théorème 1.

Soient $m\in N^*$, $(t, x)\in C\times C^n$, $x=(x_1, \cdots, x_n)$, $\alpha=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)\in N^n$, $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$ et

$$\left(t\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}=\left(t\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(t\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} .$$

Soient $b(x)$ et $c_j(x)$ $(0 \leqq j \leqq m-1)$ des fonctions définies et holomorphes dans un polydisque centré à l'origine de $\boldsymbol{C}^n$.

Notons

$$Z = \{Z_{j,\alpha}\}_{j+|\alpha| \leqq m}, \qquad Z_{j,\alpha} \in \boldsymbol{C}$$

et soit $G_2(x)(t, Z)$ une fonction définie et holomorphe dans un polydisque centré à l'origine $(x=0,\ t=0,\ Z=0)$ ayant de plus la forme suivante :

$$G_2(x)(t, Z) = \sum_{p+|q| \geqq 2} g_{p,q}(x) t^p Z^q, \tag{2.1}$$

où

$$q = \{q_{j,\alpha}\}_{j+|\alpha| \leqq m}, \qquad q_{j,\alpha} \in \boldsymbol{N},$$

$$|q| = \sum_{j+|\alpha| \leqq m} q_{j,\alpha},$$

$$Z^q = \prod_{j+|\alpha| \leqq m} (Z_{j,\alpha})^{q_{j,\alpha}}$$

et $g_{p,q}(x)$ $(p+|q| \geqq 2)$ sont des fonctions holomorphes dans un même polydisque centré à l'origne de $\boldsymbol{C}^n$.

Considèrons l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{aligned}\left(\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^m + c_{m-1}(x)\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m-1} + \cdots + c_0(x)\right)u \\ = tb(x) + G_2(x)\left(t, \left\{\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^j\left(t\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u\right\}_{j+|\alpha| \leqq m}\right)\end{aligned} \tag{E$_2$}$$

et posons nous le problème de chercher une solution singulière de cette équation.

Désignons par $\rho_1(x), \cdots, \rho_m(x)$ les exposants caractéristique de cette équation donc les racines du polynôme

$$C(\rho\,;\,x) = \rho^m + \sum_{j<m} c_j(x) \rho^j.$$

Nous avons :

Théorème 2. *Soit* $1 \leqq l \leqq m$. *Supposons* :

i) $\rho_1(x), \cdots, \rho_l(x)$ *holomorphes au voisinage de* $x=0$;

ii) $\operatorname{Re} \rho_1(0) > 0, \cdots, \operatorname{Re} \rho_l(0) > 0$;

iii) $C(1\,;\,0) \neq 0$;

iv) $C(i + j_1\rho_1(0) + \cdots + j_l\rho_l(0) + k\,;\,0) \neq 0$ *pour tout* $(i, j, k) \in \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}^l \times \boldsymbol{N}$ *vérifiant* $i + |j| + k \geqq 2$.

Alors l'équation (E$_2$) *a une famille de solutions appartenant à* $\tilde{\mathcal{O}}_+$ *de la forme*

$$\sum_{i+|j|+k \geqq 1} \varphi_{i,j,k}(x) t^i (t^{\rho_1(x)})^{j_1} \cdots (t^{\rho_l(x)})^{j_l} (t \log t)^k, \tag{2.2}$$

où tous les coéfficients $\varphi_{i,j,k}(x)$ $(i+|j|+k \geqq 1)$ *sont holomorphes dans un même disque centré à l'origine de* $\boldsymbol{C}^n$; *de plus toute solution de* (E$_2$) *est déterminée de* *manière unique par la donnée des coéfficients* $\{\varphi_{0,j,0}(x)\,;\ |j|=1\}$ *qui sont arbitraires. Si nous prenous* $\varphi_{0,j,0}(x)\equiv 0$ *pour tout* j *tel que* $|j|=1$, *la solution* (2.2) *se réduit à l'unique solution holomorphe de l'éqation* (E_2).

Preuve. Pour commencer nous allons chercher une solution "formelle" de la forme

$$\hat{u}(t,x)=w(t,t^{\rho_1(x)},\cdots,t^{\rho_l(x)},t\log t,x), \tag{2.3}$$

où

$$w(t_0,t_1,\cdots,t_l,t_{l+1},x)=\sum_{i+|j|+k\geqq 1}\varphi_{i,j,k}(x)(t_0)^i(t_1)^{j_1}\cdots(t_l)^{j_l}(t_{l+1})^k$$

est série formelle en $t_0, t_1, \cdots, t_l, t_{l+1}$ à coéfficients holomorphes dans un polydisque commun de C^n: ensuite nous démontrerons la convergence de cette série.

Posons

$$t_0=t,\quad t_p=t^{\rho_p(x)}\ (p=1,\cdots,l)\quad \text{et}\quad t_{l+1}=t\log t\,.$$

Nous avons formellement

$$t\frac{\partial u}{\partial t}=t_0\frac{\partial w}{\partial t_0}+\sum_{p=1}^{l}\rho_p(x)t_p\frac{\partial w}{\partial t_p}+(t_0+t_{l+1})\frac{\partial w}{\partial t_{l+1}},$$

$$t\frac{\partial u}{\partial x_q}=t_0\frac{\partial w}{\partial x_q}+t_{l+1}\sum_{p=1}^{l}\frac{\partial\rho_p(x)}{\partial x_q}t_p\frac{\partial w}{\partial t_p},\qquad q=1,\cdots,n\,.$$

Donc $\hat{u}(t,x)$ est une solution formelle de (E_2) si et seulement si $w(t_0,t_1,\cdots,t_l,t_{l+1},x)$ est une solution formelle de l'équation:

$$(T^m+c_{m-1}(x)T^{m-1}+\cdots+c_0(x))w=t_0b(x)+G_2(x)(t_0,\{T^jX^\alpha w\}_{j+|\alpha|\leqq m}), \tag{E_2'}$$

où T et $X_1,\cdots,X_n$ sont les champs de vecteurs suivants:

$$T=t_0\frac{\partial}{\partial t_0}+\sum_{p=1}^{l}\rho_p(x)t_p\frac{\partial}{\partial t_p}+(t_0+t_{l+1})\frac{\partial}{\partial t_{l+1}},$$

$$X_q=t_0\frac{\partial}{\partial x_q}+t_{l+1}\sum_{p=1}^{l}\frac{\partial\rho_p(x)}{\partial x_q}t_p\frac{\partial}{\partial t_p},\qquad q=1,\cdots,n\,.$$

Nous remarquons que l'équation (E_2') est un cas particulier d'équation (E_1) discutée dans le § 1 et que le champ de vecteurs T satisfait à une condition de Poincaré (0 n'appartient pas à l'enveloppe convexe dans C de l'ensemble de points $\{1,\rho_1(0),\cdots,\rho_l(0)\}$). De plus, par les conditions i), ii) et iii) nous voyons qu'il existe un nombre réel $r>0$ tel que:

$$\begin{cases} 1)\ C(1\,;x)\neq 0 \quad \text{dans } D_r\,; \\ 2)\ C(i+j_1\rho_1(x)+\cdots+j_l\rho_l(x)+k\,;x)\neq 0 \ \text{ dans } D_r \text{ pour} \\ \quad\ \text{tout } (i,j,k)\in N\times N^l\times N \text{ satisfaisant à } i+|j|+k\geqq 2\,. \end{cases} \tag{2.4}$$

Par conséquent pour avoir l'existence de solutions de l'équation (E_2) de la forme (2.2) appartenant à $\tilde{\mathcal{O}}_+$ il est suffisant de prouver:

Proposition 1. *Soit* $1 \leqq l \leqq m$. *Supposons* $\rho_1(x), \cdots, \rho_l(x)$ *holomorphes au voisinage de* $x=0$, *que* 0 *n'appartient pas à l'enveloppe convexe dans* $\boldsymbol{C}$ *des points* $1, \rho_1(0), \cdots, \rho_l(0)$ *et que les conditions* (2.4) *sont satisfaites pour un* $r>0$. *Alors, l'équation* (E_2') *admet une famille de solutions de la forme*

$$(2.5) \qquad \sum_{i+|j|+k \geqq 1} \varphi_{i,j,k}(x)(t_0)^i(t_1)^{j_1} \cdots (t_l)^{j_l}(t_{l+1})^k,$$

où tous les coéfficients $\varphi_{i,j,k}(x)$ $(i+|j|+k \geqq 1)$ *sont déterminés de manière unique par les coéfficients* $\{\varphi_{0,j,0}(x)\,;\ |j|=1\}$ *qui eux sont arbitraires.*

Démonstration de la proposition 1. Posons formellement

$$w=\sum_{s=1}^{\infty} w_s(t_0, t_1, \cdots, t_l, t_{l+1}, x)$$

où pour tout $s \geqq 1$

$$(2.6) \qquad w_s=\sum_{i+|j|+k=s} \varphi_{i,j,k}(x)(t_0)^i(t_1)^{j_1} \cdots (t_l)^{j_l}(t_{l+1})^k.$$

L'équation (E_2') se décompose alors en les équations

$$(2.7) \qquad \begin{cases} C(T\,;\,x)w_1=b(x)t_0, \\ C(T\,;\,x)w_s=F_s(w_1, \cdots, w_{s-1}), \qquad s \geqq 2, \end{cases}$$

où $F_s(w_1, \cdots, w_{s-1})$ est un polynôme homogène de degré s en $(t_0, t_1, \cdots, t_l, t_{l+1})$ à coéfficients holomorphes en x et entierement déterminés par $w_1, \cdots, w_{s-1}$. De plus en regardant (2.6) nous voyons

$$(2.8) \qquad C(T\,;\,x)w_1=\Big(C(1\,;\,x)\varphi_{1,0,0}(x)+\frac{\partial C}{\partial \rho}(1\,;\,x)\varphi_{0,0,1}(x)\Big)t_0$$
$$+\sum_{p=1}^{l} C(\rho_p(x)\,;\,x)\varphi_{0,e_p,0}(x)t_p+C(1\,;\,x)\varphi_{0,0,1}(x)t_{l+1}$$

où $e_1=(1, 0, \cdots, 0), \cdots, e_l=(0, \cdots, 0, 1) \in \boldsymbol{N}^l$, et pour $s \geqq 2$

$$(2.9) \qquad C(T\,;\,x)w_s=\sum_{i+|j|+k=s}\Big\{C(i+j_1\rho_1(x)+\cdots+j_l\rho_l(x)+k\,;\,x)\varphi_{i,j,k}(x)$$
$$+\sum_{h=1}^{m} C_h(i, j, k\,;\,x)\varphi_{i-h,j,k+h}(x)\Big\}(t_0)^i(t_1)^{j_1} \cdots (t_l)^{j_l}(t_{l+1})^k$$

où par convention $\varphi_{i-h,j,k+h}(x) \equiv 0$ pour $i-h<0$ et où

$$C_h(i, j, k\,;\,x)$$
$$=\sum_{q=h}^{m}\binom{q}{h}c_q(x)(i+j_1\rho_1(x)+\cdots+j_l\rho_l(x)+k)^{q-h}(k+1)(k+2)\cdots(k+h)$$

et $c_m(x)\equiv 1$.

En conséquence, par (2.4), (2.7), (2.8) et le fait que

$$C(\rho_p(x);x)\equiv 0 \qquad (p=1,\cdots,l)$$

nous avons

1) $\varphi_{1,0,0}(x)=\dfrac{b(x)}{C(1;x)}$,

2) $\varphi_{0,e_p,0}(x)$ pour $p=1,\cdots,l$ sont arbitraires,

3) $\varphi_{0,0,1}(x)\equiv 0$,

et par (2.4), (2.7), (2.9) nous voyons que

4) $\varphi_{i,j,k}(x)$ $(i+|j|+k\geqq 2)$ sont déterminés de manière unique par l'ensemble $\{\varphi_{0,e_1,0}(x),\cdots,\varphi_{0,e_l,0}(x)\}$ et sont holomorphes dans un même disque centré à l'origine de $\boldsymbol{C}^n$.

Nous avons ainsi obtenu une famille de solutions formelles de la forme (2.5). Comme le champ de vecteurs T satisfait à une condition de Poincarè, le théorème 1 nous dit que la solution formelle est convergente au voisinage de l'origine $(t_0=0, t_1=0, \cdots, t_l=0, t_{l+1}=0)$. Ce qui prouve la proposition 1.

Si $w(t_0, t_1, \cdots, t_l, t_{l+1}, x)$ est une solution de (E_2') donnée par la proposition 1, alors

$$u(t,x)=w(t, t^{\rho_1(x)}, \cdots, t^{\rho_l(x)}, t\log t, x)$$

est une famille de solutions de (E_2) appartenant à $\tilde{\mathcal{O}}_+$. Ce qui prouve la partie existence du théorème 2.

Pour prouver l'unicité de la solution de (E_2) de la forme (2.2) il suffit de montrer que la solution formelle $\hat{u}(t,x)$ de (E_2) de la forme

$$\hat{u}(t,x)=\sum_{i+|j|+k\geq 1}\varphi_{i,j,k}(x)t^i(t^{\rho_1(x)})^{j_1}\cdots(t^{\rho_l(x)})^{j_l}(t\log t)^k \tag{2.10}$$

déterminée uniquement par la donnée des $\{\varphi_{0,j,0}(x);|j|=1\}$.

Introduisons la condition:

$$\begin{cases} i+j_1\rho_1(x)+\cdots+j_l\rho_l(x)\neq p+q_1\rho_1(x)+\cdots+q_l\rho_l(x) \\ \text{dans } \boldsymbol{C}\{x\} \text{ pour tout } (i,j), (p,q)\in\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}^l \\ \text{satisfaisant à } (i,j)\neq(p,q). \end{cases} \tag{2.11}$$

Si la condition (2.11) est satisfaite, toute partie finie de l'ensemble de fonctions

$$\{t^{i+j_1\rho_1(x)+\cdots+j_l\rho_l(x)}(t\log t)^k;\ i+|j|+k\geqq 1\}$$

est fonctionnellement indépendante: dans ce cas il est aisé de voir que les coéfficients $\varphi_{i,j,k}(x)$ figurant dans l'expression (2.10) de la solution formelle $\hat{u}(t,x)$ sont déterminés de manière unique par les fonctions $\{\varphi_{0,j,0}(x);|j|=1\}$.

Lorsque la condition (2.11) n'est pas satisfaite, prenons des fonctions $\lambda_p(x) \in \boldsymbol{C}_r\{x\}$ $(p=1, 2, \cdots)$ et $\nu_q(x) \in \boldsymbol{C}_r\{x\}$ $(q=1, 2, \cdots, d)$ telles que

$$\begin{cases} \lambda_p(x) \neq \nu_q(x) & \text{dans } \boldsymbol{C}_r\{x\} \text{ pour tout } p, q, \\ \lambda_{p_1}(x) \neq \lambda_{p_2}(x) & \text{dans } \boldsymbol{C}_r\{x\} \text{ si } p_1 \neq p_2, \\ \nu_{q_1}(x) \neq \nu_{q_2}(x) & \text{dans } \boldsymbol{C}_r\{x\} \text{ si } q_1 \neq q_2, \end{cases}$$

et tel que de plus comme parties de $\boldsymbol{C}_r\{x\}$ nous ayons

$$\begin{aligned} &\{1\} \cup \{i+j_1\rho_1(x)+\cdots+j_l\rho_l(x)\,;\, i+|j| \geqq 2\} \\ &\qquad = \{\lambda_p(x)\,;\, p=1, 2, \cdots\}, \\ &\{i+j_1\rho_1(x)+\cdots+j_l\rho_l(x)\,;\, i+|j| \geqq 1\} \\ &\qquad = \{\lambda_p(x)\,;\, p=1, 2, \cdots\} \cup \{\nu_1(x), \cdots, \nu_d(x)\}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

La solution formelle se réecrit sous la forme

$$\begin{aligned} \hat{u}(t, x) = &\sum_{p=1}^{l} \varphi_{0, e_p, 0}(x) t^{\rho_p(x)} + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{p,k}^{\lambda}(x) t^{\lambda_p(x)} (t \log t)^k \\ &+ \sum_{q=1}^{d} \sum_{k=1}^{\infty} \phi_{q,k}^{\nu}(x) t^{\nu_q(x)} (t \log t)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(x) (t \log t)^k . \end{aligned}$$

D'après la condition (2.4) par (2.12) nous obtenons:

$$\begin{cases} C(\lambda_p(x)+k\,;\, x) \neq 0 & \text{dans } D_r \text{ pour } p \geqq 1 \text{ et } k \geqq 0, \\ C(\nu_q(x)+k\,;\, x) \neq 0 & \text{dans } D_r \text{ pour } q=1, \cdots, d \text{ et } k \geqq 1, \\ C(k\,;\, x) \neq 0 & \text{dans } D_r \text{ pour } k \geqq 1. \end{cases}$$

Donc, si nous prenons en compte le fait que $C(\rho_p(x)\,;\, x) \equiv 0$ pour $p=1, \cdots, l$, par un calcul facile nous voyons que les coéfficients $\phi_{p,k}^{\lambda}(x)$, $\phi_{q,k}^{\nu}(x)$ et $\phi_k(x)$ sont déterminés uniquement par $\varphi_{0, e_1, 0}(x), \cdots, \varphi_{0, e_l, 0}(x)$.

Nous avons ainsi obtenu l'unicité d'une solution formelle de la forme (2.2).

Nous obtenons également:

Corollaire 2. *Soit* $1 \leqq l \leqq m$. *Supposons:*

i) $\rho_1(x), \cdots, \rho_l(x)$ *holomorphes au voisinage de* $x=0$;

ii) $\mathrm{Re}\, \rho_1(0) > 0, \cdots, \mathrm{Re}\, \rho_l(0) > 0$;

iii) $C(1\,;\, 0) \neq 0$;

iv) $C(i+j_1\rho_1(0)+\cdots+j_l\rho_l(0)+k\,;\, 0) \neq 0$ *pour tout* $(i, j, k) \in \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}^l \times \boldsymbol{N}$ *satisfaisant à* $i+|j|+k \geqq 2$.

Alors, si (E_2) *admet une solution formelle de la forme*

$$\hat{u}(t, x) = \sum_{i+|j|+k \geqq 1} \varphi_{i,j,k}(x) t^i (t^{\rho_1(x)})^{j_1} \cdots (t^{\rho_l(x)})^{j_l} (t \log t)^k \tag{2.13}$$

où les coéfficients $\varphi_{i,j,k}(x)$ *sont holomorphes dans un même disque centré à l'origine de* $\boldsymbol{C}^n$, *alors* $\hat{u}(t, x)$ *est convergente dans* $\tilde{\mathcal{O}}_+$.

Preuve. Comme nous avons unicité de la solution formelle, $\hat{u}(t, x)$ coincide avec la solution donnée par le théorème 2; elle est donc convergente dans $\tilde{\mathcal{O}}_+$.

§ 3. Solutions Singulières: Cas Général

Comme généralisation des résultats du § 2, nous construisons dans cette section une famille de solutions appartenant à $\tilde{\mathcal{O}}_+$ d'équations aux dérivées partielles singulières non linéaires de la forme:

$$(\mathrm{E}_3)\qquad \left(\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^m + c_{m-1}(x)\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m-1} + \cdots + c_0(x)\right)u$$
$$= tb(x) + G_2(x)\left(t, \left\{\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^j\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u\right\}_{j+|\alpha|\leqq m}\right),$$

les notations et données étant les mêmes que dans le § 2.

La différence entre les équations (E_2) et (E_3) est la suivante:

-dans (E_2), $Z_{j,\alpha}$ correspond à

$$\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^j\left(t\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha = \left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^j t^{|\alpha|}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha,$$

-dans (E_3), $Z_{j,\alpha}$ correspond à

$$\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^j\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha.$$

Il est clair qu'une équation du type (E_2) est un cas particulier d'une équation du type (E_3).

Comme dans le § 2 désignons par $\rho_1(x), \cdots, \rho_m(x)$ les exposants caractéristiques c'est à dire les racines du polynôme:

$$C(\rho\,;\,x) = \rho^m + \sum_{j<m} c_j(x)\rho^j.$$

Nous avons:

Théorème 3. *Soit* $1\leqq l\leqq m$. *Supposons:*

i) $\rho_1(x), \cdots, \rho_l(x)$ *holomorphes au voisinage de* $x=0$;

ii) $\mathrm{Re}\,\rho_1(0)>0, \cdots, \mathrm{Re}\,\rho_l(0)>0$;

iii) $C(1\,;\,0)\neq 0$;

iv) $C(i+j_1\rho_1(0)+\cdots+j_l\rho_l(0)\,;\,0)\neq 0$ *pour tout* $(i, j)\in \boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}^l$ *vérifiant* $i+|j|\geqq 2$.

Alors l'équation (E_3) *a une famille de solutions appartenant à* $\tilde{\mathcal{O}}_+$ *de la forme*

$$(3.1)\qquad \sum_{i\geqq 1} u_i(x)t^i + \sum_{\substack{i+2m|j|\geqq k+2m\\ |j|\geqq 1}} \varphi_{i,j,k}(x)t^{i+j_1\rho_1(x)+\cdots+j_l\rho_l(x)}(\log t)^k,$$

où tous les coéfficients $\varphi_{i,j,k}(x)$ *sont holomorphes dans un même disque centré à l'origine de* $\boldsymbol{C}^n$; *de plus tonte solution de* (E_3) *est déterminée de manière unique par la donnée des coéfficients* $\{\varphi_{0,j,0}(x)\,;\,|j|=1\}$ *qui sont arbitraires. Si nous prenons* $\varphi_{0,j,0}(x)\equiv 0$ *pour tout* j *tel que* $|j|=1$, *la solution* (3.1) *se réduit à l'unique solution holomorphe de l'équation* (E_3).

Preuve. Nous commençons par construire une famille de solutions formelles de la forme (3.1).

Comme dans le (2.4), nous prenons un $r>0$ tel que $b(x)\in\boldsymbol{C}_r\{x\}$ et

$$(3.2)\qquad \begin{cases} 1)\quad C(1\,;x)\neq 0 \quad \text{dans } D_r\,; \\ 2)\quad C(i+j_1\rho_1(x)+\cdots+j_l\rho_l(x)\,;x)\neq 0 \quad \text{dans } D_r \\ \qquad \text{pour tout } (i,j)\in\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}^l \text{ satisfaisant à } i+|j|\geqq 2. \end{cases}$$

Pour tout $(i,0)\in\boldsymbol{N}^*\times\boldsymbol{N}^l$ nous désignons par $\mathcal{F}_r(i,0)$ l'ensemble des fonctions $f(t,x)$ de la forme

$$f(t,x)=\phi(x)t^i\,,\qquad \phi(x)\in\boldsymbol{C}_r\{x\}.$$

Pour tout $(i,j)\in\boldsymbol{N}\times(\boldsymbol{N}^l\setminus\{0\})$ nous désignons par $\mathcal{F}_r(i,j)$ l'ensemble des fonctions $g(t,x)$ de la forme

$$g(t,x)=\sum_{k=0}^{i+2m(|j|-1)}\phi_k(x)t^{i+j_1\rho_1(x)+\cdots+j_l\rho_l(x)}(\log t)^k$$

où pour tout k, $\phi_k(x)\in\boldsymbol{C}_r\{x\}$.

En posant

$$(3.3)\qquad \begin{cases} w_{i,0}=u_i(x)t^i & \text{pour } i\geqq 1\,, \\ w_{0,e_p}=\varphi_{0,e_p,0}(x)t^{\rho_p(x)} & \text{pour } p=1,\cdots,l\,, \\ w_{i,j}=\displaystyle\sum_{k=0}^{i+2m(|j|-1)}\varphi_{i,j,k}(x)t^{i+j_1\rho_1(x)+\cdots+j_l\rho_l(x)}(\log t)^k & \\ & \text{pour } i+|j|\geqq 2 \text{ et } |j|\geqq 1\,, \end{cases}$$

la solution formelle $\hat{u}(t,x)$ de la forme (3.1) prend la forme

$$(3.4)\qquad \hat{u}(t,x)=\sum_{i+|j|\geqq 1}w_{i,j}(t,x)$$

où pour tout (i,j), $w_{i,j}\in\mathcal{F}_r(i,j)$.

Il est facile de voir que la classe de fonctions $\mathcal{F}_r(i,j)$ $(i+|j|\geqq 1)$ possède pour tout couple (i,j) et (p,q) appartenant à $\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}^l\setminus\{(0,0)\}$ les propriétés suivantes :

1) $\mathcal{F}_r(i,j)\times\mathcal{F}_r(p,q)\subset\mathcal{F}_r(i+p,j+q)$;

2) $\left(t\dfrac{\partial}{\partial t}\right)\mathcal{F}_r(i,j)\subset\mathcal{F}_r(i,j)$;

3) $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}\mathcal{F}_r(i, j)\times\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\beta}\mathcal{F}_r(p, q)\subset\mathcal{F}_r(i+p, j+q)$, pour $|\alpha|\leqq m$ et $|\beta|\leqq m$.

En regardant (3.4) nous voyons que l'équation (E_3) se déompose en les formules récurrentes:

$$\begin{cases} C\left(t\frac{\partial}{\partial t}; x\right)w_{1,0}=b(x)t, \\ C\left(t\frac{\partial}{\partial t}; x\right)w_{0,e_p}=0 \qquad \text{pour } p=1, \cdots, l, \\ C\left(t\frac{\partial}{\partial t}; x\right)w_{i,j}=F_{i,j}(w_{p,q}; (p, q)\in A_{i,j}) \qquad \text{pour } i+|j|\geqq 2, \end{cases}$$

où

$$A_{i,j}=\{(p, q)\in \boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}^l;\ p\leqq i,\ q_1\leqq j_1, \cdots, q_l\leqq j_l \text{ et } 1\leqq p+|q|<i+|j|\}$$

et $F_{i,j}$ est une fonction appartenant à $\mathcal{F}_r(i, j)$ déterminée par $\{w_{p,q}; (p, q)\in A_{i,j}\}$.

De plus, (3.3) nous donne

$$C\left(t\frac{\partial}{\partial t}; x\right)w_{i,0}=C(i; x)u_i(x)t^i \qquad \text{pour } i\geqq 1,$$

$$C\left(t\frac{\partial}{\partial t}; x\right)w_{0,e_p}=C(\rho_p(x); x)\varphi_{0,e_p,0}(x)t^{\rho_p(x)} \qquad \text{pour } p=1, \cdots, l,$$

$$C\left(t\frac{\partial}{\partial t}; x\right)w_{i,j}=\sum_{k=0}^{i+2m(|j|-1)}\Big\{C(i+j_1\rho_1(x)+\cdots+j_l\rho_l(x); x)\varphi_{i,j,k}(x)$$
$$+\sum_{h=1}^{m}C_h^*(i, j, k; x)\varphi_{i,j,k+h}(x)\Big\}t^{i+j_1\rho_1(x)+\cdots+j_l\rho_l(x)}(\log t)^k$$
$$\text{pour } i+|j|\geqq 2 \text{ et } |j|\geqq 1$$

où par convention $\varphi_{i,j,k+h}(x)\equiv 0$ pour $k+h>i+2m(|j|-1)$ et où

$$C_h^*(i, j, k; x)$$
$$=\sum_{q=h}^{m}\binom{q}{h}c_q(x)(i+j_1\rho_1(x)+\cdots+j_l\rho_l(x))^{q-h}(k+1)(k+2)\cdots(k+h)$$

et $c_m(x)\equiv 1$.

Par conséquent, (3.2) et le fait que $C(\rho_p(x); x)\equiv 0$ ($p=1, \cdots, l$) entrainent:

1) $u_1(x)=\dfrac{b(x)}{C(1; x)}\in \boldsymbol{C}_r\{x\}$;
2) $\varphi_{0,e_p,0}(x)\in\boldsymbol{C}_r\{x\}$ ($p=1, \cdots, l$) sont arbitraires;
3) $u_i(x)\in\boldsymbol{C}_r\{x\}$ ($i\geqq 2$) et $\varphi_{i,j,k}(x)\in\boldsymbol{C}_r\{x\}$ ($i+|j|\geqq 2$ et $|j|\geqq 1$) sont déterminés par $\varphi_{0,e_1,0}(x), \cdots, \varphi_{0,e_l,0}(x)$.

Nous avons ainsi obtenu une famille de solutions formelles de la forme (3.2) comme dans le § 2. Pour compléter la démonstration il suffit de montrer la convergence de cette solution formelle.

Admettons pour le moment:

Lemme 1. *Soit* $1 \leqq l \leqq m$. *Supposons vérifiées les hypothèses* ii), iii) *et* iv) *du théorème* 3. *Alors, il existe* $N \in \boldsymbol{N}^*$ *tel que*:

a$_1$) $N \geqq 2m+1$;

a$_2$) $\operatorname{Re} \rho_i(0) > \dfrac{2m}{N}$ *pour tout* $i=1, \cdots, l$;

a$_3$) $C\left(\dfrac{2m+1}{N}; 0\right) \neq 0$;

a$_4$) $C\left(\dfrac{i-2m|j|+k+2m}{N} + j_1\rho_1(0) + \cdots + j_l\rho_l(0); 0\right) \neq 0$

pour tout $(i, j, k) \in \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}^l \times \boldsymbol{N}$ *vérifiant* $i+|j|+k \geqq 2$.

Démontrons maintenant la convergence de la solution formelle

$$\sum_{i \geqq 1} u_i(x) t^i + \sum_{\substack{i+2m|j| \geqq k+2m \\ |j| \geqq 1}} \varphi_{i,j,k}(x) t^{i+j_1\rho_1(x)+\cdots+j_l\rho_l(x)} (\log t)^k, \tag{3.5}$$

où les coéfficients $u_i(x)$ et $\varphi_{i,j,k}(x)$ sont tous holomorphes dans un même disque centré à l'origine de $\boldsymbol{C}^n$.

Soit N un entier positif vérifiant les conditions du lemme 1. Posons dans l'équation (E$_3$)

$$w(t, x) = t^{-2m} u(t^N, x); \tag{3.6}$$

il vient pour $w(t, x)$ l'équation:

$$\begin{aligned} &\left(\left(\frac{1}{N}\theta_{2m}\right)^m + c_{m-1}(x)\left(\frac{1}{N}\theta_{2m}\right)^{m-1} + \cdots + c_0(x)\right) w \\ &\quad = t^{N-2m} b(x) + \sum_{p+|q| \geqq 2} g_{p,q}(x) t^{Np-2m+2m|q|-L(q)} \\ &\qquad \times \prod_{j+|\alpha| \leqq m} \left\{\left(\frac{1}{N}\theta_{2m-|\alpha|}\right)^j \left(t\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha w\right\}^{q_{j,\alpha}}, \end{aligned} \tag{E$_3^*$}$$

où

$$\theta_s = t\frac{\partial}{\partial t} + s \qquad \text{et} \qquad L(q) = \sum_{j+|\alpha| \leqq m} |\alpha| q_{j,\alpha}.$$

Comme $N \geqq 2m+1$ et $p+|q| \geqq 2$, nous avons

$$\begin{aligned} Np-2m+2m|q|-L(q) &\geqq (2m+1)p-2m+2m|q|-m|q| \\ &= (m+1)p+m(p+|q|-2) \\ &\geqq (m+1)p \geqq 0 \end{aligned}$$

et

$$(Np-2m+2m|q|-L(q))+|q|\geqq(m+1)p+|q|$$
$$\geqq p+|q|\geqq 2\,.$$

Ce qui montre que l'équation (E_3^*) est un cas particulier d'équations (E_2) que nous avons étudiées dans le § 2.

Désignons par $\lambda_1(x), \cdots, \lambda_m(x)$ les racines du polynôme:

$$C^*(\lambda\,;\,x)=\left(\frac{\lambda+2m}{N}\right)^m+\sum_{j<m}c_j(x)\left(\frac{\lambda+2m}{N}\right)^j.$$

Nous avons:

1) $\lambda_i(x)=N\rho_i(x)-2m$ pour tout $i=1, \cdots, m$;

2) $C^*(\lambda\,;\,x)=C\left(\frac{\lambda+2m}{N}\,;\,x\right)$.

La condition 1) et le lemme 1 entrainent que

i) $\lambda_1(x), \cdots, \lambda_l(x)$ sont holomorphes au voisinage de $x=0$;

ii) $\operatorname{Re}\lambda_1(0)>0, \cdots, \operatorname{Re}\lambda_l(0)>0$;

iii) $C^*(1\,;\,0)\neq 0$;

iv) $C^*(i+j_1\lambda_1(0)+\cdots+j_l\lambda_l(0)+k\,;\,0)\neq 0$ pour tout $(i, j, k)\in\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}^l\times\boldsymbol{N}$ vérifiant $i+|j|+k\geqq 2$.

Ce qui signifie que l'équation (E_3^*) vérifie les hypothèses du corollaire 2 du § 2.

La relation (3.6) transforme la solution formelle (3.5) en la série formelle

$$\sum_{i\geqq 1}u_i(x)t^{Ni-2m}+\sum_{\substack{i+2m|j|\geqq k+2m\\ |j|\geqq 1}}N^k\varphi_{i,j,k}(x)t^{Ni+2m|j|-k-2m}$$
$$\times(t^{\lambda_1(x)})^{j_1}\cdots(t^{\lambda_l(x)})^{j_l}(t\log t)^k \tag{3.7}$$

qui est un cas particulier de (2.13). Comme $\hat{u}(t, x)$ est une solution formelle de (E_3), $w(t, x)$ est une solution formelle de (E_3^*).

Le corollaire 2 du § 2 entraine la convergence de la solution formelle $w(t, x)$ dans $\tilde{\mathcal{O}}_+$ ce qui implique la convergence de $\hat{u}(t, x)$ dans $\tilde{\mathcal{O}}_+$.

Le théorème 3 est donc démontré.

Démonstration du lemme 1. Notons

$$J_+=\{i\in\{1, \cdots, m\}\,;\,\operatorname{Re}\rho_i(0)>0\}$$

et

$$a=\min_{i\in J_+}\operatorname{Re}\rho_i(0)\,.$$

Il est évident que $\{1, \cdots, l\}\subset J_+$. Prenons maintenant $N\in\boldsymbol{N}^*$ tel que

$$N\geqq\max\left\{2m+1, \frac{4m}{a}, \frac{2m+2}{a}\right\}. \tag{3.8}$$

La condition a_l) est alors trivialement satisfaite. Les inégalités

$$\text{(3.9)} \qquad \operatorname{Re} \rho_i(0) - \frac{2m}{N} \geqq a - 2m\Big(\frac{a}{4m}\Big) = \frac{a}{2} > 0\,, \qquad i=1, \cdots, l$$

entraine la condition a_2). En remarquant que

$$C\Big(\frac{2m+1}{N}\,;\,0\Big) = \prod_{i=1}^{m}\Big(\frac{2m+1}{N} - \rho_i(0)\Big)$$

et que

$$0 < \frac{2m+1}{N} \leqq (2m+1)\Big(\frac{a}{2m+2}\Big) < a \leqq \operatorname{Re} \rho_i(0)\,, \qquad i \in J_+\,,$$

nous obtenons la condition a_3).

Posons

$$A = \max_{1 \leqq i \leqq m} \operatorname{Re} \rho_i(0)$$

et prenons un entier M tel que

$$M \geqq \max\Big\{2,\ \frac{2A}{a}\Big\}\,.$$

Alors, si N satisfait (3.8) et si $(i, j, k) \in \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}^l \times \boldsymbol{N}$ vérifie $|j| > M$, (3.9) nous donne :

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re}\Big\{\frac{i-2m|j|+k+2m}{N} + j_1\rho_1(0) + \cdots + j_l\rho_l(0)\Big\} \\
&= \frac{i+k+2m}{N} + j_1\Big(\operatorname{Re} \rho_1(0) - \frac{2m}{N}\Big) + \cdots + j_l\Big(\operatorname{Re} \rho_l(0) - \frac{2m}{N}\Big) \\
&\geqq \frac{2m}{N} + \frac{a}{2}|j| \\
&> \frac{a}{2}M \geqq \frac{a}{2}\,\frac{2A}{a} = A \geqq \operatorname{Re} \rho_i(0)
\end{aligned}$$

pour tout $i=1, \cdots, m$. Ceci signifie que pour un choix de N satisfaisant à (3.8) la condition a_4) est satisfaite pour tout $(i, j, k) \in \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}^l \times \boldsymbol{N}$ vérifiant $|j| > M$.

Donc pour terminer la démonstration du lemme 1, il suffit de choisir un N vérifiant (3.8) et la condition :

$$\text{(3.10)} \qquad \begin{cases} \dfrac{i-2m|j|+k+2m}{N} \neq \rho_p(0) - j_1\rho_1(0) - \cdots - j_l\rho_l(0) \\ \text{pour tout } p=1, \cdots, m \text{ et tout } (i, j, k) \in \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}^l \times \boldsymbol{N} \\ \text{vérifiant } i+|j|+k \geqq 2 \text{ et } |j| \leqq M. \end{cases}$$

Faisons l'étude de cette condition.

Pour $h=0, 1, \cdots, M$, notons

$$S_h=\{\rho_p(0)-j_1\rho_1(0)-\cdots-j_l\rho_l(0)\,;\ p=1,\cdots,m \text{ et } |j|=h\}.$$

Les conditions iii), iv) du lemme 1 nous donnent

$$S_h\cap\{1, 2, \cdots\}=\emptyset \qquad \text{pour } h=0, 1, \cdots, M. \tag{3.11}$$

Il est facile de voir que la condition (3.10) est équivalente à

$$\begin{cases} \dfrac{i+k+2m}{N}\notin S_0 & \text{pour } i+k\geqq 2, \\ \dfrac{i+k}{N}\notin S_1 & \text{pour } i+k\geqq 1, \\ \dfrac{i-2mh+k+2m}{N}\notin S_h & \text{pour } i+k\geqq 0 \text{ et } h=2,\cdots,M. \end{cases} \tag{3.12}$$

De plus, comme $0\notin S_h$ pour $h=2,\cdots,M$ (par iv) du lemme 1) il est aisé de voir que la condition (3.12) se réduit aux conditions:

b$_1$) $\dfrac{i+k+2m}{N}\notin S_0\cap\boldsymbol{Q}_+$ pour $i+k\geqq 2$,

b$_2$) $\dfrac{i+k}{N}\notin S_1\cap\boldsymbol{Q}_+$ pour $i+k\geqq 1$,

b$_3$) $\dfrac{i-2mh+k+2m}{N}\notin S_h\cap\boldsymbol{Q}_+$ pour $i+k\geqq 0$ et $h=2,\cdots,M$,

b$_4$) $\dfrac{i-2mh+k+2m}{N}\notin S_h\cap\boldsymbol{Q}_-$ pour $i+k\geqq 0$ et $h=2,\cdots,M$,

où $\boldsymbol{Q}_+$ [resp. $\boldsymbol{Q}_-$] désignent l'ensemble des nombres rationnels strictement positifs [resp. strictement négatifs].

Posons

$$\Big(\bigcup_{h=0}^{M} S_h\Big)\cap\boldsymbol{Q}_+=\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_K\}.$$

La condition (3.11) nous dit que pour tout $i=1, 2,\cdots, K$, $\alpha_i\notin\{1, 2, \cdots\}$ donc α_i peut s'écrire

$$\alpha_i=\frac{c_i}{d_i}$$

pour des entiers non nuls c_i et d_i satisfaisant $c_i\geqq 1$ et $d_i\geqq 2$ et de plus premiers entre eux. Si $N\in\boldsymbol{N}^*$ est premier avec tous les d_i pour $i=1,\cdots,K$, alors pour tout i, $\alpha_i\notin(\boldsymbol{Z}/N)$ et nous avons b$_1$), b$_2$) et b$_3$).

Posons maintenant

$$S^*=\Big(\bigcup_{h=2}^{M} S_h\Big)\cap\boldsymbol{Q}_-.$$

Lorsque $S^*=\emptyset$, la condition b$_4$) est triviale. Lorsque $S^*\neq\emptyset$, introduisons

$$B=\min\{|\beta|\,;\ \beta\in S^*\}.$$

Si N vérifie

$$N>\frac{2mM-2m}{B}, \tag{3.13}$$

nous avons

$$\frac{i-2mh+k+2m}{N}\geqq\frac{-(2mM-2m)}{N}>-B\geqq\beta$$

pour tout $\beta\in S^*$ et donc la condition b_4).

En conclusion, si on prend un entier N qui vérifie (3.8), (3.13) et qui soit premier avec tous les entiers d_i pour $i=1, \cdots, K$, toutes les conditions énoncées dans le lemme 1 seront vérifiées.

§ 4. Analyse Asymptotique

Dans ce paragraphe, nous rappelons la théorie asymptotique développée dans Tahara [14] pour les équations aux dérivées partielles linéaires et nous l'appliquons à quelques équations non linéaires.

Pour $a\in\boldsymbol{R}$ et toute fonction $u(t, x)$ nous écrivons

$$u(t, x)=O(t^a ; \tilde{\mathcal{O}}_+) \qquad \text{(quand } t\to 0),$$

lorsque nous avons $t^{-a}u(t, x)\in\tilde{\mathcal{O}}_+$.

Tout d'abord nous étudions l'équation differentielle ordinaire suivante:

$$\left(\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^m+c_{m-1}(x)\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m-1}+\cdots+c_0(x)\right)u=f, \tag{4.1}$$

où $m\in\boldsymbol{N}^*$, et $c_j(x)$ $(0\leqq j\leqq m-1)$ sont des fonctions holomorphes définies dans un polydisque centré à l'origine de $\boldsymbol{C}^n$.

Désignons par $\rho_1(x), \cdots, \rho_m(x)$ les racines du polynôme:

$$C(\rho ; x)=\rho^m+\sum_{j<m}c_j(x)\rho^j .$$

L'équation (4.1) peut alors s'écrire sous la forme

$$\left(t\frac{\partial}{\partial t}-\rho_1(x)\right)\cdots\left(t\frac{\partial}{\partial t}-\rho_m(x)\right)u=f . \tag{4.2}$$

La résolution explicite de (4.2) nous donne aisément:

Lemme 2. (1) *Si $f(t, x)=O(t^a ; \tilde{\mathcal{O}}_+)$ (quand $t\to 0$) pour un $a\in\boldsymbol{R}$ satisfaisant à*

$$a<\min_{1\leqq i\leqq m}\operatorname{Re}\rho_i(0),$$

alors toute solution $u(t, x)$ de (4.1) vérifie

$$u(t, x)=O(t^a ; \tilde{\mathcal{O}}_+) \qquad (\textit{quand } t\to 0).$$

(2) *Si* $f(t, x)=O(t^a\,;\tilde{\mathcal{O}}_+)$ (*quand* $t\to 0$) *pour un* $a\in \boldsymbol{R}$ *satisfaisant à*

$$a>\max_{1\leq i\leq m} \operatorname{Re} \rho_i(0)\,,$$

alors l'équation (4.1) *a une solution unique* $u(t, x)$ *vérifiant*

$$u(t, x)=O(t^a\,;\tilde{\mathcal{O}}_+) \qquad (\textit{quand } t\to 0)\,.$$

(3) *Si* $f(t, x)\equiv 0$ *et si les nombres* $\rho_1(0), \cdots, \rho_m(0)$ *sont distincts, la solution générale de* (4.1) *est de la forme*

$$u(t, x)=\sum_{i=1}^{m} \varphi_i(x)t^{\rho_i(x)}\,,$$

où pour tout $i=1, \cdots, m$, *les* $\varphi_i(x)\in \boldsymbol{C}\{x\}$ *sont arbitraires.*

(4) *Si* $f(t, x)=O(t^a\,;\tilde{\mathcal{O}}_+)$ (*quand* $t\to 0$) *pour un* $a\in \boldsymbol{R}$ *satisfaisant à*

$$a>\max_{1\leq i\leq m} \operatorname{Re} \rho_i(0)$$

et si les nombres $\rho_1(0), \cdots, \rho_m(0)$ *sont distincts, alors toute solution de* (4.1) *est de la forme*

$$u(t, x)=\sum_{i=1}^{m} \varphi_i(x)t^{\rho_i(x)}+O(t^a\,;\tilde{\mathcal{O}}_+) \qquad (\textit{quand } t\to 0)$$

pour des $\varphi_i(x)\in \boldsymbol{C}\{x\}$ $(i=1, \cdots, m)$.

Nous allons donner maintenant une variante du lemme 2. Soient I_1, I_2, I_3 des sous ensembles de $\{1, 2, \cdots, m\}$ satisfaisant aux conditions suivantes:

1) $I_1\cup I_2\cup I_3=\{1, 2, \cdots, m\}$;
2) $I_2\neq\emptyset$;
3) $I_i\cap I_j=\emptyset$ si $i\neq j$;
4) $\max_{i\in I_p} \operatorname{Re} \rho_i(0)<\min_{i\in I_{p+1}} \operatorname{Re} \rho_i(0)$ pour $p=1, 2$.

Lorsque $I_1\neq\emptyset$ et $I_3\neq\emptyset$, nous poserons

$$M_p=\max_{i\in I_p} \operatorname{Re} \rho_i(0) \qquad \text{pour } p=1, 2\,,$$

$$m_p=\min_{i\in I_p} \operatorname{Re} \rho_i(0) \qquad \text{pour } p=2, 3\,.$$

Enfin si $I_1=\emptyset$ nous posons $M_1=-\infty$ et si $I_3=\emptyset$ nous posons $m_3=+\infty$.

Alors comme conséquence du lemme 2 nous obtenons:

Corollaire 3. *Soient* $a\in \boldsymbol{R}$, $b\in \boldsymbol{R}$, $u(t, x)$ *et* $f(t, x)$ *deux fonctions. Supposons que*:

i) $a<b$;
ii) $u(t, x)=O(t^a\,;\tilde{\mathcal{O}}_+)$ (*quand* $t\to 0$);
iii) $f(t, x)=O(t^b\,;\tilde{\mathcal{O}}_+)$ (*quand* $t\to 0$);

iv) *$u(t, x)$ et $f(t, x)$ satisfont à* (4.1).

Alors:

(1) *Si $M_1<a<b<m_2$, nous avons $u(t, x)=O(t^b\,;\tilde{\mathcal{O}}_+)$ (quand $t\to 0$).*

(2) *Si $M_2<a<b<m_3$, nous avons $u(t, x)=O(t^b\,;\tilde{\mathcal{O}}_+)$ (quand $t\to 0$).*

(3) *Si $M_1<a<m_2$ et $M_2<b<m_3$ et si les $\rho_i(0)$ pour $i\in I_2$ sont distincts, nous avons*

$$u(t, x)=\sum_{i\in I_2}\varphi_i(x)t^{\rho_i(x)}+O(t^b\,;\tilde{\mathcal{O}}_+) \qquad (\textit{quand } t\to 0)$$

pour des $\varphi_i(x)\in \boldsymbol{C}\{x\}$ $(i\in I_2)$.

Remarque. Si $I_1=\emptyset$, la conclusion (1) du lemme 2 entraine le résultat (1). Si $I_3=\emptyset$, la conclusion (2) du lemme 2 entraine le résultat (2). Si $I_1=I_3=\emptyset$, la conclusion (4) du lemme 2 entraine le résultat (3).

Démonstration dans le cas général. Posons

$$C_p=\prod_{i\in I_p}\left(t\frac{\partial}{\partial t}-\rho_i(x)\right), \qquad p=1, 2, 3\,.$$

C_p est un opérateur différentiel à coéfficients holomorphes au voisinage de l'origine de $\boldsymbol{C}^n$ et l'équation (4.1) s'écrit:

$$C_1C_2C_3u=C_1C_3C_2u=f\,.$$

Si $M_1<a<b<m_2$ posons $w=C_2C_3u$. Alors, $w=O(t^a\,;\tilde{\mathcal{O}}_+)$ (quand $t\to 0$) et $C_1w=f=O(t^b\,;\tilde{\mathcal{O}}_+)$ (quand $t\to 0$). Donc d'après (2) du lemme 2 nous avons $w=O(t^b\,;\tilde{\mathcal{O}}_+)$ (quand $t\to 0$). Par conséquent, en appliquant (1) du lemme 2 à l'équation $C_2C_3u=w$ nous obtenons $u=O(t^b\,;\tilde{\mathcal{O}}_+)$ (quand $t\to 0$) ce qui est la conclusion (1).

Si $M_2<a<b<m_3$, en posant $w=C_3u$ et par le même type d'arguments nous obtenons la conclution (2).

Si $M_1<a<m_2$ et $M_2<b<m_3$ nous posons $w_1=C_3C_2u$ et $w_2=C_2u$. Alors, $w_p=O(t^a\,;\tilde{\mathcal{O}}_+)$ (quand $t\to 0$) pour $p=1, 2$, $C_1w_1=f$ et $C_3w_2=w_1$. En appliquant la conclusion (2) du lemme 2 à l'équation $C_1w_1=f$ nous obtenons $w_1=O(t^b\,;\tilde{\mathcal{O}}_+)$ (quand $t\to 0$); par suite, en appliquant la conclusion (1) du lemme 2 à l'équation $C_3w_2=w_1$ nous obtenons $w_2=O(t^b\,;\tilde{\mathcal{O}}_+)$ (quand $t\to 0$). Donc si les $\rho_i(0)$ pour $i\in I_2$ sont distincts, en appliquant la conclusion (4) du lemme 2 à l'équation $C_2u=w_2$ nous obtenons le résultat (3) du colloraire 3.

Le corollaire 3 est donc bien une conséquence du lemme 2.

Soit

$$R[\ ]:\tilde{\mathcal{O}}_+\longrightarrow\tilde{\mathcal{O}}_+$$

un opérateur de $\tilde{\mathcal{O}}_+$ dans $\tilde{\mathcal{O}}_+$. Considérons l'équation:

$$\left(\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^m + c_{m-1}(x)\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m-1} + \cdots + c_0(x)\right)u = R[u]\,. \tag{4.3}$$

Soit $s>0$; imposons la condition suivante à R :

$$(\mathrm{B}_s) \qquad \begin{cases} \text{Si } u(t, x)=O(t^a\,;\tilde{\mathcal{O}}_+) \text{ (quand } t\to 0) \text{ pour un } a>0, \\ \text{alors } R[u]=O(t^b\,;\tilde{\mathcal{O}}_+) \text{ (quand } t\to 0) \text{ pour tout } b<\min\{2a,\ a+s\}. \end{cases}$$

Alors nous avons:

Lemme 3. *Soient I_1, I_2, I_3, M_1, M_2, m_2 et m_3 comme dans le corollaire* 3. *Soit $s>0$ et supposons que l'opérateur $R[\ ]:\tilde{\mathcal{O}}_+\to\tilde{\mathcal{O}}_+$ satisfait à la condition* (B_s). *Supposons aussi que $u(t, x)\in\tilde{\mathcal{O}}_+$ soit une solution de* (4.3). *Alors:*

(1) *Si $u(t, x)=O(t^a\,;\tilde{\mathcal{O}}_+)$ (quand $t\to 0$) pour un $a>\max\{0, M_1\}$, nous avons $u(t, x)=O(t^b\,;\tilde{\mathcal{O}}_+)$ (quand $t\to 0$) pour tout $b<m_2$.*

(2) *Si $u(t, x)=O(t^a\,;\tilde{\mathcal{O}}_+)$ (quand $t\to 0$) pour un $a>\max\{0, M_2\}$, nous avons $u(t, x)=O(t^b\,;\tilde{\mathcal{O}}_+)$ (quand $t\to 0$) pour tout $b<m_3$.*

(3) *Si $u(t, x)=O(t^a\,;\tilde{\mathcal{O}}_+)$ (quand $t\to 0$) pour un $a>0$ satisfaisant à*

$$M_1<a<m_2\leqq M_2<\min\{2a,\ a+s\} \tag{4.4}$$

et si $\rho_i(0)$, $i\in I_2$, sont distincts, nous avons

$$u(t, x)=\sum_{i\in I_2}\varphi_i(x)t^{\rho_i(x)}+O(t^b\,;\tilde{\mathcal{O}}_+) \qquad (\textit{quand } t\to 0) \tag{4.5}$$

pour des $\varphi_i(x)\in\boldsymbol{C}\{x\}$ $(i\in I_2)$ et un nombre $b>M_2$.

Démonstration. Nous démontrons (1). Supposons que $u(t, x)=(t^a\,;\tilde{\mathcal{O}}_+)$ (quand $t\to 0$) pour un $a>\max\{0, M_1\}$, et soit $b>0$ tel que $a<b<m_2$. Prenons une suite $a_1, a_2, \cdots, a_N$ vérifiant:

1) $a=a_1<a_2<\cdots<a_N=b$;

2) $a_{i+1}<\min\{2a_i,\ a_i+s\}$ pour tout $i=1, 2, \cdots, N-1$.

Posons $f(t, x)=R[u](t, x)\in\tilde{\mathcal{O}}_+$. Comme nous avons $u(t, x)=O(t^{a_1}\,;\tilde{\mathcal{O}}_+)$ (quand $t\to 0$), en utillisant (B_s) et la condition $a_2<\min\{2a_1,\ a_1+s\}$ nous avons $f(t, x)=O(t^{a_2}\,;\tilde{\mathcal{O}}_+)$ (quand $t\to 0$) et d'après la conclusion (1) du corollaire 3 nous avons $u(t, x)=O(t^{a_2}\,;\tilde{\mathcal{O}}_+)$ (quand $t\to 0$) ce qui signifie que $f(t, x)=O(t^{a_3}\,;\tilde{\mathcal{O}}_+)$ (quand $t\to 0$) comme $a_3<\min\{2a_2,\ a_2+s\}$. En utilisant à nouveau la conclusion (1) du colloraire 3 nous obtenons $u(t, x)=O(t^{a_3}\,;\tilde{\mathcal{O}}_+)$ (quand $t\to 0$). Et par récurrence nous obtenons ainsi $u(t, x)=O(t^{a_N}\,;\tilde{\mathcal{O}}_+)$ (quand $t\to 0$) ce qui prouve la conclusion (1) du lemme 3.

La conclusion (2) du lemme 3 se démontre de la même manière.

Démontrons (3). Supposons que $u(t, x)=(t^a\,;\tilde{\mathcal{O}}_+)$ (quand $t\to 0$) pour un $a>0$ satisfaisant à

$$M_1<a<m_2\leqq M_2<\min\{2a,\ a+s\}\,.$$

Prenons $b\in\boldsymbol{R}$ tel que

$$M_2 < b < \min\{2a,\ a+s,\ m_3\}.$$

Posons $f(t, x) = R[u](t, x) \in \tilde{\mathcal{O}}_+$: par ($\mathrm{B}_s$) nous avons $f(t, x) = O(t^b;\tilde{\mathcal{O}}_+)$ (quand $t \to 0$); par suite en appliquant la conclusion (3) du corollaire 3 nous obtenons (4.5) pour des $\varphi_i(x) \in \boldsymbol{C}\{x\}$ $(i \in I_2)$. La partie (3) du lemme 3 se trouve ainsi démontrée.

Nous allons appliquer les résultats du lemme 3 à certaines équations aux dérivées partielles non linéaires.

Soient:

-$a_{j,\alpha}(t, x) \in \tilde{\mathcal{O}}_+$ pour $j+|\alpha| \leqq m$; par définition il existe $s>0$ tel que

$$a_{j,\alpha}(t, x) = O(t^s;\tilde{\mathcal{O}}_+) \text{ (quand } t\to 0) \qquad \text{pour tout } j+|\alpha| \leqq m. \tag{4.6}$$

-$\mathcal{R}(\boldsymbol{C}\setminus\{0\})$ le revêtement universel de $\boldsymbol{C}\setminus\{0\}$;

-$S(\varepsilon(s)) = \{t \in \mathcal{R}(\boldsymbol{C}\setminus\{0\});\ 0<|t|<\varepsilon(\arg t)\}$ où $\varepsilon(s)$ est une fonction définie sur $\boldsymbol{R}$ continue et strictement positive;

-$D_r = \{x \in \boldsymbol{C}^n;\ |x_i| \leqq r,\ i=1, \cdots, n\}$.

Posons

$$Z = \{Z_{j,\alpha}\}_{j+|\alpha|\leqq m}, \qquad Z_{j,\alpha} \in \boldsymbol{C};$$

soit $G_2(t, x)(Z)$ une fonction holomorphe en les varables (t, x, Z) définie dans $S(\varepsilon(s)) \times D_r \times \{Z;\ |Z_{j,\alpha}| \leqq r\}$ et ayant la forme suivante:

$$G_2(t, x)(Z) = \sum_{|q|\geqq 2} g_q(t, x) Z^q, \tag{4.7}$$

où

$$q = \{q_{j,\alpha}\}_{j+|\alpha|\leqq m}, \qquad q_{j,\alpha} \in \boldsymbol{N},$$

$$|q| = \sum_{j+|\alpha|\leqq m} q_{j,\alpha},$$

$$Z^q = \prod_{j+|\alpha|\leqq m} (Z_{j,\alpha})^{q_{j,\alpha}}$$

et $g_q(t, x)$ $(|q| \geqq 2)$ sont des fonctions holomorphes définies dans $S(\varepsilon(s)) \times D_r$. De plus supposons que pour tout $\theta>0$ et toute partie compacte $K \times L$ de $D_r \times \{Z;\ |Z_{j,\alpha}| \leqq r\}$ nous ayons

$$\max_{(x,Z)\in K\times L} |G_2(t, x)(Z)| = O(1)$$

quand $t \to 0$ dans S_θ.

Considérons l'équation suivante:

$$(\mathrm{E}_4)\qquad \left(\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^m + c_{m-1}(x)\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m-1} + \cdots + c_0(x)\right)u$$

$$= \sum_{j+|\alpha|\leq m} a_{j,\alpha}(t, x)\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^j\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u$$

$$+ G_2(t, x)\left(\left\{\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^j\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u\right\}_{j+|\alpha|\leq m}\right).$$

Si nous posons

$$R[u] = \sum_{j+|\alpha|\leq m} a_{j,\alpha}(t, x)\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^j\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u$$

$$+ G_2(t, x)\left(\left\{\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^j\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u\right\}_{j+|\alpha|\leq m}\right),$$

les conditions (4.6) et (4.7) ainsi que le fait que R satisfait à la condition (B_s) nous permet d'appliquer le lemme 3. Nous obtenons ainsi:

Proposition 2. *Soient I_1, I_2, I_3, M_1, M_2, m_2 et m_3 comme dans le corollaire 3. Supposons que $u(t, x) \in \tilde{\mathcal{O}}_+$ soit une solution de* (E_4). *Alors*:

(1) *Si $u(t, x) = O(t^a ; \tilde{\mathcal{O}}_+)$ (quand $t \to 0$) pour un $a > \max\{0, M_1\}$, nous avons $u(t, x) = O(t^b ; \tilde{\mathcal{O}}_+)$ (quand $t \to 0$) pour tout $b < m_2$.*

(2) *Si $u(t, x) = O(t^a ; \tilde{\mathcal{O}}_+)$ (quand $t \to 0$) pour un $a > \max\{0, M_2\}$, nous avons $u(t, x) = O(t^b ; \tilde{\mathcal{O}}_+)$ (quand $t \to 0$) pour tout $b < m_3$.*

(3) *Si $u(t, x) = O(t^a ; \tilde{\mathcal{O}}_+)$ (quand $t \to 0$) pour un $a > 0$ satisfaisant à*

$$M_1 < a < m_2 \leq M_2 < \min\{2a,\ a+s\}$$

et si $\rho_i(0)$, $i \in I_2$, sont distincts, alors nous avons

$$u(t, x) = \sum_{i\in I_2} \varphi_i(x) t^{\rho_i(x)} + O(t^b ; \tilde{\mathcal{O}}_+) \qquad (\textit{quand } t \to 0)$$

pour des $\varphi_i(x) \in \boldsymbol{C}\{x\}$ $(i \in I_2)$ et un nombre $b > M_2$.

Pour terminer discutons l'unicité de la solution de (E_4). Soit $u(t, x) \in \tilde{\mathcal{O}}_+$ une solution de (E_4); supposons que $u(t, x) = O(t^a ; \tilde{\mathcal{O}}_+)$ (quand $t \to 0$) pour un $a > 0$ satisfaisant à

$$a > \max_{1\leq i\leq m} \operatorname{Re} \rho_i(0).$$

La conclusion (2) de la proposition 2 avec l'hypothèse que $I_1 = I_3 = \emptyset$ et $m_3 = \infty$ nous donne:

$$(4.8)\qquad u(t, x) = O(t^\infty ; \tilde{\mathcal{O}}_+) \qquad (\text{quand } t \to 0);$$

c'est à dire que $u(t, x) = O(t^b ; \tilde{\mathcal{O}}_+)$ (quand $t \to 0$) pour tout $b > 0$.

Nous avons beaucoup plus:

Proposition 3. *Soit* $u(t, x) \in \tilde{\mathcal{O}}_+$ *une solution de* (E_4) *vérifiant* $u(t, x) = O(t^a; \tilde{\mathcal{O}}_+)$ (*quand* $t \to 0$) *pour un* $a > 0$ *satisfaisant à*

$$a > \max_{1 \leq i \leq m} \operatorname{Re} \rho_i(0) . \tag{4.9}$$

Alors $u(t, x) \equiv 0$ *dans* $\tilde{\mathcal{O}}_+$.

Démonstration. Posons

$$b_{j,\alpha}(t, x) = \int_0^1 \frac{\partial G_2(t, x)}{\partial Z_{j,\alpha}} \left(\left\{ \left(t \frac{\partial}{\partial t}\right)^j \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u(t, x) \theta \right\}_{j+|\alpha| \leq m} \right) d\theta .$$

Comme $a > 0$, par (4.7) nous avons

$$b_{j,\alpha}(t, x) = O(t^a; \tilde{\mathcal{O}}_+) \qquad (\text{quand } t \to 0) .$$

Soit $s > 0$ comme dans (4.6), et $\rho > 0$ tel que

$$0 < \rho < \min \left\{ \frac{a}{m}, \frac{s}{m} \right\} .$$

Posons

$$w(t, x) = t^{-a} u(t, x) \in \tilde{\mathcal{O}}_+$$

et

$$c_{j,\alpha}(t, x) = t^{-\rho|\alpha|}(a_{j,\alpha}(t, x) + b_{j,\alpha}(t, x)) \in \tilde{\mathcal{O}}_+ .$$

Il est alors aisé de voir que $w(t, x)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles linéaires:

$$C\left(t \frac{\partial}{\partial t} + a ; x\right) w = \sum_{j+|\alpha| \leq m} c_{j,\alpha}(t, x) \left(t \frac{\partial}{\partial t} - \rho|\alpha| + a\right)^j \left(t^\rho \frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha w . \tag{4.10}$$

De plus si $\lambda_1(x), \cdots, \lambda_m(x)$ désignent les racines du polynôme $C(\lambda + a ; x)$ la condition (4.9) entraine

$$\operatorname{Re} \lambda_i(0) < 0 \qquad \text{pour tout } i = 1, \cdots, m .$$

Par suite en appliquant le théorème d'unicité de Tahara [13] ou Baouendi-Goulaouic [1] à l'équation (4.10) nous obtenons $u(t, x) \equiv 0$ dans $\tilde{\mathcal{O}}_+$.

§ 5. Fin de la Démonstration du Théorème Principal

Dans ce paragraphe, nous appliquons les résultats des § 1 à 4 aux équations aux dérivées partielles singulières non linéaires de la forme

$$\left(t \frac{\partial}{\partial t}\right)^m u = F\left(t, x, \left\{ \left(t \frac{\partial}{\partial t}\right)^j \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u \right\}_{(j,\alpha) \in I_m}\right) \tag{E}$$

introduites dans notre introduction et nous complétons la démonstration du théorème principal.

Dans tout cette section nous supposons vérifiées les conditions (A_1), (A_2) et

(A_3) (voir l'introduction). Désignons par $\rho_1(x), \cdots, \rho_m(x)$ les fonctions de x racines du polynôme:

$$C(\rho\,;\,x)=\rho^m-\sum_{j<m}\Big(\frac{\partial F}{\partial Z_{j,0}}(0,\,x,\,0)\Big)\rho^j\,.$$

Rappelons les notations:

$$J_+=\{i\in\{1,\cdots,m\}\,;\,\mathrm{Re}\,\rho_i(0)>0\}\,.$$

$$\mu=\text{le cardinal de } J_+\,.$$

Lorsque $\mu\geqq 1$ quitte à changer la numérotation nous supposons que:

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\,\rho_i(0)>0 & \text{pour } 1\leqq i\leqq\mu\,, \\ \mathrm{Re}\,\rho_i(0)\leqq 0 & \text{pour } \mu+1\leqq i\leqq m\,. \end{cases} \tag{5.1}$$

Les conditions (A_1), (A_2) et (A_3) entrainent que l'équation (E) s'écrit sous la forme

$$\Big(\Big(t\frac{\partial}{\partial t}\Big)^m+c_{m-1}(x)\Big(t\frac{\partial}{\partial t}\Big)^{m-1}+\cdots+c_0(x)\Big)u$$
$$=tb(x)+G_2(x)\Big(t,\,\Big\{\Big(t\frac{\partial}{\partial t}\Big)^j\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^\alpha u\Big\}_{(j,\alpha)\in I_m}\Big)$$

qui est un cas particulier d'équations du type (E_1) et (E_3). De plus nous avons

$$c_j(x)=-\frac{\partial F}{\partial Z_{j,0}}(0,\,x,\,0)\,,\qquad j=0,\,1,\,\cdots,\,m-1\,.$$

Les résultats dans § 1 à 4 nous donnent:

(C_1) (voir corollaire 1). Si $\rho_i(0)\notin \boldsymbol{N}^*$ pour tout $i=1,\cdots,m$, l'équation (E) a une solution unique $u_0(t,x)(=u_0)$ holomorphe au voisinage de l'origine de $\boldsymbol{C}_t\times\boldsymbol{C}_x^n$ vèrifiant $u_0(0,x)\equiv 0$.

(C_2) (voir théorème 3). Supposons $\mu\geqq 1$, (5.1) et les conditions suivantes:

i) $\rho_1(x),\cdots,\rho_\mu(x)$ sont holomorphes au voisinage de $x=0$;

ii) $C(1\,;\,0)\neq 0$;

iii) $C(i+j_1\rho_1(0)+\cdots+j_\mu\rho_\mu(0)\,;\,0)\neq 0$ pour tout $(i,\,j)\in\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}^\mu$ satisfaisant à $i+|j|\geqq 2$.

Alors pour tout $\varphi_1(x),\cdots,\varphi_\mu(x)\in\boldsymbol{C}\{x\}$ l'équation (E) admet une solution unique $U(\varphi_1,\cdots,\varphi_\mu)(t,x)$ appartenant à $\tilde{\mathcal{O}}_+$ de la forme

$$U(\varphi_1,\cdots,\varphi_\mu)=\sum_{i\geqq 1}u_i(x)t^i$$
$$+\sum_{\substack{i+2m|j|\geqq k+2m\\ |j|\geqq 1}}\varphi_{i,j,k}(x)t^{i+j_1\rho_1(x)+\cdots+j_\mu\rho_\mu(x)}(\log t)^k$$

avec $\varphi_{0,e_p,0}(x)=\varphi_p(x)$, $p=1,\cdots,\mu$ où $e_1=(1,0,\cdots,0),\cdots,e_\mu=(0,\cdots,0,1)$. Il est immédiat de voir que $U(0, \cdots, 0)=u_0$ qui est la solution holomorphe unique donnée dans (C_1).

(C_3) (voir la discussion des §2 à 4). Soit $0\leqq p<l\leqq\mu$. Supposons qu'il existe des nombres réels s, a, b vérifiant les conditions suivantes:

1) $0<s<\min\{1, \min_{i\leq p} \operatorname{Re}\rho_i(0)\}$;

2) $\max_{i\leq p} \operatorname{Re}\rho_i(0)<a<\min_{p+1\leq i\leq l} \operatorname{Re}\rho_i(0)$;

3) $\max_{p+1\leq i\leq l} \operatorname{Re}\rho_i(0)<b<\min\{2a, a+s\}$.

Alors sous les conditions données dans (C_2) nous avons

$$U(\varphi_1, \cdots, \varphi_l, 0, \cdots, 0)-U(\varphi_1, \cdots, \varphi_p, 0, \cdots, 0)-\sum_{i=p+1}^{l}\varphi_i(x)t^{\rho_i(x)}$$
$$=O(t^b\,; \tilde{\mathcal{O}}_+) \qquad (\text{quand } t\to 0).$$

Désignons par $\mathcal{S}_+$ l'ensemble des solutions de (E) appartenant à $\tilde{\mathcal{O}}_+$ et retournons à la démonstration du théorème principal.

La condition (C_1) ci-dessus nous donne immédiatement la conclusion (I) du théorème principal. Les conditions (C_1) et (C_2) signifient que

$$\mathcal{S}_+\supset\begin{cases}\{u_0\}, & \text{quand } \mu=0\,,\\ \{U(\varphi_1, \cdots, \varphi_\mu)\,; (\varphi_1, \cdots, \varphi_\mu)\in(\boldsymbol{C}\{x\})^\mu\}, & \text{quand } \mu\geqq 1.\end{cases}$$

Donc, pour compléter la démonstration du théorème principal il suffit de prouver:

Théorème 4. *Supposons que* (E) *satisfait aux conditions* (A_1), (A_2) *et* (A_3). *Alors*:

(1) *Si* $\mu=0$ *c'est à dire que* $\operatorname{Re}\rho_i(0)\leqq 0$ *pour tout* $i=1, \cdots, m$, $\mathcal{S}_+=\{u_0\}$.

(2) *Si* $\mu\geqq 1$ *et si on a* (5.1) *ainsi que*

i) $\rho_i(0)\neq\rho_j(0)$ *pour* $1\leqq i\neq j\leqq\mu$;

ii) $C(1\,; 0)\neq 0$;

iii) $C(i+j_1\rho_1(0)+\cdots+j_\mu\rho_\mu(0)\,; 0)\neq 0$ *pour tout* $(i, j)\in\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}^\mu$ *satisfaisant à* $i+|j|\geqq 2$;

toute solution $u\in\mathcal{S}_+$ *de* (E) *est de la forme*

$$u=U(\varphi_1, \cdots, \varphi_\mu) \tag{5.2}$$

pour des $\varphi_1, \cdots, \varphi_\mu$ *appartenant à* $\boldsymbol{C}\{x\}$ *déterminés uniquement par* u.

Démonstration. Soit $u\in\mathcal{S}_+$. Posons $w=u-u_0$. D'après la définition de $\tilde{\mathcal{O}}_+$ nous avons pour un $a>0$, $w(t, x)=O(t^a\,; \tilde{\mathcal{O}}_+)$ (quand $t\to 0$). Comme u et u_0 sont des solutions de (E), w est solution de

$$(5.3)\qquad \left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^m w=F\left(t,\ x,\ \left\{\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^j\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha w+\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^j\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u_0(t,\ x)\right\}_{(j,\alpha)\in I_m}\right)$$
$$-F\left(t,\ x,\ \left\{\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^j\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u_0(t,\ x)\right\}_{(j,\alpha)\in I_m}\right).$$

Les hypothèses (A_1), (A_2) et (A_3) entrainent que l'équation (5.3) pour w est un cas particulier d'équation (E_4). Par suite si nous supposons que $\mathrm{Re}\,\rho_i(0)\leqq 0$ pour tout $i=1, \cdots, m$ nous avons

$$a>0\geqq \max_{1\leq i\leq m}\mathrm{Re}\,\rho_i(0)$$

et la proposition 3 nous donne $w\equiv 0$. Ce qui prouve l'assertion (1) du théorème 4.

Pour démontrer (2) supposons donc avoir $\mu\geqq 1$, (5.1) et i), ii), iii). Nous pouvons supposer sans nuire à la généralité (en changeant éventuellement la numérotation) que

$$\begin{aligned}0<\mathrm{Re}\,\rho_1(0)&=\cdots=\mathrm{Re}\,\rho_{i_1}(0)\\ &<\mathrm{Re}\,\rho_{i_1+1}(0)=\cdots=\mathrm{Re}\,\rho_{i_2}(0)\\ &\quad<\cdots<\mathrm{Re}\,\rho_{i_{N-1}+1}(0)=\cdots=\mathrm{Re}\,\rho_{i_N}(0)\end{aligned}$$

avec $0<i_1<i_2<\cdots<i_N=\mu$. Posons $i_0=0$ et

$$m_l=\mathrm{Re}\,\rho_{i_{l-1}+1}(0)=\cdots=\mathrm{Re}\,\rho_{i_l}(0)\,,\qquad l=1,\ \cdots,\ N.$$

Choisissons $s>0$, $a_1, \cdots, a_N$, $a_{N+1}=\infty$ et $b_1, \cdots, b_N$ tels que

1) $0<s<\min\{m_1, 1\}$;
2) $a_l<m_l<b_l<\min\{2a_l,\ a_l+s,\ a_{l+1}\}$, $l=1, \cdots, N$.

Soit $u\in\mathcal{S}_+$ fixé, posons $w_1=u-u_0$; comme $w_1\in\tilde{\mathcal{O}}_+$ nous avons pour un $a>0$, $w_1=O(t^a\,;\,\tilde{\mathcal{O}}_+)$ (quand $t\to 0$). En appliquant la conclusion (1) de proposition 2 à w_1 qui est solution d'équation (5.3) qui est de la forme (E_4) nous obtenons $w_1=O(t^{a_1}\,;\,\tilde{\mathcal{O}}_+)$ (quand $t\to 0$) et la conclusion (3) de la même proposition nous donne

$$(5.4)\qquad w_1=\sum_{p=1}^{i_1}\varphi_p(x)t^{\rho_p(x)}+O(t^{b_1}\,;\,\tilde{\mathcal{O}}_+)\qquad(\text{quand } t\to 0)$$

pour des $\varphi_1(x), \cdots, \varphi_{i_1}(x)\in \boldsymbol{C}\{x\}$.

Posons maintenant

$$u_1=U(\varphi_1,\ \cdots,\ \varphi_{i_1},\ 0,\ \cdots,\ 0)\qquad\text{et}\quad w_2=u-u_1:$$

par (5.4) et (C_3) nous avons

$$\begin{aligned} w_2 &= u_0 - u_1 + w_1 \\ &= U(0, \cdots, 0) - U(\varphi_1, \cdots, \varphi_{i_1}, 0, \cdots, 0) \\ &\quad + \sum_{p=1}^{i_1} \varphi_p(x) t^{\rho_p(x)} + O(t^{b_1}; \tilde{\mathcal{O}}_+) \\ &= O(t^{b_1}; \tilde{\mathcal{O}}_+) \qquad (\text{quand } t \to 0). \end{aligned}$$

De plus w_2 est solution de

$$\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^m w_2 = F\left(t, x, \left\{\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^j \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha w_2 + \left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^j \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u_1(t, x)\right\}_{(j, \alpha) \in I_m}\right)$$
$$-F\left(t, x, \left\{\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^j \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u_1(t, x)\right\}_{(j, \alpha) \in I_m}\right)$$

qui est une forme particulière de (E_4). Donc, par (2) de la proposition 2 nous avons $w_2 = O(t^{a_2}; \tilde{\mathcal{O}}_+)$ (quand $t \to 0$). En appliquant (3) de la même proposition nous obtenons

$$w_2 = \sum_{p=i_1+1}^{i_2} \varphi_p(x) t^{\rho_p(x)} + O(t^{b_2}; \tilde{\mathcal{O}}_+) \qquad (\text{quand } t \to 0) \tag{5.5}$$

pour des $\varphi_{i_1+1}(x), \cdots, \varphi_{i_2}(x) \in \boldsymbol{C}\{x\}$.

Introduisons maintenant

$$u_2 = U(\varphi_1, \cdots, \varphi_{i_2}, 0, \cdots, 0) \qquad \text{et} \quad w_3 = u - u_2:$$

par (5.5) et (C_3) nous avons

$$\begin{aligned} w_3 &= u_1 - u_2 + w_2 \\ &= U(\varphi_1, \cdots, \varphi_{i_1}, 0, \cdots, 0) - U(\varphi_1, \cdots, \varphi_{i_2}, 0, \cdots, 0) \\ &\quad + \sum_{p=i_1+1}^{i_2} \varphi_p(x) t^{\rho_p(x)} + O(t^{b_2}; \tilde{\mathcal{O}}_+) \\ &= O(t^{b_2}; \tilde{\mathcal{O}}_+) \qquad (\text{quand } t \to 0). \end{aligned}$$

En répètant cet argument, nous obtenons des fonctions $\varphi_{i_2+1}(x), \cdots, \varphi_\mu(x) \in \boldsymbol{C}\{x\}$ telles que si nous posons

$$u_l = U(\varphi_1, \cdots, \varphi_{i_l}, 0, \cdots, 0)$$

pour $l \in \{3, \cdots, N\}$ et $w_{l+1} = u - u_l$ nous avons

$$w_{l+1} = O(t^{b_l}; \tilde{\mathcal{O}}_+) \qquad (\text{quand } t \to 0).$$

En particulier pour $l = N$, w_{N+1} vérifie

$$\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^m w_{N+1} = F\left(t, x, \left\{\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^j \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha w_{N+1} + \left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^j \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u_N(t, x)\right\}_{(j, \alpha) \in I_m}\right)$$
$$-F\left(t, x, \left\{\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^j \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u_N(t, x)\right\}_{(j, \alpha) \in I_m}\right)$$

qui est une équation du type (E_4). Comme $w_{N+1}=O(t^{b_N}; \tilde{\mathcal{O}}_+)$ (quand $t\to 0$) et que $b_N>m_N$ la proposition 3 entraine $w_{N+1}\equiv 0$ c'est à dire que

$$u=u_N=U(\varphi_1, \cdots, \varphi_\mu)$$

ce qui pouve (5.2).

Pour obtenir l'unicité il suffit de prouver que

$$U(\varphi_1, \cdots, \varphi_\mu)=U(\psi_1, \cdots, \psi_\mu) \qquad \text{dans } \tilde{\mathcal{O}}_+ \tag{5.6}$$

entraine $\varphi_i(x)=\psi_i(x)$ dans $\boldsymbol{C}\{x\}$ pour tout $i=1, \cdots, \mu$.

D'après (5.6) nous avons

$$\begin{aligned} 0&=U(\varphi_1, \cdots, \varphi_\mu)-U(\psi_1, \cdots, \psi_\mu) \\ &=\sum_{p=1}^{i_1}(\varphi_p(x)-\psi_p(x))t^{\rho_p(x)}+O(t^{b_1}; \tilde{\mathcal{O}}_+) \qquad (\text{quand } t\to 0). \end{aligned} \tag{5.7}$$

Comme $\operatorname{Re}\rho_p(0)<b_1$ pour $p=1, \cdots, i_1$ et les $\rho_1(0), \cdots, \rho_{i_1}(0)$ sont tous distincts, (5.7) nous donne

$$\varphi_p(x)=\psi_p(x) \qquad \text{dans } \boldsymbol{C}\{x\} \text{ pour tout } p=1, \cdots, i_1. \tag{5.8}$$

Maintenant (5.6) et (5.8) entrainent facilement

$$\begin{aligned} 0&=U(\varphi_1, \cdots, \varphi_\mu)-U(\psi_1, \cdots, \psi_\mu) \\ &=\sum_{p=i_1+1}^{i_2}(\varphi_p(x)-\psi_p(x))t^{\rho_p(x)}+O(t^{b_2}; \tilde{\mathcal{O}}_+) \qquad (\text{quand } t\to 0) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\varphi_p(x)=\psi_p(x) \qquad \text{dans } \boldsymbol{C}\{x\} \text{ pour tout } p=i_1+1, \cdots, i_2.$$

Et par récurrence nous obtenons

$$\varphi_p(x)=\psi_p(x) \qquad \text{dans } \boldsymbol{C}\{x\} \text{ pour tout } p=1, \cdots, \mu$$

ce qui termine la démonstration du théorème 4 et complète la démonstration du théorème principal de cet article.

Bibliographie

[1] Baouendi, M.S. et Goulaouic, G., Cauchy problem with characteristic initial hypersurface, *Comm. Pure Appl. Math.*, **26** (1973), 455-475.

[2] Gérard, R., Une classe d'équations aux dérivées partielles non linéaires à singularité réguliere, Séminaire Vaillant, *Propagation of singularities and differential operators*, 53-71, Travaux en Cours, Hermann, 1985.

[3] ———, Une classe d'opérateurs singuliers non linéaires à singularité réguliere, Séminaire d'analyse P. Lelong--P. Dolbeault--H. Skoda, 146-162, *Lecture Notes in Math.*, **1198**, Springer, 1986.

[4] Gérard, R. et Tahara, H., Nonlinear singular first order partial differential equa-

tions of Briot-Bouquet type, *Proc. Japan Acad.*, **66-3** (1990), 72-74.

[5] Gérard, R. et Tahara, H., Holomorphic and singular solutions of nonlinear singular first order partial differential equations, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **26** (1990), 979-1000.

[6] ———, Théorème du type Maillet pour une classe d'équations aux dérivées partielles analytiques singulières, *C. R. Acad. des Sciences, Paris*, **312** (1991), 499-502.

[7] ———, Maillet's type theorems for non linear singular partial differential equations, to appear in *J. Math. Pures et Appl.*, Paris.

[8] ———, Maillet's type theorems for non linear singular partial differential equations without linear part, *preprint of IRMA*, Strasbourg.

[9] Ishii, T., On propagation of regular singularities for solutions of nonlinear partial differential equations, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA, Math.*, **37** (1990), 377-424.

[10] Madi, N. S. et Yoshino, M., Uniqueness and solvability of nonlinear Fuchsian equations, *Bull. Sc. Math.*, 2^{e} série, **114** (1990), 41-60.

[11] Tahara, H., Fuchsian type equations and Fuchsian hyperbolic equations, *Japan. J. Math.*, **5** (1979), 245-347.

[12] ———, Fundamental systems of analytic solutions of Fuchsian type partial differential equations, *Funkcialaj Ekvacioj*, **24** (1981), 135-140.

[13] ———, On a Volevic system of singular partial differential equations, *J. Math. Soc. Japan*, **34** (1982), 279-288.

[14] ———, Singular hyperbolic systems, V. Asymptotic expansions for Fuchsian hyperbolic partial differential equations, *J. Math. Soc. Japan*, **36** (1984), 449-473.