

Régularité des Ondes Élastiques dans la Région Glancing des Ondes P

par

Tatsushi MORIOKA*

Résumé

Dans cet article, nous montrons que les solutions sortantes de l'équation élastique isotrope avec la condition de Dirichlet au bord possèdent la régularité Gevrey 3 dans la région Glancing des ondes longitudinales, lorsque la dimension de l'espace est 3, le domaine est extérieur et la courbure Gaussienne du bord est strictement positive. C'est une analogie du travail par Lebeau [14] concernant l'équation des ondes, pour l'équation élastique isotrope.

Abstract

In this paper, we show that the outgoing solutions of the isotropic elastic equation with Dirichlet condition at the boundary have the Gevrey 3 regularity in the glancing region of the longitudinal waves, when the dimension of the space is 3, the domain is exterior and the Gaussian curvature is positive. It is an analogy of the work by Lebeau [14] concerning the wave equation, for the isotropic elastic equation.

§0. Introduction et Résultat

Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ un domaine extérieur. On suppose les hypothèses suivantes.

(H.1) $\partial\Omega$ est analytique.

(H.2) $\mathbf{R}^3 \setminus \Omega$ est strictement convexe, c.-à-d. la courbure Gaussienne de $\partial\Omega$ est strictement positive.

Soit $A(\partial_\nu)$ l'opérateur différentiel dont la valeur est 3×3 matrice:

$$(0.1) \quad A(\partial_\nu) = \mu_0 \mathcal{A} + (\lambda_0 + \mu_0) \text{grad div} \quad \text{dans } \mathbf{R}_\nu^3,$$

où λ_0, μ_0 sont constantes vérifiant $\mu_0 > 0$, $3\lambda_0 + 2\mu_0 > 0$ et que \mathcal{A} est Laplacien en \mathbf{R}^3 . On définit L par $L = \partial_i^2 - A(\partial_\nu)$. En notant $\sigma(\mathcal{A}|_{\partial\Omega})$ le symbole

Communiqué par T. Kawai, le 27, novembre, 1998. Revu le 27, avril, 1999.

1991 Mathematics Subject Classification(s): 58G17, 35B65

* Department of Mathematics, Osaka University, Osaka 560-0043, Japan
e-mail: morioka@math.sci.osaka-u.ac.jp

principal de Laplacien en $\partial\Omega$, on définit $q \in C^\infty(T^*(\mathbb{R} \times \partial\Omega), \mathbb{R})$ par

$$(0.2) \quad q(\tau, Z) = -\tau^2 - c_1^2 \sigma(A_{\partial\Omega})(Z) : \tau \in \mathbb{R}, \quad Z \in T^*(\partial\Omega),$$

où $c_1 = (\lambda_0 + 2\mu_0)^{1/2}$.

On fixe $T > 0, \varepsilon > 0$ qui sont suffisamment petites, $z \in \partial\Omega$ et $W_0 \subset \mathbb{R}^3$; voisinage ouvert de z dans \mathbb{R}^3 . Soit $W_1 = W_0 \cap \Omega$ et $N = (-\varepsilon, T)_t \times (W_0 \cap \partial\Omega)_x$. On fixe $\rho_0 \in T^*N \setminus 0$ vérifiant $q(\rho_0) = 0, \pi(\rho_0) = (t_0, z)$ avec $0 \leq t_0 < T$. Ici, π est la projection de T^*N sur N . On note $\partial/\partial n$ la dérivée au long de vecteur normal de $\partial\Omega$. Soit $u = {}^t(u_1, u_2, u_3) \in \mathcal{D}'((-\varepsilon, T) \times W_1)$. On dit que u vérifie (A.1) si les conditions suivantes (a) et (b) sont vérifiées.

(a) $Lu = 0$ dans $(-\varepsilon, T) \times W_1$.

(b) Il existe $W_2 \subset \mathbb{R}^3$ voisinage ouvert de $W_0 \cap \bar{\Omega}$ et $\tilde{u} = {}^t(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3) \in \mathcal{D}'((-\varepsilon, T) \times W_2)$ tels que $\tilde{u}|_{(-\varepsilon, T) \times W_1} = u$ et que \tilde{u} soit analytique dans $(-\varepsilon, 0) \times W_2$.

On fixe $m \in \mathbb{R}$ vérifiant $1 \leq m < 3$. Le théorème suivant est notre résultat principal.

Théorème 1. *On suppose que (H.1), (H.2) sont vérifiées. Alors, il existe $\omega \subset T^*N \setminus 0$ voisinage conique de ρ_0 et $s_1 > 0$ vérifiant $\exp s_1 H_q(\rho_0) \notin \omega$, tels que, pour tout $u = {}^t(u_1, u_2, u_3) \in \mathcal{D}'((-\varepsilon, T) \times W_1)$ vérifiant (A.1) avec $WF_A(u|_N) \subset \omega$ et tout $s_0 > 0$ vérifiant $s_0 < s_1$ et $\omega \cap \{\exp s H_q(\rho_0); s_0 \leq s \leq s_1\} = \emptyset$, on ait (i) et (ii) suivants.*

(i) $\{\exp s H_q(\rho_0); s_0 \leq s \leq s_1\} \cap WF_G^3((\partial u/\partial n)|_N) = \emptyset$.

(ii) $\{\exp s H_q(\rho_0); s_0 \leq s \leq s_1\} \cap WF_G^m((\partial u/\partial n)|_N) = \emptyset$

ou $\{\exp s H_q(\rho_0); s_0 \leq s \leq s_1\} \subset WF_G^m((\partial u/\partial n)|_N)$.

Remarque. *Soit $u = {}^t(u_1, u_2, u_3) \in \mathcal{D}'((-\varepsilon, T) \times W_1)$ vérifiant (A.1) et que $WF_A(u|_N) = \{(t_0, z; r\eta) : r > 0\}$, où $(t_0, z; \eta) = \rho_0$. Alors, la preuve de Théorème 1 montre que l'on a (i) et (ii) mentionnés dans Théorème 1 pour tout s_0 vérifiant $0 < s_0 < s_1$, si s_1 est suffisamment petit.*

Dans la description de Théorème 1, $WF_A(*)$ est l'ensemble du front d'onde analytique de Hörmander, qui coïncide le spectre singulier de Sato et le support essentiel de Bros-Iagolnitzer. $WF_G^m(*)$ est l'ensemble du front d'onde Gevrey m . On confirme ici seulement la définition de la classe Gevrey m dans \mathbb{R}^n . On dit qu'une fonction h scalaire en \mathbb{R}^n a la régularité Gevrey m près de $y \in \mathbb{R}^n$ s'il existe des constantes $B, C > 0$ et un voisinage U de y tels que pour tout α et tout $x \in U$, on ait

$$(0.3) \quad |(\partial_x^\alpha h)(x)| \leq CB^{|\alpha|}(\alpha!)^m.$$

Pour $u = {}^t(u_1, u_2, u_3)$, on définit $WF_A u = \bigcup\{WF_A u_j : j = 1, 2, 3\}$ et $WF_G^m u = \bigcup\{WF_G^m u_j : j = 1, 2, 3\}$.

Nous écrivons les travaux qui précèdent Théorème 1. Lebeau [14, Théorème 1] a prouvé Théorème 1 avec une meilleure estimation par rapport à la régularité des solutions lorsque l'équation est celle des ondes. En remplaçant WF_G^3 par WF , le front d'onde C^∞ de Hörmander, Melrose [16] et Taylor [22] (Cf. Hörmander [5]) ont montré Théorème 1-(i), lorsque l'équation est celle des ondes. L'étude de Friedlander–Melrose [4] montre que Théorème 1-(i) est faux si on remplace WF_G^3 par WF_G^k avec $1 \leq k < 3$ et remplace l'équation élastique par celle des ondes. Voir aussi Sjöstrand [19], Lebeau [13, Théorème 1 dans §V.2] et [13, Théorème 2 qui étend le résultat de Kataoka]. Théorème 1 est une analogie de Lebeau [14, Théorème 1] pour l'équation élastique isotrope. La singularité des solutions du problème aux limites pour l'équation élastique isotrope a déjà été étudiée par Yamamoto [23] avec la condition de Neumann au bord, dans le cadre de la classe C^∞ . Cf. Bardos–Masrour–Tatout [1] et Kawashita [7]. La généralisation de Lebeau [14] pour les conditions obliques au bord a été étudiée par Lafitte [8]–[10]. Voir aussi Lascar–Lascar [11].

La preuve de Théorème 1 est essentiellement due aux Lebeau [14] et Stefanov–Vodev [21]. L'idée principale de Lebeau [14] est de construire le paramétrix de l'opérateur au bord sur l'espace conormal de la région Glancing au bord. Cette méthode, appelée la deuxième microlocalisation sur les sous-variétés involutives, provenant de la théorie de Kashiwara–Kawai (C.f. [18]), nous permet de considérer l'algèbre des opérateurs 2-microlocaux de Laurent sur l'espace conormal de la sous variété involutive comme l'algèbre formelle des opérateurs pseudo-différentiels, qui ont 2 paramètres, sur l'espace cotangent. Ces opérateurs pseudo-différentiels sont les opérateurs unilatéraux, qui sont microlocaux jusqu'à l'indice 3 dans classe de Gevrey. Grâce à la deuxième microlocalisation due à Lebeau, on peut inverser l'opérateur au bord en conservant la propriété locale de Gevrey 3. Cela implique la preuve de Théorème 1 lorsque l'équation est celle des ondes. Quant à la deuxième microlocalisation due à Lebeau, Voir [12], [13] et [14, A.63 dans la pages 1489–1493].

La combinaison de [14] et [21] nous entraîne la preuve de Théorème 1. En effet, [21, §2] a montré que l'on peut résoudre le problème aux limites pour l'équation élastique isotrope avec la condition de Dirichlet au bord par la résolution Helmholtzienne. Puisque l'équation élastique est un système, la construction des solutions asymptotiques est beaucoup plus compliquée que celle de l'équation des ondes. Cf. Kawashita [7]. La méthode de [21, §2] nous permet d'éviter de construire directement les solutions asymptotiques dans la région Glancing des ondes longitudinaux et cela indique la preuve de Théorème 1 due à l'argument par [14].

Le plan de cet article est comme ci-dessous. Dans §1, on définit l'espace de Sjöstrand tangentiel sur lequel on analyse le problème aux limites pour l'équation élastique. Dans §2, on fait quelques rappels sur l'équation des

ondes, qui joueront le rôle principal pour la preuve de Théorème 1. Dans §3, on décrit notre résultat, qui implique Théorème 1, dans l'espace de Sjöstrand. Dans §4, on étudie l'algèbre des opérateurs unilatéraux et son action sur des fonctions dans l'espace de Sjöstrand. Dans §5, on prouve Théorème 1 par la combinaison de [14] et [21]. Dans §6, on fait quelques rappels sur Gevrey holomorphie partielle, qui sont utilisés dans la preuve de Théorème 1.

§1. L'espace de Sjöstrand pour les Problèmes aux Limites

Soit $X \subset \mathbb{C}^3$ ouvert et φ une fonction scalaire et continue sur X à valeur réelle.

Définition 1.1. *L'espace de Sjöstrand $H_\varphi(X)$ est l'ensemble des fonctions dont les valeurs sont vecteurs; $f(x, \lambda) = {}^t(f_1, f_2, f_3)(x, \lambda)$, $x \in X$, $\lambda > 0$, holomorphes en $x \in X$ telles que pour tout $K \Subset X$ compact et tout $\varepsilon > 0$ il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in K$, tout $\lambda \geq 1$ on ait*

$$(1.1) \quad |f(x, \lambda)| \leq C \exp(\lambda(\varphi(x) + \varepsilon)),$$

où $|f(x, \lambda)| = (\sum_{j=1}^3 |f_j(x, \lambda)|^2)^{1/2}$.

Définition 1.2. *Soit $f \in H_\varphi(X)$ et $y \in X$. On dit que $y \notin SS_\varphi^X(f)$ s'il existe un voisinage ouvert $W \subset X$ de y et $c > 0$ tels que $f \in H_{\varphi-c}(W)$. L'ensemble $SS_\varphi^X(f)$ est appelé le spectre analytique de f dans $H_\varphi(X)$.*

Définition 1.3. *Soit $g \in H_\varphi(X)$. On dit que g est à croissance dans X s'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $x \in X$ et tout $\lambda \geq 2$, on ait*

$$(1.2) \quad |g(x, \lambda)| \leq \lambda^M \exp(\lambda\varphi(x)).$$

Définition 1.4. *Soit $\rho > 0$. $H_\varphi^{+\rho}(X)$ est l'ensemble des fonctions $f(x_4, x, \lambda) = {}^t(f_1, f_2, f_3)(x_4, x, \lambda)$; holomorphe en $x \in X$ et en $x_4 \in U$ avec un voisinage ouvert complexe U de l'intervalle fermé $[0, \rho]$ dans \mathbb{C} , définies pour $\lambda > 0$, vérifiant les conditions suivantes:*

(C.1) *Pour tout $K \Subset X$ compact, il existe $C > 0$ telle que, pour tout $x \in K$, $x_4 \in U$, $\lambda \geq 1$, on ait*

$$(1.3) \quad |f(x_4, x, \lambda)| \leq \exp(C\lambda).$$

(C.2) *Pour tout $K \Subset X$ compact, tout $\varepsilon > 0$ et tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $C > 0$ telle que, pour tout $x_4 \in [0, \rho]$, tout $x \in K$ et tout $\lambda \geq 1$, on ait*

$$(1.4) \quad |(\partial/\partial x_4)^m f(x_4, x, \lambda)| \leq C \exp(\lambda(\varphi(x) + \varepsilon)).$$

Ici, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Définition 1.5. *Pour $f \in H_\varphi^{+\rho}(X)$, son spectre analytique, noté par $SS_{\partial, \varphi}^{X, \rho}(f)$ est le sous-ensemble de $X \cup (T^*(0, \rho) \times X)$ défini comme ci-dessous:*

(C.3) $X \ni y \notin SS_{\delta, \varphi}^{X, \rho}(f)$ s'il existe un voisinage W de y dans X , $r > 0$, $\varepsilon > 0$ tels que, pour tout $x \in W$, tout $x_4 \in \mathbf{C}$; $|x_4| < r$ et tout $\lambda \geq 1$, on ait

$$(1.5) \quad |f(x_4, x, \lambda)| \leq (1/\varepsilon) \exp(\lambda(\varphi(x) - \varepsilon)).$$

(C.4) $(T^*(0, \rho) \times X) \ni (y_4, \eta_4, ; y) \notin SS_{\delta, \varphi}^{X, \rho}(f)$ s'il existe un voisinage W de y dans X , $r > 0$, $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ vérifiant $\delta < \inf\{y_4, \rho - y_4\}$ tels que l'on ait

$$(1.6) \quad \left| \int_{y_4 - \delta}^{y_4 + \delta} \exp(-(\lambda/2)(z_4 - x_4)^2) f(x_4, x, \lambda) dx_4 \right| \leq (1/\varepsilon) \exp(\lambda(\varphi(x) + |\text{Im } z_4|^2/2 - \varepsilon))$$

pour tout $z_4 \in \mathbf{C}$ vérifiant $|z_4 - (y_4 - i\eta_4)| < r$, tout $x \in W$ et tout $\lambda \geq 1$.

Remarque 1.6. Quant à la relation entre la singularité analytique dans $T^*\mathbf{R}^n$ et le spectre analytique dans l'espace de Sjöstrand, on renvoie à Sjöstrand [20].

Remarque 1.7. Quant aux notations SS_{φ}^X , $SS_{\delta, \varphi}^{X, \rho}$, on n'écrira pas les indices X , ρ , φ etc. lorsqu'ils ne sont pas importants.

Dans cet article, on utilisera les notations suivantes. Soit ψ une fonction scalaire et dérivable sur X à valeur réelle et $x \in X$. On définit $j_{\psi}(x) \in T^*X$ par $j_{\psi}(x) = (x, -2i(\partial\psi/\partial x)(x))$. Pour $W \subset X$, on définit $A_{\psi}(W)$ par $A_{\psi}(W) = \{x \in W : j_{\psi}(x)\}$. Pour $x \in X$, on note $x = (x_1, x')$ avec $x_1 \in \mathbf{C}$ et $x' \in \mathbf{C}^2$. On définit $\varphi_0(x)$ par $\varphi_0(x) = |\text{Im } x|^2/2$. On note I_0 le 3×3 matrice d'unité et $\mathbf{N} = \{1, 2, 3 \dots\}$.

§2. Rappels sur l'Équation des Ondes

Dans cette section, nous faisons quelques rappels sur l'équation des ondes, qui joueront le rôle principal pour la preuve de Théorème 1. On conserve ici les notations dans §0 et §1.

Soit $\square_j = ((\partial/\partial t)^2 - c_j^2 \Delta)I_0$ dans $\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^3$, où $c_1 = (\lambda_0 + 2\mu_0)^{1/2}$, $c_2 = \mu_0^{1/2}$. On suppose que (H.1) et (H.2) sont vérifiées. Selon Bardos–Lebeau–Rauch [1, §5] ou Lafitte [8, §5], il existe une coordonné (y'', y_3) ; $y'' \in \mathbf{R}^2$, $y_3 \in \mathbf{R}$ et une fonction scalaire et analytique $\beta(y'', y_3)$ près de $z \in \partial\Omega$ vérifiant $\beta = 1$ sur $\{y_3 = 0\}$ telles que, comme l'opérateur différentiel, on ait

$$(2.1) \quad \beta^{-1} \Delta \beta = (\partial/\partial y_3)^2 + q(y'', y_3, -i\partial/\partial y''),$$

où q est l'opérateur différentiel scalaire avec l'ordre 2 dont la partie principale est réelle. Ici, $\{y_3 > 0\}$ correspond localement à Ω . D'après (2.1), on a

$$(2.2) \quad c_j^{-2} \beta^{-1} \square_j \beta = -(\partial/\partial y_3)^2 + (-q(y'', y_3, -i\partial/\partial y'') + c_j^{-2}(\partial/\partial t)^2).$$

Remarque. La notation q à (2.1) et (2.2) est différente de q à §0.

Prenons la transformation FBI tangentielle associée à la transformation canonique

$$(2.3) \quad \chi_1 : (T^*N, \omega_0) \rightarrow (X, -2i\bar{\partial}\partial\varphi)$$

où $X \subset \mathbb{C}^3$ est ouvert, φ est la fonction scalaire qui est strictement pluri sous-harmonique sur X , ω_0 est la 2 forme canonique de T^*N et $N = (-\varepsilon, T) \times (W_0 \cap \partial\Omega)$. Selon [1, §5], cette transformation FBI entraîne la transformation;

$$(2.4) \quad \begin{aligned} T^*N \ni \rho_0 &\rightarrow x_0 \in X \\ (c_j^{-2}\beta^{-1}\square_j\beta)I_0 &\rightarrow \lambda^2 P_j, \quad j = 1, 2 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} (P_j f)(x_4, x, \lambda) &= \lambda^{-2}(\partial/\partial x_4)^2 f(x_4, x, \lambda) \\ &\quad + (2\pi/\lambda)^3 \int_{\Sigma_0} \exp(i\lambda(x-y)\xi) (\ell^{(j)}(x_4, x, \xi, \lambda) I_0) f(x_4, y, \lambda) dy \wedge d\xi, \end{aligned}$$

Σ_0 : le contour d'intégration; $\xi = -2i(\partial\varphi/\partial x)(x) + iC(\bar{x} - \bar{y})$, $|x - y| \leq r$ avec $C \geq 1$ suffisamment grand, rC suffisamment petit,

$f \in H_\varphi^{+\rho}(X)$ avec $\rho > 0$ suffisamment petit,

$\ell^{(j)}$: symbole (scalaire) analytique classique de degré 0, c.-à-d. il existe une suite $\{\ell_k^{(j)}(x_4, x, \xi)\}_{k=0}^\infty$ de fonction holomorphe sur $\Omega_0 \subset \mathbb{C} \times T^*X$ voisinage complexe ouvert de $[0, \rho] \times \{j_\varphi(x_0)\}$ et des constantes A et B tels que pour tout M et tout $\lambda \geq 1$ on ait

$$(2.5) \quad \sup \left\{ \left| \ell^{(j)}(x_4, x, \xi, \lambda) - \sum_{k=0}^M \ell_k^{(j)}(x_4, x, \xi) \lambda^{-k} \right| : (x_4, x, \xi) \in \Omega_0 \right\} \leq AB^M M! \lambda^{-M-1}.$$

La région elliptique E^j , hyperbolique H^j , Glancing G^j dans X pour chaque $P_j; j = 1, 2$ est défini par

$$\begin{aligned} E^j &= \pi\{A_\varphi(X) \cap \{r_0^{(j)} < 0\}\}, & H^j &= \pi\{A_\varphi(X) \cap \{r_0^{(j)} > 0\}\}, \\ G^j &= \pi\{A_\varphi(X) \cap \{r_0^{(j)} = 0\}\}, \end{aligned}$$

où π est la projection de T^*X sur X , $r_0^{(j)}(x, \xi) = \ell_0^{(j)}(0, x, \xi)$. Notons que l'on a $x_0 \in G^1$.

Comme Lebeau [14, §1], on peut supposer que

$$\begin{aligned} \varphi(x) = \varphi_0(x) &= |\operatorname{Im} x|^2/2, & E^1 &= \{z \in X : \operatorname{Im} z_1 > 0\}, \\ H^1 &= \{z \in X : \operatorname{Im} z_1 < 0\}, & G^1 &= \{z \in X : \operatorname{Im} z_1 = 0\}, \\ x_0 &= (0, x'_0) \text{ avec } x'_0 \in \mathbf{C}^2, & \operatorname{Re} x'_0 &= 0. \end{aligned}$$

Définition 2.1. Soit $(y, \eta) \in A_{\varphi_0}(X)$. Les flots sortants de (y, η) , notés $F^j(y, \eta)$, $j = 1, 2$ sont les sous-ensembles de $A_{\varphi_0}(X) \cup (T^*\mathbf{R}_+ \times A_{\varphi_0}(X))$ définis comme ci-dessous.

Lorsque $(y, \eta) \in A_{\varphi_0}(E^j)$, $F^j(y, \eta) = \{(y, \eta)\}$.

Lorsque $(y, \eta) \in A_{\varphi_0}(G^j \cup H^j)$, $F^j(y, \eta) = \{(y, \eta)\} \cup \{\exp sH_{p^{(j)}}(y_4, \eta_4; y, \eta) : s > 0\}$ avec $p^{(j)} = -\xi_4^2 + \ell_0^{(j)}(x_4, x, \xi)$, $y_4 = 0$, $\eta_4 = \phi_j(y, \eta)$,

$\phi_j(y, \eta)$: la solution de $\phi_j(y, \eta)^2 = r_0^{(j)}(y, \eta)$, $\phi_j(y, \eta) \leq 0$,

$H_{p^{(j)}}$: le champ hamiltonien de $p^{(j)}$.

Remarque. $\ell_0^{(j)}(x_4, x, \xi)$ est réel si $x_4 \in \mathbf{R}_+$ et $(x, \xi) \in A_{\varphi_0}(X)$.

Soit $g \in H_{\varphi_0}(X)$ avec $SS_{\varphi_0}^X(g)$ suffisamment petit dans X , $\rho > 0$ suffisamment petit, $j = 1$ ou 2 et $\tilde{\pi}$ la projection de $T^*X \cup (T^*\mathbf{R}_+ \times T^*X)$ sur $X \cup (T^*\mathbf{R}_+ \times X)$.

Définition 2.2. On dit que $f \in H_{\varphi_0}^{+, \rho}(X)$ est la solution sortante de l'équation

$$(2.6) \quad \begin{cases} P_j w = 0 \\ w|_{x_4=0} = g \end{cases} \quad \text{si} \quad \begin{cases} SS_{\partial, \varphi_0}^{W, \rho}(P_j f) = \phi, \\ f(0, x, \lambda) = g(x, \lambda), \\ SS_{\partial, \varphi_0}^{W, \rho}(f) \subset \tilde{\pi} \circ F^j(\Gamma_j), \end{cases}$$

où $\Gamma_j = A_{\varphi_0}(SS_{\varphi_0}^X(g)) \cup \{\exp sH_{r_0^{(j)}}(A_{\varphi_0}(SS_{\varphi_0}^X(g) \cap G^j)) : s > 0\}$ et W est un voisinage ouvert de $SS_{\varphi_0}^X(g)$ dans X .

Définition 2.3. L'opérateur $B_m^{[j]} : \{g \in H_{\varphi_0}(X) : g \text{ est à croissance dans } X\} \rightarrow H_{\varphi_0}(X_0)$ avec $j \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $m = 1, 2$, $x_0 \in X_0 \Subset X$, X_0 suffisamment petit, est défini par

$$(2.7) \quad B_m^{[j]} = ((\partial/\partial x_4)^j R_m Q_m g)|_{x_4=0} \quad \text{avec}$$

$Q_m g$: la solution sortante de (2.6) dans lequel j est remplacé par m ,
 R_j : réalisation dans $H_{\varphi_0}^{+, \rho}(X)$ de l'opérateur différentiel $\beta^{-1} \operatorname{grad} \operatorname{div} \beta$ dans \mathbf{R}_v^3 ,

R_2 : réalisation dans $H_{\varphi_0}^{+, \rho}(X)$ de l'opérateur différentiel $-\beta^{-1} \text{rot rot } \beta$ dans \mathbf{R}_x^3 .

Ici, ces réalisations sont faites par la même transformation FBI tangentielle associée à (2.3) dans §2. La notation "rot" signifie la rotation de vecteur.

Soit $\tilde{x} \in H^j$, $j = 1$ ou 2 . Selon la propriété de la solution de l'équation des ondes dans la région hyperbolique, $B_m^{[j]}$ est opérateur pseudo-différentiel à \tilde{x} , c.-à-d. il existe $b^{j,m}(x, \xi, \lambda)$ le symbol analytique classique formel de degré 0 à \tilde{x} , dont la valeur est 3×3 matrice, avec la somme formelle

$$(2.8) \quad b^{j,m}(x, \xi, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{j,m}(x, \xi) \lambda^{-k},$$

telle que

$$(2.9) \quad \lambda^{-6} (B_m^{[j]} g)(x, \lambda) = (\lambda/2\pi)^3 \sum_{0 \leq k \leq \lambda/M} \int_{\Sigma_0} \exp(i\lambda(x-y)\xi) \times \lambda^{-k} b_k^{j,m}(x, \xi) g(y, \lambda) dy \wedge d\xi,$$

Σ_0 : contour d'intégration, $\xi = -\text{Im } x + iC(\bar{x} - \bar{y})$, $|x - y| < r$, $C \gg 1$, $0 < rC \ll 1$ et $M \gg 1$. Voir Sjöstrand [19] et Stefanov-Vodev [21].

On utilisera dans §5 l'opérateur $B_m^{[j]}$ afin de réduire l'analyse de l'équation élastique à celle de l'équation des ondes.

§3. La Description du Résultat dans l'Espace de Sjöstrand

On conserve les notations dans §0-§2. Soit M la réalisation dans $H_{\varphi_0}^{+, \rho}(X)$ de l'opérateur différentiel $-(\partial/\partial t)^2 + \beta^{-1} A(\partial_x) \beta$ dans $\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^3$, faite par la même transformation FBI tangentielle associée à (2.3), que l'on a utilisé dans §2. Alors, M est la 3×3 matrice dont chaque élément est l'opérateur différentiel par rapport à x_4 et celui pseudo-différentiel par rapport à $x \in X$.

Définition 3.1. Soit $g \in H_{\varphi_0}(X)$ avec $SS_{\varphi_0}^X(g)$ suffisamment petit dans X . On dit que $f \in H_{\varphi_0}^{+, \rho}(X)$ est solution sortante de

$$(3.1) \quad \begin{cases} Mw = 0 \\ w|_{x_4=0} = g \end{cases} \quad \text{si} \quad \begin{cases} SS_{\partial, \varphi_0}^{W, \rho}(Mf) = \phi, \\ f(0, x, \lambda) = g(x, \lambda) \\ SS_{\partial, \varphi_0}^{W, \rho}(f) \subset \tilde{\pi}(F^1(A) \cup F^2(A)) \end{cases}$$

où

$$A = A_{\varphi_0}(SS_{\varphi_0}(g)) \cup K_1 \cup K_2,$$

$$K_j = \{\exp sH_{r_0}^{j,l}(A_{\varphi_0}(SS_{\varphi_0}^X(g) \cap G^j)) : s > 0\}, \quad j = 1, 2$$

W : un voisinage ouvert de $SS_{\varphi_0}^X(g)$,

$\tilde{\pi}$: la projection de $T^*X \cup (T^*\mathbf{R}_+ \times T^*X)$ sur $X \cup (T^*\mathbf{R}_+ \times X)$.

Soit $-1 \ll a_1 < \varepsilon_0 < 0 < \varepsilon_1 < b_1 \ll 1$, $0 < \varepsilon_j \ll 1$, $j = 2, 3$ et un voisinage ouvert $\omega_1 \subset X$ de x_0 vérifiant $\omega_1 \subset \{x \in X : \varepsilon_0 < \operatorname{Re} x_1 < \varepsilon_1, |\operatorname{Im} x_1| < \varepsilon_2, |x' - x'_0| < \varepsilon_3\}$. Notre but est de prouver le théorème suivant, qui implique Théorème 1.

Théorème 3.2. *Soit $g \in H_{\varphi_0}(X)$, qui est à croissance, vérifiant $SS_{\varphi_0}(g) \subset \omega_1$. Soit $f \in H_{\varphi_0}^{+, \rho}(X)$ la solution sortante de (3.1). Alors, pour tout $v \in G^1$ vérifiant $\varepsilon_1 < \operatorname{Re} v_1 < b_1$, il existe un voisinage $\omega_2 \subset X$ de v , $C > 0$, $\delta > 0$ tels que pour tout $x \in \omega_2$, $\lambda \geq 1$, on ait*

$$(3.2) \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x_4}(0, x, \lambda) \right| \leq C \exp\left(\frac{\lambda}{2} |\operatorname{Im} x'|^2 - \delta \lambda^{1/3}\right).$$

La preuve de Théorème 3.2 sera donnée dans §5.

§ 4. Opérateurs Unilatéraux

On étudie ici l'algèbre des opérateurs unilatéraux et son action sur des fonctions dans l'espace de Sjöstrand. L'argument est essentiellement pareil à Lebeau [14, §4].

4-1. Algèbre des Opérateur Unilatéraux

Dans $T^*\mathbf{C}^3$ muni du système de coordonnées $(x, \xi) : x = (x_1, x_2, x_3) = (x_1, x')$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\xi_1, \xi')$, on définit $V \subset T^*\mathbf{C}^3$ par

$$V = \{(x, \xi) \in T^*\mathbf{C}^3 : \xi_1 = 0\}$$

et $V_0 \subset \mathbf{C}^3$ par $V_0 = \pi(V \cap A_{\varphi_0}(\mathbf{C}^3))$, où $\varphi_0(x) = |\operatorname{Im} x|^2/2$ et π est la projection de $T^*\mathbf{C}^3$ sur \mathbf{C}^3 . Alors, on a $V_0 = \{x \in \mathbf{C}^3 : \operatorname{Im} x_1 = 0\}$.

Soit $m \in V$ avec $m = (z_0; 0, \xi'_0)$, $z_0 \in \mathbf{C}^3$, $\xi'_0 \in \mathbf{C}^2$. Pour $s > 0$ et $\delta > 0$, on définit $\Omega(\lambda, s, \delta, \gamma)$ par

$$(4.1.1) \quad \Omega(\lambda, s, \delta, \gamma) = \{(x, \xi) \in T^*\mathbf{C}^3 : |x - z_0| < s, |\xi' - \xi'_0| < s, |\xi_1| < s, \operatorname{Im} \xi_1 - \gamma \lambda^{-2/3} < \delta |\operatorname{Re} \xi_1|\}.$$

Lorsque $f(x, \xi, \lambda)$ est une fonction à valeur 3×3 matrice définie sur $\Omega(\lambda, s, \delta, \gamma)$, pour $\lambda \geq 1$, holomorphe en (x, ξ) , on pose, pour tout entier $n \geq 0$,

$$(4.1.2) \quad |f|_{s, \delta, n}(\lambda) = \sup\{ |(\xi_1 - i\gamma\lambda^{-2/3})^n f(x, \xi, \lambda)| : (x, \xi) \in \Omega(\lambda, s, \delta, \gamma) \}.$$

Ici, $|a| = (\sum_{k,j=1}^3 |a_{k,j}|^2)^{1/2}$ lorsque a est la 3×3 matrice dont chaque élément est $a_{k,j}$. On note $B_{s, \delta, n}$ l'ensemble des f tels que $|f|_{s, \delta, n}(\lambda)$ soit fini et borné comme fonction de λ .

Définition 4.1.1. $\mathcal{E}_{V, m, \gamma}^+$ est l'ensemble des séries formelles

$$(4.1.3) \quad p = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x, \xi, \lambda)(iT)^{-k}$$

telles qu'il existe $s, \delta, A, B > 0$ vérifiant $p_k \in B_{s, \delta, k}$ et

$$(4.1.4) \quad |p_k|_{s, \delta, k} \leq AB^k k!$$

pour tout $k \geq 0$. On appelle p_0 la partie principale de p .

Pour $p, q \in \mathcal{E}_{V, m, \gamma}^+$, on définit $b = p * q$ par

$$(4.1.5) \quad b = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x, \xi, \lambda)(iT)^{-n} \quad \text{avec} \quad b_n = \sum_{|\alpha|+j+k=n} (\alpha!)^{-1} \partial_{\xi}^{\alpha} p_k \partial_x^{\alpha} q_j.$$

Selon Lebeau [14, Proposition 4.1.1 dans §4] et sa démonstration, on peut savoir que $(\mathcal{E}_{V, m, \gamma}^+, *, +)$ est anneau. Voir aussi Lafitte [8, Proposition 3 dans §3].

Définition 4.1.2. On dit que $q \in \mathcal{E}_{V, m, \gamma}^+$ est elliptique s'il existe $s, \delta, M > 0$, qui sont indépendants de λ , tels que

$$1/M \leq |\det q_0(x, \xi, \lambda)| \leq M \quad \text{pour} \quad (x, \xi) \in \Omega(\lambda, s, \delta, \gamma),$$

où q_0 est la partie principale de q .

Selon Lebeau [14, Proposition 4.1.3] et sa démonstration, on obtient la proposition suivante:

Proposition 4.1.3. (Lebeau [14]) Soit $q \in \mathcal{E}_{V, m, \gamma}^+$ elliptique. Alors, il existe un unique $p \in \mathcal{E}_{V, m, \gamma}^+$ tel que $q * p = p * q = 1$.

§4-2. Actions des Opérateurs

Soit $m = (z_0; 0, \xi'_0) \in V$ mentionné dans §4-1. Dans cette section, on suppose que $m \in \Lambda_{\theta_0}(V_0)$. Alors, on a $z_0 \in V_0$ et $\xi'_0 = -\text{Im } z'_0$. Ici, $z_0 = (z_{0,1}, z'_0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^2$. On suppose aussi que $z_{0,1} = 0$.

On définit $\Omega_0 \subset \mathbf{C}$ par

$$(4.2.1) \quad \Omega_0 = \{x \in \mathbf{C} : a_0 < \operatorname{Re} x < b_0, |\operatorname{Im} x| < c_0\}$$

avec $-1 \ll a_0 < 0 < b_0 \ll 1, 0 < c_0 \ll 1$.

Soit $w \in H_{\varphi_0}(\bar{\Omega}_0 \times U)$ avec un voisinage ouvert U de z'_0 dans \mathbf{C}^2 . Ici, $H_{\varphi_0}(\bar{\Omega}_0 \times U)$ est l'ensemble de $v \in H_{\varphi_0}(\Omega_0 \times U)$ vérifiant $\sup\{\exp(-\lambda(\varphi_0(y) + \varepsilon))|v(y, \lambda)| : y \in \Omega_0 \times K_0, \lambda \geq 1\} < \infty$ pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $K_0 \Subset U$ compact. On définit alors la tronquature T_0 par

$$(4.2.2) \quad (T_0 w)(x, \lambda) = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{\Omega_0} \exp\left(-\frac{\lambda}{4}(x_1 - \bar{y}_1)^2 - \lambda|\operatorname{Im} y_1|^2\right) \times w(y_1, x', \lambda) d(\operatorname{Re} y_1) d(\operatorname{Im} y_1).$$

Comme Lebeau [14, §4.2], on a $(x_1, x') \notin SS_{\varphi_0}(T_0 w - w)$ si $x_1 \in \Omega_0$ et $(x_1, x') \notin SS_{\varphi_0}(T_0 w)$ si $x_1 \notin \bar{\Omega}_0$. Voir aussi Lebeau [14, Estimation 4.2.3 dans la page 1469].

Soit $\gamma > 0$. On définit $D_\gamma^{-k} w : k = 0, 1, 2 \dots$ par

$$(4.2.4) \quad \begin{cases} D_\gamma^0 w = w \\ (D_\gamma^{-k} w)(x_1, x', \lambda) = \int_a^{x_1} \exp(-\gamma\lambda^{1/3}(x_1 - s)) \times \frac{(x_1 - s)^{k-1}}{(k-1)!} w(s, x', \lambda) ds, \quad k \geq 1. \end{cases}$$

avec $a = a_0 - d, d > 0$ suffisamment petit. Selon Lebeau [14, Estimation 4.2.19 dans la page 1471], on a

$$(4.2.5) \quad |\exp(-\lambda\varphi_0(x)) D_\gamma^{-k}(T_0 w)(x, \lambda)| \leq (\lambda/2\pi)(A_0^k/k!) \sup\{|\exp(-\lambda\varphi_0(y))w(y, \lambda)| : y \in \Omega_0, y' \in U\}$$

pour tout $x = (x_1, x')$ avec $x_1 \in \Omega_0, x'$ près de 0 et tout $\lambda \geq 1$. Ici,

$$(4.2.6) \quad A_0 = (c_0^2 + (b_0 - a)^2)^{1/2}.$$

Soit $p \in \mathcal{E}_{V, m, \gamma}^+$ avec

$$(4.2.7) \quad p = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x, \xi, \lambda)(iT)^{-k}.$$

On suppose que

$$(4.2.8) \quad BA_0 < 1$$

avec B à (4.1.4) et Δ_0 à (4.2.6). On définit $Op_2^\gamma(p)$ par

$$(4.2.9) \quad Op_2^\gamma(p)w = \sum_{k=0}^{\infty} Op_3^\gamma(\tilde{p}_k)(D_\gamma^{-k}T_0w),$$

où

$$(4.2.10) \quad \tilde{p}_k(x, \xi, \lambda) = (\xi_1 - i\gamma\lambda^{-2/3})^k p_k(x, \xi, \lambda),$$

$$(4.2.11) \quad (Op_3^\gamma(\tilde{p}_k)v)(x, \lambda) = (\lambda/2\pi)^4 \int_{\Sigma'} dy' \wedge d\xi' \int_a^b dy_1 \\ \int_{\xi_1^-}^{\xi_1^+} d\xi_1 \exp(i\lambda(x-y)\xi) \tilde{p}_k(x, \xi, \lambda)(T_0v)(y, \lambda),$$

Σ' : contour d'intégration, $\xi' = -\text{Im } x' + iC(\bar{x}' - \bar{y}')$,

$$|x' - y'| < r, \quad C \gg 1, \quad 0 < rC \ll 1, \quad d > 0, \quad b = b_0 + d,$$

$$\xi_1^\pm \in \mathbf{R}, \quad \xi_1^+ = -\xi_1^- > 0, \quad |\xi_1^\pm| > c_0, \quad d^2 > 4|\xi_1^\pm|c_0.$$

Selon Lebeau [14, Estimation 4.2.5 dans la page 1469] et l'hypothèse (4.2.8), la somme du membre droit de (4.2.9) converge lorsque $w \in H_{\phi_0}(\bar{\Omega}_0 \times U)$. En plus, on obtient

$$(4.2.12) \quad Op_2^\gamma(p)w \in H_{\phi_0}(\bar{\Omega}_0 \times U')$$

avec $z'_0 \in U' \Subset U$, U' suffisamment petit, lorsque $w \in H_{\phi_0}(\bar{\Omega}_0 \times U)$.

Soit q un symbole analytique classique formel à m , dont la valeur est 3×3 matrice, avec la somme formelle

$$(4.2.13) \quad q = \sum_{k=0}^{\infty} q_k(x, \xi)(i\lambda)^{-k}.$$

On définit $\mu(q)$ par la somme formelle

$$(4.2.14) \quad \mu(q) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k(x, \xi)(iT)^{-k}.$$

Alors, il existe $\gamma > 0$ tel que l'on ait $\mu(q) \in \mathcal{E}_{V, m, \gamma}^+$. Voir Définition 4.1.1 et Lebeau [13, III.2]. On définit $\widetilde{Op}_2^\gamma(q)$ par

$$(4.2.15) \quad \widetilde{Op}_2^\gamma(q) = Op_2^\gamma(\mu(q)).$$

Soit $p \in \mathcal{E}_{V, m, \gamma}^+$ avec la somme formelle (4.2.7) et $z_1 \in \mathbb{C}^3$ près de z_0 vérifiant $z_1 \notin V_0$. On définit $v(p)$ par la somme formelle

$$(4.2.16) \quad v(p) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x, \xi, \lambda)(i\lambda)^{-k}.$$

On définit $\widetilde{Op}_1(p)$, la quantification de p près de $j_{\varphi_0}(z_1) \in A_{\varphi_0}(\mathbf{C}^3)$, par

$$(4.2.17) \quad \widetilde{Op}_1(p) = Op_1(v(p)),$$

où $Op_1(v(p))$ est la quantification ordinaire de $v(p)$, c.-à-d.

$$(4.2.18) \quad (Op_1(v(p))v)(x, \lambda) = \sum_{0 \leq k \leq \lambda/M} (\lambda/2\pi)^4 \int_{\Sigma_0} \exp(i\lambda(x-y)\xi)(i\lambda)^{-k} \\ \times p_k(x, \xi, \lambda)v(y, \lambda)dy \wedge d\xi, \\ \Sigma_0 : \text{contour d'intégration,} \quad \xi = -\text{Im } x + iC(\bar{x} - \bar{y}), \\ |x - y| < r, \quad C \gg 1, \quad 0 < rC \ll 1, \quad M \gg 1.$$

Selon Lebeau [14, Proposition 4.2.1 dans la page 1469 et Théorème 4.2.1 dans la page 1472] et sa preuve, on obtient la proposition suivante:

Proposition 4.2.1. (Lebeau [14]) *Soit $p, q \in \mathcal{E}_{V, m, \gamma}^+$, $\gamma > 0$, $w \in H_{\varphi_0}(\bar{\Omega}_0 \times U)$, qui est à croissance, avec $|a_0|$, b_0 , c_0 suffisamment petits. On suppose qu'il existe $a_1 \in (a_0, b_0)$ telle que l'on ait*

$$(4.2.19) \quad V_0 \cap \{x \in \mathbf{C}^3 : a_0 < \text{Re } x_1 < b_0\} \cap SS_{\varphi_0}(w) \subset \{x \in \mathbf{C}^3 : \text{Re } x_1 \geq a_1\}.$$

Alors, on a (i)–(v) suivants.

(i) [Unilatéralité] *On a $V_0 \cap \{x \in \mathbf{C}^3 : a_0 < \text{Re } x_1 < b_0\} \cap (SS_{\varphi_0}(Op_2^\gamma(p)w)) \subset \{x \in \mathbf{C}^3 : \text{Re } x_1 \geq a_1\}$.*

(ii) [Propriété locale de la régularité Gevrey 3] *Si $V_0 \cap \{x \in \mathbf{C}^3 : a_0 < \text{Re } x_1 < b_0\} \cap SS_{\varphi_0}(w) \subset \{x \in \mathbf{C}^3 : a_1 \leq \text{Re } x_1 \leq b_1\}$ avec $b_1 \in [a_1, b_0)$, alors, pour tout $z \in \mathbf{C}^3$ vérifiant $\text{Im } z_1 = 0$, $b_1 < \text{Re } z_1 < b_0$, il existe un voisinage $\omega_2 \subset \mathbf{C}^3$ de z , $\delta > 0$, $C > 0$ tels que l'on ait*

$$(4.2.20) \quad |(Op_2^\gamma(p)w)(x, \lambda)| \leq C \exp\left(\frac{\lambda}{2} |\text{Im } x'|^2 - \delta \lambda^{1/3}\right).$$

pour tout $x \in \omega_2$ et tout $\lambda \geq 1$.

(iii) [Calcul symbolique] *On a $V_0 \cap \{x \in \mathbf{C}^3 : a_0 < \text{Re } x_1 < b_0\} \cap SS_{\varphi_0}(Ew) = \phi$, où $E = Op_2^\gamma(p * q) - Op_2^\gamma(p)Op_2^\gamma(q)$.*

(iv) *Soit $z_1 \in \mathbf{C}^3$ près de z_0 vérifiant $z_1 \notin V_0$. Alors, on a*

$$z_1 \notin SS_{\varphi_0}(Op_2^\gamma(p)w - \widetilde{Op}_1(p)w).$$

(v) *Soit h symbole analytique formel à m , qui est une 3×3 matrice. Alors, on a*

$$V_0 \cap \{x \in \mathbf{C}^3 : a_0 < \text{Re } x_1 < b_0\} \cap SS_{\varphi_0}(\widetilde{Op}_2^\gamma(h)w - Op_1(h)w) = \phi.$$

Remarque. Lebeau [14] a prouvé Proposition 4.2.1 en utilisant des arguments de la deuxième microlocalisation sur l'espace conormal de V_0 . Voir [14, A.63 dans la page 1489–1493].

§5. Preuve de Théorème 3.2 et Théorème 1

Nous suivons ici l'argument de Lebeau [14, §1–§3]. Rappelons que dans §3 on a étudié l'opérateur P_1 ;

$$P_1 = \lambda^{-2}(\partial/\partial x_4)^2 + Op_1(\ell^{(1)}(x_4, x, \xi, \lambda)I_0) \quad \text{avec}$$

$$\ell^{(1)}(x_4, x, \xi, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \ell_k^{(1)}(x_4, x, \xi) \lambda^{-k} \quad \text{formellement.}$$

Selon Lebeau [14, §1] et l'hypothèse (H.2),

$$(5.1) \quad -\xi_4^2 + \ell_0^{(1)}(x_4, x, \xi) = 0$$

est équivalent à

$$(5.2) \quad x_4 + q(x, \xi, \xi_4^2) = 0 \quad \text{avec}$$

$$q(x, \xi, \xi_4^2) = \xi_1 - e(x, \xi) \xi_4^2 + O(\xi_4^4),$$

q est réel si $(x, \xi) \in A_{\varphi_0}(X)$, $\xi_4 \in \mathbb{R}$.

Remarque. La notation q en (5.2) est différente de celle en (2.1) dans §2.

Soit $\Psi(x, \xi_4, y, \eta)$ la solution des équations d'Hamilton-Jacobi:

$$(5.3) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_4} = q\left(x, \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \xi_4^2\right) \\ \Psi|_{\xi_4=0} = (x - y)\eta. \end{cases}$$

Alors, on a

$$\Psi(x, \xi_4, y, \eta) = \Psi_0(x, \eta, \xi_4) - y\eta \quad \text{avec} \quad \Psi_0(x, \eta, \xi_4) = \Psi(x, \xi_4, 0, \eta).$$

Comme Lebeau [14, §2] a étudié, Ψ entraîne la transformation canonique singulière

$$(5.4) \quad \chi_0 : A_{\varphi_0}(X) \rightarrow A_{\psi_0}(X)$$

où ψ_0 est la fonction à valeur réelle de classe $C^{1,1}$, c.-à-d. fonction dérivable à dérivée lipschitzienne, dans X . En plus, ψ_0 est strictement pluri sous-harmonique hors de $\{x \in X : \text{Im } x_1 = 0\}$ et vérifie

$$\chi_0[A_{\varphi_0}(X) \cap \{(x, \xi) \in T^*X : \xi_1 = 0\}] = A_{\psi_0}(X) \cap \{(x, \xi) \in T^*X : \xi_1 = 0\},$$

$$\chi_0(j_{\varphi_0}(x_0)) = j_{\psi_0}(x_0) \quad \text{et} \quad \psi_0(y) = \varphi_0(y) \quad \text{si} \quad \text{Im } y_1 \leq 0.$$

Comme Lebeau [14, 2.21 dans la page 1449], on introduit les fonctions $A(x, \xi)$, $B(x, \xi)$ en posant

$$\{\text{Valeurs critiques } [\xi_4 \rightarrow \Psi_0(x, \xi, \xi_4)]\} = x\xi - B(x, \xi) \pm (2/3)A(x, \xi)^{3/2}.$$

On définit $\rho(x, \xi)$ par

$$(5.5) \quad A(x, \xi) = \xi_1 \rho(x, \xi).$$

Pour $t \in \mathbf{C}$, $(z; t^2, \eta') \in T^*X$, on définit $F(z; t, \eta')$ par

$$(5.6) \quad F(z; t, \eta') = B(z; t^2, \eta') + \frac{2}{3}t^3 \rho(z; t^2, \eta')^{3/2}.$$

Soit $h(x_4, x, y, \eta, \xi_4, \lambda)$ un symbole analytique classique, qui est 3×3 matrice, près de $x_4 = 0$, $x = y = x_0$, $\eta = -\text{Im } x_0$, $\xi_4 = 0$. On note J_h l'opérateur intégral

$$(5.8) \quad (J_h f)(x_4, x, \lambda) = \int_{\xi_4^-}^{\xi_4^+} d\xi_4 \int_{\Sigma_0} dy \wedge d\eta$$

$$\exp(i\lambda(\Psi(x, \xi_4, y, \eta) + x_4 \xi_4)) h(x_4, x, y, \eta, \xi_4, \lambda) f(y, \lambda)$$

où

$$(5.9) \quad \xi_4^+ = i\delta_0 + \delta_1 \delta_0^{3/2}, \quad \xi_4^- = -\delta_0 - i\delta_0^2 \delta_2, \quad \delta_0, \delta_1, \delta_2 \in \mathbf{R},$$

$$\Sigma_0 : \text{contour d'intégration}, \quad \eta = -\text{Im } x + iC(\bar{x} - \bar{y}),$$

$$|x - y| < r, \quad C \gg 1, \quad 0 < rC \ll 1, \quad |y| \leq d_1$$

$$(5.10) \quad f \in H_{\psi_0}(\{y : |y - x_0| \leq d_0\}) \quad \text{avec}$$

$$d_1 \leq D_1 d_0, \quad C \geq D_1^{-1}, \quad d_1 C \leq D_0,$$

$$|\delta_1| < D_0, \quad 0 < \delta_2 \leq D_0, \quad 0 < \delta_0 < D_1 d_1,$$

$$D_0, D_1 : \text{constantes vérifiant} \quad D_0 \gg D_1 > 0.$$

Selon Lebeau [14, §3], on a

$$(5.11) \quad J_h f \in H_{\varphi_0}^{+, \rho}(\{x : |x - x_0| < d_2\})$$

pour d_2 et ρ suffisamment petits. En plus, on a

$$(5.12) \quad SS_{\partial, \varphi_0}(J_h f) \subset \tilde{\pi} \circ F^1(\chi_0^{-1}(A_{\psi_0}(SS_{\psi_0} f)))$$

où $\tilde{\pi}$ est la projection définie au dessus de Définition 2.2 et il existe un symbole

(scalaire) analytique classique $\sigma(x_4, x, y, \eta, \xi_4, \lambda)$ tel que

$$(5.13) \quad \sigma(x_4, x, y, \eta, 0, \lambda) \equiv 1 \quad \text{et} \quad SS_{\partial, \vartheta_0}(P_1 J_h f) = \phi$$

lorsque $h = \sigma I_0$.

On fixe $\tau > 0$ suffisamment grand. On définit la fonction $\sigma_1^\tau(z, t, \xi', \lambda)$ par

$$(5.14) \quad \sigma_1^\tau(z, t, \xi', \lambda) = (v + \tau)^{1/4} \exp\left(\frac{2}{3} \left((v + \tau)^{1/2} \left(v - \frac{\tau}{2} \right) - v^{3/2} \right)\right)$$

avec $v = (\exp(i\pi/3))\lambda^{2/3} t^2 \rho(z, t^2, \xi')$. On définit un opérateur d'intégral I par

$$(5.15) \quad (If)(y, \lambda) = \int_{z_1^-}^{z_1^+} dz_1 \int_{t^-}^{t^+} 2t dt \int_{\Sigma'} dz' \wedge d\xi' \\ \exp(i\lambda((y' - z')\xi' + (y_1 - z_1)t^2 + F(z, t, \xi'))) \\ \times \sigma_1^\tau(z, t, \xi', \lambda)(T_0 f)(z, \lambda)$$

où

$$z_1^+ = -z_1^- \in \mathbf{R}_+, \quad |z_1^+| = d_3, \quad \arg t^- = -\pi/2, \quad \arg t^+ = \alpha, \\ |t^+| = |t^-| \quad \text{avec } d_3, \alpha > 0 \quad \text{suffisamment petit, } |t^+| \ll d_3 \sin \alpha,$$

le chemin d'intégration de t^- à t^+

reste dans $\{t \in \mathbf{C} : \arg t \in [-\pi/2, \alpha]\}$,

$$f \in H_{\vartheta_0}(\{x : |x - x_0| < d_4\}), \quad 0 < d_3 \ll d_4 \ll 1,$$

$$\Sigma' : \text{contour d'intégration,} \quad \xi' = -\text{Im } y' + iC(\overline{y'} - \overline{z'}),$$

$$|y' - z'| < d_3, \quad C \gg 1, \quad 0 < d_3 C \ll 1,$$

T_0 : tronquature définie à (4.2.2) dans §4 avec

$$|a_0|, |b_0|, |c_0| > 0 \quad \text{suffisamment petits.}$$

Selon Lebeau [14, Proposition 3.2], on a

$$(5.16) \quad If \in H_{\psi_0}(\{x : |x - x_0| < d_5\})$$

avec $0 < d_5 \ll 1$.

Soit $h(x_4, x, y, \eta, \xi_4, \lambda)$ un symbole analytique classique, qui est une 3×3 matrice, près de $x_4 = 0$, $x = y = x_0$, $\eta = -\text{Im } x_0$, $\xi_4 = 0$. On définit l'opérateur \tilde{J}_h par

$$(5.17) \quad \tilde{J}_h(*) = J_h(*)|_{x_4=0}.$$

Remarque. Selon (5.12), \tilde{J}_h en (5.17) est une quantification de la transformation canonique χ_0^{-1} en (5.4).

Soit $m = j_{\varphi_0}(x_0) \in T^*X$ et $V = \{(x, \xi) \in T^*X : \xi_1 = 0\}$. Alors, on a $m \in V$. Selon Lebeau [14, §3 et §4], il existe $\gamma > 0$ et $\ell^h \in \mathcal{E}_{V, m, \gamma}^+$ tels que l'on ait

$$(5.18) \quad \tilde{J}_h I = Op_2^{\gamma}(\ell^h).$$

En plus, ℓ^h est elliptique dans $\mathcal{E}_{V, m, \gamma}^+$ si $h = \sigma I_0$ avec σ vérifiant (5.13). Voir Lebeau [14, Lemma 3.8 dans §3 et (4.2.23)–(4.2.25) dans la page 1472].

On définit $K^{[0]}$ par

$$(5.19) \quad K^{[0]} = \tilde{J}_h I \quad \text{avec} \quad h = \sigma I_0$$

et définit $k \in \mathcal{E}_{V, m, \gamma}^+$ par

$$(5.20) \quad k = \ell^h \quad \text{avec} \quad h = \sigma I_0, \quad \sigma \text{ vérifiant (5.13).}$$

Notons que $k \in \mathcal{E}_{V, m, \gamma}^+$ est elliptique.

Soit $g \in H_{\varphi_0}(\{|x| < d\})$, à croissance, $d > 0$ suffisamment petit. Selon (5.11)–(5.13) et [14, §3], $J_h I g$ est la solution sortante de

$$(5.21) \quad \begin{cases} P_1 w = 0 \\ w|_{x_4=0} = K^{[0]} g, \end{cases}$$

si $h = \sigma I_0$.

Soit $B_j^{[0]}$, R_j , Q_j , $j = 1, 2$ les opérateurs définis dans Définition 2.3 et $h(x_4, x, y, \eta, \xi_4, \lambda)$ un symbole analytique classique, qui est une 3×3 matrice, près de $x_4 = 0$, $x = y = x_0$, $\eta = -\text{Im } x_0$, $\xi_4 = 0$. Puisque chaque élément de R_1 est opérateur différentiel par rapport à x_4 et opérateur pseudo-différentiel par rapport à $x \in X$, il existe un symbole analytique classique, qui est 3×3 matrice et que l'on notera $\text{gr}(h)$, tel que

$$(5.22) \quad R_1 J_h = J_{\text{gr}(h)}.$$

Soit $g \in H_{\varphi_0}(\{|x| < d\})$, qui est à croissance, avec $SS_{\varphi_0}^X(g)$ suffisamment petit. Selon (5.21) et Stefanov–Vodev [21, §2], $(R_1 Q_1 + R_2 Q_2) K^{[0]} g$ est solution sortante de

$$(5.23) \quad \begin{cases} M w = 0 \\ w|_{x_4=0} = B^{[0]} K^{[0]} g \end{cases}$$

où $B^{[0]} = B_1^{[0]} + B_2^{[0]}$.

Dans la suite, on considère l'opérateur R comme 0, par abus de la notation, lorsque pour tout $w \in H_{\varphi_0}(X)$ vérifiant $V_0 \cap SS_{\varphi_0}(w) \subset \{x \in X : \text{Re } x_1 \geq 0\}$ on a $V_0 \cap \{x \in X : a_0 < \text{Re } x_1 < b_0\} \cap SS_{\varphi_0}(Rw) = \emptyset$.

Lemme 5.1.

(i) Il existe $\gamma > 0$ et $a \in \mathcal{E}_{V,m,\gamma}^+$ tels que l'on ait

$$(5.24) \quad B^{[0]}K^{[0]} = Op_2^\gamma(a).$$

(ii) $a \in \mathcal{E}_{V,m,\gamma}^+$ est elliptique.

Démonstration de Lemme 5.1. Soit $b = b^{0,1} + b^{0,2}$ avec $b^{0,n}$ défini par la somme formelle (2.8) dans §2.

(i) Rappelons que

$$(5.25) \quad B^{[0]}K^{[0]} = B_1^{[0]}K^{[0]} + B_2^{[0]}K^{[0]}.$$

Soit $h = \sigma I$ avec σ vérifiant (5.13). Selon la définition de $B_1^{[0]}$ et $K^{[0]}$, on a

$$(5.26) \quad B_1^{[0]}K^{[0]} = (R_1 J_h I)(*)|_{x_4=0} = J_{\text{gr}(h)} I(*)|_{x_4=0} = \widetilde{J_{\text{gr}(h)} I}.$$

Donc, il existe $\gamma > 0$ et $a^{(1)} \in \mathcal{E}_{V,m,\gamma}^+$ tels que

$$(5.27) \quad B_1^{[0]}K^{[0]} = Op_2^\gamma(a^{(1)}).$$

Soit k défini par (5.20). Selon Proposition 4.2.1, on a

$$(5.28) \quad \begin{aligned} B_2^{[0]}K^{[0]} &= Op_1(b^{0,2})Op_2^\gamma(k) = Op_2^\gamma(\mu(b^{0,2}))Op_2^\gamma(k) \\ &= Op_2^\gamma(\mu(b^{0,2}) * k) = Op_2^\gamma(a^{(2)}), \end{aligned}$$

où $a^{(2)} = \mu(b^{0,2}) * k$. On définit a par $a = a^{(1)} + a^{(2)}$. Alors, on obtient (5.24).

(ii) Soit $\omega_3 \subset X$ voisinage ouvert de x_0 , suffisamment petit. On fixe le point $v \in \omega_3 \cap H^1$. Alors, près de v on a

$$(5.29) \quad B^{[0]}K^{[0]} = Op_1(b)\widetilde{Op}_1(k) = Op_1(b)Op_1(v(k)) = Op_1(b \circ v(k)),$$

où $b \circ v(k)$ est la multiplication ordinaire des symboles analytiques classiques formels. Voir Lebeau [13, III.2] ou Sjöstrand [20]. Selon (5.24) et Proposition 4.2.1, on a

$$(5.30) \quad B^{[0]}K^{[0]} = Op_2^\gamma(a) = Op_1(v(a))$$

près de v . Selon (5.29) et (5.30), on a

$$(5.31) \quad v(a) = b \circ v(k).$$

Selon Stefanov–Vodev [21, §2], b_0 , qui est symbole principal de b , est uniformément elliptique dans $\omega_3 \cap H^1$. Puisque $k \in \mathcal{E}_{V,m,\gamma}^+$ est elliptique, $b_0 k_0$ est aussi uniformément elliptique dans $\omega_3 \cap H^1$, si ω_3 est suffisamment petit. Ici, k_0 est symbole principal de k . Alors, (5.31) nous permet de savoir que $a \in \mathcal{E}_{V,m,\gamma}^+$ est elliptique. \square

Démonstration de Théorème 3.2. On conserve les notations dans Théorème 3.2. Selon (5.23), on a

$$(5.32) \quad (\partial f / \partial x_4)|_{x_4=0} = (B^{[1]}K^{[0]})(B^{[0]}K^{[0]})^{-1}g,$$

où $B^{[1]} = B_1^{[1]} + B_2^{[1]}$. Par le même argument précédent, on peut savoir qu'il existe $c^{(1)} \in \mathcal{E}_{V,m,\gamma}^+$, $\gamma > 0$ tel que l'on ait

$$(5.33) \quad B^{[1]}K^{[0]} = Op_2^\gamma(c^{(1)}).$$

Selon Lemme 5.1, Proposition 4.1.3 et Proposition 4.2.1-(iii), il existe $c^{(2)} \in \mathcal{E}_{V,m,\gamma}^+$, $\gamma > 0$ tel que l'on ait

$$(5.34) \quad (B^{[0]}K^{[0]})^{-1} = Op_2^\gamma(c^{(2)}).$$

On définit c par $c = c^{(1)} * c^{(2)}$. Alors, on a

$$(5.35) \quad (\partial f / \partial x_4)|_{x_4=0} = Op_2^\gamma(c)g.$$

La conclusion (3.2) est maintenant déduite par (5.35) et Proposition 4.2.1-(ii). \square

Démonstration de Théorème 1. Le fait (i) a déjà été prouvé par Théorème 3.2 avec la théorie de Sjöstrand [20] et [1, §3]. Selon (3.2), $(\partial u / \partial n)|_N$ dans Théorème 1 est partiellement Gevrey 3 holomorphe en $\{\exp sH_q(\rho_0) : s_0 \leq s \leq s_1\}$. Donc, on obtient le fait (ii) en tenant compte de Lemme 6.3 qui sera énoncé dans §6. \square

§ 6. Rappels sur Gevrey Holomorphie Partielle

Dans cette section, on fait quelques rappels sur Gevrey holomorphie partielle, dont la notion a déjà été écrite dans Bardos–Lebeau–Rauch [1, §5]. Cf. [12].

Soit $X \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$ un ensemble ouvert et φ la fonction scalaire qui est strictement pluri sous-harmonique en X . Soit $B \subset X$ une sous-variété analytique réelle. On suppose que B est involutive par rapport à $-2i\bar{\partial}\partial\varphi$ et que la codimension réelle de B dans X est 1. On note $\tilde{B} \subset T^*X$ la réunion de la complexifiée des feuilles de $\mathcal{A}_\varphi(B)$. Selon Lebeau [13, §III.5], il existe une unique fonction pluri sous-harmonique φ_B en X vérifiant $\mathcal{A}_{\varphi_B}(X) = \tilde{B}$, $\varphi_B < \varphi$ en $X \setminus B$ et $\varphi_B = \varphi$ en B . Soit $w \in H_\varphi(X)$ et $m \geq 1$. On définit 3 espaces $G_m^\pm(w)$, $G_m(w)$ comme ci-dessous.

$$y \in G_m^-(w) \stackrel{\text{déf}}{\iff} \begin{aligned} &\exists U \subset X \text{ voisinage de } y \text{ t.q. } \forall \varepsilon > 0, \\ &\exists K > 0 \text{ t.q. } \forall x \in U, \forall \lambda \geq 1, \\ &|w(x, \lambda)| \leq K \exp(\lambda\varphi_B(x) + \varepsilon\lambda^{1/m}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y \in G_m^+(w) &\stackrel{\text{d\u00e9f}}{\iff} \exists U \subset X \text{ voisinage de } y, \exists \varepsilon > 0, \\
 &\exists K > 0 \text{ t.q. } \forall x \in U, \forall \lambda \geq 1, \\
 &|w(x, \lambda)| \leq K \exp(\lambda \varphi_B(x) - \varepsilon \lambda^{1/m}). \\
 y \in G_m(w) &\stackrel{\text{d\u00e9f}}{\iff} \exists U \subset X \text{ voisinage de } y, \exists \varepsilon > 0, \\
 &\exists K > 0 \text{ t.q. } \forall x \in U, \forall \lambda \geq 1, \\
 &|w(x, \lambda)| \leq K \exp(\lambda \varphi(x) - \varepsilon \lambda^{1/m}).
 \end{aligned}$$

On dit que w est partiellement Gevrey m B -holomorphe \u00e0 y si $y \in G_m^-(w)$. On n\u2019\u00e9crit pas B lorsqu\u2019il n\u2019y a pas de confusion. On dit que w est Gevrey m \u00e0 y si $y \in G_m(w)$.

\u00c9non\u00e7ons maintenant 3 lemmes fondamentaux. Soit $w \in H_\varphi(X)$.

Lemme 6.1. *On a $G_m^-(w) \cap G_m(w) = G_m^+(w)$.*

Soit Γ une feuille de B et Γ_0 sous-ensemble connexe de Γ .

Lemme 6.2. *Si $\Gamma_0 \subset G_m^-(w)$, alors on a $\Gamma_0 \cap G_m^+(w) = \emptyset$ ou $\Gamma_0 \subset G_m^+(w)$.*

Lemme 6.3. *Si $\Gamma_0 \subset G_m^-(w)$, alors on a $\Gamma_0 \cap G_m(w) = \emptyset$ ou $\Gamma_0 \subset G_m(w)$.*

On peut obtenir la conclusion de Lemme 6.3 \u00e0 partir de Lemmes 6.1 et 6.2. Donc, il suffit de prouver Lemmes 6.1 et 6.2. Puisque la d\u00e9finition de $G_m^\pm(w)$ et de $G_m(w)$ est invariante sous la transformation canonique (Cf. Lebeau [13, \u00a7 III.6,7]), on peut supposer que $B = \{z \in X : \text{Im } z_1 = 0\}$, $\varphi(z) = |\text{Im } z|^2/2$, $\varphi_B(z) = |\text{Im } z'|^2/2$. Ici, $z = (z_1, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$. Alors, la conclusion de Lemme 6.1 et de Lemme 6.2 r\u00e9sulte de l\u2019argument dans Okada [17, \u00a71]. Voir aussi [1, Lemme 5.3 dans la page 106].

Quant \u00e0 la preuve de Th\u00e9or\u00e8me 3.1 et de Th\u00e9or\u00e8me 1, la sous-vari\u00e9t\u00e9 B correspond \u00e0 la r\u00e9gion Glancing G^1 , qui a \u00e9t\u00e9 d\u00e9finie dans \u00a22.

References

- [1] Bardos, C., Lebeau, G. and Rauch, J., Scattering frequency and Gevrey 3 singularities, *Invent. Math.*, **90** (1987), 77–114.
- [2] Bardos, C., Masrour, T. and Tatout, F., Observation and control of elastic waves, (J. Rauch–M. Taylor eds.) *Singularities and Oscillation*, *IMA Vol. Math. Appl.*, **91** (1997), 1–16.
- [3] Eskin, G., General initial boundary problems for second order hyperbolic equations, *D. Reidel. Co. Dordrecht, London* (1981), 19–54.
- [4] Friedlander, F. G. and Melrose, R. B., The wave front set of the solution of a simple initial-boundary value problem with glancing rays. II, *Math. Proc. Cam. Phil. Soc.*, **81** (1977), 97–120.
- [5] H\u00f6rmander, L., *The analysis of linear partial differential operators I–IV*, Springer.

- [6] Iwashita, M. and Shibata, Y., On the analyticity of spectral functions for some exterior boundary value problems, *Glasnik Mate.*, **23** (1988), 291–313.
- [7] Kawashita, M., Sur les solutions asymptotiques de l'équation élastique (en japonais), *Thèse de Maître à l'Université d'Osaka* (1988).
- [8] Lafitte, O., The kernel of the Neumann operator for a strictly diffractive analytic problem, *Comm. P.D.E.*, **20** (1995), 419–483.
- [9] ———, Second term of the asymptotic expansion of the diffracted wave in the shadow, *Asymptot. Anal.*, **13** (1996), 329–359.
- [10] ———, Diffraction for a Neumann boundary condition, *Comm. P.D.E.*, **22** (1997), 319–359.
- [11] Lascar, B. and Lascar, R., Propagation des singularités Gevrey pour la diffraction, *Comm. P.D.E.*, **16** (1991), 547–584.
- [12] Lebeau, G., Deuxième microlocalisation à croissance, Séminaire Goulaouic–Meyer–Schwartz (1982–1983).
- [13] ———, Deuxième microlocalisation sur les sous-variétés isotropes, *Ann. Inst. Fourier Grenoble*, **35** (1985), 145–216.
- [14] ———, Régularité Gevrey 3 pour la diffraction, *Comm. P.D.E.*, **9** (1984), 1437–1494.
- [15] ———, Propagation de singularité Gevrey pour le problème de Dirichlet, *Advanced in microlocal analysis, NATO A.S.I. published by Reidel (Garnir ed.)* (1986), 203–223.
- [16] Melrose, R. B., Microlocal parametrices for diffractive boundary value problems, *Duke Math. J.*, **42** (1975), 605–635.
- [17] Y. Okada, Second microlocal singularities of tempered and Gevrey classes, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA. Math.*, **39** (1992), 475–505.
- [18] Sato, M., Kashiwara, K. and Kawai, T., Hyperfunctions and pseudo differential equations, *Lect. Notes Math.*, **287 Springer** (1973).
- [19] Sjöstrand, J., Propagation of analytic singularities for second order Dirichlet problems, *Comm. P.D.E.*, **5** (1980), 41–94.
- [20] ———, Singularités analytiques microlocales, *Astérisque*, **95** (1982).
- [21] Stefanov, P. and Vodev, G., Distribution of the resonances for the Neumann problem in linear elasticity outside a strictly convex body, *Duke Math. J.*, **78** (1995), 677–714.
- [22] Taylor, M. E., Grazing rays and reflection of singularities of solution to wave equation, *Comm. Pure. Appl. Math.*, **29** (1976), 1–38.
- [23] Yamamoto, K., Singularities of solutions to the boundary value problems for elastic and Maxwell's equations, *Japan J. Math.*, **14** (1988), 119–163.

