

# Correspondance d'Andreotti-Norguet et $\mathcal{D}$ -Modules

par

Jean-Louis FROT\*

## Résumé

Nous calculons l'image par transformation intégrale d'un  $\mathcal{L}$ -module de rang  $>1$ , localement libre en dehors de la section nulle du cotangent à l'espace projectif complexe  $\mathbb{P}_n$ . Ceci nous permet de compléter certains résultats d'Andreotti-Norguet et Barlet: nous montrons en particulier que l'image de la transformation obtenue en intégrant des formes holomorphes sur les cycles linéaires de  $\mathbb{P}_n \setminus \mathbb{P}_{n-p-1}$  (avec  $0 < p < n-1$ ) est l'espace des fonctions holomorphes sur l'espace des cycles  $\mathcal{C}_p(\mathbb{P}_n \setminus \mathbb{P}_{n-p-1})$ , annihilées par une famille d'opérateurs différentiels d'ordre quatre, que nous déterminons explicitement.

## Abstract

We calculate the integral transform of a  $\mathcal{L}$ -module of rank  $>1$ , locally free outside the zero section of the cotangent space to the complex projective space  $\mathbb{P}_n$ . This allows us to complete some results of Andreotti-Norguet and Barlet: in particular we prove that the image of the integral transform obtained by integrating holomorphic forms along the linear cycles of  $\mathbb{P}_n \setminus \mathbb{P}_{n-p-1}$  (where  $0 < p < n-1$ ), is the space of holomorphic functions on the variety of cycles  $\mathcal{C}_p(\mathbb{P}_n \setminus \mathbb{P}_{n-p-1})$ , which are annihilated by a family of differential operators of order four, that we determine explicitly.

## Table des Matières

- §0. Introduction
- §1. Rappels sur  $\mathcal{L}$ -Modules et Correspondances
  - 1.1 Notations
  - 1.2 Faisceaux,  $\mathcal{L}$ -Modules et  $\mathcal{E}$ -Modules
  - 1.3 Cohomologies Formelle et Modérée
  - 1.4 Transformations Intégrales

---

Communicated by M. Kashiwara, January 27, 1999.

1991 Mathematics Subject Classification(s): 32C38, 35A27, 17B10, 44A12

Institut de Mathématiques, Analyse Algébrique (case 82)

\*Université Pierre et Marie Curie, 4 pl. Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France

e-mail: frot@math.jussieu.fr

**§2. Présentation des Résultats**

- 2.1 Cadre Géométrique
- 2.2 Choix des  $\mathcal{D}_X$ -Modules  $\mathcal{M}_a$  et  $\mathcal{M}_b$
- 2.3 Le Théorème Principal

**§3. Systèmes à Multiplicités Constantes****§4. Calcul du Transformé de  $\mathcal{M}_b$** 

- 4.1 Géométrie de la Correspondance
- 4.2 Calcul des Multiplicités
- 4.3 Etude de la Section
- 4.4 Une Propriété du  $\mathcal{D}_Y$ -Module  $\mathcal{N}$
- 4.5 Etude des Transformés de  $\mathcal{M}_a$  et  $\mathcal{M}_b$
- 4.6 Démonstration du Théorème 2.3.1

**§5. Applications**

- 5.1 Correspondance d'Andreotti-Norguet
- 5.2 Autres Formules
  - 5.2.1 Cohomologie Modérée
  - 5.2.2 Cohomologie Formelle

**§0. Introduction**

Une transformation intégrale associe à toute section d'un faisceau sur une variété  $X$  une section d'un autre faisceau sur une variété  $Y$  par une formule du type

$$(0.1) \quad u \mapsto \int_{q_2} q_1^{-1}(u)k,$$

où  $k$  est un noyau défini sur  $X \times Y$ , et  $q_1, q_2$  sont les projections

$$(0.2) \quad X \xleftarrow{q_1} X \times Y \xrightarrow{q_2} Y.$$

Dans [GGG], Gelfand, Gindikin et Graev traitent essentiellement des correspondances grassmanniennes réelles; ils étudient les fonctions obtenues en intégrant des formes  $\mathcal{C}^\infty$ , dont les coefficients sont à décroissance rapide, sur des sous-espaces linéaires de  $\mathbb{R}^n$ ; ils obtiennent en particulier des formules d'inversion.

Penrose et son école ont systématiquement étudié les correspondances grassmanniennes dans le domaine complexe, en particulier la correspondance

$$\mathbb{F}(1) \leftarrow \mathbb{F}(1, 2) \rightarrow \mathbb{F}(2),$$

où  $\mathbb{F}(i, j)$  est la variété des drapeaux de type  $(i, j)$  dans  $\mathbb{C}^4$ . Ils parviennent à représenter les solutions d'une classe générale d'équations de la Physique,

exprimées dans  $\mathbb{M}_4 \simeq \mathbb{F}(2)$ , par des classes de cohomologie associées à des faisceaux de  $\mathcal{O}$ -modules sur  $\mathbb{P}_3 \simeq \mathbb{F}(1)$  (voir [BE], [EPW]).

Dans [HP], Henkin et Polyakov étudient la transformation de Radon–Penrose sur les domaines  $q$ -linéairement concaves de  $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ . Ils obtiennent des formules d'inversion généralisant celles obtenues par Gelfand, Gindikin et Graev dans le domaine réel, et caractérisent l'image par un système différentiel explicite, généralisant ainsi certains résultats classiques de Penrose qui sont exposés dans [EPW].

D'Agnolo et Schapira ont montré que le langage des faisceaux et celui des  $\mathcal{D}$ -modules sont bien adaptés pour traiter les transformations intégrales; ainsi la formule (0.1) se traduit pour les faisceaux par

$$F \circ K = Rq_{2!}(q_1^{-1}F \otimes K),$$

où  $F$  est un faisceau sur  $X$ , et  $K$  un faisceau sur  $X \times Y$ , et pour les  $\mathcal{D}$ -modules par

$$\mathcal{M} \circlearrowleft \mathcal{K} = \underline{q}_{2!}(\underline{q}_1^{-1}\mathcal{M} \otimes_{\ell}^L \mathcal{K}),$$

où  $\mathcal{M}$  est un  $\mathcal{D}_X$ -module, et  $\mathcal{K}$  un  $\mathcal{D}_{X \times Y}$ -module holonome régulier. En combinant les deux langages, ces auteurs dans [DS1], [DS2], Kashiwara et Schapira dans [KS2], obtiennent des formules d'adjonction qui permettent d'échanger classes de cohomologie holomorphe sur  $X$  associées à des faisceaux constructibles, solutions de systèmes d'EDP, à des objets correspondants sur  $Y$ . Grâce à ces formules, D'Agnolo et Schapira traitent la transformation de Radon–Penrose et la dualité projective; ils utilisent essentiellement les transformés de  $\mathcal{D}$ -modules localement libres de rang 1, c'est à dire, associés à des fibrés en droites sur  $\mathbb{P}_n$ , et Kashiwara et Schapira considèrent un noyau non régulier pour étudier la transformation de Laplace (voir [KS3]).

Motivé par les travaux d'Andreotti–Norguet et Barlet (voir ci-après), nous avons été amené à étudier le transformé d'un  $\mathcal{D}$ -module de rang  $> 1$ , localement libre en dehors de  $T_X^*X$ . Notons  $\mathbb{F}(a_1, \dots, a_k)$  l'espace des drapeaux de type  $(a_1, \dots, a_k)$  dans un espace vectoriel de dimension complexe  $n + 1$ , et soit  $p$  un entier tel que  $0 < p < n - 1$ . On prend  $X = \mathbb{F}(1) \simeq \mathbb{P}_n$ ,  $Y = \mathbb{F}(p + 1) \simeq \mathbb{G}_{p+1}(n + 1)$ ; notons  $S = \mathbb{F}(1, p + 1)$  la relation d'incidence. Soit  $V \subset \dot{T}^*Y$  la variété caractéristique de l'équation des ondes. On prend pour noyau  $\mathcal{K} = \mathcal{B}_{S|X \times Y} = H_{[S]}^{d_X + d_Y - d_S}(\mathcal{O}_{X \times Y})$ . On introduit le complexe de  $\mathcal{D}_X$ -modules

$$\mathcal{M}_b = 0 \longrightarrow \mathcal{D}_X \otimes_{\ell} \mathcal{O}_X^{(p)} \xrightarrow{\delta_p} \mathcal{D}_X \otimes_{\ell} \mathcal{O}_X^{(p-1)} \dots \xrightarrow{\delta_1} \mathcal{D}_X \longrightarrow 0,$$

où  $\mathcal{O}_X^{(k)}$  est le faisceau des champs de vecteurs holomorphes de degré  $k$ , et  $\mathcal{D}_X \otimes_{\ell} \mathcal{O}_X^{(p)}$  est placé en degré 0. Notons  $m = \binom{n-1}{p}$ . Le  $\mathcal{D}_X$ -module  $\mathcal{M}_b$

est localement libre, et de multiplicité constante  $m$  sur  $\dot{T}^*X$ . Un premier résultat est le

- Théorème 0.0.1.** (i) *Le complexe  $\mathcal{M}_b \circlearrowleft \mathcal{K}$  est concentré en degrés  $\geq 0$ .*  
 (ii) *Pour tous  $j > 0$ , les  $\mathcal{D}_Y$ -modules  $H^j(\mathcal{M}_b \circlearrowleft \mathcal{K})$  sont à connexions plates.*  
 (iii)  *$H^0(\mathcal{M}_b \circlearrowleft \mathcal{K})$  est cohérent, et de multiplicité constante  $m$  le long de  $V$ .*

La démonstration s’inspire des méthodes de [DS1]: on utilise l’algèbre homologique pour prouver (i) et (ii), et les transformations de contact quantifiées pour trouver un modèle local de la correspondance microlocale associée à (0.2), ce qui permet de prouver (iii).

Pour calculer  $H^0(\mathcal{M}_b \circlearrowleft \mathcal{K})$ , on définit un  $\mathcal{D}_Y$ -module  $\mathcal{N}$  de la façon suivante: soit  $(y_{i,j})$  les coordonnées dans une carte affine de  $Y$  (dont la dimension est  $(n - p)(p + 1)$ ). Posons  $\Delta_{i_2, j_2}^{i_1, j_1} = \partial_{i_1, j_1} \partial_{i_2, j_2} - \partial_{i_1, j_2} \partial_{i_2, j_1}$ , où  $\partial_{i,j} = \frac{\partial}{\partial y_{i,j}}$ . Soit  $\mathcal{I}$  l’idéal à gauche de  $\mathcal{D}_Y$  engendré par la famille d’opérateurs

$$(0.3) \quad \Delta_{i_2, j_2}^{i_1, j_1} \Delta_{i_4, j_4}^{i_3, j_3} + \Delta_{i_3, j_2}^{i_1, j_1} \Delta_{i_4, j_4}^{i_2, j_3} + \Delta_{i_2, j_4}^{i_1, j_3} \Delta_{i_4, j_2}^{i_3, j_1} + \Delta_{i_3, j_4}^{i_1, j_3} \Delta_{i_4, j_2}^{i_2, j_1}$$

avec  $p + 2 \leq i_q \leq n + 1$ ,  $1 \leq j_r \leq p + 1$ , où  $q, r = 1, \dots, 4$ . On pose  $\mathcal{N} = \mathcal{D}_Y / \mathcal{I}$ . Notre second résultat est le

**Théorème 0.0.2.** *On a un isomorphisme  $H^0(\mathcal{M}_b \circlearrowleft \mathcal{K}) \simeq \mathcal{N}$ .*

La démonstration procède ainsi: on généralise la notion classique—introduite dans [SKK]—de section non dégénérée d’un  $\mathcal{E}$ -module holonome régulier le long d’une variété régulière, involutive, lisse du cotangent. S’inspirant d’un résultat de [DS2]—(voir aussi [G])—on prouve que si une section  $s \in \text{Hom}_{\mathcal{D}_{X \times Y}}(\underline{D}' \mathcal{M}_b \boxtimes \mathcal{N}, \mathcal{K})$  est non dégénérée en tout point de  $\Lambda = \dot{T}_S^*(X \times Y)$ , elle induit un isomorphisme

$$\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}_b \circlearrowleft \mathcal{K}$$

modulo connexions plates. On choisit la section

$$s = \frac{d_X f_{p+2}}{f_{p+2}} \wedge \dots \wedge \frac{d_X f_{n+1}}{f_{n+1}},$$

où  $(f_{p+2}, \dots, f_{n+1})$  est un système d’équations locales de la variété d’incidence. On montre ensuite que  $s$  est bien définie sur  $\mathcal{N}$ , et on élimine les connexions plates en utilisant des techniques de la théorie des représentations.

Une interprétation possible de ce théorème est la suivante: soit  $l$  un sous-espace linéaire de codimension  $p + 1$  de  $X$ , et  $U$  l’ouvert  $q_2(((X \setminus l) \times Y) \cap S)$ . En utilisant une formule d’adjonction de [DS1], on démontre la

**Proposition 0.0.3.** *On a l’isomorphisme*

$$H^p(X \setminus l; \Omega_X^{(p)}) / dH^p(X \setminus l; \Omega_X^{(p-1)}) \simeq \Gamma(U; \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(H^0(\mathcal{M}_b \circlearrowleft \mathcal{K}), \mathcal{O}_Y)).$$

Or Andreotti et Norguet ont montré dans [AN1] que l'application  $\gamma \mapsto \int_\gamma \varphi$ , définie sur l'espace analytique  $\mathcal{C}_p(X \setminus I)$  des cycles compacts de dimension  $p$  de  $X \setminus I$ , induit un morphisme

$$H^p(X \setminus I; \Omega_X^{(p)}) \xrightarrow{\rho^0} H^0(\mathcal{C}_p(X \setminus I); \mathcal{O}_{\mathcal{C}_p(X \setminus I)}).$$

Dans [AN2] ils montrent de plus que la suite

$$(0.4) \quad H^p(X \setminus I; \Omega_X^{(p-1)}) \xrightarrow{d} H^p(X \setminus I; \Omega_X^{(p)}) \xrightarrow{\rho^0} H^0(\mathcal{C}_p(X \setminus I); \mathcal{O}_{\mathcal{C}_p(X \setminus I)})$$

est exacte modulo des sous-espaces de dimension finie. Dans le cas des cycles linéaires, Barlet dans [B] prouve que les obstructions précédentes disparaissent: autrement dit la suite (0.4) est exacte. De plus, dans [Ou], Ouqqa calcule  $\rho^0$  lorsque  $n = 3$  et  $p = 1$ , et prouve qu'elle n'est pas surjective. Le Théorème 0.0.2 montre donc que, dans la situation linéaire étudiée par Barlet,  $\text{im } \rho^0$  est l'espace des fonctions holomorphes sur l'ouvert  $U$  de  $Y$  constitué des cycles linéaires de dimension  $p$  de  $X \setminus I$ , annulées par la famille d'opérateurs (0.3). Ce résultat avait déjà été obtenu avec Legrandgérard [FL] dans les cas particuliers  $p = 1$  et  $p = n - 2$ . Notre méthode s'étend, *mutatis mutandis* au cas tempéré. Nous obtenons ainsi une version tempérée de la Proposition 0.0.3.

Le présent article reproduit à quelques détails près notre thèse de doctorat. Une partie des résultats ici exposés a été annoncée dans la note [F]. Nous remercions Pierre Schapira et Masaki Kashiwara pour les précieux conseils et les encouragements qu'ils nous ont prodigués.

## § 1. Rappels sur $\mathcal{D}$ -Modules et Correspondances

### 1.1 Notations

Nous suivons notations et formalisme de Kashiwara et Schapira [KS1]. Pour une exposition des  $\mathcal{D}$ -modules on peut consulter [K1], [S], [Sc], [Bj]. Sauf mention explicite, toutes les variétés considérées sont analytiques complexes lisses. Soit des morphismes  $X \xleftarrow{f} S \xrightarrow{g} Y$ ; si  $A \subset Y$  on note  $\hat{A} = fg^{-1}(A)$ , si  $y \in Y$  on note  $\hat{y} = \widehat{\{y\}}$ .

Soit  $X$  et  $Y$  des variétés. On note  $a_X$  l'application de  $X$  sur l'ensemble à un élément. On note  $r : X \times Y \rightarrow Y \times X$ , l'application  $r(x, y) = (y, x)$ . On désigne par  $q_1$  et  $q_2$  les projections  $X \xleftarrow{q_1} X \times Y \xrightarrow{q_2} Y$ . On note  $\pi_X : T^*X \rightarrow X$  le fibré cotangent à  $X$ ,  $\tilde{\pi}_X : \tilde{T}^*X \rightarrow X$  le fibré cotangent privé de la section nulle. On note  $p_1$  et  $p_2$  les projections  $T^*X \xleftarrow{p_1} T^*(X \times Y) \xrightarrow{p_2} T^*Y$ . Si  $M \subset X$  est une sous-variété, on note  $T_M^*X$  le fibré conormal à  $M$ , et  $\tilde{T}_M^*X = T_M^*X \cap \tilde{T}^*X$  le fibré conormal privé de sa section nulle.

**1.2 Faisceaux,  $\mathcal{D}$ -Modules et  $\mathcal{E}$ -Modules**

Soit  $X$  un espace topologique. On note  $\mathbf{D}^b(\mathbb{C}_X)$  la catégorie dérivée de la catégorie des complexes bornés de faisceaux de  $\mathbb{C}$ -vectoriels sur  $X$ . Si  $A \subset X$  est un sous-ensemble localement fermé, on note  $\mathbb{C}_A$  le faisceau sur  $X$ , constant de fibre  $\mathbb{C}$  sur  $A$  et zéro ailleurs. On considère les six opérations de la théorie des faisceaux  $R\mathcal{H}om(\cdot, \cdot), \cdot \otimes \cdot, Rf_!, Rf_*, f^{-1}, f^!$ ; on note  $\boxtimes$  le produit tensoriel extérieur, et on pose  $D'_X(\cdot) = R\mathcal{H}om(\cdot, \mathbb{C}_X)$ . On a  $R\mathcal{H}om(\cdot, \cdot) = Ra_X R\mathcal{H}om(\cdot, \cdot)$ . Si  $F$  est un complexe de faisceaux, on note  $\sigma^{\geq j} F$  le complexe

$$0 \rightarrow F^j \rightarrow F^{j+1} \rightarrow \dots$$

Si  $X$  est une variété analytique réelle, on note  $\mathbf{D}^b_{\mathbb{R}\text{-c}}(\mathbb{C}_X)$  la sous-catégorie pleine de  $\mathbf{D}^b(\mathbb{C}_X)$ , dont les objets sont à cohomologie  $\mathbb{R}$ -constructible.

Soit  $X$  une variété analytique complexe. On note  $d_X$  sa dimension. On désigne par  $\mathcal{O}_X$  son faisceau structural,  $\mathcal{D}_X$  le faisceau d'anneaux des opérateurs différentiels linéaires à coefficients holomorphes. On note  $\Omega_X^{(k)}$  (resp.  $\Theta_X^{(k)}$ ) le faisceau des formes (resp. des champs de vecteurs) holomorphes de degré  $k$ , on pose  $\Omega_X = \Omega_X^{(d_X)}$ . On note  $\mathbf{D}^b(\mathcal{D}_X)$  la catégorie dérivée de la catégorie des complexes bornés de  $\mathcal{D}_X$ -modules à gauche sur  $X$ . Suivant [SSc] et [KS2], on dira qu'un  $\mathcal{D}_X$ -module quasi-cohérent  $\mathcal{M}$  est good (resp. quasi-good) si, sur chaque ouvert relativement compact de  $X$ , il admet une filtration par des  $\mathcal{D}_X$ -sous-modules cohérents  $\mathcal{M}_k$ , telle que les quotients  $\mathcal{M}_k/\mathcal{M}_{k-1}$  puissent être munis d'une bonne filtration, et que  $\mathcal{M}_k = 0$  pour  $|k| \gg 0$  (resp.  $k \ll 0$ ). On note  $\mathbf{D}^b_{\text{coh}}(\mathcal{D}_X)$  (resp.  $\mathbf{D}^b_{\text{good}}(\mathcal{D}_X), \mathbf{D}^b_{\text{q-good}}(\mathcal{D}_X)$ ) la sous-catégorie pleine de  $\mathbf{D}^b(\mathcal{D}_X)$  dont les objets ont pour cohomologie des  $\mathcal{D}_X$ -modules cohérents (resp good, quasi-good); on note  $\text{Mod}_{\text{rh}}(\mathcal{D}_X)$  la catégorie des  $\mathcal{D}_X$ -modules holonomes réguliers. On considère les opérations dans la catégorie dérivée des  $\mathcal{D}$ -modules à gauche ou à droite:  $R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\cdot, \cdot), \cdot \otimes_{\mathcal{L}} \cdot, \underline{f}^{-1}, \underline{f}_!$ ; on note  $\text{Sol}(\cdot) = R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\cdot, \mathcal{O})$ . Pour un morphisme  $Y \xrightarrow{f} X$ , et  $\mathcal{M} \in \mathbf{D}^b(\mathcal{D}_X)$  et  $\mathcal{N} \in \mathbf{D}^b(\mathcal{D}_Y)$ , on a les formules

$$\begin{aligned} \underline{f}^{-1} \mathcal{M} &= \mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \otimes_{\mathcal{L}_{f^{-1}\mathcal{D}_X}}^{\mathcal{L}} f^{-1} \mathcal{M}, \\ \underline{f}_! \mathcal{N} &= Rf_!(\mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \otimes_{\mathcal{L}_{\mathcal{D}_Y}}^{\mathcal{L}} \mathcal{N}), \end{aligned}$$

où  $\mathcal{D}_{Y \rightarrow X}$  et  $\mathcal{D}_{X \leftarrow Y}$  désignent les bimodules de transfert. Nous notons  $\boxtimes$  le produit tensoriel extérieur. On pose

$$\underline{D}' \mathcal{M} = R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{L}} \Omega_X^{\otimes -1}).$$

Si  $\mathcal{M}$  est cohérent, on a  $\underline{D}' \underline{D}' \mathcal{M} \simeq \mathcal{M}$ . Si  $Z \subset X$  est une sous-variété fermée de codimension  $d$ , on considère le  $\mathcal{D}_X$ -module holonome  $\mathcal{B}_{Z|X} \simeq H^d_{[Z]}(\mathcal{O}_X)$  (cohomologie algébrique). Si  $G$  est un groupe de Lie opérant sur  $X$ , on note  $\text{Mod}_G(\mathcal{D}_X)$  la catégorie des  $\mathcal{D}_X$ -modules  $G$ -quasi équivariants (voir [K2]).

Nous renvoyons à [SKK] pour la théorie de  $\mathcal{E}$ -modules, et à [S] pour une exposition de cette théorie. On note  $\mathcal{E}_X$  le faisceau des opérateurs micro-différentiels d'ordre fini sur  $X$ ,  $\mathbf{D}^b(\mathcal{E}_X)$  la catégorie dérivée de la catégorie des complexes bornés de  $\mathcal{E}_X$ -modules. Si  $\mathcal{M} \in \mathbf{D}^b(\mathcal{E}_X)$ , on pose

$$\mathcal{E}\mathcal{M} = \mathcal{E}_X \otimes_{\pi_1^{-1}\mathcal{G}_X} \pi_X^{-1}\mathcal{M},$$

c'est un objet de  $\mathbf{D}^b(\mathcal{E}_X)$ . Si  $Z \subset X$  est une sous-variété fermée, on note  $\mathcal{C}_{Z|X} = \mathcal{E}\mathcal{B}_{Z|X}$ . C'est un  $\mathcal{E}_X$ -module holonome.

### 1.3 Cohomologies Formelle et Modérée

Nous renvoyons à [K3] (voir aussi [KS2]) pour l'étude du foncteur de cohomologie modérée, et à [KS2] pour celle du foncteur de cohomologie formelle. Soit  $X$  une variété réelle analytique, et  $U$  un ouvert sous-analytique de  $X$ ; notons  $Z = X \setminus U$ . Alors  $\mathbf{C}_U \otimes \mathcal{C}_X^\infty$  est le faisceau  $\mathcal{I}_{X,Z}^\infty$ , sous-faisceau de  $\mathcal{C}_X^\infty$ , constitué des fonctions qui s'annulent sur  $Z$  ainsi que toutes leurs dérivées, tandis que  $\mathcal{T}hom(\mathbf{C}_Z, \mathcal{D}b_X)$  est le faisceau  $\Gamma_Z(\mathcal{D}b_X)$  des distributions supportées par  $Z$ . Le foncteur  $U \mapsto \mathbf{C}_U \otimes \mathcal{C}_X^\infty$  se prolonge en un foncteur exact défini sur la catégorie des faisceaux  $\mathbb{R}$ -constructibles, noté  $F \mapsto F \otimes \mathcal{C}_X^\infty$ . De même, le foncteur (contravariant)  $Z \mapsto \mathcal{T}hom(\mathbf{C}_Z, \mathcal{D}b_X)$  se prolonge en un foncteur exact  $F \mapsto \mathcal{T}hom(F, \mathcal{D}b_X)$ . On étend ces deux foncteurs à la catégorie dérivée  $\mathbf{D}_{\mathbb{R}\text{-c}}^b(\mathbf{C}_X)$ .

Soit  $X$  une variété complexe. Si  $F \in \mathbf{D}_{\mathbb{R}\text{-c}}^b(\mathbf{C}_X)$ , on note

$$F \otimes^w \mathcal{O}_X = R\mathcal{H}om_{\mathcal{G}_X} \left( \mathcal{O}_{\bar{X}}, F \otimes^w \mathcal{C}_X^\infty \right),$$

$$\mathcal{T}hom(F, \mathcal{O}_X) = R\mathcal{H}om_{\mathcal{G}_X}(\mathcal{O}_{\bar{X}}, \mathcal{T}hom(F, \mathcal{D}b_X)).$$

Comme objets des catégories  $\mathbf{D}^b(FN)$  et  $\mathbf{D}^b(DFN)$ , catégories dérivées des catégories des complexes bornés d'espaces vectoriels topologiques de type  $FN$  et  $DFN$  respectivement, les complexes  $R\Gamma(X; F \otimes^w \mathcal{O}_X)$  et  $R\Gamma_c(X; \mathcal{T}hom(F, \Omega_X)[d_X])$  sont duals l'un de l'autre. On a les morphismes naturels

$$(1.1) \quad F \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow F \otimes^w \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{T}hom(D'_X F, \mathcal{O}_X) \rightarrow R\mathcal{H}om(D'_X F, \mathcal{O}_X).$$

Soit  $M$  une variété réelle analytique, et soit  $M \xrightarrow{i} X$  une complexification de  $M$ . On a

$$\mathbf{C}_M \otimes^w \mathcal{O}_X \simeq i_* \mathcal{C}_M^\infty,$$

$$\mathcal{T}hom(D'_X(\mathbf{C}_M), \mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{D}b_M.$$

On déduit donc de (1.1) les morphismes classiques

$$\mathcal{A}_M \rightarrow \mathcal{C}_M^\infty \rightarrow \mathcal{D}b_M \rightarrow \mathcal{B}_M.$$

**Proposition 1.3.1.** *Si  $S$  est une hypersurface de  $X$  on a*

$$\mathcal{T}hom(\mathbb{C}_{X \setminus S}, \mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{O}_X(*S),$$

le faisceau des fonctions méromorphes sur  $X$  à pôles sur  $S$ .

Si  $Z$  est un sous-ensemble analytique fermé de  $X$ , on a des isomorphismes

$$\mathbb{C}_Z \overset{w}{\otimes} \mathcal{O}_X \simeq \mathcal{O}_{X|Z},$$

$$\mathcal{T}hom(\mathbb{C}_Z, \mathcal{O}_X) \simeq R\Gamma_{|Z|}(\mathcal{O}_X),$$

respectivement complété formel et cohomologie algébrique. En particulier,  $\mathbb{C}_Z \overset{w}{\otimes} \mathcal{O}_X$  est concentré en degré 0. Enfin, si  $U$  est un ouvert de Stein, sous-analytique et relativement compact de  $X$ , alors  $R\Gamma(X; \mathcal{T}hom(\mathbb{C}_U, \mathcal{O}_X))$  est concentré en degré 0, et coïncide avec le sous-espace de  $\Gamma(U; \mathcal{O}_X)$ , constitué des fonctions à croissance modérée à la frontière de  $U$ .

### 1.4 Transformations Intégrales

Soit  $X$  et  $Y$  deux variétés complexes; on considère les projections

$$X \xleftarrow{q_1} X \times Y \xrightarrow{q_2} Y.$$

Si  $\mathcal{K} \in \text{Mod}_{\text{rh}}(\mathcal{D}_{X \times Y})$ , et  $K = \mathcal{P}ol(\mathcal{K})$ , on définit les transformations

$$K \circ F = Rq_{1*}(K \otimes q_2^{-1}F)$$

$$\mathcal{M} \circlearrowleft \mathcal{K} = \underline{q}_{2*}(\underline{q}_1^{-1} \mathcal{M} \otimes_c^L \mathcal{K}),$$

pour  $F \in \mathbf{D}^b(\mathbb{C}_Y)$  et  $\mathcal{M} \in \mathbf{D}^b(\mathcal{D}_X)$ . Dans [DS1], D’Agnolo et Schapira démontrent le résultat ci-dessous en prenant pour noyan  $\mathcal{K} = \mathcal{B}_{S|X \times Y}$ , où  $S$  est une sous-variété de  $X \times Y$ . Le résultat général est énoncé dans [KS2] (voir aussi [DS2]):

**Théorème 1.4.1.** *Soit  $\mathcal{M} \in \mathbf{D}_{\text{good}}^b(\mathcal{D}_X)$  et  $F \in \mathbf{D}_{\mathbb{R}\text{-}c}^b(\mathbb{C}_Y)$ . On suppose vérifiées les conditions suivantes*

- (i)  $q_1^{-1} \text{supp}(\mathcal{M}) \cap \text{supp}(\mathcal{K})$  est propre au-dessus de  $Y$ ,
- (ii)  $\text{car}(\underline{q}_1^{-1} \mathcal{M}) \cap \text{car}(\mathcal{K}) \subset T_{X \times Y}^*(X \times Y)$ .

Alors on a les isomorphismes

$$(1.2) \quad R\Gamma_c(X; R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, (K \circ F) \otimes \mathcal{O}_X))[d_X] \simeq R\Gamma_c(Y; R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M} \circlearrowleft \mathcal{K}, F \otimes \mathcal{O}_Y)).$$

$$(1.3) \quad R\Gamma(X; R\mathcal{H}om(K \circ F, \Omega_X) \otimes_{\mathcal{D}}^L \mathcal{M}) \simeq R\Gamma(Y; R\mathcal{H}om(F, \Omega_Y) \otimes_{\mathcal{D}}^L \mathcal{M} \circlearrowleft \mathcal{K})[d_Y].$$



Dans [KS2], Kashiwara et Schapira démontrent le

**Théorème 1.4.2.** *Soit  $\mathcal{M} \in \mathbf{D}_{q\text{-good}}^b(\mathcal{D}_X)$  et  $F \in \mathbf{D}_{\mathbb{R}^c}^b(\mathbb{C}_Y)$ . On suppose vérifiées les conditions suivantes*

- (i)  $q_1^{-1} \text{supp}(\mathcal{M}) \cap \text{supp}(\mathcal{K})$  est propre au-dessus de  $Y$ ,
- (ii)  $q_2^{-1} \text{supp}(F) \cap \text{supp}(\mathcal{K})$  est propre au-dessus de  $X$ .

Alors on a les isomorphismes

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \mathbf{R}\Gamma\left(X; \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}\left(\mathcal{M}, (K \circ F) \overset{\mathbf{w}}{\otimes} \mathcal{O}_X\right)\right)[d_X] \\ \simeq \mathbf{R}\Gamma\left(Y; \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}\left(\mathcal{M} \underset{\mathcal{D}}{\circlearrowleft} \mathcal{K}, F \overset{\mathbf{w}}{\otimes} \mathcal{O}_Y\right)\right). \end{aligned}$$

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \mathbf{R}\Gamma_c(X; \mathcal{T}hom(K \circ F, \Omega_X) \otimes_{\mathcal{D}}^L \mathcal{M}) \\ \simeq \mathbf{R}\Gamma_c(Y; \mathcal{T}hom(F, \Omega_Y) \otimes_{\mathcal{D}}^L \mathcal{M} \underset{\mathcal{D}}{\circlearrowleft} \mathcal{K})[d_Y]. \end{aligned}$$

Soit  $S$  une sous-variété de  $X \times Y$ . Posons  $\mathcal{K} = \mathcal{B}_{S|X \times Y}$ , et notons  $f = q_{1|_S}$ , et  $g = q_{2|_S}$ . On a (voir [DS1])

$$\begin{aligned} K \circ F &\simeq \mathbf{R}f_! g^{-1} F[d_S - d_X - d_Y], \\ \mathcal{M} \underset{\mathcal{D}}{\circlearrowleft} \mathcal{K} &\simeq g_! f^{-1} \mathcal{M}. \end{aligned}$$

De plus, si  $f$  et  $g$  sont propres et lisses alors les formules (1.3) et (1.5) équivalent à

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\Gamma(X; \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathbf{R}\mathcal{H}om(K \circ F, \mathcal{O}_X)))[d_X] \\ \simeq \mathbf{R}\Gamma(Y; \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M} \underset{\mathcal{D}}{\circlearrowleft} \mathcal{K}, \mathbf{R}\mathcal{H}om(F, \mathcal{O}_Y)))[2d_Y]. \\ \mathbf{R}\Gamma_c(X; \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{T}hom(K \circ F, \mathcal{O}_X)))[d_X] \\ \simeq \mathbf{R}\Gamma_c(Y; \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M} \underset{\mathcal{D}}{\circlearrowleft} \mathcal{K}, \mathcal{T}hom(F, \mathcal{O}_Y)))[2d_Y]. \end{aligned}$$

Ces théorèmes permettent de distinguer deux problèmes dans les transformations intégrales: calculer le faisceau  $K \circ F$ , et calculer le  $\mathcal{D}_Y$ -module  $\mathcal{M} \underset{\mathcal{D}}{\circlearrowleft} \mathcal{K}$ ; c'est ce que nous allons faire dans une situation géométrique particulière.

## §2. Présentation des Résultats

### 2.1 Cadre Géométrique

Soit  $p$  un entier tel que  $0 < p < n - 1$ . Soit  $W$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$ , de dimension  $n + 1$ ; notons  $\mathbb{F}(a_1, \dots, a_k)$  l'espace des drapeaux de type  $(a_1, \dots, a_k)$  dans  $W$ . Soit  $X = \mathbb{F}(1) \simeq \mathbb{P}_n$ ,  $Y = \mathbb{F}(p + 1) \simeq \mathbb{G}_{p+1}(n + 1)$ ,  $S = \mathbb{F}(1, p + 1)$ ,  $l$  un sous-espace linéaire de codimension  $p + 1$  de  $X$ ; notons  $f$  (resp.

g) la projection de  $S$  sur  $X$  (resp.  $Y$ ). Soit  $G = GL_{n+1}(\mathbb{C})$  le groupe général linéaire, et  $P$  le sous-groupe parabolique dont les éléments sont de la forme

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

où  $A$  (resp.  $B, C$ ) est une matrice complexe de dimension  $(p+1)^2$  (resp.  $(p+1)(n-p), (n-p)^2$ ); on a  $Y \simeq G/P$ . Soit  $E_{i,j}$  la matrice qui comporte 1 en position  $(i, j)$ , et 0 ailleurs; une carte affine de  $Y$  est constituée des matrices suivantes:

$$\sum_{i=1}^{n+1} E_{i,i} + \sum_{i=p+2}^{n+1} \sum_{j=1}^{p+1} y_{i,j} E_{i,j},$$

où  $y_{i,j} \in \mathbb{C}$ .

On note  $\mathfrak{g}$  (resp.  $\mathfrak{p}$ ) l'algèbre de Lie associée au groupe  $G$  (resp.  $P$ ),  $U(\mathfrak{g})$  l'algèbre enveloppante de  $\mathfrak{g}$ , et on considère la sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$ :

$$\mathfrak{n}_- = \bigoplus_{\substack{j \leq p+1 \\ i \geq p+2}} \mathbb{C} E_{i,j}.$$

Dans l'équivalence de catégories (voir [BB], [K2]) entre  $\text{Mod}_G(\mathcal{D}_Y)$  et la catégories des  $(\mathfrak{g}, P)$ -modules,  $\mathcal{D}_Y$  a pour image  $U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\mathfrak{p} \simeq U(\mathfrak{n}_-)$ .

### 2.2 Choix des $\mathcal{D}_X$ -Modules $\mathcal{M}_a$ et $\mathcal{M}_b$

Soit  $\Omega_X^{\leq p}$  le complexe de Rham tronqué

$$0 \rightarrow \mathbb{C}_X \rightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{d} \Omega_X^{(1)} \cdots \xrightarrow{d} \Omega_X^{(p-1)} \xrightarrow{d} \Omega_X^{(p)} \rightarrow 0,$$

où  $\Omega_X^{(p)}$  est placé en degré 0. Ce complexe est bien sûr quasi-isomorphe à  $\Omega_X^{(p)}/d\Omega_X^{(p-1)} \simeq d\Omega_X^{(p)}$ . Rappelons que le complexe de Spencer de  $X$  est le complexe de  $\mathcal{D}_X$ -modules suivant

$$SP^X = 0 \rightarrow \mathcal{D}_X \otimes_{\mathbb{C}} \Theta_X^{(n)} \xrightarrow{\delta_n} \mathcal{D}_X \otimes_{\mathbb{C}} \Theta_X^{(n-1)} \cdots \xrightarrow{\delta_1} \mathcal{D}_X \xrightarrow{\delta_0} \mathcal{O}_X \rightarrow 0,$$

où, dans une carte affine de  $X$ , si on pose  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ , on a pour  $k > 0$ ,  $\delta_k(P \otimes \partial_{i_1} \wedge \cdots \wedge \partial_{i_k}) = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} P \partial_{i_j} \otimes \partial_{i_1} \wedge \cdots \wedge \hat{\partial}_{i_j} \wedge \cdots \wedge \partial_{i_k}$ , et  $\delta_0(P) = P(1)$ . On définit les complexes de Spencer tronqués

$$\mathcal{M}_a := 0 \rightarrow \mathcal{D}_X \otimes_{\mathbb{C}} \Theta_X^{(p)} \xrightarrow{\delta_p} \mathcal{D}_X \otimes_{\mathbb{C}} \Theta_X^{(p-1)} \cdots \xrightarrow{\delta_1} \mathcal{D}_X \xrightarrow{\delta_0} \mathcal{O}_X \rightarrow 0,$$

$$\mathcal{M}_b := 0 \rightarrow \mathcal{D}_X \otimes_{\mathbb{C}} \Theta_X^{(p)} \xrightarrow{\delta_p} \mathcal{D}_X \otimes_{\mathbb{C}} \Theta_X^{(p-1)} \cdots \xrightarrow{\delta_1} \mathcal{D}_X \rightarrow 0,$$

où  $\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{C}} \Theta_X^{(p)}$  est placé en degré 0. Le complexe  $\mathcal{M}_a$  est isomorphe dans  $\mathbf{D}^b(\mathcal{D}_X)$  au  $\mathcal{D}_X$ -module  $\ker[\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{C}} \Theta_X^{(p)} \xrightarrow{\delta_p} \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{C}} \Theta_X^{(p-1)}]$ , on a  $\mathcal{M}_a \simeq H^0(\mathcal{M}_b)$ , et un triangle distingué de  $\mathcal{D}_X$ -modules

$$(2.1) \quad \mathcal{O}_X[-p-1] \longrightarrow \mathcal{M}_a \longrightarrow \mathcal{M}_b \xrightarrow{+1} .$$

**Lemme 2.2.1.** *Le complexe de faisceaux  $R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_a, \mathcal{O}_X)$  est représenté par  $\Omega_X^{\leq p}$ .*

*Démonstration.* Puisque  $\mathcal{M}_a$  est un complexe formé d'objets acycliques pour le foncteur  $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\cdot, \mathcal{O}_X)$ , on a  $R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_a, \mathcal{O}_X) = \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_a, \mathcal{O}_X)$ . Au niveau des composantes on a

$$\begin{aligned} \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}_X \otimes \Theta_X^{(k)}, \mathcal{O}_X) &\simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(\Theta_X^{(k)}, \mathcal{O}_X) \\ &\simeq \Omega_X^{(k)}, \end{aligned}$$

et  $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) = \mathbf{C}_X$ . L'isomorphisme  $\Omega_X^{(k)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(SP_k^X, \mathcal{O}_X)$  applique  $\omega \in \Omega_X^{(k)}$  sur le morphisme  $\mathcal{D}_X$ -linéaire

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_X \otimes \Theta_X^{(k)} &\rightarrow \mathcal{O}_X \\ Q \otimes \theta &\mapsto Q(\langle \omega, \theta \rangle), \end{aligned}$$

et il faut montrer que c'est un morphisme de complexes. On se place dans une carte, et il suffit de montrer  $\forall \omega \in \Omega_X^{(k)}, \theta \in \Theta_X^{(k+1)}, Q \in \mathcal{D}_X$ ,

$$Q(\langle d\omega, \theta \rangle) = \langle \omega, \delta(Q \otimes \theta) \rangle.$$

Par  $\mathcal{D}_X$ -linéarité, on est ramené à  $\forall \varphi \in \mathcal{O}_X$ ,

$$\begin{aligned} &\langle d(\varphi dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}), \partial_{j_1} \wedge \cdots \wedge \partial_{j_{k+1}} \rangle \\ &= \sum_{l=1}^{k+1} (-1)^{l-1} \partial_{j_l} \varphi \langle dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}, \partial_{j_1} \wedge \cdots \wedge \hat{\partial}_{j_l} \wedge \cdots \wedge \partial_{j_{k+1}} \rangle, \end{aligned}$$

ce qui est clair.

### 2.3 Le Théorème Principal

Soit le  $\mathcal{D}_{X \times Y}$ -module  $\mathcal{K} = \mathcal{B}_{S|X \times Y}$ . Soit  $(y_{i,j})$  les coordonnées dans la carte affine de  $Y$  définie au §2.1. Posons

$$(2.2) \quad A_{i_2, j_2}^{i_1, j_1} = \partial_{i_1, j_1} \partial_{i_2, j_2} - \partial_{i_1, j_2} \partial_{i_2, j_1},$$

où  $\partial_{i,j} = \frac{\partial}{\partial y_{i,j}}$ . Soit  $\mathcal{I}$  l'idéal à gauche de  $\mathcal{D}_Y$  engendré par la famille

d'opérateurs

$$(2.3) \quad \Delta_{i_2, j_2}^{i_1, j_1} \Delta_{i_4, j_4}^{i_3, j_3} + \Delta_{i_3, j_2}^{i_1, j_1} \Delta_{i_4, j_4}^{i_2, j_3} + \Delta_{i_2, j_4}^{i_1, j_3} \Delta_{i_4, j_2}^{i_3, j_1} + \Delta_{i_3, j_4}^{i_1, j_3} \Delta_{i_4, j_2}^{i_2, j_1}$$

avec  $p + 2 \leq i_q \leq n + 1$ ,  $1 \leq j_r \leq p + 1$ , où  $q, r = 1, \dots, 4$ . Nous prouvons le

**Théorème 2.3.1.** *On a un isomorphisme  $H^0(\mathcal{M}_b \circlearrowleft \mathcal{K}) \simeq \mathcal{D}_Y/\mathcal{I}$ .*

Notons  $\mathcal{N} = \mathcal{D}_Y/\mathcal{I}$ . On utilise d'abord des techniques microlocales pour montrer que les  $\mathcal{D}_Y$ -modules  $\mathcal{M}_b \circlearrowleft \mathcal{K}$  et  $\mathcal{N}$  ont la même multiplicité sur  $V = p_2^a(\dot{T}_S^*(X \times Y))$ . On généralise la notion de section non dégénérée d'un  $\mathcal{E}$ -module holonome régulier, et on utilise le résultat suivant (Lemme 3.1 de [DS2]): il y a un isomorphisme naturel

$$\text{Hom}_{\mathbf{D}^b(\mathcal{D}_{X \times Y})}(\underline{D}'\mathcal{M}_b \boxtimes \mathcal{N}, \mathcal{K}) \xrightarrow{\alpha} \text{Hom}_{\mathbf{D}^b(\mathcal{D}_Y)}(\mathcal{N}, \mathcal{M}_b \circlearrowleft \mathcal{K}),$$

pour montrer que si une section  $s \in \text{Hom}_{\mathbf{D}^b(\mathcal{D}_{X \times Y})}(\underline{D}'\mathcal{M}_b \boxtimes \mathcal{N}, \mathcal{K})$  est non dégénérée, alors  $\alpha(s)$  est un isomorphisme en dehors de la section nulle de  $T^*Y$ . On choisit pour section

$$s = \frac{d_X f_{p+2}}{f_{p+2}} \wedge \dots \wedge \frac{d_X f_{n+1}}{f_{n+1}},$$

où  $(f_{p+2}, \dots, f_{n+1})$  est un système d'équations locales de la variété de  $S$ . On doit montrer que  $s$  est bien définie sur  $\mathcal{N}$ , et que de plus, noyau et conoyau de  $\alpha(s)$  sont nuls. Pour cela, on prouve en particulier

$$(2.4) \quad \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{N}) \simeq 0.$$

Or le calcul direct faisant intervenir l'idéal  $\mathcal{I}$  semble difficilement praticable car les opérateurs qui le définissent sont très compliqués. Cette complexité de  $\mathcal{M}_b \circlearrowleft \mathcal{K}$  est due au fait que l'on part de  $\mathcal{D}$ -modules  $\mathcal{M}_a$  et  $\mathcal{M}_b$  dont les multiplicités sont  $> 1$ , contrairement aux  $\mathcal{D}$ -modules qui interviennent dans la transformation de Penrose, et qui sont associés à des fibrés en droites (voir [DS1] et [DS2]). Aussi, pour prouver (2.4), nous avons recouru à la théorie des représentations, ce que permet l'équivalence entre la catégorie des  $\mathcal{D}_Y$ -modules  $G$ -quasi-équivariants et celle des  $(\mathfrak{g}, P)$ -modules (voir [K2]).

On montre ensuite que  $\mathcal{M}_b \circlearrowleft \mathcal{K}$  est concentré en degrés  $\geq 0$ , et est à connexions plates en degrés  $> 0$ . Pour cela, on étudie le  $\mathcal{D}_Y$ -module  $\mathcal{M}_a$ , dont on montre par des méthodes cohomologiques inspirées de [DS1], que son transformé  $\mathcal{M}_a \circlearrowleft \mathcal{K}$  est concentré en degré 0; on utilise en particulier la formule du germe de *loc.cit*:

$$R\Gamma(\hat{y}; R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_a, \mathcal{O}_X)) \simeq R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_a \circlearrowleft \mathcal{K}, \mathcal{O}_Y)_{y, [-p]},$$

et un théorème de Barth pour obtenir les annulations souhaitées de cohomologie. On revient à  $\mathcal{M}_b \circlearrowleft \mathcal{K}$  grâce au triangle distingué (2.1).

### §3. Systèmes à Multiplicités Constantes

Le but de ce paragraphe est d'étendre aux  $\mathcal{D}$ -modules de multiplicité constante un résultat de D'Agnolo et Schapira portant sur les transformés de  $\mathcal{D}$ -modules simples (voir Théorème 3.3 de [DS2]).

Si  $\mathcal{K}$  est un  $\mathcal{D}_{X \times Y}$  (resp.  $\mathcal{E}_{X \times Y}$ )-module, on pose  $\mathcal{K}^{(n,0)} = q_1^{-1} \Omega_X \otimes_{q_1^{-1} \mathcal{L}_X} \mathcal{K}$  (resp.  $\mathcal{K}^{(n,0)} = \pi_{X \times Y}^{-1} q_1^{-1} \Omega_X \otimes_{\pi_{X \times Y}^{-1} q_1^{-1} \mathcal{L}_X} \mathcal{K}$ ); on a d'après loc.cit.

$$\mathcal{M} \circlearrowleft \mathcal{K} \simeq Rq_{2!}(\mathcal{K}^{(n,0)} \otimes_{q_1^{-1} \mathcal{D}_X}^L q_1^{-1} \mathcal{M}).$$

**Lemme 3.0.2** (Lemme 3.1 de [DS2]). *Soit  $\mathcal{M} \in \mathbf{D}_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_X)$ ,  $\mathcal{N}$  un  $\mathcal{D}_Y$ -module,  $\mathcal{K}$  un  $\mathcal{D}_{X \times Y}$ -module; on suppose que  $q_2$  est propre sur le support de  $\mathcal{K}$ . Alors il y a un isomorphisme naturel*

$$\text{Hom}_{\mathbf{D}^b(\mathcal{D}_{X \times Y})}(\underline{D}' \mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}, \mathcal{K}) \xrightarrow{\alpha} \text{Hom}_{\mathbf{D}^b(\mathcal{D}_Y)}(\mathcal{N}, \mathcal{M} \circlearrowleft \mathcal{K}).$$

On écrit la suite d'isomorphismes

$$\begin{aligned} Ra_{X \times Y} R\mathcal{H}om_{\mathbf{D}^b(\mathcal{D}_{X \times Y})}(\underline{D}' \mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}, \mathcal{K}) \\ \simeq Ra_{X \times Y} R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X \boxtimes \mathcal{D}_Y}(\underline{D}' \mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}, \mathcal{K}) \\ \simeq Ra_Y R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{N}, Rq_{2!} R\mathcal{H}om_{q_1^{-1} \mathcal{D}}(q_1^{-1} \underline{D}' \mathcal{M}, \mathcal{K})), \end{aligned}$$

et la formule résulte alors de l'isomorphisme

$$R\mathcal{H}om_{q_1^{-1} \mathcal{D}}(q_1^{-1} \underline{D}' \mathcal{M}, \mathcal{K}) \simeq \mathcal{K}^{(n,0)} \otimes_{q_1^{-1} \mathcal{D}}^L q_1^{-1} \mathcal{M}.$$

On va généraliser la notion classique—introduite dans [SKK] et [KO]—de section non dégénérée d'un  $\mathcal{E}_X$ -module holonome régulier. Rappelons des définitions de [KO]:

**Définition 3.0.3.** *Soit  $V$  une variété conique régulière, involutive, lisse contenue dans  $\tilde{T}^*X$ . On désigne par  $\mathcal{E}_V$  la sous-algèbre de  $\mathcal{E}_X$ , engendrée sur  $\mathcal{E}_X(0)$  par les sections de  $\mathcal{E}_X(1)$  dont le symbole d'ordre 1 s'annule sur  $V$ .*

**Définition 3.0.4.** *Soit  $V$  comme ci-dessus. Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{E}_X$ -module cohérent. On dit que  $\mathcal{M}$  est à singularités régulières le long de  $V$  si localement, il existe un sous- $\mathcal{E}_X(0)$ -module cohérent  $\mathcal{M}_0$  de  $\mathcal{M}$ , qui l'engendre sur  $\mathcal{E}_X$ , et tel que  $\mathcal{E}_V \mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_0$ .*

**Définition 3.0.5.** *Soit  $\mathcal{M}$  et  $V$  comme ci-dessus, et supposons que  $\mathcal{M}$  soit à singularités régulières le long de  $V$ ; on dit que  $\mathcal{M}$  est de multiplicité constante sur  $V$  si  $\mathcal{M}_0/\mathcal{M}_0(-1)$  est  $\mathcal{O}_V(0)$ -localement libre de rang fini.*

Soit  $\mathcal{M}$  est un  $\mathcal{D}$ -module tel que  $\mathcal{E}\mathcal{M}$  soit à singularités régulières le long d'une sous-variété du cotangent; si  $\mathcal{M}_0$  est un sous  $\mathcal{E}(0)$ -module de  $\mathcal{E}\mathcal{M}$ ,

vérifiant les conditions de la définition 3.0.4, on désignera par  $\overline{\mathcal{M}}_0$  le quotient  $\mathcal{M}_0/\mathcal{M}_0(-1)$ . Si  $\mathcal{M}$  est un  $\mathcal{D}$ -module localement libre, alors son dual  $\underline{D}'\mathcal{M}$  est concentré en degré 0; on notera pour abrégé  $\mathcal{M}' = \underline{D}'\mathcal{M}$ .

Soit  $A \subset \dot{T}^*(X \times Y)$  une sous-variété lagrangienne conique lisse et fermée. La correspondance microlocale associée à  $A$  est définie par

$$\dot{T}^*X \xleftarrow{p_1} A \xrightarrow{p_2^a} \dot{T}^*Y,$$

où  $p_1$  et  $p_2$  sont les projections naturelles, et  $p_2^a$  est la composée de  $p_2$  avec l'application antipodale.

On peut maintenant poser la définition suivante

**Définition 3.0.6.** Soit  $W$  un ouvert de  $\dot{T}^*X$ ,  $V$  une variété conique, régulière, involutive, lisse, contenue dans  $\dot{T}^*Y$ ; soit  $A$  une sous-variété lagrangienne conique, lisse et fermée de  $\dot{T}^*(X \times Y)$ . Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{D}_X$ -module cohérent, tel que  $\mathcal{E}\mathcal{M}$  soit localement libre sur  $W$ , de rang  $m$ , et  $\mathcal{N}$  un  $\mathcal{D}_Y$ -module cohérent, tel que  $\mathcal{E}\mathcal{N}$  soit à singularités régulières, et de multiplicité constante  $m$  le long de  $V$ . Soit  $\mathcal{K}$  un  $\mathcal{D}_{X \times Y}$ -module simple le long de  $A$ . Soit  $s$  une section de  $\text{Hom}_{\mathcal{D}_{X \times Y}}(\underline{D}'\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}, \mathcal{K})$ ; on dit que  $s$  est non dégénérée en un point  $p \in A$  s'il existe  $\mathcal{M}'_0$  (resp.  $\mathcal{N}'_0, \mathcal{K}'_0$ ) au voisinage de  $p_1(p)$  (resp.  $p_2^a(p), p$ ), vérifiant les conditions des définitions 3.0.4, 3.0.5, et si les deux conditions suivantes sont vérifiées

- (i)  $s(\mathcal{M}'_0 \boxtimes \mathcal{N}'_0) \subset \mathcal{K}'_0$ ,
- (ii)  $s$  définit un accouplement parfait:

$$(3.1) \quad (p_1^{-1}\overline{\mathcal{M}}'_0 \otimes_{p_1^{-1}\mathcal{O}_W(0)} \mathcal{O}_A(0)) \otimes_{\mathcal{O}_A(0)} (\mathcal{O}_A(0) \otimes_{(p_2^a)^{-1}\mathcal{O}_V(0)} (p_2^a)^{-1}\overline{\mathcal{N}}'_0) \rightarrow \overline{\mathcal{K}}'_0.$$

**Proposition 3.0.7.** Soit  $A \subset \dot{T}^*(X \times Y)$  une sous-variété lagrangienne conique lisse et fermée. On suppose vérifiées les conditions suivantes

- (i)  $q_1$  et  $q_2$  sont propres sur  $\dot{\pi}(A)$ ,
- (ii)  $A \cap (\dot{T}^*X \times T_Y^*Y) = A \cap (T_X^*X \times \dot{T}^*Y) = \emptyset$ ,
- (iii)  $p_1$  est lisse et surjective sur  $\dot{T}^*X$ ,
- (iv)  $p_2^a$  est un plongement fermé, identifiant  $A$  à une variété fermée, régulière, involutive, lisse  $V \subset \dot{T}^*Y$ .

Soit  $\mathcal{M}$  (resp.  $\mathcal{N}$ ) un  $\mathcal{D}_X$  (resp.  $\mathcal{D}_Y$ )-module, et  $\mathcal{K}$  un  $\mathcal{D}_{X \times Y}$ -module simple le long de  $A$ . On suppose de plus vérifiées les conditions suivantes

- (v) localement, en dehors de la section nulle, on a  $\mathcal{E}\mathcal{M} \simeq \mathcal{E}_X^m$ ,
- (vi)  $\mathcal{E}\mathcal{N}$  est à singularités régulières, et de multiplicité constante  $m$  le long de  $V$ . S'il existe une section  $s \in \text{Hom}_{\mathcal{D}_{X \times Y}}(\underline{D}'\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}, \mathcal{K})$  qui soit non dégénérée en tout point de  $A$ , alors le morphisme  $\alpha(s) : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M} \circlearrowleft \mathcal{K}$  du Lemme 3.0.2 est un isomorphisme en dehors de la section nulle.

On définit comme dans [SSc] la transformation intégrale microlocale

$$\mathcal{E}\mathcal{M} \circlearrowleft \mathcal{E}\mathcal{K} = R p_{2!}^a(\mathcal{E}\mathcal{K}^{(n,0)} \otimes_{p_1^{-1}\mathcal{E}_X}^L p_1^{-1}\mathcal{E}\mathcal{M});$$

puisque  $q_1$  et  $q_2$  sont propres sur  $\dot{\pi}(A)$ , on a d'après *loc.cit*

$$\mathcal{E}(\mathcal{M} \circlearrowleft \mathcal{K}) \simeq \mathcal{E}\mathcal{M} \circ_{\mu} \mathcal{E}\mathcal{K}.$$

On applique alors le Lemme 4.7 de [DS1]: pour tout point  $(p, q^a) \in A$ , il existe  $U_X$  (resp.  $U_Y$ ) voisinage de  $p$  (resp.  $q$ ) dans  $\dot{T}^*X$  (resp.  $\dot{T}^*Y$ ), un ouvert  $U'_X$  de  $\dot{T}^*X$ , une variété complexe lisse  $Z$  de dimension égale à la codimension de  $V$ , et une transformation de contact  $\psi : U_Y \xrightarrow{\sim} U'_X \times T^*Z$ , telle que  $id_{U_X} \times \psi$  induise un isomorphisme de correspondances

$$(3.2) \quad \begin{array}{ccc} A \cap (U_X \times U_Y^a) & & A_X \times T_Z^*Z \\ \begin{array}{c} p_1 \swarrow \quad \searrow p_2^a \\ U_X \qquad \qquad V \cap U_Y \end{array} & \xrightarrow{\sim} & \begin{array}{c} p_1 \swarrow \quad \searrow p_{23}^a \\ U_X \qquad \qquad U'_X \times T_Z^*Z \end{array} \end{array}$$

où  $A_X \subset U_X \times U_X^a$  est le graphe d'une transformation de contact  $\chi : U_X \rightarrow U'_X$ , et  $p_{23}^a$  est la projection  $U_X \times U_X^a \times T^*Z \rightarrow U'_X \times T^*Z$ . Quitte à rétrécir l'ouvert  $U_X$ , on peut supposer que  $\mathcal{E}\mathcal{M} \simeq \mathcal{E}_X^m$ ; on a donc sur  $U_X$  les isomorphismes

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\mathcal{M} \circ_{\mu} \mathcal{E}\mathcal{K} &\simeq p_{2*}^a (\mathcal{E}\mathcal{K}^{(n,0)}) \otimes_{p_1^{-1}\mathcal{E}_X} p_1^{-1}\mathcal{E}_X^m \\ &\simeq p_{2*}^a ((\mathcal{E}\mathcal{K}^{(n,0)})^m) \\ &\simeq (\mathcal{E}_X \boxtimes \mathcal{O}_Z)^m, \end{aligned}$$

d'où  $\overline{(\mathcal{E}\mathcal{M} \circ_{\mu} \mathcal{E}\mathcal{K})}_0 \simeq \mathcal{O}_V(0)^m$ . De même, on peut supposer qu'on a sur  $U_Y$ ,  $\mathcal{E}\mathcal{N} \simeq (\mathcal{E}_X \boxtimes \mathcal{O}_Z)^m$ , et puisque l'accouplement (3.1) est parfait, il induit sur  $U_Y$  un isomorphisme

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_A(0) \otimes (p_2^a)^{-1}\bar{\mathcal{N}}_0 &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}(\mathcal{O}_A(0) \otimes p_1^{-1}\bar{\mathcal{M}}'_0, \bar{\mathcal{K}}_0) \\ &\simeq \text{Hom}(\mathcal{O}_A(0) \otimes p_1^{-1}\mathcal{O}_{T^*X}^m(0), \mathcal{O}_A(0)) \\ &\simeq \mathcal{O}_A(0)^m, \end{aligned}$$

d'où un isomorphisme  $\bar{\mathcal{N}}_0 \xrightarrow{\sim} \overline{(\mathcal{E}(\mathcal{M} \circlearrowleft \mathcal{K}))}_0$ . Comme les filtrations par le degré sont séparées, on peut appliquer la Proposition. 1.1.3 de [S], et on en déduit un isomorphisme

$$\mathcal{N}_{0|U_Y} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{E}(\mathcal{M} \circlearrowleft \mathcal{K}))_{0|U_Y},$$

d'où le résultat.

#### §4. Calcul du Transformé de $\mathcal{M}_b$

Revenons au complexe de  $\mathcal{D}$ -modules  $\mathcal{M}_b$ , et au noyau  $\mathcal{K} = \mathcal{B}_{S|X \times Y}$ . Posons  $\mathcal{N} = \mathcal{D}_Y/\mathcal{I}$ . On utilise la méthode du paragraphe précédent pour

prouver qu'on a un isomorphisme  $\mathcal{N} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_b \circlearrowleft \mathcal{K}$  modulo connexions plates. Pour éliminer ces connexions plates, on prouve ensuite certaines propriétés des  $\mathcal{D}_Y$ -modules  $\mathcal{N}$  et  $H^0(\mathcal{M}_b \circlearrowleft \mathcal{K})$ .

**4.1 Géométrie de la Correspondance**

Rappelons que  $W \simeq \mathbb{C}^{n+1}$ ,  $X = \mathbb{F}(1)$ ,  $Y = \mathbb{F}(p+1)$ , et  $S = F(1, p+1)$ . On note  $(y_{i,j})_{\substack{p+2 \leq i \leq n+1 \\ 1 \leq j \leq p+1}}$  les coordonnées locales de la carte affine de  $Y$  définie au §2.1, et  $(y; \eta)$  les coordonnées associées dans  $T^*Y$ . Choisissons des coordonnées  $(x_i)_{1 \leq i \leq n+1}$  de  $W$ , et considérons la carte affine de  $X$  définie par  $x_1 \neq 0$ . Soit  $(x, \xi)$  les coordonnées associées dans  $T^*X$ . On a les isomorphismes

$$T^*Y \simeq \{(y, \beta); y \in Y, \beta \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(W/y, y)\}$$

$$T_S^*(X \times Y) \simeq \{(x, y, \gamma); (x, y) \in X \times Y, x \subset y, \gamma \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(W/y, x)\}.$$

Au-dessus du point  $(x, y)$ , on a  $p_2 = \iota\gamma$ , où  $\iota$  est l'inclusion  $x \hookrightarrow y$ ; la variété  $V = p_2^*(\dot{T}_S^*(X \times Y))$  est donc lisse, et elle est définie par  $\text{rg } \eta = 1$ . Les hypothèses (i) à (iv) de la Proposition 3.0.7 sont satisfaites avec  $\Lambda = \dot{T}_S^*(X \times Y)$ .

**4.2 Calcul des Multiplicités**

**Proposition 4.2.1.** *Notons  $m = \binom{n-1}{p}$ .*

- (i) *Localement, en dehors de la section nulle, on a  $\mathcal{E}\mathcal{M}_b \simeq \mathcal{E}_X^m$ .*
- (ii) *Le  $\mathcal{E}_Y$ -module  $\mathcal{E}\mathcal{N}$  est à singularités régulières, et de multiplicité constante  $m$  le long de  $V$ .*

Rappelons que

$$\mathcal{M}_b = 0 \longrightarrow \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}} \Theta_X^{(p)} \xrightarrow{\delta_p} \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}} \Theta_X^{(p-1)} \dots \xrightarrow{\delta_1} \mathcal{D}_X \xrightarrow{\delta_0} 0.$$

Pour le point (i), il suffit de montrer par récurrence sur  $k$  que localement, en dehors de la section nulle, on a  $\mathcal{E} \ker \delta_k \simeq \mathcal{E}_X^{\binom{n-1}{k}}$ . Dans la carte  $(x_i, \xi_i)_{2 \leq i \leq n+1}$  de  $T^*X$ , plaçons-nous au voisinage d'un point tel que  $\xi_2 \neq 0$ . Alors

$$\delta_1 \left( \sum_{i=2}^{n+1} P_i \otimes \partial_{x_i} \right) = 0 \iff \sum_{i=2}^{n+1} (-1)^{i-1} P_i \partial_{x_i} = 0 \iff P_2 = \sum_{i=3}^{n+1} (-1)^i P_i (\partial_{x_2})^{-1} \partial_{x_i},$$

ce qui prouve l'assertion pour  $k = 1$ . Considérons la suite exacte

$$0 \rightarrow \pi_X^{-1}(\ker \delta_k) \rightarrow \pi_X^{-1}(\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}} \Theta_X^{(k)}) \rightarrow \pi_X^{-1} \text{im } \delta_k \rightarrow 0.$$



Comme  $\mathcal{E}_X$  est  $\pi_X^{-1}\mathcal{D}_X$ -plat, et  $\text{im } \delta_k = \ker \delta_{k-1}$ , la suite

$$0 \rightarrow \mathcal{E} \ker \delta_k \rightarrow \mathcal{E}_X^{(n)} \rightarrow \mathcal{E}_X^{(n-1)} \rightarrow 0$$

est exacte. Cette suite étant scindée, on en déduit  $\mathcal{E} \ker \delta_k \simeq \mathcal{E}_X^{(k)} - \binom{n-1}{k-1}$ , et l'on conclut par la formule de Pascal.

Passons au point (ii). Les opérateurs  $\Delta_{i_2, j_2}^{i_1, j_1}$  ont été définis par (2.2); notons  $\tilde{\Delta}_{i, j} = \Delta_{i, j}^{p+2, 1}$ . Si on fait  $i_1 = i_4 = p + 2$ ,  $i_2 = i$ ,  $i_3 = i'$ , et  $j_1 = j_3 = 1$ ,  $j_2 = j$ ,  $j_4 = j'$  dans l'expression

$$\Delta_{i_2, j_2}^{i_1, j_1} \Delta_{i_4, j_4}^{i_3, j_3} + \Delta_{i_3, j_2}^{i_1, j_1} \Delta_{i_4, j_4}^{i_2, j_3} + \Delta_{i_2, j_4}^{i_1, j_3} \Delta_{i_4, j_2}^{i_3, j_1} + \Delta_{i_3, j_4}^{i_1, j_3} \Delta_{i_4, j_2}^{i_2, j_1},$$

des générateurs de l'idéal  $\mathcal{I}$ , on voit que

$$(4.1) \quad \tilde{\Delta}_{i, j} \tilde{\Delta}_{i', j'} + \tilde{\Delta}_{i, j'} \tilde{\Delta}_{i', j} \in \mathcal{I},$$

et en particulier

$$(4.2) \quad \tilde{\Delta}_{i, j} \tilde{\Delta}_{i, j'} \in \mathcal{I}, \quad \tilde{\Delta}_{i, j} \tilde{\Delta}_{i', j} \in \mathcal{I}.$$

Notons  $t = \min(n - p - 1, p)$ ; pour tout entier  $k \leq t$ , toute famille d'entiers  $p + 3 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n + 1$ , et  $j_1, \dots, j_k$  des entiers distincts parmi  $2, \dots, p + 1$ , on a par récurrence grâce à (4.1)

$$(4.3) \quad \tilde{\Delta}_{i_1, j_1} \dots \tilde{\Delta}_{i_k, j_k} = (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \tilde{\Delta}_{i_1, j_{\sigma(1)}} \dots \tilde{\Delta}_{i_k, j_{\sigma(k)}} \pmod{\mathcal{I}},$$

où  $\sigma$  est la permutation de l'ensemble  $\{1, \dots, k\}$ , telle que  $j_{\sigma(1)} < \dots < j_{\sigma(k)}$ . Des relations (4.2) et (4.3), on déduit le

**Lemme 4.2.2.** *Le produit d'un nombre  $> t$  d'opérateurs  $\tilde{\Delta}_{i, j}$  (où  $p + 3 \leq i \leq n + 1$  et  $2 \leq j \leq p + 1$ ) est dans  $\mathcal{I}$ , et à un facteur  $\pm 1$  près, modulo  $\mathcal{I}$ , si  $k \leq t$ , les seuls produits distincts formés de  $k$  opérateurs  $\tilde{\Delta}_{i, j}$  sont  $\tilde{\Delta}_{i_1, j_1} \dots \tilde{\Delta}_{i_k, j_k}$ , où  $p + 3 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n + 1$ , et  $2 \leq j_1 < \dots < j_k \leq p + 1$ .*

Notons à présent  $\sigma(P)$  le symbole principal d'un opérateur  $P$ . Dans un voisinage  $U_Y$  d'un point  $(y, \eta) \in V \cap \dot{T}^*Y$  tel que  $\eta_{p+2, 1} \neq 0$ , on a

$$\begin{aligned} \sigma(\Delta_{i_2, j_2}^{i_1, j_1}) &= \eta_{p+2, 1}^{-2} \{ \sigma(\tilde{\Delta}_{i_1, j_1}) \sigma(\tilde{\Delta}_{i_2, j_2}) - \sigma(\tilde{\Delta}_{i_1, j_2}) \sigma(\tilde{\Delta}_{i_2, j_1}) + \sigma(\tilde{\Delta}_{i_1, j_1}) \eta_{p+2, j_2} \eta_{i_2, 1} \\ &\quad - \sigma(\tilde{\Delta}_{i_1, j_2}) \eta_{p+2, j_1} \eta_{i_2, 1} + \sigma(\tilde{\Delta}_{i_2, j_2}) \eta_{p+2, j_1} \eta_{i_1, 1} - \sigma(\tilde{\Delta}_{i_2, j_1}) \eta_{p+2, j_2} \eta_{i_1, 1} \}. \end{aligned}$$

On voit donc que les symboles principaux des générateurs de  $\mathcal{I}$  sont dans l'idéal engendré par les symboles principaux  $\sigma(\tilde{\Delta}_{i, j}) = \eta_{p+2, 1} \eta_{i, j} - \eta_{p+2, j} \eta_{i, 1}$ , où  $i > p + 2$ ,  $j > 1$ . Notons  $B = \mathcal{E}_{Y|U_Y}$ , et  $A$  le sous-faisceau de  $B$ , constitué des

opérateurs micro-différentiels à coefficients constants. Les anneaux  $A$  et  $B$ , munis des filtrations naturelles induites par celle de  $\mathcal{E}_Y$  sont zariskiens. On sait que  $\text{Gr } B$  est plat sur  $\text{Gr } A$ . On peut donc appliquer la Proposition 1.2.4 de [S], et on obtient

$$\text{Gr } \mathcal{I}|_{U_Y} \simeq \text{Gr } \mathcal{E}_Y|_{U_Y} \cdot \text{Gr}(\mathcal{I}|_{U_Y} \cap A),$$

ce qui montre que sur  $U_Y$ , l'idéal des symboles de l'idéal  $\mathcal{I}$ , est engendré par les symboles principaux des générateurs de  $\mathcal{I}$ . La variété des zéros de la famille  $\sigma(\tilde{A}_{i,j})_{i>p+2, j>1}$  est donc car  $\mathcal{N}$ , et comme  $V$  est définie par  $\text{rg } \eta = 1$ , on en déduit  $\text{car } \mathcal{N} = V$ . Reprenons les notations du §3: on va expliciter l'isomorphisme de correspondances (3.2) dans la situation présente. Considérons la transformation de contact  $\psi$  définie par le changement de covariables

$$\theta_{i,j} = \eta_{p+2,1}^{-1} \sigma(\tilde{A}_{i,j}) \text{ si } i > p + 2 \text{ et } j > 1, \quad \theta_{i,j} = \eta_{i,j} \text{ si } i = p + 2 \text{ ou } j = 1,$$

dans un voisinage  $U_Y$  d'un point  $(y, \eta)$  où  $\eta_{p+2,1} \neq 0$ . Soit  $(t_{i,j})$  les variables correspondantes; on a

$$\begin{aligned} \psi : U_Y &\rightarrow U'_X \times T^*Z \\ (y, \eta) &\mapsto (t_{i,j}, \theta_{i,j}), \end{aligned}$$

la variété  $T^*Z$  étant définie par les variables  $(t_{i,j}, \theta_{i,j})$  où  $i \geq p + 3$  et  $j \geq 2$ . Sur  $U_Y$  on obtient donc l'isomorphisme

$$\mathcal{E}\mathcal{N} \simeq (\mathcal{E}_X \boxtimes \mathcal{E}_Z) / \mathcal{E}\mathcal{I}.$$

Notons  $\partial_{i,j} = \partial_{t_{i,j}}$ . Comme  $V \cap U_Y \simeq U'_X \times T^*_Z Z$ , qui est définie par  $\theta_{i,j} = 0$  pour  $i > p + 2$  et  $j > 1$ , on a  $\mathcal{E}_Y / (\mathcal{E}_Y \partial_{i,j})_{i>p+2, j>1} \simeq \mathcal{E}_X \boxtimes \mathcal{O}_Z$ . Considérons les opérateurs

$$1, \partial_{i_1, j_1}, \partial_{i_1, j_1} \partial_{i_2, j_2}, \dots, \partial_{i_1, j_1} \dots \partial_{i_k, j_k}, \dots, \partial_{i_1, j_1} \dots \partial_{i_t, j_t},$$

où  $p + 3 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n + 1$ ,  $2 \leq j_1 < \dots < j_k \leq p + 1$ ,  $k = 0, \dots, t$ ; ils sont en nombre  $\sum_{k=0}^t \binom{n-p-1}{k} \binom{p}{k} = \binom{n-1}{p} = m$ . Désignons par  $(v_\nu)_{1 \leq \nu \leq m}$  ces  $m$  opérateurs; grâce au Lemme 4.2.2 on obtient

$$\mathcal{E}\mathcal{N} \simeq \sum_{\nu=1}^m (\mathcal{E}_X \boxtimes \mathcal{O}_Z) v_\nu b_0,$$

où  $b_0$  est la classe de  $1 \in \mathcal{D}_Y$  dans  $\mathcal{N}$ . Soit la filtration  $\mathcal{N}_0 \simeq \sum_{\nu=1}^m (\mathcal{E}_X(0) \boxtimes \mathcal{O}_Z) v_\nu b_0$ , et  $\mathcal{N}_0(-1) \simeq \sum_{\nu=1}^m (\mathcal{E}_X(-1) \boxtimes \mathcal{O}_Z) v_\nu b_0$ ; on a bien

$$\bar{\mathcal{N}}_0|_{U_Y} \simeq (\mathcal{O}_V(0))|_{U_Y}^m.$$

### 4.3 Etude de la Section

On cherche une section non dégénérée

$$s \in \text{Hom}_{\mathcal{D}_{X \times Y}}(\underline{D}'\mathcal{M}_b \boxtimes \mathcal{N}, \mathcal{B}_{S|X \times Y}).$$

De la définition de  $\mathcal{M}_b$ , on déduit la présentation

$$\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}} \Theta_X^{(n-p+1)} \rightarrow \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}} \Theta_X^{(n-p)} \rightarrow \underline{D}'\mathcal{M}_b \rightarrow 0.$$

Donc  $\text{Hom}_{\mathcal{D}_{X \times Y}}(\underline{D}'\mathcal{M}_b \boxtimes \mathcal{N}, \mathcal{B}_{S|X \times Y})$  est isomorphe au noyau de la flèche

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}_{X \times Y}}(D_X^{(n-p)} \boxtimes \mathcal{N}, \mathcal{B}_{S|X \times Y}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}_{X \times Y}}(D_X^{(n-p+1)} \boxtimes \mathcal{N}, \mathcal{B}_{S|X \times Y}),$$

ou de celle-ci, déduite par isomorphisme:

$$\begin{aligned} & \text{Hom}_{q_2^{-1}\mathcal{D}}(q_2^{-1}\mathcal{N}, q_1^{-1}\Omega_X^{(n-p)} \otimes_{q_1^{-1}\mathcal{O}} \mathcal{B}_{S|X \times Y}) \\ & \xrightarrow{d} \text{Hom}_{q_2^{-1}\mathcal{D}}(q_2^{-1}\mathcal{N}, q_1^{-1}\Omega_X^{(n-p+1)} \otimes_{q_1^{-1}\mathcal{O}} \mathcal{B}_{S|X \times Y}). \end{aligned}$$

La variété  $S = \mathbb{F}(1, p+1)$  est de dimension  $p + (p+1)(n-p)$  dans  $X \times Y$ ; elle admet donc un système de  $n-p$  équations locales  $(f_{p+2}, \dots, f_{n+1})$ . Explicitons-les dans la carte affine choisie sur  $Y$ , et avec les coordonnées homogènes  $[x_i]_{1 \leq i \leq n+1}$  sur  $X$ ;  $S$  est donnée par la condition:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{p+1} \\ x_{p+2} \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_{p+2,1} \\ \vdots \\ y_{n+1,1} \end{pmatrix} \wedge \dots \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ y_{p+2,p+1} \\ \vdots \\ y_{n+1,p+1} \end{pmatrix} = 0.$$

On trouve les équations indépendantes:  $f_{p+2} = \dots = f_{n+1} = 0$ , où

$$(4.4) \quad f_i = x_i - x_1 y_{i,1} - x_2 y_{i,2} - \dots - x_{p+1} y_{i,p+1},$$

et  $i = p+2, \dots, n+1$ . Notons par abus de langage  $d_X f = d_X f_{p+2} \wedge \dots \wedge d_X f_{n+1}$ , et  $f = f_{p+2} \dots f_{n+1}$ . Soit

$$s = \frac{d_X f}{f},$$

section locale du faisceau  $q_1^{-1}\Omega_X^{(n-p)} \otimes_{q_1^{-1}\mathcal{O}} \mathcal{B}_{S|X \times Y}$ . On remarque que  $s$  est l'image de la section canonique de  $\Omega_{X \times Y}^{(n-p)} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{B}_{S|X \times Y}$  par la projection

$$\Omega_{X \times Y}^{(n-p)} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{B}_{S|X \times Y} \rightarrow q_1^{-1} \Omega_X^{(n-p)} \otimes_{q_1^{-1} \mathcal{O}_X} \mathcal{B}_{S|X \times Y};$$

c'est une section globale du faisceau  $q_1^{-1} \Omega_X^{(n-p)} \otimes_{q_1^{-1} \mathcal{O}} \mathcal{B}_{S|X \times Y}$ .

**Proposition 4.3.1.** *On a les propriétés suivantes*

- (i)  $ds = 0$ , donc  $s \in \text{Hom}_{q_1^{-1} \mathcal{O}}(q_1^{-1} \underline{D}' \mathcal{M}_b, \mathcal{B}_{S|X \times Y})$ .
- (ii)  $\mathcal{I}s = 0$ , donc  $s \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X \times Y}}(\underline{D}' \mathcal{M}_b \boxtimes \mathcal{N}, \mathcal{B}_{S|X \times Y})$ .
- (iii)  $s$  est non dégénérée (au sens de la Définition 3.0.6) en tout point de  $\dot{T}_S^*(X \times Y)$ .

Le point (i) est évident. Pour démontrer (ii), on remarque d'abord que les générateurs de  $\mathcal{I}$  donnés par (2.3) se développent sous la forme suivante

$$(4.5) \quad \sum_{\substack{(j_1, j_2)^- \\ (j_3, j_4)^-}} \sum_{\substack{(j_1, j_4) \\ (j_3, j_2)}} \partial_{y_{j_1, j_1}} \partial_{y_{j_2, j_2}} \partial_{y_{j_3, j_3}} \partial_{y_{j_4, j_4}},$$

avec  $p + 2 \leq i_q \leq n + 1$ ,  $1 \leq j_r \leq p + 1$ , où dans la somme intérieure on effectue les quatre permutations engendrées par les transpositions  $(j_1, j_4)$  et  $(j_3, j_2)$ , et dans la somme extérieure, on effectue les quatre permutations engendrées par  $(j_1, j_2)$  et  $(j_3, j_4)$ , ces deux transpositions changeant le signe des produits dont elles affectent les indices des facteurs, comme l'illustre l'exemple suivant

$$\sum_{\substack{(j_1, j_2)^- \\ (j_3, j_4)^-}} a_{j_1} b_{j_2} c_{j_3} d_{j_4} = a_{j_1} b_{j_2} c_{j_3} d_{j_4} - a_{j_2} b_{j_1} c_{j_3} d_{j_4} - a_{j_1} b_{j_2} c_{j_4} d_{j_3} + a_{j_2} b_{j_1} c_{j_4} d_{j_3}.$$

On remarque que dans (4.5), les deux  $\sum$  ne commutent pas. Pour simplifier l'écriture, on omettra les lettres  $j$  en indices de ces sommes; ainsi (4.5) pourra s'écrire

$$\sum_{\substack{(1, 2)^- \\ (3, 4)^-}} \sum_{\substack{(1, 4) \\ (3, 2)}} \partial_{y_{1, 1}} \partial_{y_{2, 2}} \partial_{y_{3, 3}} \partial_{y_{4, 4}},$$

et quand on écrira simplement  $\sum \sum$ , ce sont les indices de (4.5) qui sont sous-entendus.

**Démonstration de  $\mathcal{I}s = 0$**

On va montrer qu'en tout point  $y \in Y$ , on a  $\mathcal{I}s|_{X \times \{y\}} = 0$ . Soit  $\iota$  l'inclusion  $y \hookrightarrow Y$ ; notons  $\tilde{\iota} = Id_X \times \iota$ . On a

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_b \circlearrowleft \mathcal{K} &\simeq Rq_{2!}((q_1^{-1} \Omega_X \otimes_{q_1^{-1} \mathcal{O}} \mathcal{B}_{S|X \times Y}) \otimes_{q_1^{-1} \mathcal{O}}^L q_1^{-1} \mathcal{M}_b) \\ &\simeq Rq_{2!}((q_1^{-1} \Omega_X \otimes_{q_1^{-1} \mathcal{O}} q_1^{-1} \mathcal{M}_b) \otimes_{q_1^{-1} \mathcal{O}} \mathcal{B}_{S|X \times Y}). \end{aligned}$$

Par l'isomorphisme du Lemme 3.0.2, on peut calculer  $s|_{\tilde{\iota}}$  de la façon suivante:

$$\begin{aligned}
\underline{\iota}^{-1}(\mathcal{M}_b \circlearrowleft \mathcal{K}) &\simeq \mathbf{R}\Gamma(q_2^{-1}(y); (q_1^{-1}\Omega_X \otimes_{q_1^{-1}\mathcal{O}} q_1^{-1}\mathcal{M}_b) \otimes_{q_1^{-1}\mathcal{O}} (\tilde{\iota})^{-1}\mathcal{B}_{S|X \times Y}) \\
&\simeq \mathbf{R}\Gamma(q_2^{-1}(y); (q_1^{-1}(\Omega_X \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{M}_b) \otimes_{q_1^{-1}\mathcal{O}} \mathcal{B}_{\tilde{Y} \times Y|X \times Y}) \\
&\simeq \mathbf{R}\Gamma(\hat{y}; (\Omega_X \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{M}_b) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{B}_{\hat{Y}|X}),
\end{aligned}$$

d'où on déduit

$$H^0(\underline{\iota}^{-1}(\mathcal{M}_b \circlearrowleft \mathcal{K})) \simeq \ker[\Gamma(\hat{y}; \Omega_X^{(n-p)} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{B}_{\hat{Y}|X}) \xrightarrow{d} \Gamma(\hat{y}; \Omega_X^{(n-p+1)} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{B}_{\hat{Y}|X})].$$

Le calcul sur l'expression (4.4) donne

$$(4.6) \quad \partial_{y_i} \left( \frac{dx f}{f} \right) = \frac{x_j}{f f_i} dx f + \frac{1}{f} dx f_{p+2} \wedge \cdots \wedge (-dx_j) \wedge \cdots \wedge dx f_{n+1},$$

où  $-dx_j$  occupe la place de  $dx f_i$ . Notons  $x' = (x_{p+2}, \dots, x_{n+1})$ ,  $dx' = dx_{p+2} \wedge \cdots \wedge dx_{n+1}$ . Plaçons-nous au point  $y = 0$  de la carte choisie sur  $Y : \hat{y}$  a pour

équations  $x_{p+2} = \cdots = x_{n+1} = 0$ . Notons  $\delta(x') dx' = \frac{dx'}{x_{p+2} \cdots x_{n+1}}$  la section

canonique de  $\Omega_X^{(n-p)} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{B}_{\hat{Y}|X}$ . Notons  $s_y = \underline{\iota}^{-1}(s) = \frac{dx f}{f} \Big|_{y=0}$ . On a donc  $s_y = \delta(x') dx'$ , et  $\partial_{y_i} \Big|_{y=0}$  définit l'action suivante (qu'on note  $e_{i,j}$ ) sur  $s_y$ :

$$(4.7) \quad e_{i,j} s_y = (e_{i,j} \delta(x')) dx' + \delta(x') (e_{i,j} dx'),$$

où par (4.6) on a

$$\begin{aligned}
e_{i,j} \delta(x') &= -\partial_i x_j \delta(x'), \\
e_{i,j} dx' &= dx_{p+2} \wedge \cdots \wedge (-dx_j) \wedge \cdots \wedge dx_{n+1},
\end{aligned}$$

le terme  $-dx_j$  occupant la place de  $dx_i$  dans le produit extérieur. On a l'identité

$$(4.8) \quad e_{i,j} e_{i',j'} dx' = -e_{i,j'} e_{i',j} dx'.$$

Si on itère la relation (4.7), on obtient

$$\begin{aligned}
&e_{i_1, j_1} e_{i_2, j_2} e_{i_3, j_3} e_{i_4, j_4} s_y \\
&= (\partial_{i_1} \partial_{i_2} \partial_{i_3} \partial_{i_4} x_{j_1} x_{j_2} x_{j_3} x_{j_4} \delta(x')) dx' - (\partial_{i_1} \partial_{i_2} \partial_{i_3} x_{j_1} x_{j_2} x_{j_3} \delta(x')) e_{i_4, j_4} dx' \\
&\quad - (\partial_{i_1} \partial_{i_2} \partial_{i_4} x_{j_1} x_{j_2} x_{j_4} \delta(x')) e_{i_3, j_3} dx' - (\partial_{i_1} \partial_{i_3} \partial_{i_4} x_{j_1} x_{j_3} x_{j_4} \delta(x')) e_{i_2, j_2} dx' \\
&\quad - (\partial_{i_2} \partial_{i_3} \partial_{i_4} x_{j_2} x_{j_3} x_{j_4} \delta(x')) e_{i_1, j_1} dx' + (\partial_{i_1} \partial_{i_2} x_{j_1} x_{j_2} \delta(x')) e_{i_3, j_3} e_{i_4, j_4} dx' \\
&\quad + (\partial_{i_3} \partial_{i_4} x_{j_3} x_{j_4} \delta(x')) e_{i_1, j_1} e_{i_2, j_2} dx' + (\partial_{i_1} \partial_{i_3} x_{j_1} x_{j_3} \delta(x')) e_{i_2, j_2} e_{i_4, j_4} dx' \\
&\quad + (\partial_{i_2} \partial_{i_4} x_{j_2} x_{j_4} \delta(x')) e_{i_1, j_1} e_{i_3, j_3} dx' + (\partial_{i_1} \partial_{i_4} x_{j_1} x_{j_4} \delta(x')) e_{i_2, j_2} e_{i_3, j_3} dx'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\partial_{i_2} \partial_{i_3} x_{j_2} x_{j_3} \delta(x')) e_{i_1, j_1} e_{i_4, j_4} dx' - (\partial_{i_1} x_{j_1} \delta(x')) e_{i_2, j_2} e_{i_3, j_3} e_{i_4, j_4} dx' \\
& - (\partial_{i_2} x_{j_2} \delta(x')) e_{i_1, j_1} e_{i_3, j_3} e_{i_4, j_4} dx' - (\partial_{i_3} x_{j_3} \delta(x')) e_{i_1, j_1} e_{i_2, j_2} e_{i_4, j_4} dx' \\
& - (\partial_{i_4} x_{j_4} \delta(x')) e_{i_1, j_1} e_{i_2, j_2} e_{i_3, j_3} dx' + \delta(x') e_{i_1, j_1} e_{i_2, j_2} e_{i_3, j_3} e_{i_4, j_4} dx'.
\end{aligned}$$

Pour alléger l'écriture, un produit tel que  $\partial_{i_1} \partial_{i_2} x_{j_1} x_{j_2}$  sera noté  $\partial_{i_1, i_2} x_{j_1, j_2}$ . On doit montrer que  $\sum \sum e_{i_1, j_1} e_{i_2, j_2} e_{i_3, j_3} e_{i_4, j_4} s_y = 0$ ; dans cette expression, il y a cinq types de sommes suivant le nombre de facteurs  $e_{i, j}$  qui y figurent.

– Commençons par la somme ne comportant aucun facteur  $e_{i, j}$ ; elle s'écrit

$$\begin{aligned}
& \sum \sum \partial_{i_1, i_2, i_3, i_4} x_{j_1, j_2, j_3, j_4} \delta(x') dx' \\
& = 4 \partial_{i_1, i_2, i_3, i_4} \sum_{(1, 2)^-} \sum_{(3, 4)^-} x_{j_1, j_2, j_3, j_4} \delta(x') \\
& = 0.
\end{aligned}$$

– Il y a quatre sommes comportant un seul facteur  $e_{i, j}$ ; dans la première

$$\sum \sum \partial_{i_1, i_2, i_3} x_{j_1, j_2, j_3} \delta(x') e_{i_4, j_4} dx',$$

le coefficient de  $\partial_{i_1, i_2, i_3}$  est

$$\begin{aligned}
& 2 \sum_{\substack{(1, 2)^- \\ (3, 4)^-}} (x_{j_1, j_2, j_3} \delta(x') e_{i_4, j_4} dx' + x_{j_4, j_2, j_3} \delta(x') e_{i_4, j_1} dx') \\
& = 2 \sum_{(3, 4)^-} e_{i_4, j_4} dx' \sum_{(1, 2)^-} x_{j_1, j_2, j_3} \delta(x') + 2 \sum_{(1, 2)^-} e_{i_4, j_1} dx' \sum_{(3, 4)^-} x_{j_4, j_2, j_3} \delta(x') \\
& = 0.
\end{aligned}$$

On démontre de la même façon que les trois autres sommes sont nulles.

– Il y a six sommes comportant deux facteurs  $e_{i, j}$ ; dans la première

$$\sum \sum \partial_{i_1, i_2} x_{j_1, j_2} \delta(x') e_{i_3, j_3} e_{i_4, j_4} dx',$$

le coefficient de  $\partial_{i_1, i_2}$  se décompose en trois sommes:

$$\begin{aligned}
& \sum_{(3, 4)^-} e_{i_3, j_3} e_{i_4, j_4} dx' \sum_{(1, 2)^-} x_{j_1, j_2} \delta(x') \\
& + \sum_{(1, 2)^-} e_{i_3, j_2} e_{i_4, j_1} dx' \sum_{(3, 4)^-} x_{j_4, j_3} \delta(x') \\
& + \sum_{\substack{(1, 2)^- \\ (3, 4)^-}} (x_{j_4, j_2} \delta(x') e_{i_3, j_3} e_{i_4, j_1} dx' + x_{j_1, j_3} \delta(x') e_{i_3, j_2} e_{i_4, j_4} dx');
\end{aligned}$$

les deux premières sont évidemment nulles, et en développant, on voit que la troisième l'est aussi. Concernant les cinq autres sommes comportant deux facteurs  $e_{i,j}$ , on montre de même que les coefficients de  $\partial_{i_3, i_4}$ ,  $\partial_{i_1, i_3}$  et  $\partial_{i_2, i_4}$  sont nuls; pour ceux de  $\partial_{i_1, i_4}$  et  $\partial_{i_3, i_2}$ , le calcul est plus rapide: ainsi le coefficient de  $\partial_{i_1, i_4}$  est

$$\begin{aligned} & \sum \sum x_{j_1, j_4} \delta(x') e_{i_2, j_2} e_{i_3, j_3} dx' \\ &= \sum_{\substack{(1,2)^- \\ (3,4)^-}} \sum_{(1,4)} x_{j_1, j_4} \delta(x') \sum_{(3,2)} e_{i_2, j_2} e_{i_3, j_3} dx' \\ &= 0 \text{ par (4.8).} \end{aligned}$$

– Il y a quatre sommes comportant trois facteurs  $e_{i,j}$ ; la première s'écrit

$$\begin{aligned} & \sum \sum \partial_{i_1} x_{j_1} \delta(x') e_{i_2, j_2} e_{i_3, j_3} e_{i_4, j_4} dx' \\ &= \sum_{\substack{(1,2)^- \\ (3,4)^-}} \sum_{(1,4)} \partial_{i_1} x_{j_1} \delta(x') e_{i_4, j_4} \sum_{(3,2)} e_{i_2, j_2} e_{i_3, j_3} dx' \\ &= 0 \text{ par (4.8),} \end{aligned}$$

et les trois autres sommes sont pareillement nulles.

– Enfin la dernière somme peut s'écrire

$$\begin{aligned} & \sum \sum \delta(x') e_{i_1, j_1} e_{i_2, j_2} e_{i_3, j_3} e_{i_4, j_4} dx' \\ &= \sum_{\substack{(1,2)^- \\ (3,4)^-}} \delta(x') \sum_{(1,4)} e_{i_1, j_1} e_{i_4, j_4} \sum_{(3,2)} e_{i_2, j_2} e_{i_3, j_3} dx' \\ &= 0 \text{ par (4.8).} \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration du point (ii) de la Proposition 4.3.1.

### Non Dégénérescence de $s$

Explicitons l'action de  $s$  sur  $\mathcal{E}\mathcal{M}'_b \boxtimes \mathcal{E}\mathcal{N}$ . On a

$$s = \sum_{|J|=n-p} c_J \frac{dx_J}{f},$$

où les  $c_J$  sont des sections de  $\mathcal{O}_Y$ ; comme une section  $\tilde{a}$  de  $\mathcal{E}\mathcal{M}'_b$  est représentée par  $a = \sum_{|I|=n-p} a_I \partial_{x_I}$ , où  $a_I \in \mathcal{E}_X$ , et une section  $\tilde{b}$  de  $\mathcal{E}\mathcal{N}$  par  $b \in \mathcal{E}_Y$ , on a

$$s(\tilde{a} \boxtimes \tilde{b}) = \sum_{I, J} \delta_I^J (a_I \boxtimes b) \cdot \left( \frac{c_J}{f} \right).$$

Cette écriture ne dépend pas du choix du représentant de  $\tilde{a}$ , puisque si  $a'$  est une section de  $\mathcal{E}_X \otimes \mathcal{O}_X^{(n-p+1)}$ , on a  $\langle s, \delta a' \rangle = \langle ds, a' \rangle = 0$ . Elle ne dépend pas non plus de celui de  $\tilde{b}$  d'après le point (ii) de la Proposition 4.3.1

Reprenons les notations du §4.2, et notons  $\hat{\psi}$  une transformation de contact quantifiée associée à  $\psi$ . Soit

$$u_\nu = \hat{\psi}^{-1}(v_\nu), \quad \nu = 1, \dots, m.$$

Au voisinage d'un point de  $V$  où  $\eta_{p+2,1} \neq 0$ , on définit

$$\mathcal{N}_0 \simeq \sum_{\nu=1}^m \mathcal{E}_Y(0) u_\nu b_0, \quad \mathcal{N}_0(-1) \simeq \sum_{\nu=1}^m \mathcal{E}_Y(-1) u_\nu b_0,$$

où  $b_0$  est la classe de  $1 \in \mathcal{D}_Y$  dans  $\mathcal{N}$ . Munissons  $\mathcal{E}\mathcal{M}_b$  de la filtration induite par la filtration de  $\mathcal{E}_X \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_X^{(p)}$ , et  $\mathcal{E}_{S|X \times Y}$  de la filtration pour laquelle  $\frac{1}{f}$  est d'ordre 0. On a  $s((\mathcal{M}'_b)_0 \boxtimes \mathcal{N}_0) \subset (\mathcal{E}_{S|X \times Y})_0$ . Pour terminer la preuve de la Proposition 4.3.1, il reste à montrer que l'accouplement défini par  $s$  est parfait. Dans la carte  $(x_i, \xi_i)_{2 \leq i \leq n+1}$  de  $T^*X$ , plaçons-nous au voisinage d'un point tel que  $\xi_2 \neq 0$ . Une section  $a$  de  $\mathcal{E}_X \otimes \mathcal{O}_X^{(n-p)}$  s'écrit

$$\begin{aligned} a &= \sum_{2=i_1 < \dots < i_{n-p} \leq n+1} a'_{i_1, \dots, i_{n-p}} \otimes \partial_{x_{i_1}} \wedge \dots \wedge \partial_{x_{i_{n-p}}} \\ &+ \sum_{2 < i_1 < \dots < i_{n-p} \leq n+1} a''_{i_1, \dots, i_{n-p}} \otimes \partial_{x_{i_1}} \wedge \dots \wedge \partial_{x_{i_{n-p}}}. \end{aligned}$$

Comme on a

$$\begin{aligned} &a'' \otimes \partial_{x_{i_1}} \wedge \dots \wedge \partial_{x_{i_{n-p}}} \\ &= a''(\partial_{x_2})^{-1} \partial_{x_2} \otimes \partial_{x_{i_1}} \wedge \dots \wedge \partial_{x_{i_{n-p}}} \\ &= \delta_{n-p+1} (a''(\partial_{x_2})^{-1} \otimes \partial_{x_2} \wedge \partial_{x_{i_1}} \wedge \dots \wedge \partial_{x_{i_{n-p}}}) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{n-p} (-1)^j a''(\partial_{x_2})^{-1} \otimes \partial_{x_2} \wedge \partial_{x_{i_1}} \wedge \dots \wedge \hat{\partial}_{x_j} \wedge \dots \wedge \partial_{x_{i_{n-p}}}, \end{aligned}$$

on voit que si  $\tilde{a}$  est une section de  $\mathcal{E}\mathcal{M}'_b$ , elle admet un représentant de la forme

$$a = \sum_{2=i_1 < \dots < i_{n-p} \leq n+1} a_{i_1, \dots, i_{n-p}} \otimes \partial_{x_{i_1}} \wedge \dots \wedge \partial_{x_{i_{n-p}}}.$$

Ordonnons les  $(n-p)$ -suites strictement croissantes d'entiers  $(i_1, \dots, i_{n-p})$  extraites de l'ensemble  $\{2, \dots, n+1\}$ , telles que  $i_1 = 2$ ; elles sont en nombre  $m$ . Notons-les  $J_1, \dots, J_m$ . Si on note par abus de langage  $\partial_{x_j} = \partial_{x_{j_1}} \wedge \dots \wedge$



$\partial_{x_{j_k}}$  pour toute partie  $J = \{j_1, \dots, j_k\}$ , on a donc

$$a = \sum_{\mu=1}^m a_{J_\mu} \partial_{x_{J_\mu}}.$$

La famille  $(\partial_{x_{J_\mu}})_{1 \leq \mu \leq m}$  est une base de  $(\overline{\mathcal{M}}'_b)_0$  au voisinage d'un point où  $\xi_2 \neq 0$ . Notons  $(dx_{J_\mu})_{1 \leq \mu \leq m}$  la base duale. On a

$$s = \sum_{\mu=1}^m c_{J_\mu} \frac{dx_{J_\mu}}{f}.$$

Si  $a$  est une section de  $(\mathcal{M}'_b)_0$ , alors  $s(a)$  est une section de  $\mathcal{H}om_{\mathcal{E}}((p_2^a)^{-1}\mathcal{N}_0, (\mathcal{C}_{S|X \times Y})_0)$ . Par  $\mathcal{E}_Y$ -linéarité, l'action de  $s(a)$  sur  $(p_2^a)^{-1}\mathcal{N}_0$  est définie par

$$s(a)u_\nu b_0 = (u_\nu(s))(a)b_0,$$

et on a

$$u_\nu(s) = \sum_{\mu=1}^m u_\nu \left( \frac{c_{J_\mu}}{f} \right) dx_{J_\mu} = \sum_{\mu=1}^m \frac{u_\nu(c_{J_\mu})}{f} dx_{J_\mu},$$

d'après le choix de la filtration de  $\mathcal{C}_{S|X \times Y}$ . On en déduit que la matrice de  $s$  rapportée aux bases  $(dx_{J_\mu})$  de  $\mathcal{H}om((\overline{\mathcal{M}}'_b)_0, \mathcal{O}_{\dot{T}^*X})$ , et  $(u_\nu)$  de  $\mathcal{N}'_0$ , est  $(u_\nu(c_{J_\mu}))_{1 \leq \nu, \mu \leq m}$ .

**Lemme 4.3.2.** *On a  $\det(u_\nu(c_{J_\mu})) \neq 0$ .*

On va montrer qu'après une permutation convenable des vecteurs des bases  $(dx_{J_\mu})$  et  $(u_\nu)$ , la matrice  $(u_\nu(c_{J_\mu}))$  est triangulaire supérieure, à coefficients diagonaux  $\neq 0$ . On a

$$dx_X f = \sum_{|J|=n-p} c_J dx_J = \sum_{\mu=1}^m c_{J_\mu} dx_{J_\mu} + \sum_{2 \notin J} c_J dx_J,$$

donc

$$u_\nu(dx_X f) = \sum_{\mu=1}^m u_\nu(c_{J_\mu}) dx_{J_\mu} + c',$$

et  $c'(\overline{\mathcal{M}}'_b)_0 = 0$  au voisinage d'un point  $p_1(p)$  où  $p \in \mathcal{A}$ , et où la coordonnée  $\xi_2$  de  $p_1(p)$  est  $\neq 0$ . Le symbole d'ordre 1 de  $u_\nu$  est le produit des facteurs

$$\eta_{i,j} - \eta_{\rho+2,j} \eta_{i,1} \eta_{\rho+2,1}^{-1},$$

pour tous les couples  $(i, j)$ , tels que  $\partial_{i,}$  figure dans  $v_\nu$ . Dans la carte choisie

sur  $X$  on a par (4.4)

$$f_i = x_i - y_{i,1} - x_2 y_{i,2} - \dots - x_{p+1} y_{i,p+1},$$

$$d_X f_i = dx_i - y_{i,2} dx_2 - \dots - y_{i,p+1} dx_{p+1}.$$

On voit que la variable  $y_{i,1}$  ne figurant dans aucun des  $d_X f_i$ ,  $u_v$  opère sur  $d_X f_i$  comme le produit des  $\partial_{y_{i,j}}$  pour tous les couples  $(i, j)$ , tels que  $\partial_{i,j}$  figure dans  $v_v$ . Comme d'autre part la variable  $y_{i,j}$  ne figure que dans  $f_i$ , on a

$$\partial_{y_{i,j}}(d_X f) = d_X f_{p+2} \wedge \dots \wedge d_X f_{i-1} \wedge d_X(\partial_{y_{i,j}} f_i) \wedge d_X f_{i+1} \wedge \dots \wedge d_X f_{n+1}.$$

Puisque les  $d_X f_i$  sont de degré  $\leq 1$  en  $y_{i,j}$ , on a de même (pour  $i_1 < i_2$ )

$$\begin{aligned} &\partial_{y_{i_1,j_1}} \partial_{y_{i_2,j_2}}(d_X f) \\ &= d_X f_{p+2} \wedge \dots \wedge d_X f_{i_1-1} \wedge d_X(\partial_{y_{i_1,j_1}} f_{i_1}) \wedge d_X f_{i_1+1} \wedge \dots \\ &\quad \wedge d_X f_{i_2-1} \wedge d_X(\partial_{y_{i_2,j_2}} f_{i_2}) \wedge d_X f_{i_2+1} \wedge \dots \wedge d_X f_{n+1}, \end{aligned}$$

et ainsi de suite pour  $\partial_{y_{i_1,j_1}} \dots \partial_{y_{i_t,j_t}}(d_X f)$  (rappelons que  $t = \min(n - p - 1, p)$ ). En un point  $p \in A = T_S^*(X \times Y)$  on a

$$\eta_{p+2,1} = -\lambda_{p+2} \text{ et } \xi_2 = -\lambda_{p+2} y_{p+2,2} - \dots - \lambda_{n+1} y_{n+1,2},$$

avec des complexes  $\lambda_i$  non tous nuls. On peut supposer  $\xi_2 \neq 0$ , et donc l'un des  $n - p$  produits précédents est  $\neq 0$ ; supposons qu'on ait  $\lambda_{p+2} y_{p+2,2} \neq 0$ .

Soit  $\alpha = (i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_k)$ , vérifiant les conditions suivantes

$$(4.9) \quad p + 3 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n + 1, \quad 2 \leq j_1 < \dots < j_k \leq p + 1, \quad 0 \leq k \leq t;$$

on note  $l(\alpha) = k$ . Posons

$$e_\alpha = e_{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_k} = \hat{\psi}^{-1}(\partial_{i_1, j_1} \dots \partial_{i_k, j_k}).$$

Ainsi  $e_\emptyset = 1$ . On choisit un ordre total strict sur les  $\alpha$ , qu'on notera  $\prec$ , vérifiant de plus  $l(\alpha) < l(\beta) \Rightarrow \alpha \prec \beta$ . La famille  $(e_\alpha)$  ainsi ordonnée est une base de  $\mathcal{N}_0$  au voisinage d'un point  $p_2^a(p)$  où  $p \in A$ , et où la coordonnée  $\eta_{p+2,1}$  de  $p_2^a(p)$  est  $\neq 0$ . Si  $\alpha$  vérifie les conditions (4.9) posons

$$e'_\alpha = \begin{cases} dx_2 \wedge dx_{j_2} \wedge \dots \wedge dx_{j_k} \wedge dx_{p+2} \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_{i_k} \wedge \dots \wedge dx_{n+1} & \text{si } j_1 = 2, \\ dx_2 \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k} \wedge dx_{p+3} \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_{i_k} \wedge \dots \wedge dx_{n+1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi  $e'_\emptyset = dx_2 \wedge dx_{p+3} \wedge \dots \wedge dx_{n+1}$ . La famille  $(e'_\alpha)$  est une base de  $\text{Hom}((\mathcal{M}'_b)_0, \mathcal{O}_{T^*X})$  au voisinage d'un point  $p_1(p)$  où  $p \in A$ , et où la coordonnée  $\xi_2$  de  $p_1(p)$  est  $\neq 0$ . Montrons que

- (i) la composante de  $e_\alpha(d_X f)$  sur  $e'_\alpha$  est  $\pm 1$  si  $j_1 = 2$ ; elle est  $\pm y_{p+2,2}$  sinon,
- (ii) la composante de  $e_\alpha(d_X f)$  sur  $e'_\beta$  est nulle si  $\beta \prec \alpha$ .

Remarquons que  $\partial_{y_{i,j}}(d_X f_i) = -dx_j$ . Les différentielles dont le produit intervient dans  $e_\alpha(d_X f)$  sont de cinq types:

a/  $dx_2$  provenant de  $\partial_{y_{i_1, j_1}}(d_X f_{i_1})$  si  $j_1 = 2$ , ou de  $d_X f_{p+2}$  sinon, et avec le coefficient  $y_{p+2, 2}$ .

b/  $dx_{p+2}$  si  $j_1 = 2$ , et provenant de  $d_X f_{p+2}$ ,  $dx_{j_1}$  sinon, provenant de  $\partial_{y_{i_1, j_1}}(d_X f_{i_1})$ .

c/  $dx_{j_2}, \dots, dx_{j_k}$  provenant de  $\partial_{y_{i_2, j_2}}(d_X f_{i_2}), \dots, \partial_{y_{i_k, j_k}}(d_X f_{i_k})$ .

Il y a encore  $n - p - k - 1$  autres différentielles qui proviennent de  $d_X f_i$  avec  $i \neq p+2, i_1, \dots, i_k$ . Parmi celles-ci, il y a

d/ celles prises parmi les  $dx_i$  telles que  $i > p+2$ ,

e/ celles prises parmi les  $dx_i$  avec au moins un indice  $i < p+2$ .

Les différentielles dont les facteurs sont du types a, b, c, d sont multiples de  $e'_\alpha$ , et ceci démontre le point (i). Celles dont les facteurs sont du type a, b, c, e sont multiples de  $e'_\beta$  avec  $l(\beta) > l(\alpha)$ , ce qui prouve le point (ii), démontre le Lemme 4.3.2, et achève la preuve de la Proposition 4.3.1.

#### 4.4 Une Propriété du $\mathcal{D}_Y$ -Module $\mathcal{N}$

On se propose de montrer que  $\mathcal{N}$  n'a pas de sous-module isomorphe à  $\mathcal{O}_Y$ ; il s'agit donc de prouver la

**Proposition 4.4.1.** *On a  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{N}) \simeq 0$ .*

Reprenons les notations du §2.1. Par l'action infinitésimale  $\mathfrak{g} \rightarrow \Gamma(Y; \mathcal{O}_Y)$ , la matrice  $E_{i, j}$  a pour image l'opérateur  $\partial_{y_{i, j}}$ . Soit  $I$  dans  $U(\mathfrak{g})$ , l'idéal engendré par les expressions

$$\sum \sum E_{i_1, j_1} E_{i_2, j_2} E_{i_3, j_3} E_{i_4, j_4}.$$

Comme  $E_{i_q, j_q} \in \mathfrak{n}_-$ , les  $E_{i_q, j_q}$  commutent entre eux. On va d'abord démontrer le

**Lemme 4.4.2.** *L'idéal  $I$  est invariant par l'action de  $\mathfrak{p}$ .*

Il s'agit de montrer que pour tout  $a \in \mathfrak{p}$ , et pour tout  $x \in I$ , on a  $[a, x] \in I$  modulo  $U(\mathfrak{g})\mathfrak{p}$ . On a la relation

$$[a, xy] = axy = [a, x]y + x[a, y] \quad \text{mod } U(\mathfrak{g})\mathfrak{p}$$

quels que soient  $x, y \in U(\mathfrak{g})$ ; on en déduit donc que si  $E_{\alpha, \beta} \in \mathfrak{p}$  on a

$$\begin{aligned} (4.10) \quad & [E_{\alpha, \beta}, E_{i_1, j_1} E_{i_2, j_2} E_{i_3, j_3} E_{i_4, j_4}] \\ &= (\delta_{\beta, i_1} E_{\alpha, j_1} - \delta_{\alpha, j_1} E_{i_1, \beta}) E_{i_2, j_2} E_{i_3, j_3} E_{i_4, j_4} \\ &+ E_{i_1, j_1} (\delta_{\beta, i_2} E_{\alpha, j_2} - \delta_{\alpha, j_2} E_{i_2, \beta}) E_{i_3, j_3} E_{i_4, j_4} \\ &+ E_{i_1, j_1} E_{i_2, j_2} (\delta_{\beta, i_3} E_{\alpha, j_3} - \delta_{\alpha, j_3} E_{i_3, \beta}) E_{i_4, j_4} \\ &+ E_{i_1, j_1} E_{i_2, j_2} E_{i_3, j_3} (\delta_{\beta, i_4} E_{\alpha, j_4} - \delta_{\alpha, j_4} E_{i_4, \beta}) \quad \text{mod } U(\mathfrak{g})\mathfrak{p}. \end{aligned}$$

On sait que dans les sommes  $\sum \sum E_{i_1, j_1} E_{i_2, j_2} E_{i_3, j_3} E_{i_4, j_4}$  qui engendrent l'idéal  $I$ , les  $E_{i_q, j_q}$  vérifient  $j_q \leq p + 1 < i_q$ . Il y a donc trois cas:

1 si  $\alpha, \beta > p + 1$ , alors les  $\delta_{\alpha, j_i}$  sont nuls, et l'on a

$$\begin{aligned} & \sum \sum [E_{\alpha, \beta}, E_{i_1, j_1} E_{i_2, j_2} E_{i_3, j_3} E_{i_4, j_4}] \\ &= \delta_{\beta, i_1} \sum \sum E_{\alpha, j_1} E_{i_2, j_2} E_{i_3, j_3} E_{i_4, j_4} + \delta_{\beta, i_2} \sum \sum E_{i_1, j_1} E_{\alpha, j_2} E_{i_3, j_3} E_{i_4, j_4} \\ & \quad + \delta_{\beta, i_3} \sum \sum E_{i_1, j_1} E_{i_2, j_2} E_{\alpha, j_3} E_{i_4, j_4} + \delta_{\beta, i_4} \sum \sum E_{i_1, j_1} E_{i_2, j_2} E_{i_3, j_3} E_{\alpha, j_4}, \end{aligned}$$

qui sont tous quatre dans  $I$ .

2 si  $\alpha, \beta \leq p + 1$ , alors ce sont les  $\delta_{\beta, i_q}$  qui sont nuls, et l'on a

$$\begin{aligned} (4.11) \quad & \sum \sum [E_{\alpha, \beta}, E_{i_1, j_1} E_{i_2, j_2} E_{i_3, j_3} E_{i_4, j_4}] \\ &= - \sum \sum \delta_{\alpha, j_1} E_{i_1, \beta} E_{i_2, j_2} E_{i_3, j_3} E_{i_4, j_4} - \sum \sum \delta_{\alpha, j_2} E_{i_1, j_1} E_{i_2, \beta} E_{i_3, j_3} E_{i_4, j_4} \\ & \quad - \sum \sum \delta_{\alpha, j_3} E_{i_1, j_1} E_{i_2, j_2} E_{i_3, \beta} E_{i_4, j_4} - \sum \sum \delta_{\alpha, j_4} E_{i_1, j_1} E_{i_2, j_2} E_{i_3, j_3} E_{i_4, \beta}. \end{aligned}$$

Si  $\beta = j_r$  pour au moins un indice  $r$ , alors les quatre sommes de droites sont dans  $I$ . Supposons donc que  $\beta$  diffère de tous les  $j_r$ , et explicitons chacune de ces sommes. Pour la première, on a

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{(1,2)^- \\ (3,4)^-}} \sum_{\substack{(1,4) \\ (3,2)}} \delta_{\alpha, j_1} E_{i_2, j_2} E_{i_3, j_3} E_{i_4, j_4} \\ &= \delta_{\alpha, j_1} \sum_{(3,4)^-} E_{i_4, j_4} \sum_{(3,2)} E_{i_2, j_2} E_{i_3, j_3} - \delta_{\alpha, j_2} \sum_{(3,4)^-} E_{i_4, j_4} \sum_{(3,1)} E_{i_2, j_1} E_{i_3, j_3} \\ & \quad - \delta_{\alpha, j_3} \sum_{(1,2)^-} E_{i_4, j_1} \sum_{(4,2)} E_{i_2, j_2} E_{i_3, j_4} + \delta_{\alpha, j_4} \sum_{(1,2)^-} E_{i_4, j_1} \sum_{(3,2)} E_{i_2, j_2} E_{i_3, j_3}, \end{aligned}$$

Pour les trois autres on a

$$\begin{aligned} \sum \sum \delta_{\alpha, j_2} E_{i_1, j_1} E_{i_3, j_3} E_{i_4, j_4} &= -\delta_{\alpha, j_1} \sum_{(3,4)^-} E_{i_3, j_3} \sum_{(2,4)} E_{i_1, j_2} E_{i_4, j_4} + \dots \\ \sum \sum \delta_{\alpha, j_3} E_{i_1, j_1} E_{i_2, j_2} E_{i_4, j_4} &= -\delta_{\alpha, j_1} \sum_{(3,4)^-} E_{i_2, j_3} \sum_{(2,4)} E_{i_1, j_2} E_{i_4, j_4} + \dots \\ \sum \sum \delta_{\alpha, j_4} E_{i_1, j_1} E_{i_2, j_2} E_{i_3, j_3} &= \delta_{\alpha, j_1} \sum_{(3,4)^-} E_{i_1, j_4} \sum_{(3,2)} E_{i_2, j_2} E_{i_3, j_3} + \dots \end{aligned}$$

On regroupe ensuite les coefficients des facteurs de chaque  $\delta_{\alpha, j_i}$  provenant de toutes les sommes de (4.11); celui de  $\delta_{\alpha, j_1}$  est donc

$$\begin{aligned}
& \sum_{(3,4)^-} \left( E_{i_1, \beta} E_{i_4, j_4} \sum_{(3,2)} E_{i_2, j_2} E_{i_3, j_3} - E_{i_2, \beta} E_{i_3, j_3} \sum_{(2,4)} E_{i_1, j_2} E_{i_4, j_4} \right. \\
& \quad \left. - E_{i_3, \beta} E_{i_2, j_3} \sum_{(2,4)} E_{i_1, j_2} E_{i_4, j_4} + E_{i_4, \beta} E_{i_1, j_4} \sum_{(3,2)} E_{i_2, j_2} E_{i_3, j_3} \right) \\
& = \sum_{\substack{(\beta, 2)^- \\ (3,4)^-}} \sum_{\substack{(\beta, 4) \\ (3,2)}} E_{i_1, \beta} E_{i_2, j_2} E_{i_3, j_3} E_{i_4, j_4},
\end{aligned}$$

qui est bien un élément de  $I$ . Les calculs étant analogues pour les coefficients des autres  $\delta_{\alpha, j}$ , ceci achève l'étude du deuxième cas.

**3** si  $\alpha \leq p+1 < \beta$  alors les  $E_{i_q, \beta}$  et  $E_{\alpha, j_r}$  figurant dans (4.10) étant encore dans  $\mathfrak{p}$ , on peut continuer de développer le membre droit, et on obtient

$$\begin{aligned}
& [E_{\alpha, \beta}, E_{i_1, j_1} E_{i_2, j_2} E_{i_3, j_3} E_{i_4, j_4}] \\
& = \delta_{\beta, i_1} (-\delta_{\alpha, j_2} E_{i_2, j_1} E_{i_3, j_3} E_{i_4, j_4} - E_{i_2, j_2} \delta_{\alpha, j_3} E_{i_3, j_1} E_{i_4, j_4} - E_{i_2, j_2} E_{i_3, j_3} \delta_{\alpha, j_4} E_{i_4, j_1}) \\
& \quad - \delta_{\alpha, j_1} (\delta_{\beta, i_2} E_{i_1, j_2} E_{i_3, j_3} E_{i_4, j_4} + E_{i_2, j_2} \delta_{\beta, i_3} E_{i_1, j_3} E_{i_4, j_4} + E_{i_2, j_2} E_{i_3, j_3} \delta_{\beta, i_4} E_{i_1, j_4}) \\
& \quad + E_{i_1, j_1} \delta_{\beta, i_2} (-\delta_{\alpha, j_3} E_{i_3, j_2} E_{i_4, j_4} - E_{i_3, j_3} \delta_{\alpha, j_4} E_{i_4, j_2}) \\
& \quad - E_{i_1, j_1} \delta_{\alpha, j_2} (\delta_{\beta, i_3} E_{i_2, j_3} E_{i_4, j_4} + E_{i_3, j_3} \delta_{\beta, i_4} E_{i_2, j_4}) \\
& \quad + E_{i_1, j_1} E_{i_2, j_2} \delta_{\beta, i_3} (-\delta_{\alpha, j_4} E_{i_4, j_3}) - E_{i_1, j_1} E_{i_2, j_2} \delta_{\alpha, j_3} (\delta_{\beta, i_4} E_{i_3, j_4}) \pmod{U(\mathfrak{g})\mathfrak{p}}.
\end{aligned}$$

Après sommation, on regroupe les coefficients des  $\delta_{\beta, i_q}$ ; par permutation d'indices, il suffit de traiter le coefficient de  $\delta_{\beta, i_1}$ ; il vaut

$$(4.12) \quad \sum \sum (-\delta_{\alpha, j_2} E_{i_2, j_1} E_{i_3, j_3} E_{i_4, j_4} - \delta_{\alpha, j_3} E_{i_2, j_2} E_{i_3, j_1} E_{i_4, j_4} - \delta_{\alpha, j_4} E_{i_2, j_2} E_{i_3, j_3} E_{i_4, j_1}).$$

Calculons chacune des trois sous-sommes:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{(1,2)^- \\ (3,4)^-}} \sum_{(1,4)} \delta_{\alpha, j_2} E_{i_2, j_1} E_{i_3, j_3} E_{i_4, j_4} \\
& = -\delta_{\alpha, j_1} \sum_{(3,4)^-} E_{i_3, j_3} \sum_{(2,4)} E_{i_2, j_2} E_{i_4, j_4} + \delta_{\alpha, j_2} \sum_{(3,4)^-} E_{i_3, j_3} \sum_{(1,4)} E_{i_2, j_1} E_{i_4, j_4} \\
& \quad + \delta_{\alpha, j_3} \sum_{(1,2)^-} E_{i_3, j_2} \sum_{(1,4)} E_{i_2, j_1} E_{i_4, j_4} - \delta_{\alpha, j_4} \sum_{(1,2)^-} E_{i_3, j_2} \sum_{(1,3)} E_{i_2, j_1} E_{i_4, j_3};
\end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned}
& \sum \sum \delta_{\alpha, j_3} E_{i_2, j_2} E_{i_3, j_1} E_{i_4, j_4} = -\delta_{\alpha, j_1} \sum_{(3,4)^-} E_{i_2, j_3} \sum_{(2,4)} E_{i_3, j_2} E_{i_4, j_4} + \dots \\
& \sum \sum \delta_{\alpha, j_4} E_{i_2, j_2} E_{i_3, j_3} E_{i_4, j_1} = \delta_{\alpha, j_1} \sum_{(3,4)^-} E_{i_4, j_4} \sum_{(3,2)} E_{i_2, j_2} E_{i_3, j_3} + \dots
\end{aligned}$$

Le coefficients de  $\delta_{\alpha, j_1}$  dans (4.12) est donc

$$\sum_{(3,4)^-} \left( -E_{i_3, j_3} \sum_{(2,4)} E_{i_2, j_2} E_{i_4, j_4} - E_{i_2, j_3} \sum_{(2,4)} E_{i_3, j_2} E_{i_4, j_4} + E_{i_4, j_4} \sum_{(3,2)} E_{i_2, j_2} E_{i_3, j_3} \right)$$

qui est nul. On montre pareillement que dans (4.12), les coefficients de  $\delta_{\alpha, j_2}$ ,  $\delta_{\alpha, j_3}$  et  $\delta_{\alpha, j_4}$  sont nuls; on voit donc que dans le troisième cas, on a  $[a, x] = 0$ , et ceci achève la preuve du lemme.

Puisque  $I$  est  $\mathfrak{p}$ -invariant, alors  $\mathcal{N} \in \text{Mod}_G(\mathcal{D}_Y)$ , et on peut utiliser l'équivalence de catégories entre  $\text{Mod}_G(\mathcal{D}_Y)$  et la catégorie des  $(\mathfrak{g}, P)$ -modules. Soit  $N$  l'image de  $\mathcal{N}$  par cette équivalence. La suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{D}_Y \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow 0$$

a pour image la suite exacte

$$0 \rightarrow I/U(\mathfrak{g})\mathfrak{p}I \rightarrow U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\mathfrak{p} \rightarrow N \rightarrow 0.$$

Le groupe  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{N}) = \Gamma(Y; \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{N}))$  a une structure de  $G$ -module, et pour toute représentation  $W$ , on a l'isomorphisme

$$\text{Hom}_{\text{Mod}_G(\mathcal{D}_Y)}(\mathcal{O}_Y \otimes W, \mathcal{N}) \simeq \text{Hom}_G(W, \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{N})).$$

Comme de plus  $\text{Hom}_{\text{Mod}_G(\mathcal{D}_Y)}(\mathcal{O}_Y \otimes W, \mathcal{N}) \simeq \text{Hom}_{(\mathfrak{g}, P)}(W, N)$ , on voit que la Proposition 4.4.1 résulte du

**Lemme 4.4.3.** *Pour tout  $G$ -module  $W$ , on a  $\text{Hom}_{(\mathfrak{g}, P)}(W, N) \simeq 0$ .*

*Démonstration.* Soit  $\mathfrak{h}$  la sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}$ . On a

$$\forall y \in \mathfrak{h}, \quad [y, E_{i,j}] = (\varepsilon_i - \varepsilon_j)(y)E_{i,j},$$

où  $(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n+1}$  est la base canonique de  $\mathfrak{h}^*$ . Les  $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ , pour  $i \neq j$ , constituent le système de racines de  $\mathfrak{g}$  par rapport à  $\mathfrak{h}$ , les racines positives étant les  $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ , pour  $i < j$ . Notons  $q = (n+1)^2$ . Soit  $(x_1, \dots, x_q)$  une base de  $\mathfrak{g}$ , telle que ses derniers éléments  $(x_{r+1}, \dots, x_q)$  forment une base de  $\mathfrak{p}$ ; pour  $i \leq r$ , le poids de  $x_i$  est donc  $< 0$ , et comme  $U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\mathfrak{p}$  a pour base les monômes  $x_1^{\alpha_1} \dots x_r^{\alpha_r}$ , tous les poids de  $U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\mathfrak{p}$  sont  $\leq 0$ , et on a  $(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\mathfrak{p})_0 \simeq \mathbb{C}u$ ; comme  $N$  est un quotient de  $U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\mathfrak{p}$  on a aussi  $N_0 \simeq \mathbb{C}u$ . On se ramène au cas où  $W$  est de dimension finie, et d'après le th. de Weyl, on peut supposer  $W$  irréductible, donc  $W$  a un plus haut poids  $\lambda \geq 0$ , et  $W_\lambda = \mathbb{C}v$ . Soit  $\varphi \in \text{Hom}_{(\mathfrak{g}, P)}(W, N)$ ; alors  $\varphi(v)$  a son poids  $\lambda$  à la fois positif et négatif; on en déduit que  $\lambda = 0$ , donc  $W = \mathbb{C}$ . Alors

$$\varphi(v) \in N_0,$$

donc  $\varphi(v) = cu$ . Or pour tout  $i, j$  distincts,  $E_{i,j}v = 0$ , donc  $\varphi(E_{i,j}v) = 0 = E_{i,j}(cu)$ , d'où  $c = 0$ , et  $\varphi = 0$ .

#### 4.5 Etude des Transformés de $\mathcal{M}_a$ et $\mathcal{M}_b$

- Proposition 4.5.1.** (i) *Le complexe  $\mathcal{M}_b \circlearrowleft \mathcal{K}$  est concentré en degrés  $\geq 0$ .*  
(ii) *Le complexe  $\mathcal{M}_a \circlearrowleft \mathcal{K}$  est concentré en degré 0.*  
(iii) *Soit  $j > 0$ . On a  $H^j(\mathcal{M}_b \circlearrowleft \mathcal{K}) \simeq \mathcal{O}_Y$  si  $j = 2, 4, \dots, 2p$ , et  $H^j(\mathcal{M}_b \circlearrowleft \mathcal{K}) \simeq 0$  sinon.*

L'objet  $f^{-1}\mathcal{M}_b$  de  $\mathbf{D}^b(f^{-1}\mathcal{D}_X)$  est représenté par un complexe concentré en degrés  $\geq 0$ , et formé de  $f^{-1}\mathcal{D}_X$ -modules localement libres; on a d'autre part

$$\mathcal{M}_b \circlearrowleft \mathcal{K} \simeq \mathbf{R}g_*((\mathcal{D}_{Y \leftarrow S} \otimes_{\mathcal{D}_S}^L \mathcal{D}_{S \rightarrow X}) \otimes_{f^{-1}\mathcal{D}}^L f^{-1}\mathcal{M}_b),$$

et on sait, d'après la Proposition 2.12 de [DS1], que  $\mathcal{D}_{Y \leftarrow S} \otimes_{\mathcal{D}_S}^L \mathcal{D}_{S \rightarrow X} \simeq \mathcal{B}_{S|X \times Y}$ ; ceci prouve le point (i). Pour le (ii), il y a deux étapes: on va montrer d'abord que  $\mathcal{M}_a \circlearrowleft \mathcal{K}$  n'a pas de cohomologie en degrés  $< 0$ ; on utilise pour cela le

**Lemme 4.5.2.** *On a l'isomorphisme  $\mathcal{O}_X \circlearrowleft \mathcal{K} \simeq \bigoplus_{v=0}^p \mathcal{O}_Y[-p+2v]$ .*

*Démonstration.* Remarquons que  $g$  est lisse et propre, et que pour tout  $y \in Y$ ,  $g^{-1}(y) \simeq \mathbb{P}_p$ ; on a alors

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X \circlearrowleft \mathcal{K} &\simeq \mathbf{R}g_*((\mathcal{D}_{Y \leftarrow S} \otimes_{\mathcal{D}_S}^L \mathcal{D}_{S \rightarrow X}) \otimes_{f^{-1}\mathcal{D}}^L f^{-1}\mathcal{O}_X) \\ &\simeq \mathbf{R}g_*(\mathcal{D}_{Y \leftarrow S} \otimes_{\mathcal{D}_S}^L \mathcal{O}_S) \\ &\simeq \mathbf{R}g_*(g^{-1}\mathcal{O}_Y)[p] \\ &\simeq \mathcal{O}_Y \otimes_{\mathbb{C}} \mathbf{R}\Gamma(\mathbb{P}_p; \mathbb{C}_{\mathbb{P}_p})[p], \end{aligned}$$

et l'on termine grâce à la formule

$$(4.13) \quad \forall r > 0, \quad \mathbf{R}\Gamma(\mathbb{P}_r; \mathbb{C}_{\mathbb{P}_r}) \simeq \bigoplus_{v=0}^r \mathbb{C}[-2v].$$

Du triangle distingué (2.1), on déduit le second triangle

$$(4.14) \quad \mathcal{O}_X[-p-1] \circlearrowleft \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{M}_a \circlearrowleft \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{M}_b \circlearrowleft \mathcal{K} \xrightarrow{+1},$$

dont la suite exacte longue de cohomologie fournit les isomorphismes

$$H^j(\mathcal{M}_a \circlearrowleft \mathcal{K}) \simeq H^j(\mathcal{M}_b \circlearrowleft \mathcal{K})$$

pour tout  $j < 0$ , ce qui achève la première étape grâce au point (i). Pour la deuxième étape, on raisonne comme dans la partie (ii) de la démonstration de la Proposition 3.6 de [DS1]; pour la commodité du lecteur, nous reproduisons cette partie. Posons  $\mathcal{N} = \mathcal{M}_a \circlearrowleft \mathcal{K}$ ; du triangle distingué

$$H^0(\mathcal{N}) \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \tau^{>0}\mathcal{N} \xrightarrow{+1},$$

on déduit le second triangle distingué

$$(4.15) \quad \mathcal{S}ol(\tau^{>0}\mathcal{N}) \longrightarrow \mathcal{S}ol(\mathcal{N}) \longrightarrow \mathcal{S}ol(H^0(\mathcal{N})) \xrightarrow{+1} .$$

Puisque  $\mathcal{M}_a$  est concentré en degré 0, on sait d'après (*loc.cit.* prop. 3.5) que  $\tau^{>0}\mathcal{N}$  est  $\mathcal{O}_Y$ -localement libre; on en déduit que  $H^j\mathcal{S}ol(\tau^{>0}\mathcal{N}) = 0$ , pour tout  $j \geq 0$ . On a ensuite les équivalences

$$\begin{aligned} \tau^{>0}\mathcal{N} = 0 &\Leftrightarrow \mathcal{S}ol(\tau^{>0}\mathcal{N}) = 0, \\ &\Leftrightarrow \forall j < 0, \quad H^j\mathcal{S}ol(\tau^{>0}\mathcal{N}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists y \in Y, \quad \forall j < 0, \quad H^j\mathcal{S}ol(\tau^{>0}\mathcal{N})_y = 0 \text{ (connexité de } Y) \\ &\Leftrightarrow \exists y \in Y, \quad \forall j < 0, \quad H^j\mathcal{S}ol(\mathcal{N})_y = 0, \end{aligned}$$

cette dernière équivalence résultant de la propriété  $\forall j < 0, H^j\mathcal{S}ol(H^0(\mathcal{N})) = 0$ , appliquée au triangle distingué (4.15). Grâce à la formule du germe (*loc. cit.* cor. 2.9):

$$R\Gamma(\hat{y}; R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}_a, \mathcal{O}_X)) \simeq R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}_a \circlearrowleft \mathcal{K}, \mathcal{O}_Y)_y[-p],$$

et au lemme 2.2.1, il suffit donc de démontrer qu'il existe  $y \in Y$ , tel que pour tout  $j < p$ , on ait  $H^j(\hat{y}; \Omega_X^{\leq p}) = 0$ . Pour tout  $y \in Y$ , on a  $\hat{y} \simeq \mathbb{P}_p$ , et grâce à la formule (4.13), on obtient  $\forall j \leq p, H^j(\hat{y}; \mathbb{C}_{\hat{y}}) \simeq H^j(X; \mathbb{C}_X)$ . On va utiliser le résultat suivant de Barth ([Ba], Théorème 2, p. 962):

**Théorème 4.5.3.** *Soit  $X = \mathbb{P}_n$ ,  $A$  une sous-variété algébrique fermée lisse de  $X$ , de dimension  $p$ ,  $\mathcal{F}$  un faisceau  $\mathcal{O}_X$ -cohérent. On suppose  $H^j(X; \mathbb{C}_X) \simeq H^j(A; \mathbb{C}_A)$ , pour tout  $j < p$ . Alors*

$$H^j(X; \mathcal{F}) \simeq H^j(A; \mathcal{F}),$$

pour tout entier  $j$  tel que  $0 \leq j < p - dp(\mathcal{F})$ , où  $dp$  désigne la dimension projective.

Les conditions du th. 4.5.3 sont satisfaites avec  $A = \hat{y}$ ,  $\mathcal{F} = \Omega_X^{(q)}$  ( $q \geq 0$ ); on obtient

$$\forall j < p, \quad H^j(\hat{y}; \Omega_X^{(q)}) \simeq H^j(X; \Omega_X^{(q)}).$$

Mais on a la formule

$$(4.16) \quad \forall q \leq n, \quad R\Gamma(X; \Omega_X^{(q)}) \simeq \mathbb{C}[-q],$$

(voir Bott [Bo], Lemme 14.2, d'après Borel et Hirzebruch [BH]), donc

$$\forall j < p, \quad \forall q \geq p, \quad H^j(\hat{y}; \Omega_X^{(q)}) = 0.$$



Portant ceci dans la suite exacte longue de cohomologie

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(\hat{y}; d\Omega_X^{(q-1)}) &\rightarrow H^0(\hat{y}; \Omega_X^{(q)}) \rightarrow H^0(\hat{y}; d\Omega_X^{(q)}) \\ &\rightarrow H^1(\hat{y}; d\Omega_X^{(q-1)}) \rightarrow H^1(\hat{y}; \Omega_X^{(q)}) \rightarrow \dots, \end{aligned}$$

il vient

$$\forall j \in [1, p-1], \forall q \geq p, H^j(\hat{y}; d\Omega_X^{(q-1)}) \simeq H^{j-1}(\hat{y}; d\Omega_X^{(q)}),$$

si bien que

$$H^j(\hat{y}; d\Omega_X^{(p)}) \simeq H^{j-1}(\hat{y}; d\Omega_X^{(p+1)}) \simeq \dots \simeq H^0(\hat{y}; d\Omega_X^{(p+j)}).$$

Or ce dernier groupe est nul puisque  $H^0(\hat{y}; \Omega_X^{(p+j+1)}) = 0$ . Ceci achève la démonstration du point (ii). Pour prouver (iii), on applique de nouveau le Lemme 4.5.2, combiné au point (ii) que l'on vient de démontrer, à la suite exacte longue de cohomologie du triangle (4.14).

**Lemme 4.5.4.** *On a  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_a \circlearrowleft \mathcal{K}, \mathcal{O}_Y) \simeq 0$ .*

*Démonstration.* Rappelons que  $K \circ \mathbf{C}_Y \simeq \text{Rf}ig^{-1}\mathbf{C}_Y[d_S - d_X - d_Y]$ ; comme  $f$  est lisse et propre, on a par [BBD]

$$\text{Rf}i\mathbf{C}_S \simeq \bigoplus_{\nu} R^{\nu}f_i\mathbf{C}_S[-\nu],$$

car  $X$  est simplement connexe. Les fibres de  $f$  étant isomorphes à la grassmannienne  $Z = \mathbf{G}_p(n)$ , on en déduit  $\text{Rf}ig^{-1}\mathbf{C}_Y \simeq \text{Rf}i\mathbf{C}_S \simeq \mathbf{C}_X \otimes \text{R}\Gamma(Z; \mathbf{C}_Z)$ . En utilisant la formule (1.3) du Théorème 1.4.1 avec le  $\mathcal{D}$ -module  $\mathcal{M}_a$ , et le faisceau  $F = \mathbf{C}_Y$ , on obtient donc

$$\begin{aligned} \text{RHom}(\mathcal{M}_a \circlearrowleft \mathcal{K}, \mathcal{O}_Y) &\simeq \text{RHom}(\mathcal{M}_a, \text{R}\mathcal{H}om(K \circ \mathbf{C}_Y, \mathcal{O}_X))[d_X - 2d_Y] \\ &\simeq \text{RHom}(\mathcal{M}_a, \mathcal{O}_X) \otimes (\text{R}\Gamma(Z; \mathbf{C}_Z))^*[2d_X - d_Y - d_S] \\ &\simeq \text{R}\Gamma(X; \Omega_X^{\leq p}) \otimes \text{R}\Gamma(Z; \mathbf{C}_Z)[d_S - d_Y], \end{aligned}$$

car  $d_Z = d_S - d_X$ , et par dualité de Poincaré, on a

$$(\text{R}\Gamma(Z; \mathbf{C}_Z))^* \simeq \text{R}\Gamma(Z; \omega_Z) \simeq \text{R}\Gamma(Z; \mathbf{C}_Z)[2d_Z],$$

où  $\omega_Z$  est le complexe dualisant  $a_Z^!\mathbf{C}$ . On en déduit

$$\text{Hom}(\mathcal{M}_a \circlearrowleft \mathcal{K}, \mathcal{O}_Y) \simeq H^p(\text{R}\Gamma(X; \Omega_X^{\leq p}) \otimes \text{R}\Gamma(Z; \mathbf{C}_Z)).$$

Pour achever on utilise le Lemme 4.5.5 ci-dessous; comme  $\text{R}\Gamma(Z; \mathbf{C}_Z)$  est concentré en degrés  $\geq 0$ , on obtient bien le résultat annoncé.

**Lemme 4.5.5.** *Pour tout entier  $j \leq p$ , on a  $H^j(X; \Omega_X^{\leq p}) = 0$ .*

*Démonstration.* On considère le triangle distingué

$$0 \longrightarrow \Omega_X^{(p+1)} \longrightarrow \Omega_X^{\leq p+1} \longrightarrow \Omega_X^{\leq p}[1] \xrightarrow{+1},$$

d'où on tire la suite exacte longue

$$\begin{aligned} \dots &\rightarrow H^{j-1}(X; \Omega_X^{(p+1)}) \\ &\rightarrow H^{j-1}(X; \Omega_X^{\leq p+1}) \rightarrow H^j(X; \Omega_X^{\leq p}) \rightarrow H^j(X; \Omega_X^{(p+1)}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

D'après la formule (4.16), on en déduit, pour tout  $j \leq p$ , les isomorphismes

$$H^j(X; \Omega_X^{\leq p}) \simeq H^{j-1}(X; \Omega_X^{\leq p+1}) \simeq \dots \simeq H^{j+p+1-n}(X; \Omega_X^{\leq n-1}).$$

Mais  $\Omega_X^{\leq n-1} \simeq \Omega_X^{(n)}$ , et  $H^{j+p+1-n}(X; \Omega_X^{(n)}) = 0$  si  $j + p + 1 - n \neq n$ , et c'est bien le cas puisque  $j \leq p < n$ .

**Proposition 4.5.6.** *On a  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(H^0(\mathcal{M}_b \circlearrowleft \mathcal{K}), \mathcal{O}_Y) \simeq \mathbb{C}$ .*

*Démonstration.* Soit le triangle

$$\mathcal{O}_X[-p-1] \circlearrowleft \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{M}_a \circlearrowleft \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{M}_b \circlearrowleft \mathcal{K} \xrightarrow{+1}.$$

On sait, d'après le point (ii) de la Proposition 4.5.1, que  $\mathcal{M}_a \circlearrowleft \mathcal{K}$  est concentré en degré 0; grâce à l'expression de  $\mathcal{O}_X \circlearrowleft \mathcal{K}$  (Lemme 4.5.2), on en déduit donc la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{M}_a \circlearrowleft \mathcal{K} \rightarrow H^0(\mathcal{M}_b \circlearrowleft \mathcal{K}) \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow 0,$$

puis la seconde suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(H^0(\mathcal{M}_b \circlearrowleft \mathcal{K}), \mathcal{O}_Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_a \circlearrowleft \mathcal{K}, \mathcal{O}_Y).$$

Mais  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_Y) \simeq \mathbb{C}$ , et  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_a \circlearrowleft \mathcal{K}, \mathcal{O}_Y) \simeq 0$  (Lemme 4.5.4), d'où la conclusion.

#### 4.6 Démonstration du Théorème 2.3.1

On applique la Proposition 3.0.7 avec  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_b$ ,  $\mathcal{N} = \mathcal{D}_Y/\mathcal{I}$ ,  $\mathcal{K} = \mathcal{B}_{S|X \times Y}$ , et  $A = \tilde{T}_S^*(X \times Y)$ . On en déduit la suite exacte

$$(4.17) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y^{N_1} \longrightarrow \mathcal{N} \xrightarrow{\alpha(s)} H^0(\mathcal{M}_b \circlearrowleft \mathcal{K}) \longrightarrow \mathcal{O}_Y^{N_2} \longrightarrow 0,$$

où  $N_1$  et  $N_2$  sont des entiers qu'on doit montrer être nuls. On sait par la Proposition 4.4.1 que  $\mathcal{N}$  n'a pas de sous-module isomorphe à  $\mathcal{O}_Y$ , donc  $N_1 = 0$ . La suite (4.17) devient

$$0 \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow H^0(\mathcal{M}_b \circlearrowleft \mathcal{K}) \rightarrow \mathcal{O}_Y^{N_2} \rightarrow 0.$$

On a  $R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{O}_Y^{N_2}, \mathcal{O}_Y) \simeq \mathbf{C}_Y^{N_2}$ ,  $H^0(Y; \mathbf{C}_Y) \simeq \mathbf{C}$ , et  $H^1(Y; \mathbf{C}_Y) = 0$ . On en déduit la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbf{C}^{N_2} \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(H^0(\mathcal{M}_b \circlearrowleft \mathcal{K}), \mathcal{O}_Y) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{N}, \mathcal{O}_Y) \rightarrow 0.$$

Puisque  $\mathcal{N}$  admet un quotient isomorphe à  $\mathcal{O}_Y$  alors  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{N}, \mathcal{O}_Y) \neq 0$ , et comme  $\alpha$  est surjectif, et que  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(H^0(\mathcal{M}_b \circlearrowleft \mathcal{K}), \mathcal{O}_Y) \simeq \mathbf{C}$  (Proposition 4.5.6), c'est que  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{N}, \mathcal{O}_Y) \simeq \mathbf{C}$ ; alors  $\alpha$  est un isomorphisme, d'où  $N_2 = 0$ .

## §5. Applications

### 5.1 Correspondance d'Andreotti-Norguet

Soit  $V$  un ouvert d'une variété projective  $X$ . Soit  $\mathcal{C}_p(V)$  l'espace analytique des cycles compacts de dimension  $p$  de  $V$ . Si  $l$  est un sous-espace linéaire de codimension  $p+1$  de  $X$ , alors  $X \setminus l$  est  $p$ -pseudo-convexe. Dans [AN1], Andreotti et Norguet considèrent l'application sur  $\mathcal{C}_p(X \setminus l) : \gamma \mapsto \int_{\gamma} \varphi$ , pour toute forme  $\varphi$  de type  $(p, p)$  et  $\mathcal{C}^{\infty}$  sur  $X \setminus l$ . Ils montrent que lorsque  $\varphi$  est  $\bar{\partial}$ -fermée, cette application est holomorphe, ne dépendant que de la classe de  $\bar{\partial}$ -cohomologie de  $\varphi$ , ce qui induit, via l'isomorphisme de Dolbeault, une application

$$H^p(X \setminus l; \Omega_X^{(p)}) \xrightarrow{\rho^0} H^0(\mathcal{C}_p(X \setminus l); \mathcal{O}_{\mathcal{C}_p(X \setminus l)}}.$$

Dans [AN2] ces auteurs montrent que la suite

$$(5.1) \quad H^p(X \setminus l; \Omega_X^{(p-1)}) \xrightarrow{d} H^p(X \setminus l; \Omega_X^{(p)}) \xrightarrow{\rho^0} H^0(\mathcal{C}_p(X \setminus l); \mathcal{O}_{\mathcal{C}_p(X \setminus l)}})$$

est exacte modulo des sous-espaces de dimension finie. Dans le cas des cycles linéaires, et pour  $X = \mathbb{P}_n$  et  $l = \mathbb{P}_{n-p-1}$ , Barlet dans [B] montre que les obstructions précédentes disparaissent, c'est dire que la suite (5.1) est exacte.

On se propose de calculer  $\mathrm{im} \rho^0$ , dans la situation linéaire étudiée par Barlet, grâce au Théorème 2.3.1, et en utilisant la formule d'adjonction (1.3) du Théorème 1.4.1, avec le  $\mathcal{D}_Y$ -module  $\mathcal{M}_b$ , et un faisceau constructible  $F = \mathbf{C}_U$  convenable.

**Lemme 5.1.1.** *Soit l'ouvert  $U = \{y \in Y, \hat{y} \cap l = \emptyset\}$ . On a les propriétés suivantes*

- (i)  $U$  est isomorphe à la carte affine de  $Y$  définie au §2.1.
- (ii)  $\hat{U} = X \setminus l$ , et  $\hat{l} = Y \setminus U$ .
- (iii)  $\mathbf{C}_S \circ \mathbf{C}_U \simeq \mathbf{C}_{X \setminus l}[-2d_{S/X}]$ .

Le point (i) est classique; rappelons-en la démonstration: on note  $x_1, \dots, x_{n+1}$  les coordonnées dans  $W$ , telles que  $l$  soit le sous-espace de  $X$  défini par  $x_1 = \dots = x_{p+1} = 0$ . Un  $p+1$ -plan  $\gamma$  de  $W$  admet pour équations para-

métriques

$$\begin{cases} x_1 = b_{1,1}t_1 + b_{1,2}t_2 + \dots + b_{1,p+1}t_{p+1} \\ x_2 = b_{2,1}t_1 + b_{2,2}t_2 + \dots + b_{2,p+1}t_{p+1} \\ \vdots \\ x_{n+1} = b_{n+1,1}t_1 + b_{n+1,2}t_2 + \dots + b_{n+1,p+1}t_{p+1}. \end{cases}$$

Si  $\gamma$  ne rencontre pas  $l$ , on a

$$\det(b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p+1 \\ 1 \leq j \leq p+1}} \neq 0;$$

donc, prenant  $x_1, \dots, x_{p+1}$  comme nouveaux paramètres, les équations de  $\gamma$  se réécrivent

$$\begin{cases} x_{p+2} = y_{p+2,1}x_1 + y_{p+2,2}x_2 + \dots + y_{p+2,p+1}x_{p+1} \\ \vdots \\ x_{n+1} = y_{n+1,1}x_1 + y_{n+1,2}x_2 + \dots + y_{n+1,p+1}x_{p+1}, \end{cases}$$

et on voit que  $\gamma$  est bien paramétré par les coordonnées de la carte affine du §2.1. Le point (ii) est évident; pour le point (iii) on utilise le Lemme 2.8 de [DS1]; il faut montrer que  $f$  est lisse,  $g$  est propre,  $(f, g) : S \rightarrow X \times Y$  est une immersion fermée, et que les fibres de  $f|_{g^{-1}(U)}$  sont contractiles. Les trois premières assertions résultent immédiatement des hypothèses; de plus si  $x \in X \setminus l$ ,  $f^{-1}(x) \cap g^{-1}(U)$  est l'ensemble des  $p + 1$  plans de  $W \simeq \mathbb{C}^{n+1}$  contenant  $x$ , et ne rencontrant pas  $l$ ; cet ensemble est isomorphe à l'ensemble de  $p$ -plans de  $\mathbb{C}^n$  ne rencontrant pas  $l \cap \mathbb{C}^n$ , et le calcul fait pour  $U$  montre que  $f^{-1}(x) \cap g^{-1}(U) \simeq \mathbb{C}^{(n-p) \times p}$  ( $n$  et  $p$  sont diminués de 1). Les hypothèses du Lemme 2.8 (*loc.cit.*) sont donc satisfaites.

**Proposition 5.1.2.** *On a l'isomorphisme*

$$H^p(R\Gamma(X \setminus l; R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}_b, \mathcal{O}_X))) \simeq H^p(X \setminus l; \Omega_X^{(p)})/dH^p(X \setminus l; \Omega_X^{(p-1)}).$$

*Démonstration.* Comme  $R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}_b, \mathcal{O}_X)$  est représenté par le complexe

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{d} \Omega_X^{(1)} \dots \xrightarrow{d} \Omega_X^{(p-1)} \xrightarrow{d} \Omega_X^{(p)} \rightarrow 0,$$

où  $\Omega_X^{(p)}$  est placé en degré 0, la Proposition 5.1.2 résulte du

**Lemme 5.1.3.** *Pour tout complexe de faisceaux*

$$\mathcal{F}^* = 0 \rightarrow \mathcal{F}^{-p} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{F}^{-1} \xrightarrow{d} \mathcal{F}^0 \rightarrow 0,$$

tel que les  $\mathcal{F}^j$  soient des  $\mathcal{O}_X$ -modules cohérents, on a  $H^p(X \setminus l; \mathcal{F}^*) \simeq$

$H^p(X \setminus l; \mathcal{F}^0)/dH^p(X \setminus l; \mathcal{F}^{-1})$ , le membre de gauche désignant comme d'habitude  $H^p(\mathbf{R}\Gamma(X \setminus l; \mathcal{F}^\bullet))$ .

*Démonstration.* Remarquons d'abord que l'ouvert  $X \setminus l$  admet un recouvrement par  $p + 1$  ouverts de Stein: soit  $x_1, \dots, x_{p+1}$  les coordonnées dans  $W$ ; on identifie  $l$  au sous-espace de  $X$  défini par les équations  $x_1 = \dots = x_{p+1} = 0$ ; le recouvrement en question est  $\mathcal{U} = (U_i)_{1 \leq i \leq p+1}$ , où  $U_i = \{x_i \neq 0\}$ . Comme pour tout entier  $k \leq 0$ , le faisceau  $\mathcal{F}^k$  est cohérent, on a donc

$$(5.2) \quad \forall j \geq p + 1, \quad H^j(X \setminus l; \mathcal{F}^k) = 0.$$

Notons  $\mathcal{F}_k^\bullet = \sigma^{\geq -p+k} \mathcal{F}^\bullet$  (en particulier  $\mathcal{F}_0^\bullet = \mathcal{F}^\bullet$ ). On a les triangles distingués

$$(5.3) \quad \mathcal{F}_k^\bullet \longrightarrow \mathcal{F}_{k-1}^\bullet \longrightarrow \mathcal{F}^{-p+k-1}[p-k+1] \xrightarrow{+1},$$

pour  $k = 1, \dots, p$ . On en déduit les suites exactes longues de cohomologie

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^{j+p-k}(X \setminus l; \mathcal{F}^{-p+k-1}) \\ \rightarrow H^j(X \setminus l; \mathcal{F}_k^\bullet) \rightarrow H^j(X \setminus l; \mathcal{F}_{k-1}^\bullet) \rightarrow H^{j+p-k+1}(X \setminus l; \mathcal{F}^{-p+k-1}) \rightarrow \dots, \end{aligned}$$

et donc l'isomorphisme  $H^j(X \setminus l; \mathcal{F}_k^\bullet) \simeq H^j(X \setminus l; \mathcal{F}_{k-1}^\bullet)$  pour tout  $j \geq k + 1$ . Faisant  $k = 1, 2, \dots, p - 1$  et  $j = p$ , il vient

$$H^p(X \setminus l; \mathcal{F}_0^\bullet) \simeq H^p(X \setminus l; \mathcal{F}_1^\bullet) \simeq \dots \simeq H^p(X \setminus l; \mathcal{F}_{p-1}^\bullet).$$

Pour  $k = p$ , le triangle (5.3) se réécrit

$$\mathcal{F}^0 \longrightarrow \mathcal{F}_{p-1}^\bullet \longrightarrow \mathcal{F}^{-1}[+1] \xrightarrow{+1},$$

d'où la suite exacte

$$H^p(X \setminus l; \mathcal{F}^{-1}) \xrightarrow{d} H^p(X \setminus l; \mathcal{F}^0) \rightarrow H^p(X \setminus l; \mathcal{F}_{p-1}^\bullet) \rightarrow 0,$$

qui permet de conclure.

**Lemme 5.1.4.** *Soit le foncteur  $\Phi(\cdot) = \mathbf{R}\Gamma(U; \mathcal{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\cdot, \mathcal{O}_Y))$ . On a l'isomorphisme  $H^0(\Phi(\mathcal{M}_b \circlearrowleft \mathcal{K})) \simeq \Gamma(U; \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(H^0(\mathcal{M}_b \circlearrowleft \mathcal{K}), \mathcal{O}_Y))$ .*

*Démonstration.* Notons  $\mathcal{N} = \mathcal{M}_b \circlearrowleft \mathcal{K}$ . Soit  $r$  un entier tel que  $\tau^{\leq r} \mathcal{N} = \mathcal{N}$ ; on a le triangle distingué

$$\tau^{\leq r-1} \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow H^r(\mathcal{N})[-r] \xrightarrow{+1},$$

d'où on déduit le second triangle distingué

$$\Phi(H^r(\mathcal{N})[-r]) \longrightarrow \Phi(\mathcal{N}) \longrightarrow \Phi(\tau^{\leq r-1} \mathcal{N}) \xrightarrow{+1}.$$

D'après le point (iii) de la Prop. 4.5.1, pour tout entier  $r > 0$ , il existe  $s$  ( $s = 0$  ou  $1$ ), tel que  $H^r(\mathcal{N}) \simeq \mathcal{O}_Y^s$ ; on en déduit, pour tout entier  $i \geq 0$ :

$$\begin{aligned} H^i\Phi(H^r(\mathcal{N})[-r]) &\simeq H^i(\mathbf{R}\Gamma(U; R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{O}_Y^s[-r], \mathcal{O}_Y))) \\ &\simeq H^i(\mathbf{R}\Gamma(U; \mathbf{C}_Y^s[r])) \\ &\simeq H^{r+i}(U; \mathbf{C}_Y^s), \end{aligned}$$

qui est nul si  $r + i \neq 0$ . Prenant successivement  $i = 0$  et  $i = 1$ , on obtient

$$H^0\Phi(\mathcal{N}) \simeq H^0\Phi(\tau^{\leq r-1}\mathcal{N}).$$

D'où on déduit, par récurrence, que  $H^0(\Phi(\mathcal{N})) \simeq H^0\Phi(\tau^{\leq 0}\mathcal{N})$ , mais comme  $\mathcal{M}_b \circlearrowleft \mathcal{K}$  est concentré en degrés  $\geq 0$ , ce dernier groupe est encore isomorphe à  $H^0(\Phi(H^0(\mathcal{N})))$ , d'où le résultat.

On peut maintenant démontrer la

**Proposition 5.1.5.** *On a l'isomorphisme*

$$H^p(X \setminus I; \Omega_X^{(p)})/dH^p(X \setminus I; \Omega_X^{(p-1)}) \simeq \Gamma(U; \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}_Y/\mathcal{I}, \mathcal{O}_Y)).$$

On applique la formule (1.3) du Théorème 1.4.1 avec le faisceau  $F = \mathbf{C}_U$  et le  $\mathcal{D}$ -module  $\mathcal{M}_b$ ; c'est justifié puisque les faisceaux  $\mathcal{O}_X^{(k)}$  étant  $\mathcal{O}_X$ -cohérents, on a bien  $\mathcal{M}_b \in \mathbf{D}_{\text{good}}^b(\mathcal{D}_X)$ . Comme  $d_S = d_Y + p$ , on obtient par le Lemme 5.1.1 (ii), l'isomorphisme suivant

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\Gamma(X; R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_b, R\mathcal{H}om(\mathbf{C}_{X \setminus I}, \mathcal{O}_X)))[p] \\ \simeq \mathbf{R}\Gamma(Y; R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_b \circlearrowleft \mathcal{K}, R\mathcal{H}om(\mathbf{C}_U, \mathcal{O}_Y))), \end{aligned}$$

d'où on déduit

$$\mathbf{R}\Gamma(X \setminus I; R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_b, \mathcal{O}_X))[p] \simeq \mathbf{R}\Gamma(U; R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_b \circlearrowleft \mathcal{K}, \mathcal{O}_Y)).$$

Prenons le  $H^0$  des deux membres; il vient grâce à la Proposition 5.1.2:

$$H^p(X \setminus I; \Omega_X^{(p)})/dH^p(X \setminus I; \Omega_X^{(p-1)}) \simeq H^0(\mathbf{R}\Gamma(U; R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_b \circlearrowleft \mathcal{K}, \mathcal{O}_Y))).$$

Or ce groupe est isomorphe à  $\Gamma(U; \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(H^0(\mathcal{M}_b \circlearrowleft \mathcal{K}), \mathcal{O}_Y))$  par le Lemme 5.1.4, et l'on conclut par le Théorème 2.3.1.

Ce résultat, joint à la suite exacte (5.1), montre que l'image de la transformation intégrale

$$\rho^0(\varphi)(\gamma) = \int_{\gamma} \varphi,$$

obtenue en intégrant sur les cycles linéaires de  $X \setminus I$ , des formes  $\varphi$  qui sont  $\bar{\partial}$ -

fermées, est l'espace des fonctions holomorphes sur l'ouvert  $U$  de  $Y$  constitué des cycles linéaires de dimension  $p$  de  $X \setminus I$ , annihilées par la famille d'opérateurs (2.3).

## 5.2 Autres Formules

### 5.2.1 Cohomologie Modérée

On va donner une version tempérée de la Proposition 5.1.5. Notons  $h$  l'hypersurface  $Y \setminus U$ .

**Proposition 5.2.1.** *On a l'isomorphisme*

$$\begin{aligned} H^p(X; \mathcal{T}hom(\mathbf{C}_{X \setminus I}; \Omega_X^{(p)})) / dH^p(X; \mathcal{T}hom(\mathbf{C}_{X \setminus I}; \Omega_X^{(p-1)})) \\ \simeq \Gamma(Y; \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}_Y / \mathcal{I}, \mathcal{O}_Y(*h))). \end{aligned}$$

On applique la formule (1.5) du Théorème 1.4.2, avec le faisceau  $F = \mathbf{C}_U$  et le  $\mathcal{D}$ -module  $\mathcal{M}_b$ ; on obtient

$$\begin{aligned} (5.4) \quad R\Gamma(X; R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_b, \mathcal{T}hom(\mathbf{C}_{X \setminus I}, \mathcal{O}_X))) [p] \\ \simeq R\Gamma(Y; R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_b \circlearrowleft \mathcal{K}, \mathcal{T}hom(\mathbf{C}_U, \mathcal{O}_Y))). \end{aligned}$$

On sait que  $\mathcal{T}hom(\mathbf{C}_U, \mathcal{O}_Y) \simeq \mathcal{O}_Y(*h)$ . Pour calculer le  $H^0$  du membre droit de (5.4), on peut procéder ainsi. Soit le foncteur  $\Phi(\cdot) = R\Gamma(Y; R\mathcal{H}om(\cdot, \mathcal{T}hom(\mathbf{C}_U, \mathcal{O}_Y)))$ . Comme  $\mathcal{O}_Y$  est holonome régulier, on a la formule (voir [K3], Corollaire 8.6)

$$R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{T}hom(\mathbf{C}_U, \mathcal{O}_Y)) \simeq R\Gamma_U(\mathbf{C}_Y),$$

et donc  $\Phi(\mathcal{O}_Y) \simeq R\Gamma(U; \mathbf{C}_Y)$ . On peut donc raisonner comme dans le Lemme 5.1.4, et on obtient  $H^0(\Phi(\mathcal{M}_b \circlearrowleft \mathcal{K})) \simeq \Gamma(Y; \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(H^0(\mathcal{M}_b \circlearrowleft \mathcal{K}), \mathcal{T}hom(\mathbf{C}_U, \mathcal{O}_Y)))$ . Prenant maintenant le  $H^0$  des deux membres de (5.4), il vient

$$H^p(R\Gamma(X; R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_b, \mathcal{T}hom(\mathbf{C}_{X \setminus I}, \mathcal{O}_X)))) \simeq \Gamma(Y; \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}_Y / \mathcal{I}, \mathcal{O}_Y(*h))).$$

Pour calculer le membre gauche, on procède comme dans la Proposition 5.1.2, en utilisant le

**Lemme 5.2.2.** *Pour tout complexe de faisceaux*

$$\mathcal{F}^{\bullet} = 0 \rightarrow \mathcal{F}^{-p} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{F}^{-1} \xrightarrow{d} \mathcal{F}^0 \rightarrow 0,$$

tel que les  $\mathcal{F}^j$  soient des  $\mathcal{O}_X$ -modules localement libres, on a  $H^p(X; \mathcal{T}hom(\mathbf{C}_{X \setminus I}; \mathcal{F}^{\bullet})) \simeq H^p(X; \mathcal{T}hom(\mathbf{C}_{X \setminus I}; \mathcal{F}^0)) / dH^p(X; \mathcal{T}hom(\mathbf{C}_{X \setminus I}; \mathcal{F}^{-1}))$ .

Nous ne détaillons pas la démonstration qui est analogue à celle du Lemme 5.1.3. La relation fondamentale (5.2) est remplacée ici par

$$\forall j \geq p + 1, \quad H^j(X; \mathcal{T}hom(\mathbb{C}_{X \setminus l}, \mathcal{F}^k)) = 0,$$

qui résulte du résultat suivant de [H]:

$$H^j(R\Gamma(X; \mathcal{T}hom(\mathbb{C}_U, \mathcal{F}))) = 0,$$

pour tout  $j > 0$ , tout faisceau  $\mathcal{F}$  qui est  $\mathcal{O}_X$ -localement libre, et tout ouvert de Stein  $U$  de  $X$ .

### 5.2.2 Cohomologie Formelle

En appliquant la formule (1.4) du Théorème 1.4.2, avec le faisceau  $F = \mathbb{C}_U$ , et le  $\mathcal{D}$ -module  $\mathcal{M}_b$ , on obtient l'isomorphisme

$$\begin{aligned} R\Gamma\left(X; R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}\left(\mathcal{M}_b, \mathbb{C}_{X \setminus l} \overset{w}{\otimes} \mathcal{O}_X\right)\right)[2d_X - p] \\ \simeq R\Gamma\left(Y; R\mathcal{H}om\left(\mathcal{M}_b \circlearrowleft \mathcal{K}, \mathbb{C}_U \overset{w}{\otimes} \mathcal{O}_Y\right)\right)[2d_Y]. \end{aligned}$$

### Bibliographie

- [AN1] Andreotti, A. et Norguet, N., La convexité holomorphe dans l'espace analytique des cycles d'une variété algébrique, *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, **21** (1967), 31–82.
- [AN2] ———, Cycles of algebraic manifolds and  $\partial\bar{\partial}$ -cohomology, *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, **25** (1971), 59–144.
- [B] Barlet, D., Espace des cycles et  $d'd''$ -cohomologie de  $\mathbb{P}_n \setminus \mathbb{P}_k$ , Fonctions de plusieurs variables complexes (séminaire F. Norguet), *Lecture Notes in Math.*, **409** (1974), 98–123.
- [Ba] Barth, W., Transplanting cohomology classes in complex projective space, *Amer. J. Math.*, **92** (1970), 951–966.
- [BE] Baston, R. J. and Eastwood, M. G., *The Radon-Penrose transform, its interaction with representation theory*, Oxford Univ. Press, 1989.
- [BB] Beilinson, A. A. et Bernstein, J., Localisation de  $\mathfrak{g}$ -modules, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I*, **292** (1981), 15–18.
- [BBD] Beilinson, A. A., Bernstein, J. et Deligne, P., Faisceaux pervers, Analyse et topologie sur les espaces singuliers, *Astérisque*, **100** (1982).
- [Bj] Björk, J.-E., Analytic  $\mathcal{D}$ -modules and applications, *Math. Appl.*, **239** (1993).
- [BH] Borel, A. et Hirzebruch, F., Characteristic classes and homogeneous spaces, I, II. *Amer. J. Math.*, **80** (1958), 458–538; **81** (1959), 315–382.
- [Bo] Bott, R., Homogeneous vector bundles, *Ann. of Math.*, **66** (1957), 203–248.
- [DS1] D'Agnolo, A. et Schapira, P., The Radon-Penrose transform for  $\mathcal{D}$ -modules, *J. Funct. Anal.*, **139**, 2 (1996), 349–382.
- [DS2] ———, Leray's quantization of projective duality, *Duke Math. J.*, **84**, 2 (1996), 453–496.



- [DS3] D'Agnolo, A. et Schapira, P., The Radon-Penrose correspondence II, Line bundles, simple  $\mathcal{D}$ -modules, à paraître au *J. Funct. Anal.*
- [EPW] Eastwood, M. G., Penrose, R. and Wells, R. O., Cohomology and Massless Fields, *Comm. Math. Phys.*, **78** (1981), 305–351.
- [F] Frot, J-L, Correspondance d'Andreotti-Norguet et  $\mathcal{D}$ -modules, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I*, **325** (1997), 361–364.
- [FL] Frot, J-L. et Legrandgérard, Y., Image de la transformation intégrale d'Andreotti-Norguet sur les cycles linéaires de  $\mathbb{P}_n \setminus \mathbb{P}_k$ , non publié.
- [GGG] Gelfand, I. M., Gindikin, S. G. and Graev, M. I., Integral geometry in affine and projective spaces, *J. Soviet Math.*, **18** (1982), 39–167.
- [G] Goncharov, A., Differential equations and integral geometry, *Adv. Math.*, **131** (1997).
- [H] Hormander, L., *An introduction to complex analysis in several variables*, North-Holland, 1966.
- [HP] Henkin, G. M. and Polyakov, P. L., Residue integral formulas and the Radon transform for differential forms on  $q$ -linearly concave domains, *Math. Ann.*, **286** (1990), 225–254.
- [K1] Kashiwara, M., Algebraic study of partial differential equations, *Mém. SMF*, **63** (1995).
- [K2] ———, Representation theory and  $\mathcal{D}$ -modules on flag varieties, *Astérisque*, **173–174** (1989), 55–109.
- [K3] ———, Riemann-Hilbert Problem for Holonomic Systems, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **20** (1984), 319–365.
- [KO] Kashiwara, M. and Oshima, T., Systems of differential equations with regular singularities and their boundary value problems, *Ann. of Math.*, **106** (1977), 145–200.
- [KS1] Kashiwara, M. and Schapira, P., Sheaves on manifolds, *Grundlehren Math. Wiss.*, **292** (1990).
- [KS2] ———, Moderate and formal cohomology associated with constructible sheaves, *Mém. SMF*, **64** (1996).
- [KS3] ———, Integral transforms with exponential kernels and Laplace transform, *J. AMS*, **10**, 4 (1997), 939–972.
- [Ou] Ouazza, A., Noyau et image de la transformation définie par intégration sur les droites de  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$  ne rencontrant pas une droite donnée, *Analysis*, **10** (1990), 45–69.
- [SKK] Sato, M., Kashiwara, M. and Kawai, T., Microfunctions and Pseudo-differential Equations in Hyperfunctions and Pseudo-differential Equation, *LNM*, **287** (1973), 265–529.
- [S] Schapira, P., Microdifferential Systems in the Complex Domain, *Grundlehren Math. Wiss.*, **269** (1985).
- [SSc] Schapira, P. et Schneiders, J-P., Index theorem for elliptic pairs, *Astérisque*, **224** (1994).
- [Sc] Schneiders, J-P., An introduction to  $\mathcal{D}$ -modules, *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège*, **63**, 3–4 (1994), 223–295.

