Publ. RIMS, Kyoto Univ.
31 (1995), 703–720

Systèmes Différentiels, Nombre de Castelnuovo et Rang des Tissus de $\mathbb{C}^n$

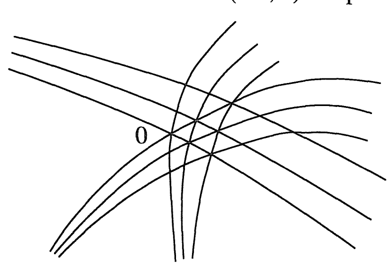
par

Alain HÉNAUT*

Table des matières

§0. Introduction et Notations

Un d-tissu $\mathcal{W}(d)$ de $(\mathbb{C}^n,0)$ est défini par d feuilletages $(d \geq n \geq 2)$ analytiques complexes de codimension 1 de $(\mathbb{C}^n,0)$ en position générale:



$n = 2, d = 3.$

On s'intéresse à l'étude géométrique de telles configurations, c'est à dire *à un isomorphisme analytique local* $\phi : (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C}^n,\phi(0))$ *près* (cf. le livre classique de W. Blaschke et G. Bol [B-B] et les articles de P. A. Griffiths [G2] et S. S. Chern [C2]).

On désigne par $\mathcal{O} = \mathbb{C}\{z_1,\cdots,z_n\}$ l'anneau des séries entières convergentes à n variables. On note Ω^1 (resp. χ) le $\mathcal{O}$-module des formes de Pfaff (resp. des champs de vecteurs) à coefficients dans $\mathcal{O}$.

Un d-tissu $\mathcal{W}(d)$ de $(\mathbb{C}^n,0)$, est donné par *d formes de Pfaff* $\omega_1,\cdots,\omega_d$ *uniques à des inversibles près de* $\mathcal{O}$, non singulières (i.e. $\omega_i \in \Omega^1$ et $\omega_i(0) \neq 0$ pour $1 \leq i \leq d$), complètement intégrables (i.e. $d\omega_i \wedge \omega_i = 0$ pour $1 \leq i \leq d$) et telles que l'on ait

---

Communiqué par M. Kashiwara, le 11, Octobre, 1994.
1991 Mathematics Subject Classification(s): 14, 32, 53A60, 58G.
* Centre de Recherche en Mathématiques de Bordeaux, Université Bordeaux I et C. N. R. S., 351, cours de la Libération, 33405 Talence Cedex, France.

$$\omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_n}(0) \neq 0 \ \text{ pour } \ 1 \leq i_1 < \cdots < i_n \leq d$$

(i.e. les feuilles de $\mathscr{W}(d)$ sont en position générale).

A z fixé et voisin de $0 \in \mathbf{C}^n$, les formes ω_i définissent *d points* $\omega_i(z)$ *de* $\mathbf{P}^{n-1}$ *en position générale,* ne dépendant que de $\mathscr{W}(d)$ et qu'on appelle les *normales* en z du d-tissu $\mathscr{W}(d)$ de $(\mathbf{C}^n, 0)$.

Grâce au théorème de Frobenius, les d feuilles du tissu $\mathscr{W}(d)$ sont les hypersurfaces de niveau $\{F_i(z) = \text{cste}\}$ d'éléments $F_i \in \mathscr{O}$ vérifiant $F_i(0) = 0$ et tels que l'on ait

$$dF_{i_1} \wedge \cdots \wedge dF_{i_n}(0) \neq 0 \ \text{ pour } \ 1 \leq i_1 < \cdots < i_n \leq d.$$

Un d-uplet $(g_1(F_1), \cdots, g_d(F_d)) \in \mathscr{O}^d$ où $g_i \in \mathbf{C}\{t\}$ et qui vérifie $\sum_{i=1}^{d} g_i(F_i) dF_i = 0$ est appelé une *relation abélienne* du tissu $\mathscr{W}(d)$. Cet article est essentiellement consacré à l'étude du $\mathbf{C}$-espace vectoriel

$$\mathscr{A}(d) = \left\{ (g_i(F_i))_{1 \leq i \leq d} \, ; g_i \in \mathbf{C}\{t\} \ \text{ et } \ \sum_{i=1}^{d} g_i(F_i) dF_i = 0 \right\}$$

des relations abéliennes du d-tissu $\mathscr{W}(d)$ de $(\mathbf{C}^n, 0)$. On peut vérifier que $\mathscr{A}(d)$ est un invariant analytique qui ne dépend que de $\mathscr{W}(d)$ et l'on sait (cf. [C1]) que l'on a la *majoration de Chern* (1936):

$$0 \leq \operatorname{rg} \mathscr{W}(d) := \dim_{\mathbf{C}} \mathscr{A}(d) \leq \pi(d, n)$$

où $\pi(d, n)$ est le *nombre de Castelnuovo* défini par

$$\pi(d, n) = (d - n) + (d - 2n + 1) + (d - 3n + 2) + \cdots$$

où la somme ne fait intervenir que des termes positifs; l'entier $\operatorname{rg} \mathscr{W}(d)$ défini ci-dessus est un invariant analytique de $\mathscr{W}(d)$ qu'on appelle le *rang* du d-tissu $\mathscr{W}(d)$ de $(\mathbf{C}^n, 0)$.

Un d-tissu $\mathscr{L}(d)$ de $(\mathbf{C}^n, 0)$ est *linéaire* si ses d feuilles sont des (morceaux d') hyperplans de $\mathbf{C}^n$, non nécessairement parallèles. On dit qu'un d-tissu $\mathscr{W}(d)$ de $(\mathbf{C}^n, 0)$ est *linéarisable* s'il existe un isomorphisme analytique local $\phi : (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}^n, \phi(0))$ qui transforme $\mathscr{W}(d)$ en un d-tissu linéaire.

Soit C une courbe algébrique réduite de $\mathbf{P}^n$, non dégénérée (i.e. non contenue dans un hyperplan de $\mathbf{P}^n$), non nécessairement irréductible, éventuellement singulière et de degré d. Un hyperplan *générique* $H \in \check{\mathbf{P}}^n$ coupe C en d points lisses distincts et l'on suppose que ces d points sont en position générale dans $H = \mathbf{P}^{n-1}$ (un tel hyperplan générique existe par exemple si $n = 2$ ou si C est irréductible avec $n \geq 3$); par dualité, ces d points donnent d hyperplans de $\check{\mathbf{P}}^n$ passant par H. On peut faire cette construction pour les points voisins de $H \in \check{\mathbf{P}}^n$ et l'on obtient ainsi un d-tissu linéaire $\mathscr{L}_C$ de $(\check{\mathbf{P}}^n, H)$ appelé "*le*" *tissu linéaire associé à la courbe algébrique C de* $\mathbf{P}^n$.

Soit ω_C le faisceau dualisant de C, grâce au théorème d'Abel (cf, [G1] et [H2]), on peut construire un morphisme de $\boldsymbol{C}$-espaces vectoriels

$$A : H^0(C, \omega_C) \to \mathscr{A}(\mathscr{L}_C)$$

qui est un *isomorphisme* si $n = 2$ ou si $C \subset \boldsymbol{P}^n$ est irréductible avec $n \geq 3$. En particulier, la majoration de Chern redonne la *majoration de Castelnuovo* (1889):

$$g(C) := \dim_{\boldsymbol{C}} H^0(\tilde{C}, \Omega^1_{\tilde{C}}) \leq \pi(d, n)$$

obtenue pour le genre $g(C)$ d'une courbe algébrique réduite, irréductible et non dégénérée C de $\boldsymbol{P}^n$ dont le degré est d (cf. [Ca]) où $\tilde{C}$ est la normalisée de C.

Si le d-tissu $\mathscr{L}(d)$ de $(\boldsymbol{C}^n, 0)$ est linéaire, *l'existence d'une relation abélienne* $\sum_{i=1}^d g_i(F_i) dF_i = 0$ *avec* $g_i(F_i) \neq 0$ *pour* $1 \leq i \leq d$ permet, grâce au théorème de Lie-Darboux-Griffiths (cf. [G1]) de montrer que $\mathscr{L}(d)$ est associé, par dualité, à une courbe algébrique C de $\boldsymbol{P}^n$ dont le degré est d (i.e. $\mathscr{L}(d) = \mathscr{L}_C$); en particulier, on peut ainsi déterminer les tissus de $(\boldsymbol{C}^n, 0)$ dont le rang est maximal et qui sont linéarisables.

Les travaux de H. Poincaré (cf. [P]), G. Bol (cf. [B-B]), S. S. Chern et P. A. Griffiths (cf. [C-G]) et de l'auteur (cf. [H2]) montrent le rôle capital joué par l'espace des relations abéliennes pour le problème de la linéarisation des tissus de $(\boldsymbol{C}^n, 0)$ dont le rang est maximal.

La classification des tissus de $(\boldsymbol{C}^n, 0)$ dont le rang est maximal et qui ne sont pas linéarisables reste à faire; cependant, il est probable que, comme dans l'exemple de Bol (cf. [B]), ces tissus feront apparaître des relations abéliennes *exceptionnelles*.

Dans ce qui suit, on se propose de montrer comment l'analyse algébrique (i.e. la théorie des $\mathscr{D}$-modules) élémentaire permet d'une part, de retrouver et d'améliorer quelques résultats concernant la géométrie des tissus de $(\boldsymbol{C}^n, 0)$ et d'autre part, d'entreprendre la classification des tissus. Ces méthodes ont déjà été partiellement utilisées par l'auteur dans le cas $n = 2$ (cf. [H1]).

On verra également comment le formalisme introduit permet d'envisager l'étude des tissus avec singularités.

A un d-tissu $\mathscr{W}(d)$ de $(\boldsymbol{C}^n, 0)$ on associe un système différentiel linéaire $\mathscr{R}(d)$ dont le $\boldsymbol{C}$-espace vectoriel des solutions analytiques Sol $\mathscr{R}(d)$ vérifie

$$\text{Sol } \mathscr{R}(d) = \mathscr{A}(d) \oplus \boldsymbol{C}^d.$$

On montre comment relier $\mathscr{R}(d+1)$ et $\mathscr{R}(d)$, ce qui permet via des *idéaux convenables* de $\mathscr{D}$ d'étudier un tissu de $(\boldsymbol{C}^n, 0)$ par ses tissus extraits. De plus, les méthodes utilisées permettent de préciser la nature géométrique de la famille des normales $\omega_i(z)$ *de* $\mathscr{W}(d)$, en tant que famille de configurations de points de $\boldsymbol{P}^{n-1}$.

Par récurrence sur d et via l'étude de la matrice des symboles du système $\mathscr{R}(d)$, on donne une nouvelle démonstration de la majoration de Chern.

On retrouve également d'une manière nouvelle, le résultat non publié de R. L. Bryant [Br] suivant: les normales $\omega_i(z)$ d'un d-tissu $\mathscr{W}(d)$ de $(\mathbf{C}^n,0)$ avec $d \geq 2n+1 \geq 7$ appartiennent pour $1 \leq i \leq d$ à une unique courbe rationnelle normale $D(z)$ de $\mathbf{P}^{n-1}$ dès que $\operatorname{rg}\mathscr{W}(d) \geq \pi(d-1,n)+2$. Ce résultat améliore un énoncé de S. S. Chern et P. A. Griffiths (cf. [C-G], p. 61).

Depuis les travaux de G. Castelnuovo on sait qu'il existe pour $d \geq n \geq 2$, des courbes algébriques réduites, irréductibles et non dégénérées C de degré d de $\mathbf{P}^n$ qui sont *extrémales* (i.e. $g(C) = \pi(d,n)$). La majoration de Chern est donc optimale: il suffit, d'après ce qui précède, de prendre le d-tissu linéaire $\mathscr{L}_C$ de $(\check{\mathbf{P}}^n, H)$ associé à une courbe extrémale C de degré d de $\mathbf{P}^n$ puisque $\operatorname{rg}\mathscr{L}_C = \pi(d,n)$. Cependant, on montre à l'aide de nos méthodes comment construire facilement pour $d \geq n \geq 2$, un d-tissu linéaire de $(\mathbf{C}^n,0)$ dont le rang est maximal.

Pour terminer cette introduction, on se doit de signaler que plus généralement dans le cadre C^∞, on peut montrer directement la *finitude* du rang d'un d-tissu de $(\mathbf{R}^n,0)$ à l'aide de propriétés des systèmes différentiels extérieurs (cf. [B-C-G-G-G]).

§1. Système Différentiel de la Résonance Associé à un Tissu

Soit $\mathscr{W}(d)$ un d-tissu de $(\mathbf{C}^n,0)$ de formes de Pfaff ω_i pour $1 \leq i \leq d$. D'après le théorème de Frobenius et par dualité, pour $1 \leq i \leq d$ il existe $(n-1)$ champs de vecteurs $X_{i,j}$ de χ qui sont $\mathbf{C}$-linéairement indépendants en 0 et forment un système complet (ou involutif) tels que

$$\omega_i(X_{i,j}) = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leq j \leq n-1.$$

On considère le système différentiel linéaire suivant:

$$\mathscr{R}(d) \begin{cases} X_{i,j}(f_i) = 0 & \text{pour} \quad 1 \leq i \leq d \quad \text{et} \quad 1 \leq j \leq n-1 \\ \partial_k(f_1 + f_2 + \cdots + f_d) = 0 & \text{pour} \quad 1 \leq k \leq n \end{cases}$$

où $\partial_k = \dfrac{\partial}{\partial z_k}$ pour $1 \leq k \leq n$.

Dans le cadre $\mathbf{C}^\infty$ et pour $n=2$, le système différentiel linéaire ci-dessus correspond aux équations de la résonance introduites par J.-L. Joly et J. Rauch (cf. [J-M-R]) pour étudier le problème de l'interaction des ondes oscillantes non linéaires; par analogie, on appelera $\mathscr{R}(d)$ *le système différentiel de la résonance* associé au d-tissu $\mathscr{W}(d)$ de $(\mathbf{C}^n,0)$.

On désigne par $\mathscr{D}$ l'anneau noethérien à gauche (et à droite) des opérateurs différentiels linéaires à coefficients dans $\mathscr{O}$. Au système différentiel linéaire $\mathscr{R}(d)$ correspond une suite exacte de $\mathscr{D}$-modules à gauche

$$\mathcal{D}^{(n-1)d+n} \xrightarrow{\rho(d)} \mathcal{D}^{d} \to \mathcal{R}(d) := \mathcal{D}^{d}/\mathrm{Im}\rho(d) \to 0$$

où la matrice de $\rho(d)$ est

$$\rho(d) = \begin{bmatrix} X_{1,1} & & & X_{1,n-1} & & & \partial_1 & \cdots & \partial_n \\ & 0 & & & 0 & & & & \\ & \ddots & \cdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & & 0 & & & & & \\ & X_{d,1} & & & & X_{d,n-1} & \partial_1 & \cdots & \partial_n \end{bmatrix}$$

On note

$$\mathrm{Sol}\ \mathcal{R}(d) = \{(f_1,\cdots,f_d) \in \mathcal{O}^d \text{ vérifiant le système } \mathcal{R}(d)\}$$

le $\boldsymbol{C}$-espace vectoriel des solutions analytiques du système différentiel linéaire $\mathcal{R}(d)$. En appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(.,\mathcal{O})$ à la suite exacte précédente, on a l'identification

$$\mathrm{Sol}\mathcal{R}(d) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{R}(d),\mathcal{O})$$

où l'on considère $\mathcal{O} = \mathcal{D}/(\partial_1,\cdots,\partial_n)$ comme $\mathcal{D}$-module à gauche.

La proposition suivante permet de relier le $\boldsymbol{C}$-espace vectoriel Sol $\mathcal{R}(d)$ des solutions du système de la résonance associé au d-tissu $\mathcal{W}(d)$ de $(\boldsymbol{C}^n,0)$ et le $\boldsymbol{C}$-espace vectoriel $\mathcal{A}(d)$ des relations abéliennes de ce tissu:

Proposition 1. *On a une suite exacte de $\boldsymbol{C}$-espaces vectoriels*

$$0 \to \boldsymbol{C}^d \to \mathrm{Sol}\ \mathcal{R}(d) \xrightarrow{\theta} \mathcal{A}(d) \to 0$$

où l'application $\boldsymbol{C}$-linéaire θ est définie par

$$\theta\left[(f_i)_{1\le i\le d}\right] = (\alpha_i'(F_i))_{1\le i\le d} \quad si \quad f_i = \alpha_i(F_i).$$

Démonstration. D'après le théorème de Frobenius si $(f_i)_{1\le i\le d}$ est dans Sol $\mathcal{R}(d)$, alors $f_i = \alpha_i(F_i)$ où $\alpha_i \in \boldsymbol{C}\{t\}$ puisque $X_{i,j}(F_i) = 0$ pour $1 \le j \le n-1$ (on rappelle que les d feuilles du tissu $\mathcal{W}(d)$ sont les hypersurfaces de niveau d'éléments $F_i \in \mathcal{O}$ vérifiant $F_i(0) = 0$ et en position générale). Par définition du système $\mathcal{R}(d)$, on a

$$d\left(\sum_{i=1}^{d} f_i\right) = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i'(F_i)dF_i = 0;$$

autrement dit, $\theta\left[(f_i)_{1\le i\le d}\right] \in \mathcal{A}(d)$. L'application θ est surjective puisque

$$\theta\left[(\tilde{g}_i(F_i))_{1\le i\le d}\right] = (g_i(F_i))_{1\le i\le d}$$

pour toute primitive $\tilde{g}_i$ de $g_i \in \boldsymbol{C}\{t\}$ et son noyau est constitué des solutions constantes du système $\mathcal{R}(d)$. Ce qui démontre la proposition. □

Soit $\mathscr{W}(d+1)$ un $(d+1)$-tissu de $(\mathbf{C}^n,0)$ défini par les formes de Pfaff $\omega_1,\cdots,\omega_d$ et ω_{d+1} ; le d-tissu $\mathscr{W}(d)$ défini par les formes de Pfaff ω_i pour $1\le i\le d$ apparaît comme l'un des d-tissus extraits de $\mathscr{W}(d+1)$.

Avec les notations qui précèdent, on a un diagramme commutatif de $\mathscr{D}$-modules à gauche aux lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{D}^{n-1} \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\nu"] & \mathscr{D}^{(n-1)(d+1)+n} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\rho(d+1)"] & \mathscr{D}^{(n-1)d+n} \arrow[r] \arrow[d, "\rho(d)"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{D} \arrow[r, "\mu"] & \mathscr{D}^{d+1} \arrow[r, "\pi"] & \mathscr{D}^{d} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où $\quad \pi(A_1,\cdots,A_{d+1})=(A_1,\cdots,A_d)$,

$\mu(C)=(0,\cdots,0,C)$,

$p(P_1,\cdots,P_{(n+1)(d+1)+n})$

$=(P_1,\cdots,\hat{P}_{d+1},\cdots,\hat{P}_{2(d+1)},\cdots,\hat{P}_{(n-1)(d+1)},P_{(n-1)(d+1)+1},\cdots,P_{(n-1)(d+1)+n})$,

$m(P_{d+1},P_{2(d+1)},\cdots,P_{(n-1)(d+1)})$

$=(0,\cdots,0,P_{d+1},0,\cdots,0,P_{2(d+1)},0,\cdots,0,P_{(n-1)(d+1)},0,\cdots,0)$ et

$$\nu(Q_1,\cdots,Q_{n-1})=\sum_{j=1}^{n-1}Q_jX_{d+1,j}.$$

On note $\mathscr{R}(d+1)=\mathscr{D}^{d+1}/\operatorname{Im}\rho(d+1)$ le $\mathscr{D}$-module à gauche qui correspond au système différentiel de la résonance associé à $\mathscr{W}(d+1)$.

Pour $1\le i\le d+1$, on désigne par

$$\mathfrak{X}_i=(X_{i,1},\ldots,X_{i,n-1})$$

l'idéal à gauche de $\mathscr{D}$ *engendré par les champs de vecteurs* $X_{i,j}$ *de* χ *pour* $1\le j\le n-1$ (on rappelle que par définition $\omega_i(X_{i,j})=0$ pour $1\le i\le d+1$ et $1\le j\le n-1$).

Une conséquence du lemme dit du serpent est la proposition suivante qui permet de passer de $\mathscr{R}(d)$ à $\mathscr{R}(d+1)$, via un idéal à gauche de $\mathscr{D}$:

Proposition 2. *On a une suite exacte de* $\mathscr{D}$*-modules à gauche de type fini*

$$(1)\qquad 0\to \mathscr{D}\Big/\Big(\mathfrak{X}_{d+1},\bigcap_{i=1}^{d}\mathfrak{X}_i\Big)\to\mathscr{R}(d+1)\to\mathscr{R}(d)\to 0.$$

Démonstration. Le lemme du serpent appliqué au diagramme ci-dessus donne une suite exacte de $\mathscr{D}$-modules à gauche

$$\operatorname{Ker}\rho(d)\xrightarrow{\delta}\mathscr{D}/\operatorname{Im}\nu\xrightarrow{\bar{\mu}}\mathscr{R}(d+1)\xrightarrow{\bar{\pi}}\mathscr{R}(d)\to 0.$$

Par définition de δ, on vérifie que

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}\delta = \{P \text{ modulo } \operatorname{Im} \nu\ ;\ &\text{il existe } (P_k) \in D^{(n-1)(d+1)+n} \text{ tel que}\\
&P_1 X_{1,1} + \cdots + P_{(n-2)(d+1)+1} X_{1,n-1} + P_{(n-1)(d+1)+1}\partial_1 + \cdots + P_{(n-1)(d+1)+n}\partial_n = 0\\
&P_2 X_{2,1} + \cdots + P_{(n-2)(d+1)+2} X_{2,n-1} + \qquad \cdots \qquad = 0\\
&\vdots\\
&P_d X_{d,1} + \cdots + P_{(n-2)(d+1)+d} X_{d,n-1} + \qquad \cdots \qquad = 0\\
&P_{d+1} X_{d+1,1} + \cdots + P_{(n-1)(d+1)} X_{d+1,n-1} + \qquad \cdots \qquad = P\}.
\end{aligned}$$

Ce qui montre que l'on a

$$\operatorname{Im}\delta = \left(\mathfrak{X}_{d+1}, \bigcap_{i=1}^{d} \mathfrak{X}_i\right) \Big/ \mathfrak{X}_{d+1}$$

puisque par définition $\operatorname{Im}\nu = \mathfrak{X}_{d+1}$. Après identification, on obtient ainsi l'existence de la suite exacte (**1**). □

On note $\ell_{i,j} = \sigma(X_{i,j}) \in \mathscr{O}[\xi] = \mathscr{O}[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ le symbole du champ de vecteur $X_{i,j} \in \chi$ et l'on désigne par

$$\mathscr{G}(d) = \bigoplus_{k \geq 0} \mathscr{G}(d)_k := \mathscr{O}[\xi]^d / \operatorname{Im}\bar{\rho}(d)$$

le $\mathscr{O}[\xi]$ -module gradué de présentation finie défini par le conoyau du morphisme gradué de degré 1

$$\bar{\rho}(d) : \mathscr{O}[\xi]^{(n-1)d+n} \to \mathscr{O}[\xi]^d$$

où $\bar{\rho}(d)$ est la *matrice des symboles* de $\rho(d)$, c'est à dire

$$\bar{\rho}(d) = \begin{bmatrix} \ell_{1,1} & 0 & & \ell_{1,n-1} & 0 & \xi_1 & \cdots & \xi_n \\ & \ddots & \cdots & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & \ell_{d,1} & 0 & & \ell_{d,n-1} \ \xi_1 & \cdots & \xi_n \end{bmatrix}$$

Pour $1 \leq i \leq d+1$, on désigne par

$$\mathfrak{a}_i = (\ell_{i,1}, \cdots, \ell_{i,n-1})$$

l'idéal de $\mathscr{O}[\xi]$ *engendré par les formes linéaires* $\ell_{i,j} = \sigma(X_{i,j})$ *pour* $1 \leq j \leq n-1$; par définition, la variété des zéros de $\mathfrak{a}_i$ est la famille des droites de $\boldsymbol{C}^n$ paramétrée par $(\boldsymbol{C}^n, 0)$ et qui sont dirigées par les normales $\omega_i(z)$. Chaque idéal $\mathfrak{a}_i$ de $\mathscr{O}[\xi]$ est homogène et réduit (i.e. $\mathfrak{a}_i = \sqrt{\mathfrak{a}_i}$) puisque l'on peut supposer, à i fixé, que $\omega_i = dz_n$.

La construction de la suite exacte (**1**) de la proposition 2 pour les $\mathscr{R}(d)$ se laisse imiter pour les $\mathscr{G}(d)$ et l'on obtient une suite exacte de $\mathscr{O}[\xi]$-modules gradués de type fini

$$(2) \qquad 0 \to \mathcal{O}[\xi] \Big/ \Big(\mathfrak{a}_{d+1}, \bigcap_{i=1}^{d} \mathfrak{a}_i \Big) \to \mathcal{G}(d+1) \to \mathcal{G}(d) \to 0.$$

§2. Sur le Rang des Tissus; Majoration de Chern

On va étudier le rang d'un d-tissu $\mathcal{W}(d)$ de $(\mathbf{C}^n,0)$, essentiellement par récurrence sur d et grâce à la description algébro-géométrique de la variété caractéristique du $\mathcal{D}$-module $\mathcal{R}(d)$ associé à $\mathcal{W}(d)$.

Pour fixer la terminologie et les notations, on fait quelques rappels sur les objets usuels que la théorie des $\mathcal{D}$-modules associe au système différentiel linéaire $\mathcal{R}(d)$ (cf. par exemple [Bo], [M], [Ph]).

L'anneau gradué associé à la filtration de $\mathcal{D}$ par le degré des opérateurs est

$$\operatorname{gr} \mathcal{D} = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{D}_k / \mathcal{D}_{k-1} = \mathcal{O}[\xi]$$

où $\mathcal{D}_{-1} = 0$ et $\mathcal{D}_k$ est le $\mathbf{C}$-espace vectoriel des opérateurs différentiels linéaires d'ordre inférieur ou égal à k.

Via le morphisme $\rho(d)$, on obtient un $\mathcal{O}[\xi]$-module gradué de type fini

$$\operatorname{gr} \mathcal{R}(d) := \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{M}_k / \mathcal{M}_{k-1}$$

où $\mathcal{M}_{-1} = 0$ et $\mathcal{M}_k = \mathcal{D}_k^{\,d} / \operatorname{Im} \rho(d) \cap \mathcal{D}_k^{\,d}$. La racine de l'annulateur de $\operatorname{gr} \mathcal{R}(d)$ est un idéal homogène de $\mathcal{O}[\xi]$, indépendant de la présentation de $\mathcal{R}(d)$. Cet idéal définit un germe, à l'origine de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n$, d'ensemble analytique ξ-conique

$$\operatorname{car} \mathcal{R}(d) \subseteq (\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n, 0)$$

qu'on appelle la *variété caractéristique* du système $\mathcal{R}(d)$.

Si $\mathcal{G}$ est un $\mathcal{O}[\xi]$-module de type fini, on note mult $\mathcal{G}$ la *multiplicité* de $\mathcal{G}$ en $0 \in \mathbf{C}^{2n}$.

La multiplicité de $\operatorname{gr} \mathcal{R}(d)$ ne dépend pas de la présentation de $\mathcal{R}(d)$ et l'entier non nul défini par

$$\operatorname{mult} \mathcal{R}(d) := \operatorname{mult} \operatorname{gr} \mathcal{R}(d)$$

s'appelle la *multiplicité* du système $\mathcal{R}(d)$.

Pour $k \geq 0$ et après identification, on a un diagramme commutatif aux lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{D}_{k-2}^{(n-1)d+1} & \longrightarrow & \mathcal{D}_{k-1}^{(n-1)d+n} & \longrightarrow & \mathcal{O}[\xi]_{k-1}^{(n-1)d+n} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Big\downarrow {\scriptstyle \rho(d)_{k-1}} & & \Big\downarrow {\scriptstyle \rho(d)_k} & & \Big\downarrow {\scriptstyle \bar{\rho}(d)_k} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{D}_{k-1}^{d} & \longrightarrow & \mathcal{D}_{k}^{d} & \longrightarrow & \mathcal{O}[\xi]_{k}^{d} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

où $\rho(d)_k$ est induit par $\rho(d)$ et $\bar{\rho}(d)_k$ est induit par la matrice des symboles $\bar{\rho}(d)$ de $\rho(d)$.

Puisque Im $\rho(d)_k \subseteq \mathrm{Im}\, \rho(d) \cap \mathscr{D}_k^d$, le diagramme ci-dessus permet de définir pour $d \geq n \geq 2$ un *morphisme surjectif*

$$\varphi(d) : \mathscr{G}(d) \to \mathrm{gr}\, \mathscr{R}(d)$$

de $\mathscr{O}[\xi]$-modules gradués de type fini.

Remarque 1. En général $\varphi(d)$ n'est pas injectif, cependant c'est le cas si pour $1 \leq i \leq d$ et $1 \leq j \leq n-1$ les champs de vecteurs $X_{i,j}$ sont à coefficients constants; en effet, dans ce cas, on peut vérifier que

$$\mathrm{Im}\, \rho(d)_k = \mathrm{Im}\, \rho(d) \cap \mathscr{D}_k^d \quad \text{pour} \quad k \geq 0.$$

En particulier, $\varphi(n)$ est *toujours un isomorphisme* puisque dans ce cas, on peut supposer les $X_{i,j}$ à coefficients constants; en effet, dans cette situation, on peut supposer que $\omega_i = dz_i$ pour $1 \leq i \leq n$.

On désigne par $k = \left[\dfrac{d-1}{n-1}\right]$ le plus grand entier tel que $k \leq \dfrac{d-1}{n-1}$. Par définition du nombre de Castelnuovo $\pi(d,n)$ on a

$$\pi(d,n) = (d-n) + (d-2n+1) + \cdots + \left(d - \left[\frac{d-1}{n-1}\right]n + \left[\frac{d-1}{n-1}\right] - 1\right).$$

Le résultat crucial est le suivant:

Lemme. a) $\mathscr{R}(n)$ *et* $\mathscr{O}^n$ *sont* $\mathscr{D}$*-isomorphes* ; *de même,* $\mathscr{G}(n)$ *et* $\mathscr{O}^n$ *sont* $\mathscr{O}[\xi]$*-isomorphes* ;
b) car $\mathscr{R}(d) = (\boldsymbol{C}^n \times \{0\}, 0)$ *pour* $d \geq n \geq 2$.
c) mult $\mathscr{O}[\xi] \Big/ \left(\mathfrak{a}_{d+1}, \bigcap_{i=1}^{d} \mathfrak{a}_i\right) \leq \left[\dfrac{d-1}{n-1}\right] + 1$ *pour* $d \geq n \geq 2$.

Démonstration. a) On peut supposer que $\mathscr{W}(n)$ est défini par les formes de Pfaff $dz_1, \cdots, dz_n$; dans ce cas, on a

$$\rho(n) = \begin{bmatrix}
\partial_2 & & & & & \partial_n & & & & \partial_1 & \cdots & \partial_n \\
& \partial_1 & & 0 & & & \partial_n & & 0 & & & \\
& & \ddots & & \cdots & & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
0 & & & & & 0 & & & & & & \\
& & & \partial_1 & & & & & \partial_{n-1} & \partial_1 & \cdots & \partial_n
\end{bmatrix}$$

A partir de la suite exacte de $\mathscr{D}$-modules à gauche

$$\mathscr{D}^n \xrightarrow{[\partial_1, \cdots, \partial_n]} \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{O} \longrightarrow 0,$$

on peut construire un diagramme commutatif de $\mathscr{D}$-modules à gauche aux lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathscr{D}^{n^2} & \xrightarrow{\rho(n)} & \mathscr{D}^n & \longrightarrow & \mathscr{R}(n) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow M & & \downarrow id & & & & \\
\mathscr{D}^{n^2} & \xrightarrow{H} & \mathscr{D}^n & \longrightarrow & \mathscr{O}^n & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

où

$$H = \begin{bmatrix} \partial_1 & \cdots & \partial_n & 0 & & & 0 \\ & 0 & & \partial_1 & \cdots & \partial_n & \vdots \\ & & & 0 & & \ddots & 0 \\ & \vdots & & \vdots & & \partial_1 & \cdots \ \partial_n \end{bmatrix}$$

et la matrice de M est constituée de 0 et 1. On vérifie que det M est inversible dans $\mathscr{O}$, ce qui prouve que $\mathscr{R}(n)$ et $\mathscr{O}^n$ sont $\mathscr{D}$-isomorphes. On peut faire de même pour $\mathscr{G}(n)$ et $\mathscr{O}^n$ ou utiliser la remarque 1 avec $\varphi(n)$.
b) D'après le théorème des zéros de Hilbert, on a

$$\bigcap_{i=1}^{d} \mathfrak{a}_i = \{P \in \mathscr{O}[\xi]; P(z;\omega_i(z)) = 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq d\}$$

où les $\omega_i(z)$ sont les normales du tissu $\mathscr{W}(d)$. D'après l'hypothèse de position générale, la normale $\omega_{d+1}(z)$ ne peut être l'une des $\omega_i(z)$ pour $1 \leq i \leq d$, ce qui montre que l'on a

$$\sqrt{(\mathfrak{a}_{d+1}, \bigcap_{i=1}^{d} \mathfrak{a}_i)} = (\xi_1, \cdots, \xi_n).$$

Par récurrence sur d, la suite exacte (2) des $\mathscr{G}(d)$ du §1 et la propriété a) ci-dessus montrent que l'on a

$$\sqrt{\operatorname{Ann} \mathscr{G}(d)} = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \text{ pour } d \geq n \geq 2.$$

Pour $d \geq n \geq 2$, le morphisme surjectif $\varphi(d)$ donne l'inclusion suivante:

$$\operatorname{Ann} \mathscr{G}(d) \subseteq \operatorname{Ann} \operatorname{gr} \mathscr{R}(d),$$

et la suite exacte (1) des $\mathscr{R}(d)$ de la proposition 2 montre que l'on a

$$\operatorname{car} \mathscr{R}(d+1) = \operatorname{car} \mathscr{R}(d) \bigcup \operatorname{car} \mathscr{D} \Big/ \left(\mathfrak{X}_{d+1}, \bigcap_{i=1}^{d} \mathfrak{X}_i \right).$$

Or, par définition, la variété caractéristique de $\mathscr{D} \Big/ \left(\mathfrak{X}_{d+1}, \bigcap_{i=1}^{d} \mathfrak{X}_i \right)$ contient la section nulle (i.e. $(\boldsymbol{C}^n \times \{0\}, 0)$), ce qui prouve d'après ce qui précède que l'on a

$$\operatorname{car} \mathscr{R}(d) = (\boldsymbol{C}^n \times \{0\}, 0) \text{ pour } d \geq n \geq 2.$$

c) Pour $d \geq n \geq 2$, on peut supposer que $\omega_{d+1} = dz_n$ et alors

$$\left(\mathfrak{a}_{d+1}, \bigcap_{i=1}^{d} \mathfrak{a}_i\right) = (\xi_1, \cdots, \xi_{n-1}, P_1(z;\xi), \cdots, P_q(z;\xi))$$

où les P_k sont des polynômes homogènes de $\mathcal{O}[\xi]$. Par platitude générique et d'après le début de la partie b) ci-dessus, on a

$$\operatorname{mult} \mathcal{O}[\xi] \Big/ \left(\mathfrak{a}_{d+1}, \bigcap_{i=1}^{d} \mathfrak{a}_i\right)$$

$$= \inf \deg P \text{ où } \left\{ \begin{array}{l} P \text{ est un polynôme homogéne de } \mathcal{O}[\xi] \text{ tel} \\ \text{que } P(z;\omega_i(z)) = 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq d \\ \text{et } P(z;\omega_{d+1}(z)) \neq 0 \text{ avec } z \text{ générique} \end{array} \right\}.$$

On peut regrouper les normales ω_i de $\mathcal{W}(d+1)$ de la manière suivante:

$$\omega_{d+1}\ ;\ \underbrace{\omega_i, \cdots, \omega_{n-1}}_{1}\ ;\ \underbrace{\omega_n, \cdots, \omega_{2n-2}}_{2}\ ; \cdots$$

$$\underbrace{;\ \omega_{\left(\left[\frac{d-1}{n-1}\right]-1\right)(n-1)+1}, \cdots, \omega_{\left[\frac{d-1}{n-1}\right](n-1)}}_{\left[\frac{d-1}{n-1}\right]} ; \omega_{\left(\left[\frac{d-1}{n-1}\right]\right)(n-1)+1}, \cdots, \omega_d.$$

D'après l'hypothèse de position générale, les paquets de $(n-1)$ points déterminent des familles d'hyperplans $H_1, \cdots, H_{\left[\frac{d-1}{n-1}\right]}$ de C^n et l'on peut trouver une famille d'hyperplans $H_{\left[\frac{d-1}{n-1}\right]+1}$ de C^n contenant les points $\omega_{\left[\frac{d-1}{n-1}\right](n-1)+1}, \cdots, \omega_d$ et telles que, pour ces familles d'hyperplans, on ait

$$H_j(z;\omega_{d+1}(z)) \neq 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leq j \leq \left[\frac{d-1}{n-1}\right] + 1.$$

Le polynôme homogène de $\mathcal{O}[\xi]$ de degré $\left[\frac{d-1}{n-1}\right]+1$ défini par

$$P = \prod_{1 \leq j \leq \left[\frac{d-1}{n-1}\right]+1} H_j$$

s'annule en $\omega_1(z), \cdots, \omega_d(z)$ et ne s'annule pas en $\omega_{d+1}(z)$ par construction. Ce qui prouve la majoration c) et achève la démonstration du lemme. □

Grâce à des résultats de base de la théorie des $\mathcal{D}$-modules et par récurrence sur d, on obtient les propriétés suivantes en utilisant le lemme précédent, la suite exacte (**1**) (resp. (**2**)) des $\mathcal{R}(d)$ (resp. $\mathcal{S}(d)$) du §1 et de nouveau le morphisme surjectif $\varphi(d)$:

Théorème. *Pour* $d \geq n \geq 2$, *on a les propriétés suivantes*:

1) *$\mathscr{R}(d)$ et $\mathcal{O}^{\text{mult}\,\mathscr{R}(d)}$ sont $\mathscr{D}$-isomorphes; en particulier,* $\dim_{\mathbb{C}}$ Sol $\mathscr{R}(d)$ *et* rg $\mathscr{V}(d)$ *sont finis et l'on a*

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Sol}\, \mathscr{R}(d) = \text{mult}\, \mathscr{R}(d) = \text{rg}\, \mathscr{V}(d) + d\,;$$

2) $\text{rg}\, \mathscr{V}(d+1) + 1 = \text{rg}\, \mathscr{W}(d) + \text{mult}\, \mathscr{D} \Big/ \left(\mathfrak{X}_{d+1}, \bigcap_{i=1}^{d} \mathfrak{X}_i \right)$

3) $0 \leq \text{rg}\, \mathscr{V}(d) \leq \pi(d,n)$ *(i.e. la majoration de Chern).*

Démonstration. 1) D'après le lemme (propriété b)), le $\mathscr{D}$-module $\mathscr{R}(d)$ est un $\mathcal{O}$-module libre de type fini (cf. par exemple [Bo], [Ph]); ainsi $\mathscr{R}(d)$ et $\mathcal{O}^{\text{mult}\,\mathscr{R}(d)}$ sont $\mathscr{D}$-isomorphes pour $d \geq n \geq 2$. D'après la proposition 1, on a les identifications

$$\begin{aligned} \mathscr{A}(d) \oplus \mathbb{C}^d &= \text{Sol}\, \mathscr{R}(d) = \text{Hom}_{\mathscr{D}}(\mathscr{R}(d), \mathcal{O}) \\ &= \text{Hom}_{\mathscr{D}}(\mathcal{O}^{\text{mult}\,\mathscr{R}(d)}, \mathcal{O}) = \mathbb{C}^{\text{mult}\,\mathscr{R}(d)} \end{aligned}$$

puisque

$$\text{Hom}_{\mathscr{D}}(\mathcal{O}, \mathcal{O}) = \text{Hom}_{\mathscr{D}}(\mathscr{D}/(\partial_1, \cdots, \partial_n), \mathcal{O}) = \mathbb{C}.$$

En particulier, $\dim_{\mathbb{C}}$ Sol $\mathscr{R}(d)$ et rg $\mathscr{V}(d)$ sont finis et l'on a les relations indiquées dans la partie 1).

2) D'après le lemme (propriété b)), tous les $\mathscr{D}$-modules de la suite exacte (1) des $\mathscr{R}(d)$ de la proposition 2 ont pour variété caractéristique $(\mathbb{C}^n \times \{0\}, 0)$. Il suffit alors d'utiliser la propriété d'additivité des multiplicités (cf. par exemple [Bo], [M]) et les relations indiquées dans la propriété 1) ci-dessus.

3) Pour $d \geq n \geq 2$, le morphisme surjectif $\varphi(d)$ et la propriété 1) ci-dessus montrent que l'on a les relations suivantes:

$$\text{rg}\, \mathscr{V}(d) + d = \text{mult}\, \mathscr{R}(d) \leq \text{mult}\, \mathscr{G}(d).$$

D'après la suite exacte (2) des $\mathscr{G}(d)$ du §1 et le lemme (propriété c)), on a, par additivité des multiplicités, les inégalités suivantes:

$$\text{mult}\, \mathscr{G}(d+1) \leq \text{mult}\, \mathscr{G}(d) + \left[\frac{d-1}{n-1} \right] + 1.$$

Par définition du nombre de Castelnuovo $\pi(d,n)$, on vérifie que

$$\pi(d,n) + \left[\frac{d-1}{n-1} \right] = \pi(d+1,n).$$

Ce qui précède permet d'obtenir, par récurrence sur d, les inégalités suivantes:

$$\text{mult}\, \mathscr{G}(d) \leq \pi(d,n) + d\,,$$

d'où la majoration de Chern

$$\text{rg}\, \mathscr{V}(d) \leq \pi(d,n).$$

Ce qui démontre le théorème. □

Remarque 2. La démonstration originale de S. S. Chern [C1] et les améliorations récentes dues à S. S. Chern et P. A. Griffiths [C-G], et R. L. Bryant [Br] utilisent toujours une idée de H. Poincaré [P], et non pas une récurrence sur d. La méthode de Chern-Poincaré est basée sur l'étude de la géométrie des plans osculateurs de germes de courbes analytiques déterminés par $\mathscr{A}(d)$ et tracés dans l'espace projectif associé à $\mathscr{A}(d)$; on sait que cette étude (cf. par exemple [C-G], [H2]) joue un rôle décisif dans le problème de la linéarisation des tissus de rang maximal.

Remarque 3. On sait que la majoration de Chern est *optimale* (cf. par exemple la fin du §3). On a $\pi(d,2)=\frac{1}{2}(d-1)(d-2)$. Ainsi $\pi(d,2)$ est le genre arithmétique d'une courbe algébrique réduite C de $\boldsymbol{P}^2$ dont le degré est d; en particulier, d'après le théorème d'Abel, le tissu linéaire $\mathscr{L}_C$ de $(\check{\boldsymbol{P}}^2,H)$ associé à C (cf. §0) est de rang maximal.

Remarque 4. La propriété 2) du théorème ci-dessus montre que, via l'étude des $\mathscr{D}$-modules

$$\mathscr{D}/(\mathfrak{X}_{k+1},\bigcap_{i=1}^{k}\mathfrak{X}_i),$$

le rang d'un d-tissu de $(\boldsymbol{C}^n,0)$ est décrit, de proche en proche, par ses tissus extraits.

Remarque 5. Les méthodes précédentes jointes aux résultats récents sur les $\mathscr{D}$-modules ouvrent la voie pour l'étude des tissus avec singularités. En effet, on peut étudier des systèmes différentiels du type $\mathscr{M}(d)$, même si les champs de vecteurs présentent des singularités, et dans le cas holonome décrire le *cycle caractéristique* du système $\mathscr{M}(d)$ et évaluer en z son *indice*

$$\chi_z(\mathscr{M}(d))=\sum_{i\geq 0}(-1)^i\dim_C \mathrm{Ext}^i_{\mathscr{D}}(\mathscr{M}(d),\mathscr{O})_z$$

(dans le cas non singulier, $\mathscr{M}(d)$ est une connexion intégrable et les solutions "supérieures" n'interviennent pas: $\chi_z(\mathscr{M}(d))=\mathrm{rg}_z\,\mathscr{W}(d)+d$ d'après la propriété 1) du théorème précédent où $(\mathscr{W}(d),z)$ est le d-tissu de $(\boldsymbol{C}^n,z)$ sous-jacent).

Exemple. Dans $\boldsymbol{C}^2$ muni des coordonnées (x,y), les 3 champs de vecteurs ∂_x,∂_y et $x\partial_x+y\partial_y$ déterminent un 3-tissu $\mathscr{W}(3)$ de $\boldsymbol{C}^2$ dont le *lieu singulier* est Sing $\mathscr{W}(3)=\{xy=0\}$. On désigne par $\mathscr{M}(3)$ le $\mathscr{D}$-module dont la présentation est donnée par la matrice suivante:

$$\begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 & \partial_x & \partial_y \\ 0 & \partial_y & 0 & \partial_x & \partial_y \\ 0 & 0 & x\partial_x + y\partial_y & \partial_x & \partial_y \end{bmatrix}$$

En utilisant la suite exacte (1) des $\mathscr{R}(d)$ du §1, on peut montrer que le cycle caractéristique de $\mathscr{R}(3)$ est

$$[\operatorname{car} \mathscr{R}(3)] = 4.T_{C^2}C^2 + 1.T^*_{\{x=0\}}C^2 + 1.T^*_{\{y=0\}}C^2 .$$

D'après la formule de l'indice de Kashiwara [K], on obtient

$$\chi_z(\mathscr{R}(3)) = \begin{cases} 4 \text{ si } z \notin \operatorname{Sing} \mathscr{W}(3) \\ 3 \text{ si } z \in \operatorname{Sing} \mathscr{W}(3) - \{(0,0)\} \\ 2 \text{ si } z = (0,0) \end{cases}$$

et l'on retrouve en particulier que $\operatorname{rg}_z \mathscr{W}(3) = 1$ pour $z \notin \operatorname{Sing} \mathscr{W}(3)$ (ce que l'on savait déjà puisque $\partial_x \partial_y (\operatorname{Log} \frac{x}{y}) = 0$, cf. par exemple [H1]).

§3. Tissus et Courbes Rationnelles Normales

Soit $\mathscr{W}(d)$ un d-tissu de $(C^n,0)$ de formes de Pfaff ω_i pour $1 \leq i \leq d$. Avec les notations qui précèdent, pour z voisin de $0 \in C^n$, la fonction

$$z \rightsquigarrow \dim_C \mathcal{O}[\xi]/(\mathfrak{a}_{k+1}, \bigcap_{i=1}^{k} \mathfrak{a}_i) \otimes_{\mathcal{O}} C_z$$

est semi-continue où $C_z = \mathcal{O}/(z_1, \cdots, z_n)$; si $\mathscr{W}(d)$ est de rang maximal (i.e. $\operatorname{rg} \mathscr{W}(d) = \pi(d,n)$), alors d'après les résultats du §2, la fonction ci-dessus est constante et égale à $\left[\frac{k-1}{n-1}\right] + 1$.

Remarque 6. Pour $n = 2$ et $\mathscr{W}(d)$ de rang quelconque, la fonction ci-dessus est toujours constante et égale à k. En effet, grâce à l'hypothèse de position générale, on peut vérifier (cf. par exemple [H1]) que pour $n = 2$, on a

$$\left(\mathfrak{a}_{k+1}, \bigcap_{i=1}^{k} \mathfrak{a}_i\right) = \left(\ell_{k+1}, \prod_{i=1}^{k} \ell_i\right) \subseteq \mathcal{O}[\xi]$$

où les ℓ_i sont les symboles des champs de vecteurs $X_i \in \chi$ associés à $\mathscr{W}(d)$ (i.e. $\omega_i(X_i) = 0$). Ce qui montre que pour $n = 2$ et $\mathscr{W}(d)$ de rang quelconque, $\mathcal{O}[\xi] \Big/ \left(\mathfrak{a}_{k+1}, \bigcap_{i=1}^{k} \mathfrak{a}_i\right)$ est *toujours* $\mathcal{O}[\xi]$-isomorphe à $\mathcal{O}^k$.

Soit $\mathcal{W}(d)$ un d-tissu de $(C^n,0)$ dont le rang est *maximal*. D'après ce qui précède et par symétrie, pour $2 \le n \le k \le d-1$, et pour z fixé et voisin de $0 \in C^n$, on a *nécessairement* pour $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_{k+1} \le d$ l'égalité suivante:

$$(*)\qquad \left[\frac{k-1}{n-1}\right]+1 = \inf \deg P \text{ où } \left\{\begin{array}{l} P \text{ est un polynôme homogéne de } \mathcal{O}[\xi] \text{ tel} \\ \text{que } P(z;\omega_{i_1}(z)) = \cdots = P(z;\omega_{i_k}(z)) = 0 \\ \text{et } P(z;\omega_{i_{k+1}}(z)) \neq 0 \end{array}\right\}.$$

En particulier, à z fixé et voisin de $0 \in C^n$, on a la propriété (q) suivante pour tout d-tissu $\mathcal{W}(d)$ de $(C^n,0)$ dont le rang est maximal:

(q) *Pour $n \ge 3$ une quadrique de P^{n-1} contient toutes les normales $\omega_i(z)$ de $\mathcal{W}(d)$ si elle en contient seulement $2n-1$.*

En fait, la propriété (q) est vraie pour $d \ge 2n$ dès que

$$\operatorname{rg} \mathcal{W}(d) \ge \pi(d-1,n)+2.$$

En effet, d'après le §2 et l'hypothèse de position générale, on a dans ce cas

$$\pi(d-1,n)+2+d \le \operatorname{rg} \mathcal{W}(d)+d \le \sum_{j=2n}^{d} m(j)+2(n-1)+n$$

où $m(j) = \operatorname{mult} \mathcal{O}[\xi]\Big/\left(\mathfrak{a}_j, \bigcap_{i=1}^{j-1}\mathfrak{a}_i\right)$ et puisque $m(j) = 2$ pour $n+1 \le j \le 2n-1$. Or

$$\sum_{j=2n}^{d} m(j)+2(n-1)+n \le m(d)+\pi(d-1,n)+d-1,$$

ce qui impose par symétrie que l'on ait $m(j) \ge 3$ pour $2n \le j \le d$, d'où le résultat par semi-continuité.

D'après ce qui précède et grâce au lemme de Castelnuovo sur les configurations de points de P^{n-1} (cf. par exemple [G-H]), on obtient une nouvelle démonstration du résultat non publié de R. L. Bryant [Br] suivant:

Proposition 3. *Soient $n \ge 3$, $d \ge 2n+1$ et $\mathcal{W}(d)$ un d-tissu de $(C^n,0)$ dont le rang vérifie l'inégalité suivante*:

$$\operatorname{rg} \mathcal{W}(d) \ge \pi(d-1,n)+2$$

($\mathcal{W}(d)$ n'est pas nécessairement de rang maximal $\pi(d,n)$ sauf si $2n+1 \le d \le 3n-2$). Alors, à z fixé et voisin de $0 \in C^n$, les normales $\omega_i(z)$ de $\mathcal{W}(d)$ appartiennent pour $1 \le i \le d$ à une unique courbe rationnelle normale $D(z)$ de P^{n-1}.

Remarque 7. Dans [C-G], S. S. Chern et P. A. Griffiths s'intéressent essentiellement à la linéarisation des tissus de rang maximal et ne démontrent la proposition ci-dessus que dans le cas où $\mathrm{rg}\,\mathcal{W}'(d)$ est maximal; l'existence d'une famille de courbes rationnelles normales de $\mathbb{P}^{n-1}$ contenant les normales $\omega_i(z)$ est fondamentale dans leur étude. L'amélioration obtenue ici est optimale puisqu'on ne peut avoir la conclusion de la proposition précédente en supposant seulement que $\mathrm{rg}\,\mathcal{W}(d) \geq \pi(d-1,n)+1$ (prendre avec R. L. Bryant [Br] un $(d-1)$-tissu de $(\mathbb{C}^n,0)$ de rang maximal $\pi(d-1,n)$ et de formes de Pfaff ω_i pour $1 \leq i \leq d-1$, puis le compléter en un d-tissu $\mathcal{W}(d)$ de $(\mathbb{C}^n,0)$ par la famille de feuilles définies par la forme de Pfaff $\omega_d = \lambda_1\omega_1 + \cdots + \lambda_n\omega_n$ avec des constantes génériques λ_i).

On notera également que pour $d = 2n \geq 6$, la propriété (q) est vraie si $\mathcal{W}'(2n)$ est de rang maximal puisque

$$\mathrm{rg}\,\mathcal{W}'(2n) = \pi(2n,n) = n+1 = \pi(2n-1,n)+2\,.$$

Cependant, les normales en z d'un tel $\mathcal{W}(2n)$ qui est linéarisable d'après un résultat de Poincaré [P] ne sont pas nécessairement sur une courbe rationnelle normale $D(z)$ de $\mathbb{P}^{n-1}$ sauf si $n = 3$ (prendre une intersection complète lisse C de 3 quadriques de $\mathbb{P}^4$ et son 8-tissu linéaire $\mathcal{L}_C$ de $(\check{\mathbb{P}}^4,0)$ associé: C est une courbe canonique et $\mathcal{L}_C$ vérifie $\mathrm{rg}\,\mathcal{L}_C = \pi(8,4) = 5 = \pi(7,4)+2$, les normales en $z = \mathbb{P}^3$ de $\mathcal{L}_C$ correspondent à la section hyperplane $C \cap \mathbb{P}^3$ et ne sont pas sur une courbe rationnelle normale de $\mathbb{P}^3$).

On rappelle qu'une courbe rationnelle normale D de $\mathbb{P}^{n-1}$ est une courbe algébrique projective de $\mathbb{P}^{n-1}$ qui, à un automorphisme linéaire près de $\mathbb{P}^{n-1}$, est paramétrée par

$$t \rightsquigarrow [1,t,t^2,\cdots,t^{n-1}];$$

c'est une courbe algébrique lisse de $\mathbb{P}^{n-1}$ qui pour $n \geq 3$ est non dégénérée (i.e. D n'est pas contenue dans un hyperplan de $\mathbb{P}^{n-1}$) et de degré minimal, à savoir $\deg D = n-1$. De plus, on sait que par $(n+2)$ points de $\mathbb{P}^{n-1}$ en position générale il passe une unique courbe rationnelle normale de $\mathbb{P}^{n-1}$ (cf. par exemple [G-H]).

Soit D une courbe rationnelle normale de $\mathbb{P}^{n-1}$. Un déterminant de Vandermonde montre que $d \geq n \geq 2$ points distincts de D sont en position générale; de plus, on peut vérifier qu'une hypersurface de degré ℓ de $\mathbb{P}^{n-1}$ contient D si et seulement si, elle contient $(n-1)\ell+1$ points distincts de D. En particulier,

> (k + 1) *points pris parmi $d \geq n \geq 2$ points distincts de D vérifient l'égalité correspondante à* $(*)$.

Soient D une courbe rationnelle normale de $\mathbb{P}^{n-1}$ ($D = \mathbb{P}^1$ si $n = 2$) et $d \geq n \geq 2$ points distincts ω_i de D (automatiquement en position générale). On note $\mathcal{L}(D;\omega_1,\cdots,\omega_d)$ *le d-tissu linéaire de* $(\mathbb{C}^n,0)$ *dont les normales sont les* ω_i; les feuilles de $\mathscr{L}(D;\omega_1,\cdots,\omega_d)$ sont constituées d'hyperplans parallèles et les champs de vecteurs associés à $\mathscr{L}(D;\omega_1,\cdots,\omega_d)$ sont à coefficients constants. En fait, $\mathscr{L}(D;\omega_1,\cdots,\omega_d)$ est associé, par dualité (cf. §0), à la courbe algébrique de P^n constituée par la réunion des droites C_i où les points de C_i correspondent aux hyperplans dont la direction normale est ω_i.

Proposition 4. *Pour $d \geq n \geq 2$, le d-tissu linéaire $\mathscr{L}(D;\omega_1,\cdots,\omega_d)$ de $(C^n,0)$ est de rang maximal $\pi(d,n)$. En particulier, la majoration de Chern est optimale.*

Démonstration. Puisque les champs de vecteurs associés à $\mathscr{L}(D;\omega_1,\cdots,\omega_d) = \mathscr{L}$ sont à coefficients constants, le morphisme $\varphi(d)$ est bijectif (cf. remarque 1), d'où

$$\text{mult } \mathscr{R}_{\mathscr{L}}(d) = \text{mult } \mathscr{G}_{\mathscr{L}}(d).$$

Par construction, les ω_i vérifient $(*)$ et la suite exacte (**2**) des $\mathscr{G}_{\mathscr{L}}(d)$ du §1 montre que

$$\text{mult } \mathscr{G}_{\mathscr{L}}(d) = \pi(d,n) + d.$$

D'après le théorème (propriété 1)), on a

$$\text{rg } \mathscr{L} = \pi(d,n),$$

ce qui prouve la proposition. □

Bibliographie

[B-B] Blaschke, W. und Bol, G., *Geometrie der Gewebe*, Springer, Berlin, 1938.

[B] Bol, G., Über ein bemerkenswertes Fünfgewebe in der Ebene, *Abh. Hamburg*, **11** (1936), 387–393.

[Bo] Borel, A. et al., *Algebraic $\mathscr{D}$-modules*, Perspect. Math. **2**, Academic Press, Boston, 1987.

[Br] Bryant, R.L., *Notes on the Paper "Abel's Theorem and Webs" by S. S. Chern and P. A. Griffiths* (référence [C-G] ci-dessous). Non publié.

[B-C-G-G-G] Bryant, R.L., Chern, S.S., Gardner, R.B., Goldsmith, H.L. and Griffiths, P.A., *Exterior Differential Systems*, Springer-Verlag, New-York, 1991.

[Ca] Castelnuovo, G., Ricerche di Geometria sulle curve algebriche, Atti R. Accad. Sci. Torino, **24** (1889), 346–373.

[C1] Chern, S.S., Abzählungen für Gewebe, Abh. Hamburg, **11** (1936), 163–170.

[C2] ———, Web Geometry, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **6** (1982) 1–8.

[C-G] Chern, S.S. and Griffiths, P.A., Abel's Theorem and Webs, *Jahresber. Deut. Math. Ver.*, **80** (1978), 13–110.

[G1] Griffiths, P.A., Variations on a Theorem of Abel, *Invent. Math.*, **35** (1976), 321–390.

[G2] ———, On Abel's Differential Equations, Algebraic Geometry, The Johns Hopkins Centennial Lectures, Ed. by J.-I. Igusa (1977), 26–51.

[G-H] Griffiths, P.A. and Harris, J., *Principles of Algebraic Geometry*, John Wiley & Sons, New-York, 1978.

[H1] Hénaut, A., $\mathscr{D}$-modules et géométrie des tissus de C^2, *Math. Scand.*, **66** (1990), 161–172.

[H2] Hénaut, A., Caractérisation des tissus de C^2 dont le rang est maximal et qui sont linéarisables, *Compositio Math.*, **94** (1994), 247–268.

[J-M-R] Joly, J.-L., Métivier, G. and Rauch, J., Resonant one dimensional nonlinear geometric optics, *J. Funct. Anal.*, **114** (1993), 106–231.

[K] Kashiwara, M., Index Theorem for a Maximally Overdetermined System of Linear Differential Equations, *Proc. Japan Acad.*, **49** (1973), 803–804.

[M] Malgrange, B., *Séminaire Opérateurs Différentiels*, Prépublication Institut Fourier, Grenoble, 1975.

[Ph] Pham, F., *Singularités des systèmes de Gauss-Manin*, Progr. Math., **2**, Birkhaüser, Boston, 1980.

[P] Poincaré, H., Sur les surfaces de translation et les fonctions abéliennes, *Bull. Soc. Math. France*, **29** (1901), 61–86.