Publ. RIMS, Kyoto Univ.
34 (1998), 123-134

Espaces Conormaux Relatifs II
Modules Différentiels

par

Hélène BIOSCA*, Joël BRIANCON*, Philippe MAISONOBE* et Hélène MAYNADIER*

Introduction

Soit $f = (f_1,...,f_p)$ p fonctions holomorphes définies sur une variété analytique complexe lisse X. A f on peut associer un module sur $\mathscr{D}_X$, l'anneau des opérateurs différentiels:

$$\mathscr{D}_X f_1^{s_1}...f_p^{s_p}$$

et un $\mathscr{D}_X[s_1,...,s_p]$-module:

$$\mathscr{D}_X[s_1,...,s_p]f_1^{s_1}...f_p^{s_p}$$

Nous montrons comment l'on déduit d'un théorème de C. Sabbah [Sab 2] la variété caractéristique de ces modules. Ce type de résultat apparait dans un article fondamental de T. Kawai et M. Kashiwara [K. K] en vue de l'étude de distributions holonomes liées à $(f_1,...,f_p)$. Nous en déduisons que deux germes d'applications f, g de $\mathbb{C}^n$, 0 dans $\mathbb{C}^p$, 0 sont $\mathscr{L}$ équivalents (c'est à dire: il existe un difféomorphisme local ϕ tel que $f = \phi \circ g$) si et seulement si f^s et g^s ont le même annulateur sur $\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n 0}$. En profitant d'une idée que nous a donné M. Merle, nous calculons cet annulateur lorsque $(f_1,...,f_p)$ définit une intersection complète à singularité isolée. Enfin, nous étudions suivant la démarche de C. Sabbah [Sab 3] le cas particulier où $(f_1,...,f_p)$ est sans éclatement en codimension zéro avec un lieu critique contenu dans la réunion des zéros des fonctions $f_1,...,f_p$. Nous donnons dans ce cas des équations fonctionnelles très particulières verifiées par $f_1^{s_1}\cdots f_p^{s_p}$.

Dans la description des variétés caractéristiques des systèmes différentiels étudiés, les espaces conormaux relatifs aux morphismes jouent un rôle

---

Communicated by M. Kashiwara, May 13, 1997. Revised September 22, 1997.
1991 Mathematics Subject Classification(s). 14E40, 32C38, 32Sxx
*Unité Mixte de Recherche du CNRS 6621, Université de Nice Sophia Antipolis, Parc Valrose, F-06108 Nice cedex 2, France.

essentiel. D'abord cette description suggère des problèmes géométriques étudiés par J. Briançon dans [B]. Ensuite notre travail permet de préciser la forme de certaines équations fonctionnelles, ce qui a des applications à l'étude des croissances de distributions naturelles liées au morphisme f, au prolongement méromorphe d'intégrales sur la fibre de f, au prolongement méromorphe de séries de Dirichlet. Enfin, ces systèmes différentiels doivent jouer un rôle essentiel dans la généralisation à un morphisme de la théorie des cycles évanescents pour les systèmes différentiels holonomes (voir C. Sabbah [Sab 1], [Sab 2], [Sab 4]).

1. La Variété Caractéristique de $\mathcal{D}_X f_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}$ et de $\mathcal{D}_X[s_1,\dots,s_p]f_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}$

Soient X une variété analytique complexe lisse connexe de dimension n, $\mathcal{O}_X$ son faisceau structural, $\mathcal{D}_X$ le faisceau des opérateurs différentiels sur X, T^*X le fibré cotangent à X. Soit:

$$f\colon X \to \mathbf{C}^p \quad x \mapsto (f_1(x),\dots,f_p(x))$$

une application holomorphe. On supposera que les fonctions f_j ne sont pas constantes.

On considère: $\mathcal{L}=\mathcal{O}_X[1/f_1\dots f_p]\,[s_1,\dots,s_p]f_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}$ un module libre de rang 1 sur $\mathcal{O}_X[1/f_1\dots f_p]\,[s_1,\dots,s_p]$ engendré par une section notée $f_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}$. On munit $\mathcal{L}$ d'une structure de $\mathcal{D}_X[s_1,\dots,s_p]$-module en posant, dans un système de coordonnées locales:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(a(x,s)f_1^{s_1}\dots f_p^{s_p})=\frac{\partial a}{\partial x_i}(x,s)f_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}+a(x,s)\sum_{j=1}^{p}s_j\frac{1}{f_j}\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)f_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}.$$

$\mathcal{D}_X f_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}$ (resp. $\mathcal{D}_X[s_1,\dots,s_p]\,f_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}$) est le sous $\mathcal{D}_X$-module (resp. $\mathcal{D}_X[s_1,\dots,s_p]$ module) de $\mathcal{L}$ engendré par $f_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}$.

1.1 La variété caractéristique de $\mathcal{D}_X f_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}$

Rappelons la définition:

Définition 1. *On appelle espace conormal relatif à l'application f l'adhérence dans T^*X de*:

$$\{(x,\xi)\in T_x^*X;\ x\in\Omega,\ \xi \text{ nul sur } T_x f^{-1}(f(x))\}$$

où Ω est l'ensemble des points de X où l'application linéaire tangente à f est de rang maximum. On note cet ensemble W_f.

Théorème 1. *$\mathcal{D}_X f_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}$ est $\mathcal{D}_X$-cohérent et sa variété caractéristique est l'espace conormal relatif à l'application f.*

Preuve de la cohérence: Dans le cas $p=1$, on pourra se reporter à la preuve de Kashiwara ([K] page 49 lemme 5.8 ou [G, M] page 153 proposition 31). Ici encore, on vérifie que $\mathcal{D}_X(k)\ f_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}$ est une bonne filtration de $\mathcal{D}_X f_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}$

où $\mathscr{D}_X(k)$ est la filtration canonique de $\mathscr{D}_X$ par le degré des opérateurs.

Calcul de la variété caractéristique: il suffit de faire ce calcul au voisinage d'un point x_0 de X. Lorsque l'on remplace f par $f-f(x_0)$, le $\mathscr{D}_X$-module obtenu $\mathscr{D}_X(f_1-f_1(x_0))^{s_1}\dots(f_p-f_p(x_0))^{s_p}$ est isomorphe au précédent et on peut donc supposer $f(x_0)=0$. Choisissons un système de coordonnées locales:

$$x=(x_1,\dots,x_n)\mapsto(t_1=f_1(x),\dots,t_p=f_p(x)) \text{ et } f(0)=0.$$

Suivant le procédé détaillé par B. Malgrange [Mal 1], munissons $\mathscr{L}_0$, la fibre à l'origine de $\mathscr{L}$ d'une structure de $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n\times\mathbf{C}^p,0}$-module en posant:

$$t_j\cdot a(s)f_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}=a(s_1,\dots,s_j+1,\dots,s_p)f_jf_1^{s_1}\dots f_p^{s_p},$$
$$\frac{\partial}{\partial t_j}\cdot a(s)f_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}=-a(s_1,\dots,s_j-1,\dots,s_p)\frac{s_j}{f_j}f_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}.$$

On vérifie que la multiplication par s_j dans $\mathscr{L}_0$ correspond à la multiplication par $-\frac{\partial}{\partial t_j}t_j$. Considérons i: $\mathbf{C}^n$, $0\to\mathbf{C}^n\times\mathbf{C}^p$, 0, $(x\mapsto(x,t=f(x)))$, l'immersion du graphe de f. L'image directe du $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n0}$-module $\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n,0}$ est:

$$i_+(\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n,0})=\frac{\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n\times\mathbf{C}^n0}[1/(t_1-f_1)\cdots(t_p-f_p)]}{\sum_j\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n\times\mathbf{C}^p,0}[1/(t_1-f_1)\cdots(t_{j-1}-f_{j-1})(t_{j+1}-f_{j+1})\cdots(t_p-f_p)]}$$

Si $\delta(t-f)$ désigne la classe de $1/(t_1-f_1)\cdots(t_p-f_p)$, $i_+(\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n,0})$ est un $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n\times\mathbf{C}^p,0}$ module monogène engendré par $\delta(t-f)$. Suivant l'équivalence de catégories entre $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n,0}$-modules de type fini et $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n\times\mathbf{C}^p,0}$-modules supportés par le graphe de f: $i_+(\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n,0})$ est un $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n\times\mathbf{C}^p,0}$-module holonome régulier de variété caractéristique, au voisinage de 0, l'espace conormal relatif au graphe de f, $T^*_{t-f=0}(\mathbf{C}^n\times\mathbf{C}^p)$. Il résulte du théorème de C. Sabbah ([Sab 2] théorème 3.2 page 228) que la variété caractéristique relative de $i_+(\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n,0})$ est:

$$\{(x,f(x),\xi);\ (x,\xi)\in W_f\}$$

au voisinage de l'origine. Mais

$$\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n\times\mathbf{C}^p/\mathbf{C}^p,0}\delta(t-f)=\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n,0}\delta(t-f)$$

et on obtient que la variété caractéristique de $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n,0}\delta(t-f)$ est W_f. La proposition résulte alors de l'isomorphisme de $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n0}$-modules:

$$\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n,0}f_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}\simeq\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n,0}\delta(t-f);\ Pf_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}\mapsto P\delta(t-f)$$

qui résulte du fait que $f_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}$ et $\delta(t-f)$ ont pour annulateur l'idéal de $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n\times\mathbf{C}^p,0}$:

$$\left(t_1-f_1,\dots,t_p-f_p,\dots,\frac{\partial f_1}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial t_1}+\dots+\frac{\partial f_p}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial t_p}-\frac{\partial}{\partial x_j},\dots\right).$$

1.2 La variété caractéristique de $\mathscr{D}_X[s_1,\dots,s_p]f_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}$

On peut considérer sur $\mathscr{D}_X[s_1,\dots,s_p]f_1^{s_1}\cdots f_p^{s_p}$ la filtration où chaque s_i est de poids 1. Si $P=\sum P_Is^I$ où $I=(i_1,\dots,i_p)\in\mathbf{N}^p$, $P_I\in\mathscr{D}_X$ est de degré d_I, on pose: $\deg_T(P)=\sup\{d_I+|I|;\ P_I\neq 0\}$ où $|I|=i_1+\dots+i_p$. Tout $\mathscr{D}_X[s_1,\dots,s_p]$-module cohérent $\mathscr{M}$

admet localement de bonnes filtrations et on peut alors lui associer comme usuellement un sous ensemble de $T^*X \times \mathbb{C}^p$ appelé variété caractéristique du $\mathcal{D}_X[s_1,...,s_p]$-module $\mathcal{M}$.

Notation 1. *On désigne par $W_f^\#$ le sous espace analytique de $T^*X\times\mathbb{C}^p$ défini comme l'adhérence de*

$$\{(x,\ \lambda_1 df_1(x)+\cdots+\lambda_p df_p(x),\ \lambda_1 f_1(x),...,\lambda_p f_p(x))\}$$

lorsque x décrit X et $(\lambda_1,...,\lambda_p)$ décrit $\mathbb{C}^p$.

Corollaire 1. *$\mathcal{D}_X[s_1,...,s_p]f_1^{s_1}\cdots f_p^{s_p}$ est un $\mathcal{D}_X[s_1,...,s_p]$-module cohérent et sa variété caractéristique comme $\mathcal{D}_X[s_1,...,s_p]$-module est $W_f^\#$.*

Preuve. La preuve de la cohérence se fait au moyen du même critère que celui utilisé dans la proposition précédente. Pour déterminer la variété caractéristique de $\mathcal{D}_X[s_1,...,s_p]f_1^{s_1}...f_p^{s_p}$, introduisons l'application F définie par:

$$F\colon X\times\mathbb{C}^p\to\mathbb{C}^p,\ (x,\ y_1,...,y_p)\mapsto(e^{y_1}f_1(x),...,e^{y_p}f_p(x)).$$

Comme: $((\partial/\partial y_j)-s_j)\ (e^{y_1}f_1)^{s_1}\cdots(e^{y_p}f_p)^{s_p})=0$, on a l'égalité:

$$\mathcal{D}_{X\times\mathbb{C}^p}[s_1,...,s_p]\ (e^{y_1}f_1)^{s_1}...(e^{y_p}f_p)^{s_p}=\mathcal{D}_{X\times\mathbb{C}^p}(e^{y_1}f_1)^{s_1}...(e^{y_p}f_p)^{s_p}.$$

Commençons par montrer l'inclusion de $W_f^\#$ dans la variété caractéristique de $\mathcal{D}_X[s_1,...,s_p]\ f_1^{s_1}...f_p^{s_p}$. Soit $(x_0,\ \xi_0,\ s_0)\in W_f^\#$ et $P(x,\ \partial/\partial x,\ s)$ un opérateur de $\mathcal{D}_X[s_1,...,s_p]$ tel que $Pf_1^{s_1}...f_p^{s_p}=0$. Désignons par $\bar{P}$ l'opérateur $P(x,\ \partial/\partial x,\ \partial/\partial y)$. Alors $\bar{P}(e^{y_1}f_1)^{s_1}...\ (e^{y_p}f_p)^{s_p}=0$, et donc le symbole de $\bar{P}$ s'annule sur W_F d'après la proposition précédente. Par ailleurs, il est évident de vérifier que $(x_0,\ 0,\ \xi_0,\ s_0)$ appartient à W_F, ce qui conduit à: $\sigma(P)\ (x_0,\ \xi_0,\ s_0)=0$ et à l'inclusion cherchée. En fait, si l'on identifie $T^*(X\times\mathbb{C}^p)$ et $T^*X\times\mathbb{C}^p\times\mathbb{C}^p$, on a: $W_F=W_f^\#\times\mathbb{C}^p$.

Réciproquement, montrons que $(x_0,\ \xi_0,\ s_0)$ est dans $W_f^\#$ si $(x_0,\ \xi_0,\ s_0)$ est dans la variété caractéristique de $\mathcal{D}_X[s_1,...,s_p]\ f_1^{s_1}...f_p^{s_p}$. Il suffit pour cela de montrer que $(x_0,\ 0,\ \xi_0,\ s_0)$ appartient à W_F, c'est à dire que si

$$Q(x,\ y,\ \partial/\partial x,\ \partial/\partial y)\ (e^{y_1}f_1)^{s_1}...\ (e^{y_p}f_p)^{s_p}=0$$

alors $\sigma(Q)\ (x_0,\ 0,\ \xi_0,\ s_0)=0$. Soit d le degré de Q, en décomposant Q sous la forme: $Q=yP(x,\ y,\ \partial/\partial x,\ \partial/\partial y)+R(x,\ \partial/\partial x,\ \partial/\partial y)$, il vient: $\sigma(Q)=y\sigma_d(P)+\sigma_d(R)$ où σ_d désigne la partie homogène de degré d éventuellement nulle. Ainsi: $\sigma(Q)\ (x_0,\ 0,\ \xi_0,\ s_0)=\sigma_d(R)\ (x_0,\ \xi_0,\ s_0)$. Comme:

$$yP(e^{y_1}f_1)^{s_1}...(e^{y_p}f_p)^{s_p}+R(x,\ \partial/\partial x,\ \partial/\partial y)\ (e^{y_1}f_1)^{s_1}...(e^{y_p}f_p)^{s_p}=0,$$

en fixant $y=0$, on obtient: $R(x,\ \partial/\partial x,\ s)f_1^{s_1}...f_p^{s_p}=0$. Vu l'hypothèse sur $(x_0,\ \xi_0,\ s_0)$ on a bien $\sigma_d(R)\ (x_0,\ 0,\ \xi_0,\ s_0)=0$, et donc

$$\sigma(Q)\ (x_0,\ 0,\ \xi_0,\ s_0)=0.$$

1.3 $\mathscr{D}_X f_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}$, espace conormal relatif et $\mathscr{L}$ équivalence

Corollaire 2. *Soit* $f=(f_1,\dots,f_p):\mathbf{C}^n, 0\to\mathbf{C}^p, a$

$$g=(g_1,\dots,g_q):\mathbf{C}^n, 0\to\mathbf{C}^q, b$$

deux germes d'applications analytiques. On suppose que le lieu critique de f est de codimension au moins 2 (resp. les lieux critiques de f et g sont de codimension au moins 2). Les propriétés suivantes sont équivalentes:

1. *l'espace conormal relatif de l'application g est contenu dans (resp. égal à) l'espace conormal relatif de l'application f,*
2. *il existe une unique application (resp. isomorphisme) analytique ϕ: $\mathbf{C}^p, a\to\mathbf{C}^q, b$ telle que $g=\phi\circ f$,*
3. *on a l'inclusion:* $\mathrm{Ann}_{\mathscr{D}} f_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}\subset \mathrm{Ann}_{\mathscr{D}} g_1^{s_1}\dots g_p^{s_p}$ *(resp. égalité).*

Preuve de $1\Rightarrow 2$: L'inclusion de W_g dans W_f implique que pour tout i dans $\{1, 2,\dots,q\}$: $dg_i\wedge df_1\wedge\cdots\wedge df_p=0$. Comme le lieu critique de f est de codimension au moins 2, on déduit d'un résultat de K. Saito [Sai] que dg_i s'écrit comme combinaison linéaire de $df_1,\dots,df_p$. Le théorème de B. Malgrange (théorème 2.1.1 p. 70) [Mal 2] ou le théorème de Moussu-Tougeron (théorème 2 p. 1237) [M.T] assure alors l'existence d'une unique application analytique ϕ: $\mathbf{C}^p, a\to\mathbf{C}^q, b$ telle que $g=\phi\circ f$.

$2\Rightarrow 3$: Si $g=\phi\circ f$, supposons $Pf_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}=0$. Pour tout multi indice $(i_1,\dots,i_p)$ de $\mathbf{N}^p$, on a en particulier: $Pf_1^{i_1}\dots f_p^{i_p}=0$. D'où en développant $\phi\circ f$ comme une série en $f-a$: $Pg_1^{j_1}\dots g_q^{j_q}=0$ pour tout multi-indice $(j_1,\dots,j_q)$ de $\mathbf{N}^q$. On en déduit $Pg_1^{s_1}\dots g_q^{s_q}=0$.

$3\Rightarrow 1$: Provient du théorème 1.

Remarquons que la propriéte 3 signifie qu'il existe une application (resp. isomorphisme) naturel entre les $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n,0}$-modules:

$$\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n,0}\, f_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}\to \mathscr{D}_{\mathbf{C}^n,0}\, g_1^{s_1}\dots g_q^{s_q}.$$

2. L'annulateur de $f_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}$ pour $(f_1,\dots,f_p)$ Intersection Complète à Singularité Isolée

Soit $f=(f_1,\dots,f_p)$: $\mathbf{C}^n, 0\to\mathbf{C}^p, 0$ un germe d'application analytique définissant une intersection complète à singularité isolée. On désignera par π: $T^*\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}^n$ la projection canonique. Notons C_f le lieu critique de f; c'est le lieu des zéros de l'idéal J engendré par les mineurs $p\times p$ de la matrice jacobienne de f. Nous supposerons que 0 appartient à C_f. Il est bien connu ([T] page 644) que $\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n,0}/J$ est un anneau de Cohen-Macaulay de dimension $p-1$.

Si $p=n$, on a au voisinage de 0: $W_f=T^*\mathbf{C}^n$ et donc le $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n,0}$ module engendré par $f_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}$ est libre, d'aprés le théorème 1.

Nous supposerons désormais $p\le n-1$. Définissons la matrice:

$$M(x, \xi) = \begin{pmatrix} \xi_1 & \cdots & \xi_n \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

à coefficients dans $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}[\xi_1,\ldots,\xi_n]$. Le $(p+1) \times (p+1)$ mineur formé sur les colonnes $j_1 < j_2 < \cdots < j_{p+1}$ sera noté:

$$\delta_{j_1,\ldots,j_{p+1}} = \sum_{t=1}^{p+1} \alpha_{j_1,\ \hat{j}_t,\ j_{p+1}}(x)\,\xi_{j_t}.$$

Soit I l'idéal engendré par ces $(p+1) \times (p+1)$ mineurs et $V(I)$ la variété des zéros de I.

Lemme 1. *Soit x_0 un point critique de f. La trace de $f^{-1}(f(x_0))$ sur l'espace conormal relatif à l'application f est $T^*_{f^{-1}(f(x_0))}\mathbb{C}^n \cup T^*_{\{x_0\}}\mathbb{C}^n$.*

Preuve. Rappelons une preuve de ce résultat. On peut supposer que $x_0 = 0$. Soit $b = (b_1,\ldots,b_p) \in \mathbb{C}^n$, considérons la matrice $M(x, b)$ et Z le sous espace défini par les mineurs $(p+1) \times (p+1)$ de cette matrice. D'après le théorème d'Eagon-Northcott ([Mat] p. 103) la dimension de Z au voisinage de 0 est supérieure ou égale à p. Donc C_f est un sous espace strict de Z. Il reste à prendre un chemin dans Z qui n'est pas dans C_f pour aboutir à $(0, b) \in W_f$.

Lemme 2. *L'idéal I engendré par les $(p+1) \times (p+1)$ mineurs de la matrice $M(x, \xi)$ est l'idéal de définition de l'espace conormal relatif à l'application f, et $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{2n},0}/I$ est un anneau de Cohen-Macaulay.*

Preuve. Au dessus du complémentaire du lieu critique de l'application f, W_f est un fibré vectoriel de rang p. Si, par exemple, en un point de cet ouvert: $\alpha_{1,\ldots,p}(x)$ le jacobien partiel de $(f_1,\ldots,f_p)$ par rapport aux variables $x_1,\ldots,x_p$ est non nul, I est engendré par les $n-p$ équations lisses indépendantes: $\delta_{1,\ldots,p,j}(x, \xi) = 0$ pour $j \in \{p+1,\ldots,n\}$. Ainsi en dehors du lieu critique de l'application f, $V(I) = W_f$ est lisse réduit. Au dessus d'un point critique x_0 de f, le lemme précédent permet de voir que $\{x_0\} \times \mathbb{C}^n$ est dans W_f et on a clairement le même résultat pour $V(I)$. Ainsi: $V(I) = W_f$.

Lemme 3. *Soient A un anneau local régulier, M une matrice à l lignes et m colonnes à coefficients dans A, I l'idéal de A engendré par les $(l \times l)$-mineurs de M. Si $\dim(A/I) = \dim(A) - (m-l+1)$, alors A/I est de Cohen-Macaulay.*

Preuve. La démonstration copie la preuve de la proposition 5.1.1 de B. Teissier [T, p.644]. A étant local régulier, la profondeur de A/I est donnée par [Se, p. IV.35]:

$$\mathrm{prof}(A/I) = \dim(A) - \mathrm{dh}(A/I).$$

D'autre part, A étant de Cohen-Macaulay [Se, corollaire 3 p.IV.37],

$$\operatorname{prof}(I, A) = \dim(A) - \dim(A/I) = m - l + 1.$$

Alors, d'après Buchsbaum-Rim [B.R, corollaire 2.7 p.208], I étant l'idéal engendré par les $(l \times l)$-mineurs de M, $\operatorname{dh}(A/I) = m - l + 1$.
Donc finalement $\operatorname{prof}(A/I) = \dim(A) - (m - l + 1) = \dim(A/I)$.

Revenons à la preuve du lemme 2. On sait donc maintenant que la dimension de $V(I)$ est $n+p$. Il résulte du lemme 3 que $\mathcal{O}_{\mathbf{C}^{2n},0}/I$ est un anneau de Cohen-Macaulay. Enfin $\mathcal{O}_{\mathbf{C}^{2n},0}/I$ étant Cohen-Macaulay, il est sans composante immergée. Or I est presque partout réduit, donc I est réduit.

Théorème 2. *Soit $f = (f_1, \dots, f_p) : \mathbf{C}^n, 0 \to \mathbf{C}^p, 0$ un germe d'application analytique définissant une intersection complète à singularité isolée. Notons pour $j_1 < \cdots < j_p$: $\alpha_{j_1, \dots, j_p}(x)$ le jacobien partiel de $f = (f_1, \dots, f_p)$ par rapport aux variables $x_{j_1}, \dots, x_{j_p}$. Notons pour $j_1 < \cdots < j_{p+1}$.*

$$\Delta_{j_1, \dots, j_{p+1}} = \sum_{i=1}^{p+1} \alpha_{j_1, \dots \hat{j_i}, \dots j_{p+1}}(x) \frac{\partial}{\partial x_{j_i}}.$$

L'annulateur sur $\mathcal{D}_{\mathbf{C}^n 0}$ de $f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$ est:

$$Ann_{\mathcal{D}_{\mathbf{C}^n, 0}} f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} = \sum_{j_1 < \cdots < j_{p+1}} \mathcal{D}_{\mathbf{C}^n, 0} \Delta_{j_1, \dots, j_{p+1}}.$$

Preuve. Un calcul simple montre que $\Delta_{j_1, \dots, j_{p+1}}$ annule $f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$. Réciproquement, soit $P \in Ann_{\mathcal{D}_{\mathbf{C}^n, 0}} f_1^{s_1} \cdots f_p^{s_p}$. Comme nous l'avons vu dans la première partie, W_f est égal à la variété caractéristique de $\mathcal{D}_{\mathbf{C}^n, 0} f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$, donc le symbole principal de P s'annule sur W_f, et d'après la proposition précédente, c'est dire que le symbole de P est dans l'idéal réduit I. On peut donc construire un opérateur $Q \in \sum_{j_1 < \cdots < j_{p+1}} \mathcal{D}_{\mathbf{C}^n, 0} \Delta_{j_1, \dots, j_{p+1}}$ de même symbole que P. Mais $P - Q$ est encore dans l'annulateur $f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$, et de degré strictement inférieur au degré de P; par récurrence, cela démontre la proposition.

Proposition 1. *Soit $f = (f_1, \dots, f_p) : \mathbf{C}^n, 0 \to \mathbf{C}^p, 0$ un germe d'application analytique définissant une intersection complète à singularité isolée. Le $\mathcal{D}_{\mathbf{C}^n, 0}$-module $\mathcal{M} = \mathcal{D}_{\mathbf{C}^n, 0} f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} / \sum \mathcal{D}_{\mathbf{C}^n, 0} f_i f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$ est holonome de cycle caractéristique:*

$$T^*_{f^{-1}(0)} \mathbf{C}^n + m T^*_{(0)} \mathbf{C}^n,$$

où m est la multiplicité d'intersection de $f^{-1}(0)$ avec la variété polaire relative générique de dimension p (c'est á dire la variéte des zéros de l'idéal de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}^n, 0}$ engendré par les $(p+1) \times (p+1)$-mineurs de la matrice $M(x, b)$ où b est un point générique de $\mathbf{C}^p$).

Preuve. De manière évidente l'annulateur de $\dot{f}^s$, la classe de $f_1^{s_1} \cdots f_p^{s_p}$ dans $\mathcal{M}$, est l'idéal de $\mathcal{D}_{\mathbf{C}^n, 0}$:

$$Ann_{\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n,0}} f^s = Ann_{\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n,0}} f_1^{s_1} \ldots f_p^{s_p} + \sum_{j=1}^{p} \mathscr{D}_{\mathbb{C}^n\,0} f_j.$$

Il résulte du lemme 2 et du théorème 1 que le symbole des opérateurs nuls sur $f_1^{s_1} \ldots f_p^{s_p}$ est l'idéal I engendré par les $(p+1) \times (p+1)$ mineurs de la matrice $M(x, \xi)$. Le quotient de $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^{2n},0}$ par I est de Cohen-Macaulay et la trace de $f^{-1}(0)$ sur $V(I)$ est d'après le lemme 1:

$$T^*_{f^{-1}(0)}\mathbb{C}^n \cup T^*_{\{0\}}\mathbb{C}^n.$$

Cet espace étant de dimension n, la suite $f_1, \ldots, f_p$ définit une suite régulière de $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^{2n},0}/I$ [Mat, théorème 17.4]. On en déduit que l'idéal engendré par les symboles des opérateurs nuls sur f^s est $(f_1, \ldots, f_p, I)$.
En effet, soit P un opérateur non nul annulant f^s; P s'écrit:

$$P = \sum_{j=1}^{p} P_j f_j + Q;\ Q \in \mathrm{Ann}_{\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n,0}} f^s.$$

Soit $d = \max(\{\deg(P_j)\}_{j=1\ldots p}, \deg(Q))$. Si P est de degré d, son symbole est bien dans $I + \sum_{j=1}^{p} \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n\,0}[\xi_1, \ldots, \xi_n] f_j$. Si P est de degré strictement inférieur à d, alors:

$$\sum_{j=1}^{p} \sigma_d(P_j) f_j + \sigma_d(Q) = 0$$

oú σ_d désigne le symbole en degré d, éventuellement nul. On obtient ainsi une relation entre les $f_1, \ldots, f_p$ dans $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^{2n},0}/I$. Cette relation est donc triviale [Mat, p.131], ce qui nous permet d'écrire P sous la forme

$$P = \sum_{j=1}^{p} P'_j f_j + Q';\ Q' \in \mathrm{Ann}_{\mathscr{D}_{\mathbb{C}^n,0}} f^s$$

avec $d' = \max(\{\deg(P'_j)\}_{j=1\ldots p}, \deg(Q')) < d$. D'où l'assertion par recurrence. Ainsi la variété caractéristique de $\mathscr{M}$ est $T^*_{f^{-1}(0)}\mathbb{C}^n \cup T^*_{\{0\}}\mathbb{C}^n$.

Il reste à déterminer le cycle caractéristique. En un point lisse de $f^{-1}(0)$ un calcul direct montre que la multiplicité de $T^*_{f^{-1}(0)}\mathbb{C}^n$ est 1. Pour déterminer la multiplicité de $T^*_{\{0\}}\mathbb{C}^n$, nous avons à calculer en un point générique $(0, b)$ la multiplicité de l'anneau:

$$\mathscr{O}_{\mathbb{C}^{2n}(0,b)} \Big/ \left(I + \sum_{j=1}^{p} \mathscr{O}_{\mathbb{C}^{2n}(0,b)} f_j\right).$$

Cet anneau étant de Cohen-Macaulay, cette multiplicité est la dimension de l'espace vectoriel [Mat, théorème 17.11, p.103]:

$$\frac{\mathcal{O}_{\mathbf{C}^{2n},(0,b)}}{I+\sum_{j=1}^{p}\mathcal{O}_{\mathbf{C}^{2n},(0,b)}f_j+\sum_{i=1}^{n}\mathcal{O}_{\mathbf{C}^{2n},(0,b)}(\xi_i-b_i)}$$

qui est encore égal à

$$\dim_{\mathbf{C}}\frac{\mathcal{O}_{P_p(f,b)}}{(f_1,\dots,f_p)},$$

où $P_p(f, b)$ désigne la variété polaire relative de dimension p ([H.M.S] p.238). La dimension précédente est la multiplicité de f le long de $P_p(f, b)$.
On remarquera l'analogie de cette proposition avec certains résultats de [B.M.M].

3. Conditions de Finitude du $\mathcal{D}_{\mathbf{C}^n,0}$-Module: $\mathcal{D}_{\mathbf{C}^n,0}[s_1,\dots,s_p]f_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}$

Soit $f=(f_1,\dots,f_p)$: $\mathbf{C}^n, 0 \to \mathbf{C}^p, 0$ un germe d'application analytique définissant une intersection complète. On rappelle que f est dit sans éclatement en codimension 0 si le morphisme composé:

$$f\circ p\colon W_f \to \mathbf{C}^n, 0 \to \mathbf{C}^p, 0$$

est équidimensionnel. On sait alors [H.M.S] que $W_0(f)$, la trace de $f_1=\dots=f_p=0$ sur W_f, est une variété lagrangienne.

Proposition 2. *Si f est sans éclatement en codimension 0 et si pour un certain $j\in\{1,\dots,p\}$, $\mathcal{D}_{\mathbf{C}^n,0}[s_j]f_1^{s_1}\cdots f_p^{s_p}$ est de type fini sur $\mathcal{D}_{\mathbf{C}^n,0}$: il existe un polynôme d'une variable, $b_j(s_j)$, non nul tel que:*

$$b_j(s_j)f_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}\in\sum_{k=1}^{p}\mathcal{D}_{\mathbf{C}^n,0}[s_j]f_kf_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}.$$

Preuve. $\mathcal{D}_{\mathbf{C}^n,0}f_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}$ est un sous $\mathcal{D}_{\mathbf{C}^n,0}$-module de $\mathcal{D}_{\mathbf{C}^n,0}[s_j]f_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}$, qui est lui même, sous l'hypothèse de finitude, un quotient d'une somme d'un nombre fini de modules isomorphes à $\mathcal{D}_{\mathbf{C}^n,0}f_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}$. Ainsi, sous cette hypothèse de finitude, la variété caractéristique comme $\mathcal{D}_{\mathbf{C}^n,0}$-module de $\mathcal{D}_{\mathbf{C}^n,0}[s_1,\dots,s_p]f_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}$ est la même que celle de $\mathcal{D}_{\mathbf{C}^n,0}f_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}$, à savoir W_f. Le $\mathcal{D}_{\mathbf{C}^n,0}$-module quotient:

$$\mathcal{D}_{\mathbf{C}^n,0}[s_j]f_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}/\sum_{k=1}^{p}\mathcal{D}_{\mathbf{C}^n,0}[s_j]f_kf_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}$$

est de plus supporté par $f^{-1}(0)$. Comme l'application f est sans éclatement en codimension 0, on en déduit que ce module quotient est holonome. Donc, l'endomorphisme de multiplication par s_j admet un polynôme minimal, d'où la proposition.

Corollaire 3. *Si pour toute partie $I=\{i_1,\dots,i_k\}$ de $\{1,\dots,p\}$, $f_I=(f_{i_1},\dots,f_{i_k})$ est sans éclatement en codimension 0, et si le $\mathcal{D}_{\mathbf{C}^n,0}$-module $\mathcal{D}_{\mathbf{C}^n,0}[s_1,\dots,s_p]f_1^{s_1}\cdots f_p^{s_p}$ est de* *type fini: il existe pour tout $j \in \{1,...,p\}$ des polynômes d'une variable $b_j(s_j)$ non nuls tels que:*

$$b_j(s_j)f_1^{s_1}\cdots f_p^{s_p} \in \mathcal{D}_{\mathbf{C}^n,0}[s_1,...,s_p]f_jf_1^{s_1}\cdots f_p^{s_p}.$$

Preuve. Par récurrence sur p, il existe une équation non triviale pour $j \in \{2,...,p\}$:

$$e_j(s_1)f_1^{s_1}...f_{j-1}^{s_{j-1}}f_{j+1}^{s_{j+1}}...f_p^{s_p} \in \mathcal{D}_{\mathbf{C}^n0}[s_1,...,s_p]f_1f_1^{s_1}...f_{j-1}^{s_{j-1}}f_{j+1}^{s_{j+1}}...f_p^{s_p}.$$

On multiplie ces équations par $f_j^{s_j+k}$ pour k assez grand:

$$e_j(s_1)f_j^k f_1^{s_1}...f_p^{s_p} \in \mathcal{D}_{\mathbf{C}^n,0}[s_1,...,s_p]f_1f_1^{s_1}...f_p^{s_p}.$$

On utilise l'équation fonctionnelle donnée par la proposition pour $j=1$, on itère suffisamment cette équation, et on obtient alors après multiplication par les e_j:

$$b_1(s_1)f_1^{s_1}...f_p^{s_p} \in \mathcal{D}_{\mathbf{C}^n0}[s_1,...,s_p]f_1f_1^{s_1}...f_p^{s_p}.$$

Introduisons les conditions:

∘ (F) La projection naturelle de $W_f^\#$ sur W_f est finie,

∘ (L.S.) f est sans éclatement en codimension 0 et le lieu critique de f est contenue dans la réunion des hypersurfaces $f_j^{-1}(0)$,

∘ (T) Pour tous sous ensembles disjoints $I=\{i_1,...,i_k\}$ et $J=\{j_1,...,j_l\}$ l'intersection des espaces conormaux relatifs à $f_I=(f_{i_1},...,f_{i_k})$ et à $f_J=(f_{j_1},...,f_{j_l})$ est contenue dans la section nulle du fibré cotangent.

C. Sabbah montre [Sab 3] [B] que la condition (L.S.) entraîne la condition (F) et J. Briançon montre [B] que les conditions (L.S.) et (T) sont équivalentes. Nous obtenons finalement les mêmes équations fonctionnelles que C. Sabbah, permettant l'étude des développements asymptotiques d'intégrales sur la fibre de f ([Sab 2]):

Théorème 3. *Soit $f=(f_1,...,f_p):\mathbf{C}^n,0\to\mathbf{C}^p,0$ un germe d'application analytique définissant une intersection complète.*

1. *Sous la condition (F), pour tout $j\in\{1,...,p\}$ il existe des opérateurs annulant $f_1^{s_1}...f_p^{s_p}$ de la forme $s_j^{q_j}+A_{j,1}s_j^{q_j-1}+\cdots+A_{j,q_j}$ où les $A_{j,l}$ sont des opérateurs indépendants de $s_1,...,s_p$ de degré inférieur ou égal à l.*

2. *Sous la condition (L.S.), il existe, pour tout $j\in\{1,...,p\}$ des polynômes d'une variable $b_j(s_j)$ non nuls tels que:*

$$b_j(s_j)f_1^{s_1}...f_p^{s_p} \in \mathcal{D}_{\mathbf{C}^n0}[s_1,...,s_p]f_jf_1^{s_1}...f_p^{s_p}.$$

Preuve. Comme la condition (F) est vérifiée, il existe un polynôme homogène de degré r en ξ et s_j:

$$\sigma=s_j^r+a_1(x,\xi)s_j^{r-1}+\cdots+a_r(x,\xi)$$

nul sur $W_f^\#$. Par la même méthode que celle utilisée pour la preuve du corollaire 1, on montre que la variété caractéristique du $\mathcal{D}_{\mathbf{C}^n,0}[s_j]$-module $\mathcal{D}_{\mathbf{C}^n,0}[s_j]f_1^{s_1}\cdots f_p^{s_p}$ est $W_{f,j}^\#$, l'adhérence dans $T^*(\mathbf{C}^n,0)\times\mathbf{C}$ de:

$$\{(x, \lambda_1 df_1+\cdots+\lambda_p df_p, \lambda_j f_j)\}$$

lorsque x décrit $\mathbf{C}^n$ et $(\lambda_1,\ldots,\lambda_p)$ décrit $\mathbf{C}^p$. Une puissance de σ est donc le symbole d'un opérateur annulant $f_1^{s_1}\ldots f_p^{s_p}$ avec condition sur le degré comme annoncé dans la proposition. Enfin la condition (L.S.) est toujours vérifiée pour $f_I=(f_{i_1},\ldots,f_{i_k})$ (voir [B]) et donc la fin de la proposition se déduit du corollaire 3.

Exemple (le cas fini). *Soit* $f=(f_1,\ldots,f_n)$: $\mathbf{C}^n, 0 \to \mathbf{C}^n, 0$, *un morphisme fini, les conditions suivantes sont équivalentes*:

1) $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n,0}[s_1,\ldots,s_n]f_1^{s_1}\cdots f_n^{s_n}$ *est de type fini sur* $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n,0}$,

2) *La condition de finitude* $W_f^\#$ *sur* W_f *est vérifiée.*

Preuve. On a vu que la condition 2 entraîne la condition 1. Supposons la condition 1 vérifiée. Notons $W_{f,1}^\#$ l'adhérence dans $T^*X\times\mathbf{C}$ de

$$\{(x, \lambda_1 df_1+\cdots+\lambda_n df_n, \lambda_1 f_1)\}$$

lorsque x décrit un voisinage X de 0 et $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ décrit $\mathbf{C}^n$. Soit $a_k(x)$ le déterminant de la matrice:

$$(-1)^{k-1}\begin{pmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_{k-1}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_{k+1}} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{k-1}} & \frac{\partial f_n}{\partial x_{k+1}} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

et *jac* le jacobien de f. L'opérateur $f_1(\sum a_k(x)\,\partial/\partial x_k)-(\text{jac})\,s_1$ annule $f_1^{s_1}\ldots f_n^{s_n}$. Soit u le p.g.c.d. de (jac, $f_1a_1,\ldots f_1a_n$) ; on peut écrire: $jac=\rho u$, $f_1a_k=b_ku$. L'opérateur $\rho s_1-\sum b_k\partial/\partial x_k$ annule $f_1^{s_1}\ldots f_p^{s_p}$. D'autre part, la variété caractéristique du $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n0}[s_1]$ module $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n0}[s_1]\,f_1^{s_1}\ldots f_n^{s_n}$ est $W_{f,1}^\#$, qui est une hypersurface irréductible de $T^*X\times\mathbf{C}$. Le symbole de $\rho s_1-\sum b_k\partial/\partial x_k$ en est donc une équation réduite et par suite l'annulateur comme $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n0}[s_1]$-module de $f_1^{s_1}\ldots f_n^{s_n}$ est engendré par $\rho s_1-\sum b_k\partial/\partial x_k$. Ainsi $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n,0}[s_1]\,f_1^{s_1}\ldots f_n^{s_n}$ est fini si et seulement si $\rho=1$. Donc $W_{f,1}^\#$ est fini sur W_f, et en échangeant le rôle des variables: $W_f^\#$ est fini sur W_f.

Dans [B] il est montré que la condition 2 équivaut à l'existence d'un système de coordonnées dans lequel $f_1=x_1^{\alpha_1},\ldots,f_n=x_n^{\alpha_n}$.

Remarqe. Lorsque $p=1$, il est bien connu que si $f(0)=0$; f est entier sur l'idéal de ses dérivées. Cela se traduit par la finitude à l'origine de $W_f^\#$ sur W_f. Les hypothèses du théorème 3 sont donc toujours vérifiées. Dans le cas p quelconque supérieur ou égal à 2, introduisons la fonction:

$$\Phi\colon \mathbf{C}^n\times\mathbf{C}^p\to\mathbf{C};(x,\lambda)\mapsto\Phi(x,\lambda)=\lambda_1 f_1(x)+\cdots+\lambda_p f_p(x).$$

Par le critère valuatif de dépendance intégrale, on montre que $\lambda_p f_p$ est entier sur l'idéal: $(\Phi'_{x_1},...,\Phi'_{x_n};\ \lambda_1 f_1,...,\lambda_{p-1} f_{p-1})$; cela prouve que $W_f^{\#}$ est fini sur $W_f^{\#,(p-1)}$ l'adhérence de l'ensemble:

$$\left\{\left(x,\ \sum_{i=1}^{p}\lambda_i df_i(x),\ \lambda_1 f_1(x),...,\lambda_{p-1} f_{p-1}(x)\right)\right\}$$

contenu dans $T^*\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{p-1}$. C'est cette propriété qui permet de généraliser la finitude du cas $p = 1$. On en déduit sous la seule hypothèse $f(0) = 0$ sur l'application f: $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^n,0}[s_1,...,s_p]f_1^{s_1}\cdots f_p^{s_p}$ est un $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^n,0}[s_1,...,s_{p-1}]$-module de type fini.

References

[B] Briançon, J., Espaces conormaux relatifs I: Conditions de transversalité, *Ann. scient. Ec. Ecole Norm. Sup.*, **30** (1997), 675-692.

[B.M.M] Briançon, J., Maisonobe, Ph. et Merle, M., Localisation de systèmes différentiels, stratifications de Whitney et conditions de Thom, *Invent. Math.*, **117** (1994), 531-550.

[B.R] Buchsbaum, D. A. et Rim, D. S., A generalized Koszul complex II, *Trans. A.M.S.*, **111** (1964), 197-224.

[G.M] Granger, M., Maisonobe, Ph., A basic course on differential modules, $\mathcal{D}$-modules cohérents et holonomes, Cours du CIMPA, *Travaux en cours, Ed. Hermann*, **45** (1993), 103-168.

[H.M.S] Henry, J. P., Merle, M. et Sabbah, C., Sur la condition de Thom stricte pour un morphisme analytique complexe, *Ann. Sci. Ec. Ecole Norm. Sup.*, **17** (1984), 227-268.

[K] Kashiwara, M., B-functions and holonomic systems, *Invent. Math.*, **38** (1976), 33-53.

[K.K] Kashiwara, M. et Kawai, T., On Holonomic Systems for $\prod_{l=1}^{N}(f_l+\sqrt{-1}0)^{\lambda_l}$, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **15** (1979), 551-575.

[Mal 1] Malgrange, B., Le polynôme de Bernstein d'une singularité isolée, *Springer LNM*, **459** (1975), 98-119.

[Mal 2] ______, B. Frobenius avec singularités. 2. Le cas général, *Invent. Math.*, **39** (1977), 67-89.

[Mat] Matsumura, H., Commutative ring theory, *Cambridge Stud. in Adv. Math., Cambridge University Press*, **8** (1986).

[M.T] Moussu, R. et Tougeron, J. C., Fonctions composés analytiques et differentiables, *C. R. Acad Sci. Paris, Srie A*, **282** (1976), 1237-1240.

[Sab 1] Sabbah, C., Proximité évanescente II. Equations fonctionnelles pour plusieurs fonctions analytiques, *Compositio Math.*, **64** (1987), 213-241

[Sab 2] ______, Appendice à Proximité évanescente II, *Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique Palaiseau* (1988).

[Sab 3] ______, Proximité évanescente I. La structure polaire d'un $\mathcal{D}$ module, *Compositio Math.*, **62** (1987), 283-328.

[Sab 4] ______, Modules d'Alexander et $\mathcal{D}$ modules, *Duke Math.*, **60** (1990), 729-814.

[Sai] Saito, K., Calcul algébrique de la monodromie, Singularités à Cargèse, *Astérisque*, **7-8** (1973), 195-211.

[Se] Serre, J. P., Algèbre locale. Multiplicités, *Springer LNM*, **11** (1965).

[T] Teissier B., The hunting of invariants in the geometry of discriminants, *Real and Complex Singularities Oslo* 1976 *Nordic Summer School. Sijthoff and Noordhoff International Publishers* (1977).