Publ. RIMS, Kyoto Univ.
35 (1999), 679–709

Méthodes à N Corps pour un Problème de Milieux Pluristratifiés Perturbés

par

Yves Dermenjian* et Viorel Iftimie**

Abstract

On étudie l'opérateur $H := \nabla^* \rho \nabla + V$ dans $L^2(X)$, X espace euclidien réel de dimension finie, où V est un potentiel du type "N corps" associé à une famille finie $\mathscr{L}$ de sous-espaces vectoriels de X et ρ admet une décomposition suivant $\mathscr{L}$, compatible avec celle de V. Chaque composante de V, respectivement ρ, est une somme de perturbations de type "courte portée" et "longue portée". En utilisant une variante de la méthode de Mourre [14] ainsi que des idées de la théorie du problème à N corps de la mécanique quantique, on fait l'analyse spectrale de l'opérateur H et on prouve un principe d'absorption limite.

§ 1. Introduction

Soit X un espace euclidien réel de dimension finie dont on désigne le produit scalaire (étendu en tant que fonctionnelle bilinéaire au complexifié) de deux éléments x et y par $x.y$. Si $x \in X \otimes \mathbb{C}$, on pose $|x|^2 := x.\bar{x}$; dx sera la mesure riemanienne sur X. On note par ∇ l'opérateur "gradient" et par ∇^* l'opérateur "divergence" (l'adjoint formel de ∇). Alors $\Delta := \nabla^* \nabla$ sera l'opérateur de Laplace-Beltrami sur X $\left(\text{lorsque } X = \mathbb{R}^n, \text{ on aura } \Delta = -\sum_{1 \le j \le n} \partial_j^2\right)$.

On considère une famille finie $\mathscr{L}$ de sous-espaces vectoriels de X, qui vérifie

I-(i) $O \in \mathscr{L}$, $X \in \mathscr{L}$.

(ii) Pour tous $Y, Z \in \mathscr{L}$, la somme vectorielle $Y + Z \in \mathscr{L}$.

On pose $\mathscr{L}_1 := \mathscr{L} \backslash \{X\}$ et si $Y \in \mathscr{L}$, $\mathscr{L}(Y) := \{Z \in \mathscr{L}; Z \subset Y\}$, tandis que $Y^\perp$ désigne le complémentaire orthogonal de Y dans $X : Y^\perp := X \ominus Y$.

On définit de façon standard les espaces de Sobolev usuels $\mathscr{H}^s(X)$, $s \in \mathbb{R}$. En particulier, $\mathscr{H}^0(X) = L^2(X)$.

Communiqué par T. Kawai, le 18 février 1999.
1991 Mathematics Subject Classification(s): 35P25, 47A55, 81F10

* LAPT, UMR-CNRS n° 6632, CMI, Université de Provence, 39, rue Joliot Curie, 13453 Marseille Cedex 13, France.

** Université de Bucarest, 14 rue Academiei, Bucarest, Roumanie.

Si E et F sont deux espaces de Banach, on désigne par $\mathscr{B}(E,F)$ (resp. $\mathscr{K}(E,F)$) l'ensemble des opérateurs linéaires et bornés (resp. compacts) de E dans F. En particulier, $\mathscr{B}(E) := \mathscr{B}(E,E)$, $\mathscr{K}(E) := \mathscr{K}(E,E)$.

Pour tout $Y \in \mathscr{L}$ on se donne les fonctions réelles δ^Y et V^Y définies sur Y, telles que $\delta^0 = 0$, $V^0 \in \mathbb{R}$ et pour $Y \neq 0$, $\delta^Y = \delta^{Y,S} + \delta^{Y,L}$, $V^Y = V^{Y,S} + V^{Y,L}$. On se donne aussi deux constantes $\rho^0 \in \mathbb{R}_+^*$, et $\theta \in (0,1]$ telles que les hypothèses suivantes soient vérifiées:

II-(i) $\delta^{Y,S}$ est une perturbation du type "courte portée", à savoir $\langle . \rangle^{1+\theta}\delta^{Y,S} \in L^\infty(Y)$, où $\langle x \rangle := (1+|x|^2)^{1/2}, x \in X$.

(ii) $\delta^{Y,L}$ est une perturbation du type "longue portée", c'est-à-dire $\langle . \rangle^{\theta}\delta^{Y,L} \in L^\infty(Y)$, $\langle . \rangle^{1+\theta}\nabla\delta^{Y,L} \in L^\infty(Y,Y)$.

(iii) Pour tout $Y \in \mathscr{L}$, $\rho^Y := \rho^0 + \sum_{z \in \mathscr{L}(Y)} \delta^Z \otimes 1_{Y \ominus Z} > 0$ et $1/\rho^Y \in L^\infty(Y)$.

III-(i) $V^{Y,S}$, $V^{Y,L} \in L^1_{\ell oc}(Y)$ et l'opérateur de multiplication $V^Y \in \mathscr{K}(\mathscr{H}^1(Y), \mathscr{H}^{-1}(Y))$.

(ii) $V^{Y,S}$ est une perturbation du type "courte portée", c'est-à-dire $\langle . \rangle^{1+\theta} V^{Y,S} \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^1(Y), \mathscr{H}^{-1}(Y))$.

(iii) $V^{Y,L}$ est une perturbation du type "longue portée", ce qui signifie que $\langle . \rangle^{\theta} V^{Y,L} \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^1(Y), \mathscr{H}^{-1}(Y))$, et pour tout $\xi \in Y, \langle . \rangle^{1+\theta}\xi.\nabla V^{Y,L} \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^1(Y), \mathscr{H}^{-1}(Y))$, uniformément pour $|\xi| \leq 1$.

On introduit les fonctions suivantes, définies sur X:

$$\delta_Y = \delta^Y \otimes 1_{Y^\perp}, \quad \delta_Y^S := \delta^{Y,S} \otimes 1_{Y^\perp}, \quad \delta_Y^L := \delta^{Y,L} \otimes 1_{Y^\perp}, \quad \rho_Y := \rho^Y \otimes 1_{Y^\perp},$$

$$V_Y := V^Y \otimes 1_{Y^\perp}, \quad V_Y^S := V^{Y,S} \otimes 1_{Y^\perp}, \quad V_Y^L := V^{Y,L} \otimes 1_{Y^\perp}$$

et finalement $\rho := \rho_X$, $V = \sum_{Y \in \mathscr{L}} V_Y$.

Si $\mathscr{H}$ est un espace de Hilbert, on désigne par $(.,.)_{\mathscr{H}}$ son produit scalaire et par $\|.\|_{\mathscr{H}}$ la norme associée. Si $\mathscr{H} = L^2(X)$ on écrit tout simplement $(.,.)$ pour $(.,.)_{L^2(X)}$ et $\|.\|$ pour $\|.\|_{L^2(X)}$.

Considérons la forme quadratique symétrique $h(\rho, V)$ sur $\mathscr{H} = L^2(X)$, de domaine $\mathscr{H}^1(X)$ et définie par

$$h(\rho, V)(u,v) := \int_X \rho\nabla u.\nabla\bar{v}dx + (Vu, v), \qquad u, v \in \mathscr{H}^1(X), \tag{1.1}$$

où l'on désigne aussi par $(.,.)$ l'extension du produit scalaire de $L^2(X)$ en tant que fonctionnelle sesquilinéaire sur $\mathscr{H}^{-1}(X) \times \mathscr{H}^1(X)$ ou bien sur $\mathscr{D}'(X) \times C_0^\infty(X)$.

La forme $h(\rho, 0)$ est fermée, $C_0^\infty(X)$ en est un domaine essentiel et il existe une constante $c > 0$ telle que $h(\rho,0)(u,u) \geq c\| |\nabla u| \|^2$, $u \in \mathscr{H}^1(X)$. D'autre part, d'après l'hypothèse III-(i), la forme $h(0, V)$ est relativement bornée par rapport à $h(\rho, 0)$, de borne relative égale à zéro. Alors $h(\rho, V)$ est symétrique, fermée, inférieurement semi-bornée, $C_0^\infty(X)$ en étant un domaine essentiel. Il existe donc un unique opérateur $H = H(\rho, V)$ auto-adjoint sur $\mathscr{H}$, semi-borné inférieurement et qui vérifie

$$(1.2) \qquad h(\rho, V)(u, v) = (Hu, v), \quad u \in D(H), \quad v \in \mathscr{H}^1(X).$$

On peut considérer $H \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^1(X), \mathscr{H}^{-1}(X))$ et alors

$$(1.3) \qquad Hu = \nabla^* \rho \nabla u + Vu, \qquad u \in \mathscr{H}^1(X).$$

Dans ce cadre, on remarque que $(H - \lambda)^{-1} \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^{-1}(X), \mathscr{H}^1(X))$ si $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \sigma(H)$.

Remarque 1.1. $H(1, V)$ a la forme du hamiltonien d'un système à N corps dans le formalisme de Agmon-Froese-Herbst (voir [12], [1]), tandis que $H(\rho, 0)$ pourrait être considéré comme le propagateur associé à un milieu pluristratifié. En particulier, le cas d'un milieu simplement stratifié (voir [10], [6]) est obtenu pour $X = \mathbb{R}^{m+n}$ et $\mathscr{L} = \{0, \mathbb{R}^m \times \{0\}, \mathbb{R}^{m+n}\}$.

Le premier résultat est un théorème du type HVZ, permettant de calculer le spectre essentiel de H en fonction des spectres des opérateurs

$$H_Y := H(\rho_Y, V - I_Y), \quad Y \in \mathscr{L}_1, \quad \text{où } I_Y := \sum_{Z \in \mathscr{L} \backslash \mathscr{L}(Y)} V_Z.$$

En général, si H est un opérateur auto-adjoint dans un espace de Hilbert $\mathscr{H}$, on désigne par $\sigma(H)$ (resp. $\sigma_{ess}(H)$, $\sigma_{cont}(H)$, $\sigma_{sc}(H)$, $\sigma_{ac}(H)$, $\sigma_p(H)$) le spectre de H (resp. le spectre essentiel, continu, continu singulier, absolument continu, l'ensemble des valeurs propres).

Théorème 1.2. *Sous les hypothèses* I, II *et* III-(i) *on a*

(a) $\sigma_{ess}(H) = \bigcup_{Y \in \mathscr{L}_1} \sigma_{ess}(H_Y)$.

(b) *Pour tout* $Y \in \mathscr{L}_1$, $\sigma_p(H_Y) = \emptyset$, *donc* $\sigma_{ess}(H_Y) = \sigma(H_Y) = \sigma_{cont}(H_Y)$.

(c) *En particulier*, $\sigma(H(\rho, 0)) = \sigma_{ess}(H(\rho, 0)) = [0, \infty[$.

Pour obtenir des propriétés spectrales plus profondes de H, y compris un principe d'absorption limite, on appliquera la méthode de Mourre [14], telle qu'elle a été développée dans [15], [12], [5], [2] pour des hamiltoniens à N corps, en utilisant à fond la partition de l'unité de Ruelle-Simon [9] pour faire des démonstrations par récurrence. Usuellement, l'opérateur conjugué est le générateur des dilatations $A := \frac{1}{2}(x.D + D.x)$, $D := -i\nabla$, qui a la propriété de décomposition très remarquable suivante: pour tout $Y \in \mathscr{L}$, $A = A_Y \otimes 1_{Y^\perp} + 1_Y \otimes A_{Y^\perp}$, où A_Y est le générateur des dilatations sur Y. Ce choix ne convient pas pour l'étude de $H(\rho, V)$ si l'on veut travailler avec des perturbations δ^Y assez singulières. Ainsi, on est amené à chercher l'opérateur conjugué A sous la forme d'un pseudo-différentiel presque-local dépendant d'un paramètre déterminé en fonction de l'intervalle spectral (idée qui n'est pas tout à fait nouvelle: voir [6]). Afin de construire A tel qu'il admette une décomposition comme ci-dessus relativement à $\mathscr{L}$, il faut que cette famille vérifie une hypothèse supplémentaire.

Un élément $Y \in \mathscr{L}\backslash\{0\}$ est appelé minimal si pour tout $Z \in \mathscr{L}\backslash\{0\}$ tel que $Z \subset Y$, on a $Z = Y$. On désigne par $\mathscr{L}_m$ l'ensemble des éléments minimaux de $\mathscr{L}$. On peut supposer (en augmentant éventuellement $\mathscr{L}$) que $\mathscr{L}_m$ engendre $\mathscr{L}$, c'est-à-dire que tout élément de $\mathscr{L}$ est une somme vectorielle finie d'éléments de $\mathscr{L}_m$. On fait l'hypothèse suivante:

IV – Les éléments de $\mathscr{L}_m$ sont mutuellement orthogonaux.

On en déduit que tout $Y \in \mathscr{L}\backslash\{0\}$ est la somme directe orthogonale des éléments de $\mathscr{L}_m(Y) := \mathscr{L}(Y) \cap \mathscr{L}_m$. De plus, si $Y \in \mathscr{L}$, alors $Y^\perp$ appartient à $\mathscr{L}$.

Avant de formuler les résultats principaux de ce papier, remarquons que pour tout $Y \in \mathscr{L}$, on peut construire un opérateur H^Y auto-adjoint sur $L^2(Y)$, à partir des familles $\mathscr{L}(Y), \{\delta^Z\}_{Z \in \mathscr{L}(Y)}$ et $\{V^Z\}_{Z \in \mathscr{L}(Y)}$. Par convention $L^2(0) = \mathbb{C}$ et $H^0 = V^0$.

Théorème 1.3. *Sous les hypothèses* I *à* IV *on a:*

(a) *L'ensemble des seuils* $\tau(H) := \bigcup_{Y \in \mathscr{L}_1} \sigma_p(H^Y)$ *est dénombrable et fermé.*

(b) *Les éléments de* $\sigma_p(H)\backslash\tau(H)$ *sont des valeurs propres de multiplicité finie, qui ne peuvent s'accumuler qu'aux points de* $\tau(H)$. *En particulier,* $\tau(H) \cup \sigma_p(H)$ *est un ensemble dénombrable et fermé.*

(c) $\sigma_{sc}(H) = \phi$.

Pour formuler le principe d'absorption limite nous utilisons certains espaces de Sobolev à poids (voir [4], [5]). Soient $\alpha, \beta \in C_0^\infty(X)$ réelles telles que $\alpha(x) > 0$ si $1/2 < |x| < 2$, $\alpha(x) = 0$ si $|x| \leq 1/2$ ou bien si $|x| \geq 2$, $\beta(x) > 0$ si $|x| < 2$, $\beta(x) = 0$ si $|x| \geq 2$. Pour $s, t \in \mathbb{R}$ et $1 \leq q \leq \infty$ nous désignerons par $\mathscr{H}_{t,q}^s(X)$ l'espace de Banach des distributions $u \in \mathscr{S}'(X)$ telles que

$$\|u\|_{\mathscr{H}_{t,q}^s(X)} := \|\langle D\rangle^s \beta u\| + \left[\int_1^\infty \|\langle D\rangle^s r^t \alpha(./r) u\|^q r^{-1} dr\right]^{1/q} < \infty.$$

Pour $q = \infty$ on convient que le second terme du côté droit doit être remplacé par $\sup_{r \geq 1} \|\langle D\rangle^s r^t \alpha(./r) u\|$. L'opérateur pseudo-différentiel $\langle D\rangle^s$ a pour symbole $\langle . \rangle^s$.

On note aussi $\mathscr{H}_t^s(X) := \mathscr{H}_{t,2}^s(X)$; c'est l'espace de Sobolev à poids usuel défini par la norme $\|\langle D\rangle^s \langle . \rangle^t u\|$. En particulier, $\mathscr{H}^s(X) = \mathscr{H}_0^s(X)$.

Soit $\mathbb{C}^\pm := \{\lambda \in \mathbb{C}; \pm\Im m\lambda > 0\}$.

Théorème 1.4. *Sous les hypothèses* I *à* IV, *on a*:

(a) *Les applications*

$$\mathbb{C}^\pm \ni \lambda \mapsto (H - \lambda)^{-1} \in \mathscr{B}(\mathscr{H}_{(1/2),1}^{-1}(X), \mathscr{H}_{-(1/2),\infty}^1(X)) \tag{1.4}$$

sont bien définies, holomorphes et admettent des extensions continues pour la topologie faible à $\mathbb{C}^{\pm} \cup (\mathbb{R}\backslash[\tau(H) \cup \sigma_p(H)])$.

(b) *Les applications*

$$\mathbb{C}^{\pm} \ni \lambda \mapsto (H-\lambda)^{-1} \in \mathscr{B}(\mathscr{H}_{\gamma}^{-1}(X), \mathscr{H}_{-\gamma}^{1}(X)) \tag{1.5}$$

sont bien définies pour tout $\gamma > 1/2$, *holomorphes et admettent des extensions continues pour la topologie uniforme à* $\mathbb{C}^{\pm} \cup (\mathbb{R}\backslash[\tau(H) \cup \sigma_p(H)])$.

Remarque 1.5. Les théorèmes 1.3 et 1.4 restent valables sans l'hypothèse IV. Il suffit que dans l'hypothèse II on suppose $\delta^{Y,S} = 0$ pour tout $Y \in \mathscr{L}$ et, qu'à la place de l'hypothèse III, on ait

III′-(i) Pour tout $Y \in \mathscr{L}$, $V^Y \in L^2_{\ell oc}(X; \mathbb{R})$ et l'opérateur de multiplication avec V^Y appartient à $\mathscr{K}(\mathscr{H}^2(Y), L^2(Y))$.

(ii) Si A^Y est le générateur des dilatations sur Y, alors $\langle\,.\,\rangle^{\theta} V^Y$ et $\langle\,.\,\rangle^{\theta}[V^Y, A^Y]$ appartient à $\mathscr{B}(\mathscr{H}^2(Y), \mathscr{H}^{-1}(Y))$.

Par exemple, une fonction V^Y qui vérifie (i) et de plus $V^Y = V^{Y,S} + V^{Y,L}$, où $V^{Y,S}$, $V^{Y,L} \in L^2_{\ell oc}(X; \mathbb{R})$ et

(a) $\langle . \rangle^{1+\theta} V^{Y,S} \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^2(Y), L^2(Y))$,

(b) $\langle . \rangle^{\theta} V^{Y,L} \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^2(Y), L^2(Y))$, $\langle y \rangle^{\theta} y.\nabla V^{Y,L} \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^2(Y), \mathscr{H}^{-1}(Y))$,

vérifie aussi (ii).

Il est évident que sous les hypothèses de cette remarque, $D(H) = \mathscr{H}^2(X)$.

Remarque 1.6. Le but de ce papier est en fait l'étude spectrale de l'opérateur $H(\rho, 0)$, régissant la propagation des ondes dans des milieux pluristratifiés (d'où l'intérêt de considérer des fonctions ρ assez singulières). Au cours de la démonstration de l'inégalité de Mourre il s'est avéré que le bon opérateur à étudier du point de vue mathématique est $H(\rho, V)$, d'où l'idée de faire une théorie unifiée pour les milieux pluristratifiés et les systèmes à "N corps".

Remarque 1.7. Les hypothèses II et III ne sont pas les plus générales possibles, surtout en ce qui concerne les conditions de décroissance à l'infini. On pourrait aussi considérer des perturbations V^Y qui ne soient pas des opérateurs locaux.

Remarque 1.8. Les opérateurs $H_Y, Y \in \mathscr{L}_1$, possèdent une propriété de décomposition importante. Plus exactement, on a au sens des formes

$$H_Y = H^Y \otimes 1_{Y^{\perp}} + \rho^Y \otimes \Delta_{Y^{\perp}}, \tag{1.6}$$

où $\Delta_{Y^{\perp}}$ est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur $Y^{\perp}$. Cette relation permet d'obtenir directement des renseignements spectraux importants sur H_Y si $\rho = 1$; si ρ n'est pas une constante, ceci est beaucoup plus difficile.

De plus, $H(1, V)$ est déduit de Δ par une perturbation infiniment petite, ce qui est faux pour $H(\rho, V)$. Il est donc naturel que certaines idées de la théorie à N corps s'appliquent au cas où ρ n'est pas constant, bien que la technique soit assez différente.

Remarque 1.9. Les opérateurs $H(\rho, 0)$ ont été étudiés complètement pour les milieux simplement stratifiés (voir [10] et [6] pour la méthode de l'opérateur conjugué). Par contre, il n'y a que peu de résultats pour des opérateurs qui, dans un certain sens, correspondent aux milieux bistratifiés (voir [8] pour une méthode basée sur les fonctions propres généralisées et [11] pour la méthode de l'opérateur conjugué).

Le contenu du papier est le suivant: dans la seconde section on rappelle (en utilisant [5], [4], [2]) les résultats nécessaires de la méthode de l'opérateur conjugué. La section 3 est consacrée à certaines propriétés générales de l'opérateur $H(\rho, V)$, ainsi qu'à la démonstration des propriétés (a) et (c) du théorème 1.2. Dans la quatrième section on introduit l'opérateur conjugué et on prouve certaines propriétés auxiliaires. Dans la section 5 on étudie la régularité de $H(a, V)$ par rapport à l'opérateur conjugué et on prouve la propriété (b) du théorème 1.2. Finalement, dans la dernière section on prouve l'inégalité de Mourre et les théorèmes 1.3 et 1.4.

On utilise les notations classiques pour certains espaces de fonctions et de distributions. On désigne par le même symbole une fonction et l'opérateur de multiplication par la même fonction.

§2. La Méthode de l'Opérateur Conjugué

Soient $\mathscr{G}$ et $\mathscr{H}$ deux espaces de Hilbert complexes et séparables, tels que $\mathscr{G} \subset \mathscr{H}$ continûment et densément (on dit que $(\mathscr{G}, \mathscr{H})$ est un couple de Friedrichs). Si l'on identifie $\mathscr{H}$ avec son adjoint, on aura $\mathscr{G} \subset \mathscr{H} \subset \mathscr{G}^*$ et on pourra aussi prolonger le produit scalaire $(.,.)$ de $\mathscr{H}$ à une forme sesquilinéaire sur $\mathscr{G}^* \times \mathscr{G}$, ou bien sur $\mathscr{G} \times \mathscr{G}^*$.

On considère aussi un groupe unitaire dans ce couple, c'est-à-dire un C_0-groupe $\{W_\tau\}_{\tau \in \mathbb{R}}$ dans $\mathscr{G}^*$, qui laisse invariant les espaces $\mathscr{H}$ et $\mathscr{G}$ et qui est unitaire sur $\mathscr{H}$. Soit A le générateur de ce groupe, défini sur $D(A; \mathscr{G}^*)$.

On note $D(A; \mathscr{H}) := \{u \in \mathscr{H} \cap D(A; \mathscr{G}^*); Au \in \mathscr{H}\}$ et $D(A; \mathscr{G}) := \{u \in \mathscr{G} \cap D(A; \mathscr{G}^*); Au \in \mathscr{G}\}$. La restriction de A à $\mathscr{H}$ est un opérateur auto-adjoint sur $\mathscr{H}$ de domaine $D(A; \mathscr{H})$ et $W_\tau = e^{i\tau A}$ sur $\mathscr{H}$ pour tout $\tau \in \mathbb{R}$. De plus, la restriction de A à $\mathscr{G}$ sera le générateur de la restriction du groupe $\{W_\tau\}_{\tau \in \mathbb{R}}$ à $\mathscr{G}$, de domaine $D(A; \mathscr{G})$.

Définition 2.1. *Soient* $H \in \mathscr{B}(\mathscr{G}, \mathscr{G}^*)$ *et* $\theta \in (0, 1]$. *On dit que* $H \in C^\theta(A; \mathscr{G}, \mathscr{G}^*)$ *s'il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$\|[W_\tau, H]\|_{\mathscr{B}(\mathscr{G},\mathscr{G}^*)} \le C|\tau|^\theta \;\; si \;\; \tau \in [-1,1], \tag{2.1}$$

où le commutateur $[W_\tau, H] := W_\tau H - HW_\tau$ *est bien défini sur* $\mathscr{G}$.

On note $C^\theta(A;\mathscr{H}) := C^\theta(A;\mathscr{H},\mathscr{H})$.

Remarque 2.2. (Voir lemme 2.4 de [5]). Un opérateur $H \in \mathscr{B}(\mathscr{G},\mathscr{G}^*)$ est de classe $C^1(A;\mathscr{G},\mathscr{G}^*)$ si et seulement si le commutateur $[H,A]$ défini en tant que forme sesquilinéaire sur $D(A;\mathscr{G})$ par

$$([H,A]u,v) := (HAu,v) - (Hu,Av), u,v \in D(A;\mathscr{G}), \tag{2.2}$$

est continu pour la topologie induite par $\mathscr{G}$. Dans cette situation, on pourra identifier cette forme avec un opérateur de $\mathscr{B}(\mathscr{G},\mathscr{G}^*)$.

Remarque 2.3. Si $H \in \mathscr{B}(\mathscr{G},\mathscr{G}^*)$ est symétrique (c'est-à-dire $(Hu,v) = (u,Hv)$ pour tous $u,v \in \mathscr{G}$) alors $(Hu,u) \in \mathbb{R}$ pour tout $u \in \mathscr{G}$. De plus, si $H \in C^1(A;\mathscr{G},\mathscr{G}^*)$, alors $i[H,A] \in \mathscr{B}(\mathscr{G},\mathscr{G}^*)$ est lui aussi symétrique.

Théorème 2.4. (du viriel: voir le corollaire 2.5 de [5]). *Si* $H \in \mathscr{B}(\mathscr{G},\mathscr{G}^*)$ *est symétrique, de classe* $C^1(A;\mathscr{G},\mathscr{G}^*)$ *et si* $u,v \in \mathscr{G}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, *vérifient* $Hu = \lambda u$, $Hv = \lambda v$, *alors*

$$([H,A]u,v) = 0$$

Définition 2.5. *Soient* $H \in \mathscr{B}(\mathscr{G},\mathscr{G}^*)$ *et* $\theta \in (0,1]$. *On dit que* $H \in C^{1+\theta}(A;\mathscr{G},\mathscr{G}^*)$ *si* $H \in C^1(A;\mathscr{G},\mathscr{G}^*)$ *et* $[H,A] \in C^\theta(A;\mathscr{G},\mathscr{G}^*)$.
On note $C^{1+\theta}(A;\mathscr{H}) := C^{1+\theta}(A;\mathscr{H},\mathscr{H})$.

Supposons dès maintenant que H est un opérateur auto-adjoint sur $\mathscr{H}$ et que $\mathscr{G}$ est le domaine de sa forme (c'est-à-dire $\mathscr{G} = D(|H|^{1/2})$. Alors $H \in \mathscr{B}(\mathscr{G},\mathscr{G}^*)$ et pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, borélienne et bornée, $f(H)$ est un opérateur auto-adjoint borné sur $\mathscr{H}$ et, de plus, $f(H) \in \mathscr{B}(\mathscr{G}) \cap \mathscr{B}(\mathscr{G}^*)$.

Définition 2.6. *Si* $H \in C^1(A;\mathscr{G},\mathscr{G}^*)$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$, *on dit que A est conjugué à H en λ s'il existe* $a > 0$, $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ *réelle,* $f(\lambda) \neq 0$ *et* $K \in \mathscr{K}(\mathscr{G},\mathscr{G}^*)$ *symétrique tels que l'on vérifie l'inégalité de Mourre*

$$f(H)i[H,A]f(H) \ge af(H)^2 + K, \tag{2.3}$$

au sens des opérateurs de $\mathscr{B}(\mathscr{G},\mathscr{G}^*)$.

Remarque 2.7. L'ensemble $\mu^A(H) := \{\lambda \in \mathbb{R}; A$ est conjugué à H en $\lambda\}$ est ouvert. En utilisant le théorème 2.4, on voit que $\mu^A(H) \cap \sigma_p(H)$ est un sous-ensemble discret de $\mu^A(H)$ dont les éléments sont des valeurs propres de multiplicité finie de H.

On note $\mathscr{E} := (\mathscr{G}^*, D(A;\mathscr{G}^*))_{(1/2),1}$, l'espace de Banach obtenu par interpolation réelle ([3], [2]). On a $D(A,\mathscr{G}^*) \subset \mathscr{E} \subset \mathscr{G}^*$ continûment et densément, donc $\mathscr{G} \subset \mathscr{E}^*$ continûment (mais pas forcément densément). Par conséquent on a un plongement continu $\mathscr{B}(\mathscr{G}^*, \mathscr{G}) \subset \mathscr{B}(\mathscr{E}, \mathscr{E}^*)$. On peut donc considérer les fonctions holomorphes $\mathbf{C}^{\pm} \ni \lambda \mapsto (H-\lambda)^{-1} \in \mathscr{B}(\mathscr{E}, \mathscr{E}^*)$.

Théorème 2.8. (voir le théorème 3.1 de [5]). *Supposons que H est un opérateur auto-adjoint sur $\mathscr{H}$, de classe $C^{1+\theta}(A; \mathscr{G}, \mathscr{G}^*)$, où $\mathscr{G} = D(|H|^{1/2})$ et $\theta \in (0,1]$. Alors les fonctions holomorphes $\mathbf{C}^{\pm} \ni \lambda \mapsto (H-\lambda)^{-1} \in \mathscr{B}(\mathscr{E}, \mathscr{E}^*)$ admettent des extensions continues pour la topologie faible à $\mathbf{C}^{\pm} \cup [\mu^A(H) \backslash \sigma_p(H)]$.*

En particulier, $\sigma_{sc}(H) \cap \mu^A(H) = \varnothing$.

§ 3. Propriétés Générales

Dans cette section on considère l'opérateur $H = H(\rho, V)$ défini par (1.2) et (1.3), sous les hypothèses I, II et III-(i) et on établit certaines propriétés qui le relie aux opérateurs H_Y, $Y \in \mathscr{L}_1$.

Lemme 3.1. *Soient $\varphi \in C^1(X)$ telle que $\nabla\varphi$ soit borné et $\lambda \in \mathbf{C} \backslash \sigma(H)$. Il existe alors un opérateur $T = T(\varphi, \lambda) \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^{-1}(X), \mathscr{H}^1(X))$ qui vérifie*

$$\varphi(H-\lambda)^{-1} f = (H-\lambda)^{-1}(\varphi f) + Tf \tag{3.1}$$

lorsque f et φf appartiennent à $\mathscr{H}^{-1}(X)$. De plus, $T \in \mathscr{K}(\mathscr{H}^{-1}(X), \mathscr{H}^1(X))$ si $\lim_{|x|\to\infty} |\nabla\varphi(x)| = 0$.

Démonstration. A partir de la forme quadratique définissant H, en le considérant comme opérateur de $\mathscr{B}(\mathscr{H}^1(X), \mathscr{H}^{-1}(X))$, on prouve que pour tout $u \in \mathscr{H}^1(X)$ et tout $\psi \in C_0^1(X)$,

$$H(\psi u) = \psi H u - \rho \nabla\psi . \nabla u + \nabla^*(\rho u \nabla\psi). \tag{3.2}$$

On choisit $\psi \in C_0^\infty(X)$ telle que $\psi(x) = 1$ si $|x| \leq 1$ et pour $k \geq 1$ on pose $\psi_k(x) := \psi(x/k), x \in X$. Si f a les propriétés de l'énoncé et $u := (H-\lambda)^{-1} f$, on a, d'après (3.2), $(H-\lambda)(\psi_k \varphi u) = g_k$, où $g_k := \psi_k \varphi f - \rho \nabla(\psi_k \varphi). \nabla u + \nabla^*(\rho u \nabla(\psi_k \varphi)) \in \mathscr{H}^{-1}(X)$.

Pour tout $v \in L^2(X)$, $\lim\limits_{k\to\infty} \psi_k v = v$ dans $L^2(X)$. Puisqu'il existe une constante $C > 0$ telle que $|\varphi(x)| \leq C\langle x \rangle$ pour tout $x \in X$, on a aussi $\lim_{k\to\infty} |\nabla\varphi_k| \varphi v = 0$ dans $L^2(X)$. On en déduit que $\lim_{k\to\infty} g_k = \varphi f - \rho \nabla\varphi . \nabla u + \nabla^*(\rho u \nabla\varphi) =: g$ dans $\mathscr{H}^{-1}(X)$, donc $\varphi u = (H-\lambda)^{-1} g \in \mathscr{H}^1(X)$.

Pour conclure, il suffit de choisir

$$\begin{aligned} T(\varphi, \lambda) := & -[(H-\lambda)^{-1} \rho(\nabla\varphi)].[\nabla(H-\lambda)^{-1}] \\ & + (H-\lambda)^{-1} \nabla^*[(\rho\nabla\varphi)(H-\lambda)^{-1}]. \end{aligned} \tag{3.3}$$

La dernière propriété résulte du fait que l'opérateur de multiplication par une fonction $\psi \in C(X)$ est compact de $\mathscr{H}^1(X)$ dans $L^2(X)$ et de $L^2(X)$ dans $\mathscr{H}^{-1}(X)$ lorsque $\lim_{|x|\to\infty} \varphi(x) = 0$. Q.E.D.

Lemme 3.2. *Soient $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $\varphi \in C^1(X)$ telle que $\nabla\varphi$ soit borné. Alors $f(H) \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^{-1}(X), \mathscr{H}^1(X))$ et il existe un opérateur $T = T(f,\varphi) \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^{-1}(X), \mathscr{H}^1(X))$ tel que pour tout $u \in \mathscr{H}^{-1}(X)$ vérifiant $\varphi u \in \mathscr{H}^{-1}(X)$ on ait*

$$\varphi f(H)u = f(H)(\varphi u) + Tu. \tag{3.4}$$

De plus, si $\lim_{|x|\to\infty} |\nabla\varphi(x)| = 0$, alors $T \in \mathscr{K}(\mathscr{H}^{-1}(X), \mathscr{H}^1(X))$.

Démonstration. D'après le théorème 6.1.4 de [2], pour tout $r \geq 2$ on a dans $\mathscr{B}(L^2(X))$

$$\begin{aligned} f(H) = &\sum_{0\leq j\leq r-1} \frac{1}{\pi j!}\int f^{(j)}(\lambda)\, Im[i^j(H-\lambda-i)^{-1}]d\lambda \\ &+ \frac{1}{\pi(r-1)!}\int_0^1 \tau^{r-1}\left\{\int f^{(r)}(\lambda)\, Im[i^r(H-\lambda-i\tau)^{-1}]d\lambda\right\}d\tau, \end{aligned} \tag{3.5}$$

où $i = \sqrt{-1}$ et, pour $B \in \mathscr{B}(L^2(X))$, on pose $ImB := (2i)^{-1}(B - B^*)$. D'après le lemme 3.1 et la relation (3.3), on aura $\varphi(H-\lambda-i\tau)^{-1}u = (H-\lambda-i\tau)^{-1}(\varphi u) + T(\varphi,\lambda,\tau)u$ pour tous $\lambda, \tau \in \mathbb{R}, 0 < |\tau| \leq 1$, où $T(\varphi,\lambda,\tau) := (H-\lambda-i\tau)^{-1} K_\varphi(H-\lambda-i\tau)^{-1}$, avec $K_\varphi v := -\rho\nabla\varphi.\nabla v + \nabla^*(\rho v\nabla\varphi)$ si $v \in \mathscr{H}^1(X)$. On voit que l'opérateur K_φ est borné (et même compact si $\lim_{|x|\to\infty}|\nabla\varphi(x)| = 0$) de $\mathscr{H}^1(X)$ dans $\mathscr{H}^{-1}(X)$.

On vérifie aussi qu'il existe une constante $C_0 > 0$ telle que $\|(H-\lambda-i\tau)^{-1})\|_{\mathscr{B}(\mathscr{H}^{-1}(X),\mathscr{H}^1(X))} \leq C_0|\tau|^{-1}(1+\lambda^2)^{1/2}$ si $\lambda, \tau \in \mathbb{R}$ et $0 < |\tau| \leq 1$. On en déduit qu'il existe une autre constante $C > 0$ telle que, pour les mêmes valeurs de λ et de τ, l'opérateur $T(\varphi,\lambda,\tau)$ soit borné (et même compact si $\lim_{|x|\to\infty}|\nabla\varphi(x)| = 0$) de $\mathscr{H}^{-1}(X)$ dans $\mathscr{H}^1(X)$ et que $\|T(\varphi,\lambda,\tau)\|_{\mathscr{B}(\mathscr{H}^{-1}(X),\mathscr{H}^1(X))} \leq C|\tau|^{-2}(1+\lambda^2)$.

Les propriétés de l'énoncé résultent alors de (3.5). Q.E.D.

Nous rappelons maintenant la définition d'une partition de l'unité de Ruelle-Simon suivant [1]. Pour tout $Y \in \mathscr{L}$, on désigne par π_Y la projection orthogonale de X sur Y. Si $x \in X$ et $Y \in \mathscr{L}_1$ on définit

$$[x]_Y := \min_{Z\in\mathscr{L}\setminus\mathscr{L}(Y)} |\pi_Z x| = dist\left(x, \bigcup_{Z\in\mathscr{L}\setminus\mathscr{L}(Y)} Z^\perp\right).$$

Remarquons que $\{x \in Y^\perp; [x]_Y \neq 0\} = Y^\perp \setminus \bigcup_{Z\in\mathscr{L}\setminus\mathscr{L}(Y)} Z^\perp$ est un cône ouvert de $Y^\perp$ et dense.

Pour tout $d \in [0,1]$ et tout $Y \in \mathscr{L}_1$ on note $\Gamma_Y(d) := \{x \in X; [x]_Y > d|x|\}$.

Lemme 3.3. (a) *$\Gamma_Y(d)$ est un cône ouvert dans X.*

(b) *Si $0 \le d_1 < d_2 < 1$, alors $\Gamma_Y(d_2) \subset \Gamma_Y(d_1)$.*

(c) $\Gamma_Y(0) = \bigcup\limits_{0 \le d < 1} \Gamma_Y(d)$.

(d) *Si $d \ge 0$ est assez petit, on a $X \backslash \{0\} = \bigcup\limits_{Y \in \mathscr{L}_1} \Gamma_Y(d)$.*

(e) *Si M est un cône fermé de X, tel que $M \backslash \{0\} \subset \Gamma_Y(0)$, il existe une constante $C > 0$ telle que $|x| \le C|\pi_Z x|$ pour tout $x \in M$ et tout $Z \in \mathscr{L} \backslash \mathscr{L}(Y)$.*

(f) *Si K est un compact de $X, Y \in \mathscr{L}_1$ et Γ est un cône fermé de $Y^\perp$, $\Gamma \backslash \{0\} \subset Y^\perp \backslash \bigcup_{Z \in \mathscr{L} \backslash \mathscr{L}(Y)} Z$, alors il existe des constantes $C > 0$ et $d \in (0,1)$ telles que pour tout $y \in \Gamma$, qui vérifie $|y| > C$, on ait $K + \{y\} \subset \Gamma_Y(d)$.*

Démonstration. Les propriétés (a)–(e) résultent des lemmes 2.2.2 et 2.2.3 de [1] et (f) du lemme 5.7 de [13]. Q.E.D.

Définition 3.4. *On appelle $\mathscr{L}$-partition de l'unité sur X, une famille $\{\chi_Y\}_{Y \in \mathscr{L}_1}$ telle que:*

(a) $\chi_Y \in C^\infty(X, \mathbb{R})$,

(b) $\operatorname{supp} \chi_Y \cap \{x \in X; |x| \ge 1\} \subset \Gamma_Y(0)$,

(c) *$\chi_Y(x) = \chi_Y(x/|x|)$ pour tout $x \in X$ avec $|x| \ge 1$,*

(d) *$\sum\limits_{Y \in \mathscr{L}_1} \chi_Y^2 = 1$ sur X.*

Remarque 3.5. (a) L'existence d'une $\mathscr{L}$-partition de l'unité sur X résulte du lemme 2.2.5 de [1].

(b) D'après le lemme 3.3 (e), il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $Y \in \mathscr{L}_1$ et $Z \in \mathscr{L} \backslash \mathscr{L}(Y)$ on ait

$$\langle x \rangle \le C \langle \pi_Z x \rangle \quad \text{pour tout } x \in \operatorname{supp} \chi_Y. \tag{3.6}$$

(c) D'après le lemme 2.5. 2 (b) de [1] et l'hypothèse III-(i), pour tout $Y \in \mathscr{L}_1$, $\chi_Y I_Y \in \mathscr{K}(\mathscr{H}^1(X), \mathscr{H}^{-1}(X))$.

Lemme 3.6. *Pour tous $Y \in \mathscr{L}_1$ et $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \sigma(H)$ on a*

$$\chi_Y[(H-\lambda)^{-1} - (H_Y - \lambda)^{-1}] \in \mathscr{K}(\mathscr{H}^{-1}(X), L^2(X)) \tag{3.7}$$

et

$$[(H-\lambda)^{-1} - (H_Y - \lambda)^{-1}]\chi_Y \in \mathscr{K}(\mathscr{H}^{-1}(X), L^2(X)). \tag{3.7'}$$

Démonstration. Désignons par $R_Y \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^{-1}(X), \mathscr{H}^1(X))$ l'opérateur défini par le côté gauche de (3.7). D'après le lemme 2.5.1 de [1], I_Y appartient à $\mathscr{B}(\mathscr{H}^1(X), \mathscr{H}^{-1}(X))$ et alors on a $R_Y = R'_Y + R''_Y$, où $R'_Y := \chi_Y(H-\lambda)^{-1} \cdot M_Y(H_Y-\lambda)^{-1}$ avec $M_Y := -\nabla^*(\rho - \rho_Y)\nabla \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^1(X), \mathscr{H}^{-1}(X))$ et $R''_Y := -\chi_Y(H-\lambda)^{-1} I_Y (H_Y-\lambda)^{-1}$. D'après l'hypothèse II et la remarque 3.5 (b),

$\langle . \rangle^{\theta} \chi_Y M_Y \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^1(X), \mathscr{H}^{-1}(X))$, donc, en utilisant le lemme 3.1, $\langle . \rangle^{\theta} R'_Y \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^{-1}(X), \mathscr{H}^1(X))$ et alors $R'_Y \in \mathscr{K}(\mathscr{H}^{-1}(X), L^2(X))$.

D'autre part, d'après la remarque 3.5 (c) et le même lemme 3.1, on a $R''_Y \in \mathscr{K}(\mathscr{H}^{-1}(X), \mathscr{H}^1(X))$, d'où l'on déduit (3.7). On prouve de la même façon (3.7′). Q.E.D.

Lemme 3.7. *Pour tous* $Y \in \mathscr{L}_1$ *et* $f \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ *on a*

$$\chi_Y[f(H) - f(H_Y)] \in \mathscr{K}(\mathscr{H}^{-1}(X), L^2(X)) \tag{3.8}$$

et

$$[f(H) - f(H_Y)]\chi_Y \in \mathscr{K}(\mathscr{H}^{-1}(X), L^2(X)). \tag{3.8'}$$

Démonstration. On peut représenter l'opérateur défini par le côté gauche de (3.8) en utilisant (3.5) et alors, d'après le lemme 3.6, tout revient à estimer la norme de l'opérateur

$$\begin{aligned} S_Y(\lambda, \tau) &:= \varphi[(H - \lambda - i\tau)^{-1} - (H_Y - \lambda - i\tau)^{-1}] \\ &= [(H - \lambda - i\tau)^{-1} \varphi Q_Y + T_Y(\lambda, \tau) Q_Y](H_Y - \lambda - i\tau)^{-1} \end{aligned} \tag{3.9}$$

en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\tau \in (0, 1]$, où $\varphi := \langle . \rangle^{\theta} \chi_Y$, $Q_Y := -\nabla^*(\rho - \rho_Y)\nabla - I_Y$ et $T_Y(\lambda, \tau) := (H - \lambda - i\tau)^{-1} K_{\varphi}(H - \lambda - i\tau)^{-1}$, tandis que K_{φ} a été défini au courant de la démonstration du lemme 3.2. On aura donc $\|S_Y(\lambda, \tau)\|_{\mathscr{B}(\mathscr{H}^{-1}(X), \mathscr{H}^1(X))} \leq C|\tau|^{-3}(1 + \lambda^2)^{3/2}$ avec C constante positive. Il en résulte (3.8). Pour vérifier (3.8′) on utilise un raisonnement similaire. Q.E.D.

Proposition 3.8. *Pour tout* $f \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ *on a*

$$f(H)^2 - \sum_{Y \in \mathscr{L}_1} \chi_Y f(H_Y)^2 \chi_Y \in \mathscr{K}(\mathscr{H}^{-1}(X), \mathscr{H}^1(X)). \tag{3.10}$$

Démonstration. Il suffit de remarquer l'identité

$$\begin{aligned} f(H)^2 &= \sum\nolimits_{Y \in \mathscr{L}_1} f(H) \chi_Y^2 f(H) \\ &= \sum\nolimits_{Y \in \mathscr{L}_1} \{\chi_Y f(H_Y)^2 \chi_Y + [f(H), \chi_Y]\chi_Y f(H) + \chi_Y f(H)[\chi_Y, f(H)] \\ &\qquad + \chi_Y[f(H) - f(H_Y)]f(H)\chi_Y + \chi_Y f(H_Y)(f(H) - f(H_Y)]\chi_Y\}, \end{aligned}$$

utiliser les lemmes 3.2 et 3.7, et noter que, par dualité, l'opérateur défini par le côté gauche de (3.8) appartient à $\mathscr{K}(L^2(X), \mathscr{H}^1(X))$. Q.E.D.

Démonstration des propriétés (a) *et* (c) *du théorème* 1.2

(a) Prouvons d'abord l'inclusion $\sigma_{ess}(H) \subset \bigcup_{Y \in \mathscr{L}_1} \sigma_{ess}(H_Y)$. Si $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu \notin \bigcup_{Y \in \mathscr{L}_1} \sigma_{ess}(H_Y)$ et $f \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$, $f(\mu) \neq 0$, $\operatorname{supp} f \cap \left[\bigcup_{Y \in \mathscr{L}_1} \sigma_{ess}(H_Y)\right] = \varnothing$, alors

$f(H_Y) \in \mathscr{K}(L^2(X))$ pour tout $Y \in \mathscr{L}_1$. D'après (3.10), $f(H) \in \mathscr{K}(L^2(X))$, donc $\mu \notin \sigma_{ess}(H)$.

Pour l'inclusion réciproque on utilise la variante suivante du critère de Weyl: $\mu \in \sigma_{ess}(H)$ si et seulement s'il existe une suite $\{u_j\}_{j\geq 1} \subset \mathscr{H}^1(X)$, $\|u_j\| = 1$ telle qu'elle converge faiblement vers zéro dans $L^2(X)$ et $\lim_{j\to\infty}(H-\mu)u_j = 0$ dans $\mathscr{H}^{-1}(X)$. Soit alors $Y \in \mathscr{L}_1$ et $\mu \in \sigma_{ess}(H_Y)$; étant donné que $C_0^\infty(X)$ est dense dans $\mathscr{H}^1(X)$, on peut trouver une suite $\{u_j\}_{j\geq 1} \subset C_0^\infty(X)$ qui ait les propriétés ci-dessus relativement à H_Y. Cette suite sera bornée dans $\mathscr{H}^1(X)$ car, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma(H)$, $u_j = (H-\lambda)^{-1}(H-\mu)u_j - (\lambda-\mu)(H-\lambda)^{-1}u_j$.

D'après le lemme 3.3 (f), il existe une suite $\{x^j\}_{j\geq 1} \subset Y^\perp$ et $d \in (0,1)$ tels que pour tout $j \geq 1$, $\operatorname{supp} u_j + \{x^j\} \subset \Gamma_Y(d) \cap \{x \in X; |x| \geq j\}$. Désignons par T_j l'opérateur de translation sur $L^2(X)$ de vecteur x^j et posons $v_j := T_j u_j$.

Alors $v_j \in C_0^\infty(X)$, $\|v_j\|_{L^2(X)} = 1$ et $\operatorname{supp} v_j \subset \Gamma_Y(d) \cap \{x \in X; |x| \geq j\}$, donc, en particulier, $\lim_{j\to\infty} v_j = 0$ pour la topologie faible de $L^2(X)$. La suite $\{v_j\}_{j\geq 1}$ est bornée dans $\mathscr{H}^1(X)$ et $\operatorname{supp} v_j \subset \{x \in X.\ |x| \geq j\}$, donc $\lim_{j\to\infty} v_j = 0$ pour la topologie faible de $\mathscr{H}^1(X)$. Il reste à prouver que $\lim_{j\to\infty}(H-\mu)v_j = 0$ dans $\mathscr{H}^{-1}(X)$. On note que $(H-\mu)v_j = T_j(H_Y-\mu)u_j + (H-H_Y)v_j$, où le premier terme du côté droit tend vers zéro dans $\mathscr{H}^{-1}(X)$ si $j \to \infty$ et $H - H_Y = \nabla^*(\rho-\rho_Y)\nabla + I_Y$.

Soit une fonction χ possédant les propriétés (a), (b), (c) de la définition 3.4 et telle que $\chi = 1$ sur $\Gamma_Y(d) \cap \{x \in X; |x| \geq 1\}$. Alors $I_Y v_j = \chi I_Y v_j$ et d'après la remarque 3.5 (c), $\lim_{j\to\infty} I_Y v_j = 0$ dans $\mathscr{H}^{-1}(X)$. Finalement,

$$\|\nabla^*(\rho-\rho_Y)\nabla v_j\|_{\mathscr{H}^{-1}(X)} = \sup_{\varphi \in C_0^\infty(X), \varphi \neq 0} \|\varphi\|^{-1}_{\mathscr{H}^1(X)} \left| \int_X \chi(\rho-\rho_Y)\nabla v_j.\nabla\bar{\varphi}dx \right|$$

et par l'hypothèse II et la remarque 3.5 (b), il existe une constante $C > 0$ telle que sur $\operatorname{supp} v_j$ l'on vérifie $|\chi(\rho-\rho_Y)(x)| \leq C\langle x\rangle^{-\theta} \leq Cj^{-\theta}$ pour tous $x \in X$ et $j \geq 1$. Alors $\lim_{j\to\infty} \nabla^*(\rho-\rho_Y)\nabla v_j = 0$ dans $\mathscr{H}^{-1}(X)$.

(c) C'est évident, car $H(\rho,0) \geq 0$ et alors $\sigma_{ess}(H(\rho,0)) \subset \sigma(H(\rho,0)) \subset [0,\infty) = \sigma_{ess}(H(\rho_0,0)) \subset \sigma_{ess}(H(\rho,0))$, où pour la dernière inclusion on utilise (a). Q.E.D.

§ 4. L'Opérateur Conjugué

Dans cette section on suppose que toutes les hypothèses I–IV sont vérifiées.

Soit d'abord $Z \in \mathscr{L}_m$. On choisit $\psi \in C_0^\infty(Z)$ fonction réelle, positive, paire (donc sa transformée de Fourier $\hat{\psi}$ sera elle aussi réelle), telle que $\hat{\psi}$ soit positive, $\hat{\psi}(0) = 1$ et $\operatorname{supp}\psi \subset \{z \in Z; |z| \leq 1\}$. Pour la construire, on considère une autre fonction $\psi_0 \in C_0^\infty(Z)$ réelle, positive, paire, telle que $\hat{\psi}_0(0) = 1$ et

$\operatorname{supp}\psi_0 \subset \{z \in Z; |z| \leq 1/2\}$ et on définit $\psi := \psi_0 * \psi_0$, où $*$ désigne l'opération de convolution. Pour $\varepsilon \in (0,1]$ (qui sera précisé ultérieurement en fonction de l'intervalle spectral considéré) on définit une nouvelle fonction $\psi_\varepsilon \in C_0^\infty(Z)$ par $\psi_\varepsilon(z) := \varepsilon^{-dim Z}\psi(z/\varepsilon)$.

On introduit l'opérateur $R = R^Z : \mathscr{D}'(Z) \to \mathscr{D}'(Z)$ défini par

$$Ru := -i(z.\nabla_z)u, \quad u \in \mathscr{D}'(Z), \tag{4.1}$$

où ∇_z désigne l'opérateur gradient dans Z et soit R^* l'adjoint formel de R. On peut maintenant définir l'opérateur $A^Z = A_\varepsilon^Z : \mathscr{D}'(Z) \to \mathscr{E}(Z)$, linéaire et continu, par

$$\begin{aligned} A^Z u &:= \frac{1}{2}[R(\psi_\varepsilon * u) + \psi_\varepsilon * (R^*u)] \\ &= R(\psi_\varepsilon * u) - \frac{1}{2}(R\psi_\varepsilon) * u, \quad u \in \mathscr{D}'(Z). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Remarque 4.1. On voit que pour tout $u \in \mathscr{D}'(Z)$, $\lim_{\varepsilon \searrow 0} A_\varepsilon^Z u = \frac{1}{2}(Ru + R^*u)$ dans $\mathscr{D}'(Z)$, où $\frac{1}{2}(R + R^*)$, considéré en tant qu'opérateur auto-adjoint sur $L^2(Z)$, de domaine essentiel $C_0^\infty(Z)$, est le générateur des dilatations sur Z.

Remarque 4.2. On peut aussi bien considérer R comme un opérateur sur $\mathscr{D}'(Z; Z \otimes \mathbb{C})$ et $A^Z : \mathscr{D}'(Z; Z \otimes \mathbb{C}) \to \mathscr{E}(Z; Z \otimes \mathbb{C})$.

Lemme 4.3. (a) *Pour tout $u \in \mathscr{D}'(Z)$, $\operatorname{supp} A^Z u \subset \{z \in Z; dist(z, supp u) \leq \varepsilon\}$.*

(b) *Pour tout $u \in \mathscr{D}'(Z)$ on a $\nabla_z A^Z u = A^Z \nabla_z u + F^Z u$, où $F^Z : \mathscr{D}'(Z) \to \mathscr{E}(Z; Z \otimes \mathbb{C})$ est défini par*

$$F^Z u := -i\nabla_z(\psi_\varepsilon * u), \quad u \in \mathscr{D}'(Z). \tag{4.3}$$

(c) *L'espace $\mathscr{S}(Z)$ est invariant par rapport à l'opérateur A^Z.*

(d) *L'opérateur A^Z, de domaine $\mathscr{S}(Z)$, est essentiellement auto-adjoint sur $L^2(Z)$ (on désignera par le même symbole l'opérateur auto-adjoint correspondant).*

(e) *Pour tous $\tau, s \in \mathbb{R}$, les espaces $\mathscr{S}(Z)$ et $\mathscr{H}^s(Z)$ sont invariants par rapport à $e^{i\tau A^Z}$. De plus, pour tout $s \in \mathbb{R}$, il existe des constantes $M \geq 1$ et $\omega \geq 0$ telles que*

$$\|e^{i\tau A^Z}\|_{\mathscr{B}(\mathscr{H}^s(Z))} \leq Me^{\omega|\tau|}, \quad \tau \in \mathbb{R}. \tag{4.4}$$

(f) *Si $u \in L^2(Z)$ et $\langle z \rangle u \in L^2(Z)$, alors $u \in D(A^Z)$.*

Démonstration. Les propriétés (a), (b) et (c) résultent directement de la définition de A^Z, tandis que (d) et (e) du lemme 1.3 de [7].

Si u vérifie les hypothèses du (f), on peut trouver une suite $\{\varphi_j\}_{j\geq 1} \subset C_0^\infty(Z)$ telle que $\lim_{j\to\infty} \varphi_j = u$ et $\lim_{j\to\infty} \langle z \rangle \varphi_j = \langle z \rangle u$ dans $L^2(Z)$. On a aussi

$$A^Z v = \psi_\varepsilon * (R^* v) + \frac{1}{2}(R\psi_\varepsilon) * v, \quad v \in \mathscr{D}'(Z), \tag{4.5}$$

d'où l'on déduit que $\lim_{j\to\infty} A^Z \varphi_j = A^Z u$ dans $L^2(Z)$ et donc $u \in D(A^Z)$. Q.E.D.

Pour tout $Y \in \mathscr{L}\backslash\{0\}$ on définit les opérateurs $A^Y = A^Y_\varepsilon : \mathscr{D}'(Y) \to \mathscr{D}'(Y)$ (ou éventuellement $A^Y : \mathscr{D}'(Y; Y \otimes \mathbb{C}) \to \mathscr{D}'(Y; Y \otimes \mathbb{C})$) et $A_Y = A_{\varepsilon, Y} : \mathscr{D}'(X) \to \mathscr{D}'(X)$ (ou bien $A_Y : \mathscr{D}'(X; X \otimes \mathbb{C}) \to \mathscr{D}'(X; X \otimes \mathbb{C})$) par

$$A^Y := \sum_{Z \in \mathscr{L}_m(Y)} (A^Z \otimes 1_{Y \ominus Z}), \quad A_Y := A^Y \otimes 1_{Y^\perp}. \tag{4.6}$$

En particulier, on définit $A = A_\varepsilon := A^X = A_X$.

Lemme 4.4. (a) *Les espaces $\mathscr{E}'(X)$ et $\mathscr{S}(X)$ sont invariants par rapport à l'opérateur A.*

(b) *Pour tout $u \in \mathscr{D}'(X)$ on a $\nabla Au = A\nabla u + Fu$, où $F : \mathscr{D}'(X) \to \mathscr{D}'(X; X \otimes \mathbb{C})$ est défini par $F := \sum_{Z \in \mathscr{L}_m} F_Z$ avec $F_Z : \mathscr{D}'(X) \to \mathscr{D}'(X; X \otimes \mathbb{C})$,*

$$F_Z u := i_Z(F^Z \otimes 1_{Z^\perp})u, \quad u \in \mathscr{S}(X), \tag{4.7}$$

où i_Z est l'injection canonique de Z dans X (prolongée en tant qu'injection de $Z \otimes \mathbb{C}$ dans $X \otimes \mathbb{C}$).

(c) *L'opérateur A, de domaine $\mathscr{S}(X)$, est essentiellement auto-adjoint sur $L^2(X)$ (on désigne encore par A l'unique extension auto-adjointe de cet opérateur).*

(d) *Pour tous $\tau, s \in \mathbb{R}$, les espaces $\mathscr{S}(X)$ et $\mathscr{H}^s(X)$ sont invariants par rapport à $e^{i\tau A}$. De plus, pour tout $s \in \mathbb{R}$, il existe des constantes $M \geq 1$ et $\omega \geq 0$ telles que*

$$\|e^{i\tau A}\|_{\mathscr{B}(\mathscr{H}^s(X))} \leq M e^{\omega|\tau|}, \quad \tau \in \mathbb{R}. \tag{4.8}$$

(e) *Si $u \in L^2(X)$ et $\langle . \rangle u \in L^2(X)$, alors $u \in D(A)$.*

Démonstration. Les propriétés (a)–(c) et (e) résultent du lemme 4.3. La première partie du (d) résulte du lemme 1.3 de [7] et l'inégalité (4.8) de la proposition 3.2.2 de [2]. Q.E.D.

Pour étudier la régularité de H par rapport à A on aura besoin de quelques propriétés auxiliaires. Remarquons d'abord que, d'après le lemme 4.4 (d) et la section 4 de [4], pour tout $s \geq 0$, $(\mathscr{H}^s(X), L^2(X))$ est un couple de Friedrichs et que $\{e^{i\tau A}\}_{\tau \in \mathbb{R}}$ est un groupe unitaire dans ce couple.

Lemme 4.5. *Soient $\theta \in (0, 1]$, $s \geq 0$ et $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^s(X), \mathscr{H}^{-s}(X))$ symétrique, tels que $\langle . \rangle^\theta T \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^s(X), \mathscr{H}^{-s}(X))$. Alors T appartient à $C^\theta(A; \mathscr{H}^s(X), \mathscr{H}^{-s}(X))$.*

Démonstration. La démarche de la première partie de la preuve de la proposition 7.5.7 de [2] permet d'estimer la norme du commutateur $[e^{i\tau A}, T]$ dans $\mathscr{B}(\mathscr{H}^s(X), \mathscr{H}^{-s}(X))$ pour $\tau \in [0, \tau_0]$, $\tau_0 > 0$ assez petit. Plus exactement, d'après [2] et l'inégalité (4.8), pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe τ_0 assez petit, tel que l'on ait:

(a) $\sup_{0 \le \tau \le \tau_0} (\|(\tau A + 2i)^{-1}\|_{\mathscr{B}(\mathscr{H}^t(X))} + \|\tau A(\tau A + 2i)^{-1}\|_{\mathscr{B}(\mathscr{H}^t(X))}) < \infty$,

(b) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction définie par l'égalité $\sin \tau = \tau(\tau + i)^{-1} f(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, alors $\sup_{0 \le \tau \le \tau_0} \|f(\tau A)\|_{\mathscr{B}(\mathscr{H}^t(X))} < \infty$.

Remarquons aussi les propriétés suivantes:

(c) $A\langle . \rangle^{-1} \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^t(X))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$,

(d) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'opérateur $\tau A(\tau A + 2i)^{-1}(\tau\langle . \rangle + 1)(\tau\langle . \rangle)^{-1} = \tau A(\tau A + 2i)^{-1} + (\tau A + 2i)^{-1} A\langle . \rangle^{-1}$ est borné sur $\mathscr{H}^t(X)$, uniformément par rapport à $\tau \in (0, \tau_0]$,

(e) L'opérateur de multiplication par $(\tau\langle . \rangle)^{1-\theta}(\tau\langle . \rangle + 1)^{-1}$ est dans $\mathscr{B}(\mathscr{H}^t(X))$, uniformément par rapport à $\tau \in [0, \tau_0]$,

(f) Il existe une constante $C_0 > 0$ telle que la norme de l'opérateur $\tau\langle . \rangle(\tau\langle . \rangle + 1)^{-1} T$ dans $\mathscr{B}(\mathscr{H}^s(X), \mathscr{H}^{-s}(X))$ soit majorée par $C_0 \tau^\theta$ pour tout $\tau \in [0, \tau_0]$.

Pour finir la démonstration on écrit $[e^{i\tau A}, T] = (e^{i\tau A} - 1)T - T(e^{i\tau A} - 1)$ et $e^{i\tau A} - 1 = 2ie^{i\tau A/2} \sin \dfrac{\tau A}{2}$. D'après les propriétés (d) et (f), il existe une constante $C_1 > 0$ telle que $\|\tau A(\tau A + 2i)^{-1} T\|_{\mathscr{B}(\mathscr{H}^s(X), \mathscr{H}^{-s}(X))} \le C_1 \tau^\theta$ si $\tau \in [0, \tau_0]$. Utilisant aussi les propriétés (a) et (b), l'identité ci-dessus ainsi que (4.8), on déduit l'existence d'une autre constante $C_2 > 0$ telle que $\|(e^{i\tau A} - 1)T\|_{\mathscr{B}(\mathscr{H}^s(X), \mathscr{H}^{-s}(X))} \le C_2 \tau^\theta$ si $\tau \in [0, \tau_0]$. On a une estimation similaire pour le terme $T(e^{i\tau A} - 1)$, donc il existe une constante $C > 0$ telle que $\|[e^{i\tau A}, T]\|_{\mathscr{B}(\mathscr{H}^s(X), \mathscr{H}^{-s}(X))} \le C\tau^\theta$ pour $\tau \in [0, \tau_0]$, d'où $T \in C^\theta(A; \mathscr{H}^s(X), \mathscr{H}^{-s}(X))$. Q.E.D.

Lemme 4.6. *Soient $\theta \in (0, 1]$, $s \ge 0$, $Y \in \mathscr{L}$, $M \in C^\theta(A^Y; \mathscr{H}^s(Y), \mathscr{H}^{-s}(Y))$ et $N \in C^\theta(A^{Y^\perp}; L^2(Y^\perp))$. Alors l'opérateur $M \otimes N$ (bien défini de $\mathscr{S}(X)$ dans $\mathscr{S}'(X)$) appartient à $C^\theta(A; \mathscr{H}^s(X), \mathscr{H}^{-s}(X))$.*

Démonstration. D'après le lemme 2.5.1 de [1], pour tout $M \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^s(Y), \mathscr{H}^{-s}(Y))$ et tout $N \in \mathscr{B}(L^2(Y^\perp))$, on a $M \otimes N \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^s(X), \mathscr{H}^{-s}(X))$ et $\|M \otimes N\|_{\mathscr{B}(\mathscr{H}^s(X), \mathscr{H}^{-s}(X))} \le \|M\|_{\mathscr{B}(\mathscr{H}^s(Y), \mathscr{H}^{-s}(Y))} \|N\|_{\mathscr{B}(L^2(Y^\perp))}$.

Grâce à l'hypothèse IV, on a $e^{i\tau A} = e^{i\tau A^Y} \otimes e^{i\tau A^{Y^\perp}}$, donc $[e^{i\tau A}, M \otimes N] = [e^{i\tau A^Y}, M] \otimes e^{i\tau A^{Y^\perp}} N + M e^{i\tau A^Y} \otimes [e^{i\tau A^{Y^\perp}}, N]$. Il suffit d'utiliser les hypothèses et l'inégalité ci-dessus. Q.E.D.

Remarque 4.7. Pour tout $Y \in \mathscr{L}$, on identifie X et $Y \times Y^\perp$; on peut donc mettre tout $x \in X$ sous la forme $x = (y, y^\perp)$, avec $y \in Y$, $y^\perp \in Y^\perp$.

Lemme 4.8. *Soient $\phi \in L^\infty_{\ell oc}(X)$ et $\theta \in [-1,1]$ tels que $\langle . \rangle^{1+\theta}|\nabla\phi| \in L^\infty(X)$.*

(a) *Si $Y \in \mathscr{L}$, $f \in C_0^\infty(Y)$ et $T \in \mathscr{B}(L^2(X))$ est l'opérateur défini par*

$$Tu(x) = \int_Y f(y-\eta)u(\eta, y^\perp)d\eta, \quad u \in L^2(X), \ x = (y, y^\perp), \tag{4.9}$$

alors $\langle . \rangle^{1+\theta}[T,\phi]$ (qui est bien défini sur $C_0^\infty(X)$) admet une unique extension en tant qu'élément de $\mathscr{B}(L^2(X))$.

(b) *En particulier, $\langle . \rangle^{\theta}[A,\phi] \in \mathscr{B}(L^2(X))$.*

Démonstration. (a) On a pour tout $u \in C_0^\infty(X)$,

$$[T,\phi]u(x) = \int_Y [\phi(\eta, y^\perp) - \phi(y, y^\perp)]f(y-\eta)u(\eta, y^\perp)d\eta, \quad x = (y, y^\perp).$$

On note l'existence d'une constante $C_0 > 0$ telle que si y, $\eta \in Y$, $y - \eta \in \operatorname{supp} f$ et $y^\perp \in Y^\perp$, on ait $|\phi(\eta, y^\perp) - \phi(y, y^\perp)| \le C_0 \langle x \rangle^{-1-\theta}$, $x = (y, y^\perp)$. On en déduit une autre constante $C > 0$, telle que $\|\langle . \rangle^{1+\theta}[T,\phi]u\|_{L^2(X)} \le C\|u\|_{L^2(X)}$ pour tout $u \in C_0^\infty(X)$.

(b) résulte de (a) et de l'expression de A. Q.E.D.

Lemme 4.9. *Soit $\chi \in C^\infty(X)$ telle que $\chi(x) = \chi(x/|x|)$ pour tout $x \in X$ avec $|x| \ge 1$. Alors pour tout $s \in \mathbb{R}$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\tau \in [-1,1]$ on ait*

$$\|[e^{i\tau A}, \chi]\|_{\mathscr{B}(\mathscr{H}^s(X))} \le C|\tau|. \tag{4.10}$$

Démonstration. L'opérateur de multiplication avec χ est borné sur $\mathscr{H}^s(X)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$ et d'après le lemme 4.4 (d), $e^{i\tau A} \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^s(X))$ pour tous s, $\tau \in \mathbb{R}$; on a de plus (4.8). Alors $[e^{i\tau A}, \chi] \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^s(X))$ et par le lemme 4.8 (b) avec $\theta = 0$, $[A,\chi] \in \mathscr{B}(L^2(X))$; en fait, on vérifie facilement que $[A,\chi] \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^s(X))$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. On peut donc utiliser la relation 6.3.23 de [2] et écrire l'égalité

$$[e^{i\tau A}, \chi] = i\int_0^\tau e^{i\sigma A}[\chi, A]e^{i(\tau-\sigma)A}d\sigma$$

dans $\mathscr{B}(\mathscr{H}^s(X))$, d'où l'inégalité (4.10). Q.E.D.

Lemme 4.10. *Si $Y \in \mathscr{L}$ et $Z \in \mathscr{L}_m(Y)$, alors $\langle \pi_Y . \rangle^{\theta}[V_Y^S, A_Z] \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^1(X), \mathscr{H}^{-1}(X))$.*

Démonstration. Sur $C_0^\infty(X)$ on a l'égalité

$$\langle \pi_Y . \rangle^{\theta}[V_Y^S, A_Z] = \langle \pi_Y . \rangle^{1+\theta} V_Y^S \cdot \langle \pi_Y . \rangle^{-1} A_Z - \langle \pi_Y . \rangle^{\theta} A_Z \langle \pi_Y . \rangle^{-1-\theta} \langle \pi_Y . \rangle^{1+\theta} V_Y^S.$$

La propriété de l'énoncé est alors une conséquence des deux faits évidents suivants:

(a) D'après l'hypothèse III-(i) et le lemme 2.5.1 de [1], $\langle \pi_Y . \rangle^{1+\theta} V_Y^S \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^1(X), \mathscr{H}^{-1}(X))$.

(b) Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tels que $\alpha+\beta \leq -1$ et tout $s \in \mathbb{R}$, $\langle \pi_Y . \rangle^\alpha A_Z \langle \pi_Y . \rangle^\beta \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^s(X))$. Q.E.D.

Lemme 4.11. *Si $Y \in \mathscr{L}$ et $Z \in \mathscr{L}_m(Y)$, alors $\langle \pi_Y . \rangle^\theta [V_Y^L, A_Z] \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^1(X), \mathscr{H}^{-1}(X))$.*

Démonstration. Il suffit de considérer le cas $Y = X$; on note $V := V_X^L$.

(a) Prouvons d'abord que l'on peut supposer $V \in C^\infty(X)$. Soit $\chi \in C_0^\infty(X)$ réelle, $\chi \geq 0$, $\int_X \chi(x)dx = 1$ et posons $\chi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-\dim X}\chi(x/\varepsilon)$ pour $x \in X$, $0 < \varepsilon \leq 1$.

Si $V_\varepsilon := V * \chi_\varepsilon$, alors $V_\varepsilon \in C^\infty(X)$ est réelle et $\lim_{\varepsilon \to 0} V_\varepsilon = V$ dans $\mathscr{D}'(X)$.

Pour $u, v \in C_0^\infty(X)$ on a l'égalité

$$(\langle . \rangle^\theta V_\varepsilon u, v) = \int_X \chi_\varepsilon(z)(\langle . \rangle^\theta V, \langle . \rangle^{-\theta}\langle . + z\rangle^\theta u(. + z)\overline{v(. + z)})dz,$$

où l'on désigne par $(.,.)$ la forme sesquilinéaire sur $\mathscr{D}'(X) \times C_0^\infty(X)$, extension continue du produit scalaire sur $L^2(X)$. De l'hypothèse III-(iii) on déduit facilement l'existence d'une constante $C_1 > 0$ telle que l'on ait

$$\|\langle . \rangle^\theta V_\varepsilon\|_{\mathscr{B}(\mathscr{H}^1(X), \mathscr{H}^{-1}(X))} \leq C_1 \text{ pour tout } \varepsilon \in (0, 1]. \tag{4.11}$$

De la même façon on déduit l'existence d'une constante $C_2 > 0$ telle que l'on ait

$$\begin{aligned} &\|\langle . \rangle^{1+\theta}\xi . \nabla V_\varepsilon\|_{\mathscr{B}(\mathscr{H}^1(X), \mathscr{H}^{-1}(X))} \\ &\qquad \leq C_2 \text{ pour tous } \varepsilon \in (0, 1] \text{ et } \xi \in X,\ |\xi| \leq 1. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Supposons maintenant que l'on a prouvé le fait suivant:

$$\langle . \rangle^\theta [V_\varepsilon, A_Z] \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^1(X), \mathscr{H}^{-1}(X)) \text{ uniformément pour } \varepsilon \in (0, 1]. \tag{4.13}$$

Alors, pour tous $u, v \in C_0^\infty(X)$ on a $([A_Z, V_\varepsilon]u, v) = (V_\varepsilon u, A_Z v) - (A_Z u, V_\varepsilon v)$, donc $\lim_{\varepsilon \to 0}([A_Z, V_\varepsilon]u, v) = ([A_Z, V]u, v)$ et on aura $\langle . \rangle^\theta [V, A_Z] \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^1(X), \mathscr{H}^{-1}(X))$.

(b) Prouvons maintenant (4.13). En tenant compte de la forme de A_Z il suffit de prouver que

$$\langle . \rangle^{1+\theta}[T, V_\varepsilon] \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^1(X), \mathscr{H}^{-1}(X)) \tag{4.14}$$

uniformément pour $\varepsilon \in (0, 1]$, où $T : C_0^\infty(X) \to C_0^\infty(X)$ est un opérateur de la forme

$$Tu(x) = \int_Z f(z - \zeta)u(\zeta, z^\perp)d\zeta, \qquad u \in C_0^\infty(X), \tag{4.15}$$

avec $f \in C_0^\infty(Z)$ et $x = (z, z^\perp)$, $z \in Z$, $z^\perp \in Z^\perp$. Un calcul direct du commutateur $[T, V_\varepsilon]$, l'égalité $V_\varepsilon(z, z^\perp) - V_\varepsilon(\zeta, z^\perp) = (z-\zeta).\int_0^1 (\nabla_\zeta V_\varepsilon)(tz + (1-t)\zeta, z^\perp)dt$ et deux changements de variables prouvent que l'on a, pour tous $u, v \in C_0^\infty(X)$,

$$(4.16)\qquad (\langle .\rangle^{1+\theta}[T, V_\varepsilon]u, v)$$
$$= \int_0^1 \left\{ \int_Z \langle z\rangle f \langle z\rangle \left[\int_X \langle\tilde\zeta\rangle^{1+\theta} \frac{z}{\langle z\rangle} . \nabla_\zeta V_\varepsilon(\tilde\zeta)\tilde u(t, z, \tilde\zeta)\overline{\tilde v(t, z, \tilde\zeta)}d\tilde\zeta \right] dz \right\} dt$$

où $\tilde\zeta = (\zeta, z^\perp)$ avec $\zeta \in Z$, $z^\perp \in Z^\perp$, $\tilde u(t, z, \tilde\zeta) := u(\zeta - tz, z^\perp)$, $\tilde v(t, z, \tilde\zeta) := \langle\tilde\zeta\rangle^{-1-\theta} \cdot w(\zeta + (1-t)z, z^\perp)$, $w(x) := \langle x\rangle^{1+\theta}v(x)$. En utilisant (4.12), on en déduit facilement (4.14). Q.E.D.

Lemme 4.12. *Soient $Y \in \mathscr{L}$, $Z \in \mathscr{L}_m(Y)$, $\chi \in C^\infty(X)$ telle que $\chi\left(\frac{x}{|x|}\right) = \chi(x)$ pour tout $x \in X$, $|x| \geq 1$ et $\Phi^Y \in L^1_{\ell oc}(Y)$ telle que $\langle .\rangle\Phi^Y \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^1(Y), \mathscr{H}^{-1}(Y))$. Si $\Phi_Y := \Phi^Y \otimes 1_{Y^\perp} \in L^1_{\ell oc}(X)$, alors*
$\langle .\rangle[\chi, [A_Z, \Phi_Y]] \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^1(X), \mathscr{H}^{-1}(X))$.

Démonstration. Le commutateur ci-dessus est bien défini sur $C_0^\infty(X)$ et on voit qu'il suffit de prouver que $\langle .\rangle[\chi, A_Z\Phi_Y] \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^1(X), \mathscr{H}^{-1}(X))$.

En tenant compte de l'expression de A_Z, il suffit en fait de supposer $Y = X$ et de prouver que si $\Phi \in L^1_{\ell oc}(X)$, $\Phi \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^1(X), \mathscr{H}^{-1}(X))$ et $T : \mathscr{D}'(X) \to \mathscr{D}'(X)$ est un opérateur de la forme (4.15), alors $\langle .\rangle[\chi, T\Phi] \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^1(X), \mathscr{H}^{-1}(X))$.

Or, un calcul direct du commutateur, l'égalité $\chi(z, z^\perp) - \chi(\zeta, z^\perp) = (z-\zeta)\cdot \int_0^1 (\nabla_Z\chi)(tz + (1-t)\zeta, z^\perp)dt$ et un changement de variables, prouvent que si l'on désigne encore par $(.,.)$ l'extension sesquilinéaire à $\mathscr{D}'(X) \times C_0^\infty(X)$ du produit scalaire de $L^2(X)$ on a, pour tous $u, v \in C_0^\infty(X)$,

$$(\langle .\rangle[\chi, T\Phi]u, v) = \int_0^1 \left\{ \int_Z \langle z\rangle f(z) \left[\int_X \Phi(\zeta, z^\perp)(1 + |\zeta + z|^2 + |z^\perp|^2)^{1/2} \frac{z}{\langle z\rangle} \right.\right.$$
$$\left.\left. (\nabla_z\chi)(\zeta + tz, z^\perp)u(\zeta, z^\perp)\overline{v(z, z^\perp)}d\zeta dz^\perp \right] dz \right\} dt$$

et donc, en utilisant la propriété d'homogénéité de χ et le fait que $\operatorname{supp} f$ est un compact, on en déduit l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$|(\langle .\rangle[\chi, T\Phi]u, v)| \leq C\|u\|_{\mathscr{H}^1(X)}\|v\|_{\mathscr{H}^1(X)}, \qquad u, v \in C_0^\infty(X)$$

Q.E.D.

Lemme 4.13. *Soient $Y \in \mathscr{L}$, $Z \in \mathscr{L}_m(Y)$, $\chi \in C^\infty(X)$ telle que $\chi\left(\frac{x}{|x|}\right) = \chi(x)$ pour tout $x \in X$, $|x| \geq 1$ et $\Phi^Y \in L^1_{\ell oc}(Y)$, $\Phi^Y \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^1(Y), \mathscr{H}^{-1}(Y))$, tel* *que pour tout* $\eta \in Y$, $\langle . \rangle \eta . \nabla \Phi^Y \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^1(Y), \mathscr{H}^{-1}(Y))$ *uniformément pour* $|\eta| \leq 1$.

Si $\Phi_Y := \Phi^Y \otimes 1_{Y^\perp}$, *alors* $\langle . \rangle [\chi, [A_Z, \Phi_Y]] \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^1(X), \mathscr{H}^{-1}(X))$.

Démonstration. Le commutateur de l'énoncé étant bien défini sur $C_0^\infty(X)$, on voit (de la même manière que pour la preuve du lemme 4.11) que l'on peut supposer $Y = X$, $\Phi := \Phi_X = \Phi^X \in C^\infty(X)$, $\Phi \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^1(X), \mathscr{H}^{-1}(X))$, $\langle . \rangle \xi . \nabla \Phi \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^1(X), \mathscr{H}^{-1}(X))$ uniformément pour $\xi \in X$, $|\xi| \leq 1$ et prouver que si $T : \mathscr{D}'(X) \to \mathscr{D}'(X)$ est de la forme (4.15), alors $\langle \pi_Z . \rangle \langle . \rangle [\chi, [T, \Phi]] \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^1(X), \mathscr{H}^{-1}(X))$. Avec les notations de (4.16) (sauf pour $w(x) := \langle x \rangle \langle \pi_Z z \rangle v(x)$ et $\tilde{v}(t, z, \tilde{\zeta}) := \langle \tilde{\zeta} \rangle^{-1} w(\zeta + (1-t)z, z^\perp)$ et en utilisant l'égalité $\chi(z, z^\perp) - \chi(\zeta, z^\perp) = (z - \zeta) . \int_0^1 (\nabla_z \chi)(tz + (1-t)\zeta, z^\perp) dt$, on obtient que pour tous $u, v \in C_0^\infty(X)$ on a

$$(\langle \pi_Z . \rangle \langle . \rangle [\chi, [T, \Phi]] u, v) = \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \int_Z \langle z \rangle^2 f(z) \left[\int_X \langle \tilde{\zeta} \rangle \frac{z}{\langle z \rangle} . \nabla \zeta \Phi(\tilde{\zeta}) \right. \right.$$

$$\left. \left. \frac{z}{\langle z \rangle} \cdot (\nabla_z \chi)(\zeta + (s-t)z, z^\perp) \tilde{u}(t, z, \tilde{\zeta}) \overline{\tilde{v}(t, z, \tilde{\zeta})} d\tilde{\zeta} \right] dz \right\} ds dt.$$

En utilisant l'homogénéité de χ, ainsi que le fait que supp$f$ est un compact, on obtient l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$|(\langle \pi_Z . \rangle \langle . \rangle [\chi, [T, \Phi]] u, v)| \leq C \|u\|_{\mathscr{H}^1(X)} \|v\|_{\mathscr{H}^1(X)}, \quad u, v \in C_0^\infty(X).$$

Q.E.D.

§ 5. Régularité de H par Rapport à l'Opérateur Conjugué

Sous les hypothèses I–IV, l'opérateur conjugué A a été défini dans la section précédente. Si $H = H(\rho, V)$ est défini par (1.2) et (1.3), on peut considérer le commutateur $[H, A]$ défini en tant qu'application linéaire de $C_0^\infty(X)$ dans $\mathscr{D}'(X)$ par:

$$(5.1) \quad ([H, A]u, v) = \overline{(Hv, Au)} - (Hu, Av)$$

$$= \int_X \rho(\nabla Au . \overline{\nabla v} - \nabla u . \overline{\nabla Av}) dx + \int_X V[(Au)\bar{v} - u\overline{(Av)}] dx, \quad u, v \in C_0^\infty(X),$$

où l'on désigne, comme d'habitude, par $(.,.)$ l'extension en tant que forme sesquilinéaire sur $\mathscr{D}'(X) \times C_0^\infty(X)$ du produit scalaire sur $L^2(X)$.

La preuve de la régularité (au sens du § 2) de H par rapport à A (et aussi bien celle de l'inégalité de Mourre) repose sur un raisonnement par récurrence sur $Y \in \mathscr{L}$ qui nécessite une relation qui lie $[H, A]$ aux commutateurs $[H_Y, A]$ pour $Y \in \mathscr{L}_1$. Dans ce but on prouve d'abord deux lemmes.

Lemme 5.1. *Pour tous $u, v \in C_0^\infty(X)$ on a l'égalité*

$$
\begin{aligned}
(5.2) \qquad ([H,A]u,v) &= \int_X \rho(Fu.\overline{\nabla v} - \nabla u.\overline{Fv})dx \\
&+ \sum_{Z\in\mathscr{L}} \int_X \delta_Z[A_Z(\nabla u).\nabla\bar{v} - \nabla u.\overline{A_Z(\nabla v)}]dx \\
&+ \sum_{Z\in\mathscr{L}} \int_X V_Z[(A_Z u)\bar{v} - u\overline{(A_Z v)}]dx.
\end{aligned}
$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser (5.1), le lemme 4.4 (b), les égalités $\rho = \rho^0 + \sum_{Z\in\mathscr{L}} \delta_Z$, $V = \sum_{Z\in\mathscr{L}} V_Z$ et le fait que l'on a pour tout $Z \in \mathscr{L}$,

$$
(5.3) \quad \int_{Z^\perp} [A_{Z^\perp}(\nabla u).\nabla\bar{v} - \nabla u.\overline{A_{Z^\perp}(\nabla v)}]dz = 0, \quad \int_{Z^\perp} [(A_{Z^\perp}u)\bar{v} - u\overline{(A_{Z^\perp}v)}]dz = 0,
$$

car $A^{Z^\perp}$ est auto-adjoint sur $L^2(Z^\perp)$ et $C_0^\infty(Z^\perp) \subset D(A^{Z^\perp})$. Q.E.D.

Lemme 5.2. *Si $\Phi \in L^\infty_{\ell oc}(X)$ et $u, v \in C_0^\infty(X)$, alors pour tout $Z \in \mathscr{L}$ on a l'égalité*

$$
(5.4) \qquad \int_X \Phi[A_Z(\nabla u).\nabla\bar{v} - \nabla u.\overline{A_Z(\nabla v)}]dx = \int_X [\Phi, A_Z](\nabla u).\nabla\bar{v}dx,
$$

où le commutateur $[\Phi, A_Z]$ est défini de façon naturelle en tant qu'opérateur continu sur $L^2_{comp}(X; X \otimes \mathbb{C})$.

Démonstration. Il suffit d'utiliser les faits suivants: A_Z est auto-adjoint sur $L^2(X)$ et pour tout $f \in C_0^\infty(X)$, $\Phi f \in D(A_Z)$. Q.E.D.

Proposition 5.3. *Soient $\{\chi_Y\}_{Y\in\mathscr{L}_1}$ la partition de l'unité de la définition* 3.4 *et $\theta \in (0,1]$ des hypothèses* II *et* III. *Il existe alors un opérateur $S \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^1(X),$ $\mathscr{H}^{-1}(X))$ tel que $\langle . \rangle^\theta S \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^1(X),$ $\mathscr{H}^{-1}(X)$ et que l'on ait sur $C_0^\infty(X)$:*

$$
(5.5) \qquad [H,A] = \sum_{Y\in\mathscr{L}_1} \chi_Y[H_Y, A]\chi_Y + S.
$$

Démonstration. On utilise l'identité $\sum_{Y\in\mathscr{L}_1} \chi_Y^2 = 1$ sur X sous chacune des intégrales de (5.2). Au bout de quelques opérations de commutation des opérateurs de multiplication par χ_Y avec F, ∇, A_Z, en séparant les commutateurs $[H_Y, A]$ $(Y \in \mathscr{L}_1)$ définis par la même formule (5.2) avec ρ_Y à la place de ρ et les deux sommes sur $Z \in \mathscr{L}(Y)$, on voit que l'opérateur $S: C_0^\infty(X) \to \mathscr{D}'(X)$, qui vérifie (5.5), est de la forme

$$(5.6)\qquad (Su,v) := \sum_{Y\in\mathscr{L}_1}\sum_{j=1}^{3} E_Y^{(j)}(u,v) + \sum_{Y\in\mathscr{L}_1}\sum_{Z\in\mathscr{L}(Y)}\sum_{j=1}^{3} E_{Y,Z}^{(j)}(u,v)$$
$$+ \sum_{Y\in\mathscr{L}_1}\sum_{Z\in\mathscr{L}\setminus\mathscr{L}(Y)}\sum_{j=4}^{5} E_{Y,Z}^{(j)}(u,v),$$
$$E_Y^{(j)}(u,v) := I_Y^{(j)}(u,v) - \overline{I_Y^{(j)}(v,u)},\quad E_{Y,Z}^{(j)}(u,v) = I_{Y,Z}^{(j)}(u,v) - \overline{I_{Y,Z}^{(j)}(v,u)},$$
$$u,v\in C_0^\infty(X),$$

où les expressions $I_Y^{(j)}$, $I_{Y,Z}^{(j)}$ seront explicitées ci-dessous. Il suffit de prouver qu'il existe une constante $C>0$ telle que pour tous $f,g\in C_0^\infty(X)$ on ait

$$(5.7)\qquad |(Sf,\langle.\rangle^\theta g)| \le C\|f\|_{\mathscr{H}^1(X)}\|g\|_{\mathscr{H}^1(X)}.$$

On va utiliser la notation suivante: si $E_1(f,g)$ et $E_2(f,g)$ sont deux expressions dépendant de $f,g\in C_0^\infty(X)$, on écrira $E_1\sim E_2$ si $|E_1-E_2|$ peut être estimé par le terme du côté droit de (5.7).

i)
$$I_Y^{(1)}(u,v) = \int_X \chi_Y^2(\rho-\rho_Y)(Fu).\nabla\bar{v}dx,\qquad Y\in\mathscr{L}_1.$$

D'après l'hypothèse II et la remarque 3.5 (b), il existe une constante $C>0$ telle que $|\chi_Y^2(\rho-\rho_Y)(x)|\le C\langle x\rangle^{-\theta}$, $x\in X$, d'où l'on déduit facilement que $I_Y^{(1)}(f,\langle.\rangle^\theta g)\sim 0$. Si on regarde l'expression de F et le lemme 4.8 (a), on voit que $I_Y^{(1)}(\langle.\rangle^\theta f,g)\sim 0$, donc $E_Y^{(1)}(f,\langle.\rangle^\theta g)\sim 0$.

ii)
$$I_Y^{(2)}(u,v) = \int_X \rho_Y\chi_Y(Fu).\overline{([\chi_Y,\nabla]v)}dx,\qquad Y\in\mathscr{L}_1.$$

D'après la propriété d'homogénéité de χ_Y, il existe une constante $C>0$ telle que $|\nabla\chi_Y(x)|\le C\langle x\rangle^{-1}$ et puisque $\rho_Y\in L^\infty(X)$, nous aurons $I_Y^{(2)}(f,\langle.\rangle^\theta g)\sim 0$.

En utilisant encore une fois le lemme 4.8(a), on obtient aussi $I_Y^{(2)}(\langle.\rangle^\theta f,g)\sim 0$ et $E_Y^{(2)}(f,\langle.\rangle^\theta g)\sim 0$.

iii)
$$I_Y^{(3)}(u,v) = \int_X \rho_Y([\chi_Y,F]u).\overline{(\nabla(\chi_Y v))}dx,\qquad Y\in\mathscr{L}_1.$$

D'apprès le lemme 4.8 (a), $\langle.\rangle[\chi_Y,F]\in\mathscr{B}(L^2(X),L^2(X,X\otimes\mathbb{C}))$ et alors $I_Y^{(3)}(f,\langle.\rangle^\theta g)\sim 0$. Le même lemme 4.8 (a) et un argument de dualité montre que l'on a aussi $[\chi_Y,F]\langle.\rangle\in\mathscr{B}(L^2(X),\ L^2(X,X\otimes\mathbb{C}))$, donc $I_Y^{(3)}(\langle.\rangle^\theta f,g)\sim 0$ et aussi $E_Y^{(3)}(f,\langle.\rangle^\theta g)\sim 0$.

iv)
$$I_{Y,Z}^{(1)}(u,v) = \int_X \delta_Z\chi_Y(A_Z(\nabla u)).\overline{([\chi_Y,\nabla]v)}dx,\qquad Y\in\mathscr{L}_1,\ Z\in\mathscr{L}(Y).$$

Pour estimer $I^{(1)}_{Y,Z}(f, \langle . \rangle^{\theta} g)$, on utilise la propriété du $|\nabla \chi_Y|$ de (ii), l'hypothèse II et l'expression de A_Z; on arrive à une expression de la forme

$$\int_X \langle \pi_Z x \rangle^{1-\theta} \langle x \rangle^{\theta-1} (Mf) \overline{(Ng)} dx,$$

où $M \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^1(X), \ L^2(X))$, $N \in \mathscr{B}(L^2(X))$, donc $I^{(1)}_{Y,Z}(f, \langle . \rangle^{\theta} g) \sim 0$. Si on utilise de plus de lemme 4.8(a), on obtient de la même manière que $I^{(1)}_{Y,Z}(\langle . \rangle^{\theta} f, g) \sim 0$. Donc $E^{(1)}_{Y,Z}(f, \langle . \rangle^{\theta} g) \sim 0$.

v) $$I^{(2)}_{Y,Z}(u,v) = \int_X \delta_Z([\chi_Y, A_Z \nabla] u) . \overline{\nabla(\chi_Y v)} dx, \qquad Y \in \mathscr{L}_1, \ Z \in \mathscr{L}(Y).$$

En utilisant l'identité $[\chi_Y, A_Z \nabla] = [\chi_Y, A_Z] \nabla + A_Z [\chi_Y, \nabla]$ sur $C_0^\infty(X)$, on prouve que $I^{(2)}_{Y,Z}(f, \langle . \rangle^{\theta} g) \sim 0$ de la même manière qu'au point (iv). Si on tient compte du fait que dans l'énoncé du lemme 4.8 (a) on peut intervertir les deux facteurs $\langle . \rangle^{1+\theta}$ et $[T, \Phi]$ (raisonnement direct, ou par dualité) on s'aperçoit que l'on a aussi $I^{(2)}_{Y,Z}(\langle . \rangle^{\theta} f, g) \sim 0$ et alors $E^{(2)}_{Y,Z}(f, \langle . \rangle^{\theta} g) \sim 0$.

vi) $$E^{(3)}_{Y,Z}(u,v) = ([\chi_Y, [V_Z, A_Z]] u, \chi_Y v), \qquad Y \in \mathscr{L}_1, \ Z \in \mathscr{L}(Y).$$

Si on utilise l'hypothèse III et les lemmes 4.12 et 4.13, on obtient directement que $E^{(3)}_{Y,Z}(f, \langle . \rangle^{\theta} g) \sim 0$.

vii) $$I^{(4)}_{Y,Z}(u,v) = \int_X \chi_Y^2 \delta_Z (A_Z(\nabla u)) . \overline{(\nabla v)} dx, \qquad Y \in \mathscr{L}_1, \ Z \in \mathscr{L} \backslash \mathscr{L}(Y).$$

D'après le lemme 5.2,

$$E^{(4)}_{Y,Z}(u,v) := I^{(4)}_{Y,Z}(u,v) - \overline{I^{(4)}_{Y,Z}(u,v)} = \int_X \{[\chi_Y^2 \delta_Z, A_Z](\nabla u)\} . \overline{\nabla v} dx.$$

En tenant compte de l'hypothèse II et des propriétés du support de χ_Y (voir la remarque 3.5 (b)), il existe une constante $C > 0$ telle que l'on ait $|(\chi_Y^2 \delta_Z^S)(x)| \le C \langle x \rangle^{-1-\theta}$, $|(\chi_Y^2 \delta_Z^L)(x)| \le C \langle x \rangle^{-\theta}$ et $|\nabla(\chi_Y^2 \delta_Z^L)(x)| \le C \langle x \rangle^{-1-\theta}$ pour tout $x \in X$. Alors $\langle . \rangle^{\theta} [\chi_Y^2 \delta_Z^S, A_Z] = \langle . \rangle^{\theta} \chi_Y^2 \delta_Z^S A_Z - \langle . \rangle^{\theta} A_Z \chi_Y^2 \delta_Z^S \in \mathscr{B}(L^2(X))$ et d'après le lemme 4.8 (b), $\langle . \rangle^{\theta} [\chi_Y^2 \delta_Z^L, A_Z] \in \mathscr{B}(L^2(X))$, donc $\langle . \rangle^{\theta} [\chi_Y^2 \delta_Z, A_Z]$ appartient à $\mathscr{B}(L^2(X))$. Il en résulte que $E^{(4)}_{Y,Z}(f, \langle . \rangle^{\theta} g) \sim 0$.

viii) $$E^{(5)}_{Y,Z}(u,v) = (\chi_Y^2 [V_Z, A_Z] u, v), \qquad Y \in \mathscr{L}_1, \ Z \in \mathscr{L} \backslash \mathscr{L}(Y).$$

D'après les lemmes 4.10, 4.11 et les propriétés du support de χ_Y, on a $\langle . \rangle^{\theta} \chi_Y^2 [V_Z, A_Z] \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^1(X), \ \mathscr{H}^{-1}(X))$, donc $E^{(5)}_{Y,Z}(f, \langle . \rangle^{\theta} g) \sim 0$. Q.E.D.

On peut maintenant étudier la régularité de H par rapport à A.

Proposition 5.4 *Sous les hypothèses* I–IV, *H appartient à* $C^{1+\theta}(A; \mathscr{H}^1(X), \mathscr{H}^{-1}(X))$.

Démonstration. On procède par récurrence suivant le sous-espace $Y \in \mathscr{L}$. Plus exactement:

a) Si $Y = \{0\}$, par convention $L^2(Y) = \mathbb{C}$, $H^Y = V^0$, $A^Y = 0$ et il n'y a rien à prouver.

b) Supposons maintenant que pour un $Z \in \mathscr{L}$, on a prouvé que $H^Y \in C^{1+\theta}(A^Y; \mathscr{H}^1(Y), \mathscr{H}^{-1}(Y))$ pour tous $Y \in \mathscr{L}(Z)$, $Y \neq Z$. Il faudra vérifier que $H^Z \in C^{1+\theta}(A^Z; \mathscr{H}^1(Z), \mathscr{H}^{-1}(Z))$. On peut très bien admettre que $Z = X$.

c) Démontrons d'abord que si $Y \in \mathscr{L}_1$ et $H^Y \in C^{1+\theta}(A^Y; \mathscr{H}^1(Y), \mathscr{H}^{-1}(Y))$ alors $H_Y \in C^{1+\theta}(A; \mathscr{H}^1(X), \mathscr{H}^{-1}(X))$. Remarquons d'abord que si l'on compare les expressions de $[H_Y, A]$ et $[H^Y, A^Y]$ données par la formule (5.2) on obtient que pour tous $u, v \in C_0^\infty(X)$, on a

$$\begin{aligned}([H_Y, A]u, v) = {} & (\{[H^Y, A^Y] \otimes 1_{Y^\perp}\}u, v) \\ & + \int_X \rho_Y\{(F_{Y^\perp}u).\overline{(\nabla_{Y^\perp}v)} - (\nabla_{Y^\perp}u).\overline{(F_{Y^\perp}v)}\}dx \\ & + \sum_{Z \in \mathscr{L}(Y)} \int_X \delta_Z\{A_Z(\nabla_{Y^\perp}u).\overline{(\nabla_{Y^\perp}v)} - (\nabla_{Y^\perp}u).\overline{A_Z(\nabla_{Y^\perp}v)}\}dx,\end{aligned}$$

où $F_{Y^\perp} := 1_Y \otimes F^{Y^\perp}: \mathscr{D}'(X) \to \mathscr{D}'(X; X \otimes \mathbb{C})$ et $F^{Y^\perp}: \mathscr{D}'(Y^\perp) \to \mathscr{D}'(Y^\perp; Y^\perp \otimes \mathbb{C})$ est défini à partir de la famille $\mathscr{L}_m(Y^\perp)$ de la même façon que F (voir le lemme 4.4 (b)). Il en résulte que sur $C_0^\infty(X)$ on a la relation

$$(5.8) \qquad \begin{aligned}[H_Y, A] = {} & [H^Y, A^Y] \otimes 1_{Y^\perp} + 2\rho^Y \otimes \nabla^*_{Y^\perp} F^{Y^\perp} \\ & + \sum_{Z \in \mathscr{L}(Y)} [\delta^Z, A^Z] \otimes 1_{Y \ominus Z} \otimes \Delta_{Y^\perp}.\end{aligned}$$

En utilisant l'expression directe du commutateur $[\delta^{Z,S}, A^Z]$, ainsi que le lemme 4.8 (b) pour estimer $[\delta^{Z,L}, A^Z]$, on obtient que

$$(5.9) \qquad \langle . \rangle^\theta [\delta^Z, A^Z] \in \mathscr{B}(L^2(Z)).$$

D'autre part, $\Delta_{Y^\perp} \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^1(Y^\perp), \mathscr{H}^{-1}(Y^\perp))$, $\rho^Y \in \mathscr{B}(L^2(Y))$, $\nabla^*_{Y^\perp} F^{Y^\perp} \in \mathscr{B}(L^2(Y^\perp))$ et, par hypothèse, $[H^Y, A^Y] \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^1(Y), \mathscr{H}^{-1}(Y))$.

Il en résulte que $[H_Y, A] \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^1(X), \mathscr{H}^{-1}(X))$, donc $H_Y \in C^1(A; \mathscr{H}^1(X), \mathscr{H}^{-1}(X))$.

On a en fait, d'après l'hypothèse d'induction, que $[H^Y, A^Y] \in C^\theta(A; \mathscr{H}^1(Y), \mathscr{H}^{-1}(Y))$, donc, en utilisant le lemme 4.6, $[H^Y, A^Y] \otimes 1_{Y^\perp} \in C^\theta(A; \mathscr{H}^1(Y), \mathscr{H}^{-1}(Y))$.

D'autre part, d'après (5.9), $[\rho^Y, A^Y] = \sum_{Z \in \mathscr{L}(Y)} [\delta^Z, A^Z] \otimes 1_{Y \ominus Z} \in \mathscr{B}(L^2(Y))$, donc $\rho^Y \in C^1(A^Y; L^2(Y))$. De plus, on a

$$(5.10) \qquad \begin{aligned} \nabla^*_{Y^\perp} F^{Y^\perp} &= \sum_{Z \in \mathscr{L}_m(Y^\perp)} T_Z, \\ T_Z u(y^\perp) &= \int_Z f_Z(z' - \zeta) u(\zeta, z'') d\zeta, \quad u \in \mathscr{C}_0^\infty(Y^\perp),\end{aligned}$$

où $f_Z \in C_0^\infty(Z)$, $y^\perp = (z', z'')$, $z' \in Z$, $z'' \in Y^\perp \ominus Z$. Un calcul direct (ou bien une transformée de Fourier) montre que $[\nabla_{Y^\perp}^* F^{Y^\perp}, A^{Y^\perp}]$ est de la forme (5.10), donc ce commutateur est un opérateur borné sur $L^2(Y^\perp)$ et alors $\nabla_{Y^\perp}^* F^{Y^\perp} \in C^1(A^{Y^\perp}; L^2(Y^\perp))$.

On en déduit du lemme 4.6 que $\rho^Y \otimes \nabla_{Y^\perp}^* F^{Y^\perp} \in C^1(A; L^2(X))$.

Finalement, en utilisant (5.9) et le lemme 4.5, on aura $[\delta^Z, A^Z] \in C^\theta(A^Z; L^2(Z))$. D'autre part, d'après la formule (5.8), $[\Delta_{Y^\perp}, A^{Y^\perp}] = 2\nabla_{Y^\perp}^* F^{Y^\perp} \in \mathscr{B}(L^2(Y^\perp))$, donc $\Delta_{Y^\perp}$ appartient à $C^1(A^{Y^\perp}; \mathscr{H}^1(Y^\perp), \mathscr{H}^{-1}(Y^\perp))$.

Il résulte du lemme 4.6 que $[\delta^Z, A^Z] \otimes 1_{Y \ominus Z} \otimes \Delta_{Y^\perp} \in C^\theta(A; \mathscr{H}^1(X), \mathscr{H}^{-1}(X))$.

En conclusion, $[H_Y, A] \in C^\theta(A; \mathscr{H}^1(X), \mathscr{H}^{-1}(X))$, donc $H_Y \in C^{1+\theta}(A; \mathscr{H}^1(X), \mathscr{H}^{-1}(X))$.

(d) Pour vérifier que $H \in C^{1+\theta}(A; \mathscr{H}^1(X), \mathscr{H}^{-1}(X))$, on utilise maintenant la relation (5.5). On a évidemment $[H, A] \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^1(X), \mathscr{H}^{-1}(X))$ et donc $H \in C^1(A; \mathscr{H}^1(X), \mathscr{H}^{-1}(X))$. D'après le lemme 4.5, $S \in C^\theta(A; \mathscr{H}^1(X), \mathscr{H}^{-1}(X))$ et par (c), $[H_Y, A] \in C^\theta(A; \mathscr{H}^1(X), \mathscr{H}^{-1}(X))$ et alors en utilisant le lemme 4.9 on aura $\chi_Y [H_Y, A] \chi_Y \in C^\theta(A; \mathscr{H}^1(X), \mathscr{H}^{-1}(X))$. Par conséquent $[H, A] \in C^\theta(A; \mathscr{H}^1(X), \mathscr{H}^{-1}(X))$ et donc $H \in C^{1+\theta}(A; \mathscr{H}^1(X), \mathscr{H}^{-1}(X))$. Q.E.D.

En utilisant certains arguments de la démonstration ci-dessus, on peut maintenant compléter la preuve du théorème 1.2.

Démonstration du théorème 1.2 (b). On ne suppose vérifiées que les hypothèses I, II et III-(i). Soient $Y \in \mathscr{L}_1$ et $A^{Y^\perp}$, $F^{Y^\perp}$ les opérateurs du lemme 4.3, correspondant à $Z = Y^\perp$. Le calcul qui a mené à (5.8) montre que l'on a

$$[H_Y, 1_Y \otimes A^{Y^\perp}] = 2\rho^Y \otimes \nabla_{Y^\perp}^* F^{Y^\perp} \quad \text{sur} \quad C_0^\infty(X).$$

Alors $H_Y \in C^1(A_{Y^\perp}; \mathscr{H}^1(X), \mathscr{H}^{-1}(X))$ si $A_{Y^\perp} := 1_Y \otimes A^{Y^\perp}$ et d'après le théorème 2.4, pour tout $u \in D(H_Y)$, fonction propre de H_Y correspondant à $\lambda \in \sigma_p(H_Y)$, et tout $\varepsilon \in (0, 1]$, on a

$$0 = ([H_Y, A_{Y^\perp}]u, u) = -2i \int_Y \rho^Y(y) \left\{ \int_{Y^\perp} |\eta|^2 \hat{\psi}(\varepsilon\eta) |\hat{u}(y, \eta)|^2 d\eta \right\} dy,$$

où $\hat{u}(y, .)$ désigne la transformée de Fourier sur $Y^\perp$ de la fonction $u(y, .)$ pour $y \in Y$ fixé. On a $\hat{\psi}(0) = 1$ et alors pour $\varepsilon \searrow 0$ on obtient $u = 0$. Q.E.D.

§ 6. L'inégalité de Mourre

On aura besoin du résultat technique suivant (dont la démonstration est celle du lemme 2.8.5 de [1]):

Lemme 6.1. *Soit H un opérateur auto-adjoint sur l'espace de Hilbert complexe et séparable $\mathscr{H}$. On désigne par $E_I(H)$ le projecteur spectral de H*

associé à l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et par $I_r(\lambda)$ l'intervalle $[\lambda - r, \lambda + r]$. Soit A un autre opérateur auto-adjoint sur $\mathscr{H}$, tel que $e^{i\tau A}\mathscr{G} \subset \mathscr{G}$ pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, où $\mathscr{G} := D(|H|^{1/2})$. On suppose de plus que $H \in C^1(A; \mathscr{G}, \mathscr{G}^*)$ et qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $r_0 > 0$ et $K \in \mathscr{K}(\mathscr{G}, \mathscr{G}^*)$ tels que l'on vérifie l'inégalité

$$E_{I_{r_0}(\lambda)}(H) i[H, A] E_{I_{r_0}(\lambda)}(H) \geq a E_{I_{r_0}(\lambda)}(H) + K \tag{6.1}$$

où $a \in \mathbb{R}$ ($a \leq 0$ si λ est une valeur propre de H).

Alors, pour tout $\delta > 0$, il existe $r > 0$ tel que l'on ait

$$E_{I_r(\lambda)}(H) i[H, A] E_{I_r(\lambda)}(H) \geq (a - \delta) E_{I_r(\lambda)}(H). \tag{6.2}$$

On remarque maintenant que la fonction ρ a toutes les propriétés du potentiel V, donc on peut définir de la façon connue, pour tout $t \geq 0$, l'opérateur $H_t = H_t(\rho, V) := H(\rho, V + t\rho)$, qui sera auto-adjoint sur $L^2(X)$, $D(H_t) = D(H)$, $D(|H_t|^{1/2}) = D(|H|^{1/2}) = \mathscr{H}^1(X)$ et $H_t = H + t\rho$ sur $D(H)$. De plus, $H_t \in C^{1+\theta}(A)$.

De la même façon on définit pour tout $Y \in \mathscr{L}_1$, les opérateurs auto-adjoints $H_{Y,t} := H_Y + t\rho_Y$ sur $L^2(X)$ et $H_t^Y := H^Y + t\rho^Y$ sur $L^2(Y)$.

Nous allons d'abord étudier la dépendance en t d'une fonction de l'opérateur H_t.

Lemme 6.2. *Pour tout $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, il existe une constante $C > 0$ telle que l'on ait*

$$\begin{aligned} &\|f(H_{t'}) - f(H_{t''})\|_{\mathscr{B}(\mathscr{H}^{-1}(X), \mathscr{H}^1(X))} \\ &\qquad \leq C(1 + t')(1 + t'')|t' - t''|, \qquad t', t'' \in \mathbb{R}_+. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Démonstration. On va utiliser la formule (3.5) pour $r \geq 3$. On remarque d'abord que pour t', $t'' \in \mathbb{R}_+$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\tau \in \mathbb{R}^*$, $|\tau| \leq 1$, on a dans $\mathscr{B}(\mathscr{H}^{-1}(X), \mathscr{H}^1(X))$ l'égalité suivante:

$$\begin{aligned} &(H_{t'} - \lambda - i\tau)^{-1} - (H_{t''} - \lambda - i\tau)^{-1} \\ &\qquad = (t - t')(H_{t'} - \lambda - i\tau)^{-1} \rho^Y (H_{t''} - \lambda - i\tau)^{-1}. \end{aligned} \tag{6.4}$$

D'autre part, on vérifie facilement (voir aussi la démonstration du lemme 3.2) qu'il existe une constante C_0 telle que pour $t \in \mathbb{R}_+$, λ, $\tau \in \mathbb{R}$, $0 < |\tau| \leq 1$, on ait

$$\|(H_t - \lambda - i\tau)^{-1}\|_{\mathscr{B}(L^2(X), \mathscr{H}^1(X))} \leq C_0 |\tau|^{-1} (1 + t^2 + \lambda^2)^{1/2}. \tag{6.5}$$

On aura la même estimation pour la norme dans l'espace des opérateurs bornés de $\mathscr{H}^{-1}(X)$ dans $L^2(X)$.

Alors (6.3) résulte de (3.5), (6.4) et (6.5). Q.E.D.

On définit les seuils de H_t par $\tau(H_t) := \bigcup_{Y\in\mathscr{L}_1}\sigma_p(H_t^Y)$. Pour $Y=\{0\}$, on a par convention $L^2(Y) := \mathbb{C}$ et $H_t^Y = V^0 + t\rho^0$, donc $V^0 + t\rho^0 \in \tau(H_t)$.

On utilise les notations du lemme 6.1 pour les projecteurs spectraux et pour $a\in\mathbb{R}$, $t\geq 0$ on introduit la fonction $s_{a,t} : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $s_{a,t}(\lambda) = a$ si $\lambda\notin\tau(H_t)$, $s_{a,t}(\lambda) = 0$ si $\lambda\in\tau(H_t)$.

Proposition 6.3. *Sous les hypothèses* I–IV, *on a*:

(a) *Pour tout $t\geq 0$, $\tau(H_t)$ est un ensemble dénombrable et fermé.*

(b) *Pour tout $t\geq 0$, les éléments de $\sigma_p(H_t)\backslash\tau(H_t)$ sont des valeurs propres de multiplicité finie, qui ne peuvent s'accumuler qu'aux points de $\tau(H_t)$. En particulier, $\tau(H_t)\cup\sigma_p(H_t)$ est un ensemble dénombrable et fermé.*

(c) *Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. On peut choisir le nombre $\varepsilon > 0$ qui intervient dans la définition de A au §4 de façon que pour tout $T > 0$ il existe $a > 0$ tel que, pour tout $\delta > 0$, il existe $r > 0$ et tel que pour tout $t\in[0,T]$ il existe $K\in\mathscr{K}(\mathscr{H}^1(X),\mathscr{H}^{-1}(X))$ symétrique vérifiant l'inégalité*

$$E_{I_r(\lambda)}(H_t)i[H_t,A]E_{I_r(\lambda)}(H_t) \geq [s_{a,t}(\lambda)-\delta]E_{I_r(\lambda)}(H_t) + K. \tag{6.6}$$

Démonstration. On prouve par induction sur $Y\in\mathscr{L}$ que les affirmations de la proposition 6.3 sont vraies pour tous les opérateurs H_t^Y.

(i) Pour $Y=\{0\}$ la proposition est évidemment vraie.

(ii) Avant de continuer, il faut préciser le choix de $\varepsilon > 0$ pour $\lambda\in\mathbb{R}$ fixé. Soient $m_Y := \inf\sigma(H^Y)$, $M := \max\limits_{Y\in\mathscr{L}_1}(\lambda + 1 - m_Y)\|(\rho^Y)^{-1}\|_{L^\infty(Y)}$ et $G_{Y,\varepsilon} : Y^\perp \to \mathbb{R}$, $G_{Y,\varepsilon}(\eta) := 2\sum_{Z\in\mathscr{L}_m(Y^\perp)}|\pi_Z\eta|^2\hat{\psi}_Z(\varepsilon\pi_Z\eta)$, $\eta\in Y^\perp$, où $\psi_Z\in C_0^\infty(Z)$ est la fonction qui a servi à la construction de A^Z au début du §4. On a $G_{Y,\varepsilon}(\eta)\geq 0$ et $G_{Y,0}(\eta) = 2|\eta|^2$ pour tout $\eta\in Y^\perp$. Alors, si $M\leq 0$, le choix de $\varepsilon\in(0,1]$ est arbitraire, tandis que pour $M > 0$, on choisit $\varepsilon\in(0,1]$ tel que $G_{Y,\varepsilon}(\eta)\geq|\eta|^2$ pour tout $\eta\in Y^\perp$ tel que $|\eta|^2\leq M$.

(iii) On suppose maintenant que pour un $Z\in\mathscr{L}$ fixé, la proposition est vraie pour tous les opérateurs H_t^Y avec $t\geq 0$ et $Y\in\mathscr{L}(Z)$, $Y\neq Z$. Il faut prouver la même proposition pour H_t^Z, $t\geq 0$. On pourra évidemment supposer $Z = X$.

(iv) Prouvons d'abord (a). $\tau(H_t) = \bigcup\limits_{Y\in\mathscr{L}_1}[\tau(H_t^Y)\cup\sigma_p(H_t^Y)]$, donc d'après l'hypothèse d'induction, $\tau(H_t)$ est un ensemble dénombrable et fermé.

(v) Démontrons maintenant que (a) et (c) entraînent (b). D'après (6.6) et la remarque 2.7, pour tout $t\geq 0$ et tout $\lambda\in\mathbb{R}\backslash\tau(H_t)$, il existe $r > 0$ tel que H_t ne peut avoir qu'un nombre fini de valeurs propres dans l'intervalle $I_r(\lambda) = [\lambda - r, \lambda + r]$, chacune étant de multiplicité finie, ce qui implique (b).

(vi) Il reste à prouver que, si pour $\lambda\in\mathbb{R}$, $Y\in\mathscr{L}_1$, $T_0 > 0$, il existe $a_Y > 0$, tel que pour tout $\delta' > 0$, il existe $r_0 > 0$, tel que pour tout $t\in[0,T_0]$, il existe $K_Y\in\mathscr{K}(\mathscr{H}^1(Y),\mathscr{H}^{-1}(Y))$ symétrique vérifiant l'inégalité

$$E_{I_{r_0}(\lambda)}(H_t^Y)i[H_t^Y,A^Y]E_{I_r(\lambda)}(H_t^Y) \geq [s_{a_Y,t}(\lambda)-\delta']E_{I_r(\lambda)}(H_t^Y) + K_Y, \tag{6.7}$$

où $s_{a_Y,t}$ est la fonction définie avant l'énoncé de la proposition 6.3, alors on a la relation (6.6).

(vii) On va prouver d'abord une inégalité de la forme (6.6) avec $K = 0$ pour $H_{Y,t}$, $Y \in \mathscr{L}_1$, $t \in [0, T]$, $T > 0$ arbitrairement fixé. Si on considère l'opérateur unitaire $\mathscr{F}_Y : L^2(X) \to \int_{Y^\perp}^{\oplus} L^2(Y)d\eta$, défini par la transformation de Fourier partielle

$$(\mathscr{F}_Y u)(y, \eta) := (2\pi)^{-(1/2)\, dim\, Y^\perp} \int_{Y^\perp} e^{-iy^\perp \cdot \eta} u(y, y^\perp)dy^\perp, \quad u \in L^2(X),$$

où $y \in Y$, $\eta \in Y^\perp$ et on tient compte de la relation (1.6), on voit que $H_{Y,t}$ est unitairement équivalent à l'intégrale directe suivante d'opérateurs auto-adjoints sur $L^2(Y)$:

$$\mathscr{F}_Y H_{Y,t} \mathscr{F}_Y^{-1} = \int_{Y^\perp}^{\oplus} H^Y_{t+|\eta|^2} d\eta. \tag{6.8}$$

D'autre part, si on désigne les projecteurs spectraux $E_{I_r(\lambda)}$ par E_r et on utilise l'identité (5.8), on aura l'égalité

$$\mathscr{F}_Y E_r(H_{Y,t}) i([H_{Y,t}, A]E_r(H_{Y,t})\mathscr{F}_Y^{-1} = \int_{Y^\perp}^{\oplus} E_r(H^Y_{t+|\eta|^2}) B^Y_t(\eta) E_r(H^Y_{t+|\eta|^2}) d\eta, \tag{6.9}$$

où

$$B^Y_t(\eta) = i[H^Y_{t+|\eta|^2}, A^Y] + G_{Y,\varepsilon}(\eta)\rho^Y \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^1(Y), \mathscr{H}^{-1}(Y)) \tag{6.10}$$

est symétrique. Pour minorer l'intégrand de (6.9) pour $r < 1$, on voit que le seul cas intéressant est celui où, pour M défini au (ii), on a $M > 0$ et $|\eta|^2 \leq M$.

En effet, si $M \leq 0$, on a $\lambda + 1 \leq m_Y = \inf \sigma(H^Y) \leq \inf \sigma(H^Y_{t+|\eta|^2})$, donc $E_r(H^Y_{t+|\eta|^2}) = 0$. Si $M > 0$ et $|\eta|^2 \geq M$, on a $H^Y_{t+|\eta|^2} \geq m_Y + M\rho^Y \geq \lambda + 1$ donc $E_r(H^Y_{t+|\eta|^2}) = 0$.

Pour étudier le cas $|\eta|^2 \leq M$, on voit par l'hypothèse d'induction (6.7) (où l'on fixe $T_0 := T + M$) et le lemme 6.1, que pour tout $\delta' > 0$, tout $\eta \in Y^\perp$ avec $|\eta|^2 \leq M$ et tout $t \in [0, T]$, il existe $r_0 = r_0(\delta', \eta, t) > 0$ tel que l'on vérifie l'inégalité

$$E_{r_0}(H^Y_{t+|\eta|^2}) i[H^Y_{t+|\eta|^2}, A^Y] E_{r_0}(H^Y_{t+|\eta|^2}) \geq [s_{a_Y, t+|\eta|^2}(\lambda) - 2\delta'] E_{r_0}(H^Y_{t+|\eta|^2}). \tag{6.11}$$

En particulier, si on choisit ci-dessus $\eta = 0$ et on considère pour tout $t \in [0, T]$ une fonction réelle $f = f_t \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, supp $f \subset I_{r_0}(\lambda)$, $f = 1$ sur $I_{r_0/2}(\lambda)$, on a

$$f(H^Y_t) i[H^Y_t, A^Y] f(H^Y_t) \geq [S_{a_Y, t}(\lambda) - 2\delta'] f(H^Y_t)^2. \tag{6.12}$$

Avant de poursuivre, il faut étudier la dépendance en t et η de certains opérateurs intervenant dans les relations précédentes. D'après le lemme 6.2, pour tout $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ il existe une constante $C > 0$ telle que l'on ait:

$$\|f(H^Y_{t'+|\eta'|^2}) - f(H^Y_{t''+|\eta''|^2})\|_{\mathscr{B}(\mathscr{H}^{-1}(Y),\mathscr{H}^1(Y))} \leq C(|t'-t''| + \left||\eta'|^2 - |\eta''|^2\right|) \tag{6.13}$$

pour tous t', $t'' \in [0,T]$, η', $\eta'' \in Y^\perp$, $|\eta'|^2 \leq M$, $|\eta''|^2 \leq M$.

Il est évident aussi qu'il existe une autre constante $C_1 \geq 0$ telle que l'on ait pour les mêmes valeurs de t', t'', η', η'':

$$\begin{aligned} &\|[H^Y_{t'+|\eta'|^2}, A] - [H^Y_{t''+|\eta''|^2}, A]\|_{\mathscr{B}(\mathscr{H}^{-1}(Y),\mathscr{H}^1(Y))} \\ &\qquad \leq C_1(|t'-t''| + \left||\eta'|^2 - |\eta''|^2\right|), \end{aligned} \tag{6.14}$$

$$\|B^Y_{t'}(\eta') - B^Y_{t''}(\eta'')\|_{\mathscr{B}(\mathscr{H}^{-1}(Y),\mathscr{H}^1(Y))} \leq C_1(|t'-t''| + |\eta'-\eta''|) \tag{6.15}$$

et finalement, pour tous $t \in [0,T]$ et $\eta \in Y^\perp$, $|\eta|^2 \leq M$:

$$\|B^Y_t(\eta) - B^Y_t(0)\|_{\mathscr{B}(\mathscr{H}^1(Y),\mathscr{H}^{-1}(Y))} \leq C_1|\eta|^2. \tag{6.16}$$

En utilisant (6.12), (6.13) et (6.16), on voit que pour tout $t \in [0,T]$, il existe une constante positive $c = c(t)$ telle que pour tout $\eta \in Y^\perp$, $|\eta|^2 \leq c\delta'$, il existe $R_1 = R_1(t,\eta) \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^{-1}(Y), \mathscr{H}^1(Y))$ tel que $\|R_1\|_{\mathscr{B}(\mathscr{H}^{-1}(Y),\mathscr{H}^1(Y))} \leq \delta'$ et

$$f(H^Y_{t+|\eta|^2})B_t(\eta)f(H^Y_{t+|\eta|^2}) \geq [s_{a_Y,t}(\lambda) - 2\delta']f(H^Y_{t+|\eta|^2})^2 - R_1. \tag{6.17}$$

D'après (6.17), (6.13) et (6.15), pour tout $t \in [0,T]$, il existe une constante positive $\sigma = \sigma(t)$ telle que pour tout $t' \in [0,T]$, $|t'-t| \leq \sigma$ et tout $\eta \in Y^\perp$, $|\eta|^2 \leq c\delta'$, il existe $R_2 = R_2(t,t',\eta) \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^{-1}(Y), \mathscr{H}^1(Y))$, tel que $\|R_2\|_{\mathscr{B}(\mathscr{H}^{-1}(Y),\mathscr{H}^1(Y))} \leq \delta'$ et

$$f(H^Y_{t'+|\eta|^2})B_{t'}(\eta)f(H^Y_{t'+|\eta|^2}) \geq [s_{a_Y,t}(\lambda) - 2\delta']f(H^Y_{t'+|\eta|^2})^2 - R_1 - R_2. \tag{6.18}$$

Si on considère un recouvrement fini de $[0,T]$, on trouve donc qu'il existe une constante $c_1 > 0$ telle que pour tout $\delta' > 0$, il existe $r_1 = r_1(\delta') > 0$ tel que pour tous $t \in [0,T]$ et $\eta \in Y^\perp$, $|\eta|^2 \leq c_1\delta'$, on ait la relation:

$$E_{r_1}(H^Y_{t+|\eta|^2})B_t(\eta)E_{r_1}(H^Y_{t+|\eta|^2}) \geq [s_{a_Y,t}(\lambda) - 4\delta']E_{r_1}(H^Y_{t+|\eta|^2}). \tag{6.19}$$

On remarque maintenant en utilisant (6.11), (6.10) et l'inégalité $G_{Y,\varepsilon}(\eta) \geq |\eta|^2$ si $\eta \in Y^\perp$, $|\eta|^2 \leq M$ qu'il existe une constante $\alpha > 0$, telle que pour tout $\delta'' > 0$, tout $\eta \in Y$, $|\eta|^2 \leq M$ et tout $t \in [0,T]$, il existe $r_0 = r_0(\delta'',\eta,t) > 0$, tel que l'on vérifie l'inégalité:

$$E_{r_0}(H^Y_{t+|\eta|^2})B_t(\eta)E_{r_0}(H^Y_{t+|\eta|^2}) \geq (\alpha|\eta|^2 - \delta'')E_{r_0}(H^Y_{t+|\eta|^2}). \tag{6.20}$$

Si $\lambda \in \tau(H_t)$ on choisit dans (6.19) $\delta' = \frac{1}{4}\delta$, $\delta > 0$ et dans (6.20) $\delta'' = \delta$.

Si $\lambda \notin \tau(H_t)$, on a $s_{a_Y,t}(\lambda) = a_Y$ et on choisit dans (6.19), $\delta' = \dfrac{a_Y}{8}$ et dans (6.20), $\delta'' = \alpha c_1 a_Y/16$. Il en résulte qu'il existe une constante $a > 0$, telle que pour tout $\delta > 0$, tout $t \in [0, T]$ et tout $\eta \in Y^\perp$, $|\eta|^2 \leq M$, il existe $r_2 = r_2(\delta, \eta, t) > 0$ tel que l'on ait

$$E_{r_2}(H^Y_{t+|\eta|^2})B_t(\eta)E_{r_2}(H^Y_{t+|\eta|^2}) \geq [s_{a,t}(\lambda) - \delta]E_{r_2}(H^Y_{t+|\eta|^2}). \tag{6.21}$$

On voit facilement que l'on peut choisir r_2 indépendant de $t \in [0, T]$ et $\eta \in Y^\perp$, $|\eta|^2 \leq M$. Il suffit de suivre le raisonnement qui a mené de (6.11) à (6.19): pour $t \in [0, T]$ et $\eta \in Y^\perp$, $|\eta|^2 \leq M$ fixés, on considère une fonction réelle $f = f_{t,\eta} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} f \subset I_{r_2}(\lambda)$, $f = 1$ sur $I_{r_2/2}(\lambda)$, on multiplie (6.21) à gauche et à droite avec $f(H^Y_{t+|\eta|^2})$, on utilise (6.13) et (6.15), ainsi qu'un recouvrement fini de $\{(t, \eta) \in [0, T] \times Y^\perp; |\eta|^2 \leq M\}$.

En utilisant (6.9) et (6.21), on déduit l'existence d'une constante $a > 0$ telle que pour tout $\delta > 0$, il existe $r > 0$ tel que l'on vérifie l'inégalité

$$E_r(H_{Y,t})i[H_{Y,t}, A]E_r(H_{Y,t}) \geq [s_{a,t}(\lambda) - \delta]E_r(H_{Y,t}) \tag{6.22}$$

pour tous $Y \in \mathscr{L}_1$ et $t \in [0, T]$.

(viii) Pour démontrer (6.6), on considère $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ réelle, telle que $\operatorname{supp} f \subset I_r(\lambda)$, $f = 1$ sur $I_{r/2}(\lambda)$. La relation (6.22) entraîne alors l'inégalité

$$f(H_{Y,t})i[H_{Y,t}, A]f(H_{Y,t}) \geq (s_{a,t}(\lambda) - \delta)f(H_{Y,t})^2. \tag{6.23}$$

On utilise maintenant la relation (5.5) pour H_t, avec $S = S(t) \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^1(X), \mathscr{H}^{-1}(X))$ et $\langle . \rangle^\theta S \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^1(X), \mathscr{H}^{-1}(X))$. Alors $f(H_{Y,t})Sf(H_{Y,t}) = \langle . \rangle^{-\theta} \cdot f(H_{Y,t})\langle . \rangle^\theta Sf(H_{Y,t}) + [f(H_{Y,t}), \langle . \rangle^{-\theta}]\langle . \rangle^\theta Sf(H_{Y,t})$, opérateur qui, d'après le lemme 3.2, est compact sur $L^2(Y)$. Si on désigne par $\sim$ l'égalité modulo un opérateur de $\mathscr{K}(L^2(Y))$ et on utilise les lemmes 3.2 et 3.7, ainsi que les relations (3.10), (5.5) et (6.23), on aura

$$\begin{aligned} f(H_t)i[H_t, A]f(H_t) &\sim \sum_{Y \in \mathscr{L}_1} \chi_Y f(H_t)i[H_{Y,t}, A]f(H_t)\chi_Y \\ &\sim \sum_{Y \in \mathscr{L}_1} \chi_Y f(H_{Y,t})i[H_{Y,t}, A]f(H_{Y,t})\chi_Y \\ &\geq [s_{a,t}(\lambda) - \delta] \sum_{Y \in \mathscr{L}_1} \chi_Y f(H_{Y,t})^2\chi_Y \sim [s_{a,t}(\lambda) - \delta]f(H_t)^2. \end{aligned}$$

On en déduit qu'il existe $a > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$, il existe $r > 0$, tel que pour tout $t \in [0, T]$, il existe $K \in \mathscr{K}(L^2(X))$ auto-adjoint tel que l'on vérifie (6.6) pour $I_{r/2}(\lambda)$. Q.E.D.

Démonstration du théorème 1.3.

Les affirmations (a) et (b) résultent de la proposition 6.3 pour $t = 0$.

L'affirmation (c) est une conséquence du théorème 2.8, car d'après la proposition 5.4, $H \in C^{1+\theta}(A; \mathscr{H}^1(X), \mathscr{H}^{-1}(X))$ et la proposition 6.3 entraîne le fait que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\tau(H)$ il existe $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ tels que l'intervalle $(\lambda-\delta, \lambda+\delta)$ soit inclus dans $\mu^A(H)$.

Démonstration du théorème 1.4.

(a) Pour appliquer le théorème 2.8 on tient compte du fait suivant: si $\mathscr{H} := L^2(X)$, $\mathscr{G} := \mathscr{H}^1(X)$, $\mathscr{G}^* = \mathscr{H}^{-1}(X)$, alors $\mathscr{H}_1^{-1}(X) \subset D(A; \mathscr{G}^*)$ et donc $(\mathscr{H}^{-1}(X), \mathscr{H}_1^{-1}(X))_{(1/2),1} \subset \mathscr{E} := (\mathscr{G}^*, D(A; \mathscr{G}^*))_{(1/2),1}$. D'après [4], $(\mathscr{H}^{-1}(X), \mathscr{H}_1^{-1}(X))_{(1/2),1} = \mathscr{H}_{(1/2),1}^{-1}(X)$ et l'espace adjoint sera $\mathscr{H}_{-(1/2),\infty}^1(X))$, donc $\mathscr{B}(\mathscr{E}, \mathscr{E}^*) \subset \mathscr{B}(\mathscr{H}_{(1/2),1}^{-1}(X), \mathscr{H}_{-(1/2),\infty}^1(X))$.

(b) On sait que pour tous $\gamma > \dfrac{1}{2}$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\dfrac{1}{2} + \varepsilon < \gamma$, les injections canoniques $\mathscr{H}_\gamma^0(X) \subset \mathscr{H}_{(1/2)+\varepsilon}^{-1}(X) \subset \mathscr{H}_{(1/2),1}^{-1}(X)$ et $\mathscr{H}_{-(1/2),\infty}^1(X) \subset \mathscr{H}_{-(1/2)-\varepsilon}^1(X) \subset \mathscr{H}_{-\gamma}^0(X)$ sont bornées, la première et la dernière étant même compactes. On déduit du (a) que les applications holomorphes

$$\mathbb{C}^\pm \ni z \mapsto (H-z)^{-1} \in \mathscr{B}(\mathscr{H}_\gamma^0, \mathscr{H}_{-\gamma}^0), \qquad \gamma > \frac{1}{2}, \tag{6.24}$$

admettent des extensions continues pour la topologie de la norme à $\mathbb{C}^\pm \cup (\mathbb{R}\backslash(\tau(H) \cup \sigma_p(H))$.

Il ne reste qu'à remarquer l'identité

$$(H-\lambda)^{-1} = (H-i)^{-1} + (\lambda-i)(H-i)^{-2} + (\lambda-i)^2(H-i)^{-1}(H-\lambda)^{-1}(H-i)^{-1}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}^\pm,$$

où $(H-i)^{-1} \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^{-1}(X), \mathscr{H}^1(X))$ et le fait que d'après le lemme 3.1, $(H-i)^{-1} \in \mathscr{B}(\mathscr{H}_t^{-1}(X), \mathscr{H}_t^1(X))$ pour tout $t \in [-1, 1]$. Q.E.D.

Références

[1] Amrein, W., Boutet de Monvel, A. and Georgescu, V., Notes on the N-body problem, **I** (1988), **II** (1991), *Preprint Université de Genève.*

[2] ———, *C_0-groups, commutator methods and spectral theory of N-body hamiltonians*, Progr. Math., Birkhäuser, 1996.

[3] Bergh, J. and Löfström, J., *Interpolation spaces: an introduction*, Springer Verlag, 1976.

[4] Boutet de Monvel, A. and Georgescu, V., Spectral and scattering theory by the conjugate operator method, *Algebra i Analiz*, **4**:3 (1992), 73–116.

[5] ———, Some developments and applications of the abstract Mourre theory, *Astérisque*, **210**:2 (1992), 27–48.

[6] Boutet de Monvel, A. and Manda, D., Spectral and scattering theory for wave propagation in perturbed stratified media, *J. Math. Anal. Appl.*, **191** (1995), 137–167.

[7] Boutet de Monvel, A., Manda, D. and Purice, R., The commutator method for form-relatively compact perturbations, *Lett. Math. Phys.*, **22** (1991), 211–223.

[8] Croc. E. and Dermenjian, Y., A perturbative method for the spectral analysis of an acoustic multistratified strip, *Math. Meth. Appl. Sci.,* **21** (1998), 1681–1704.

[9] Cycon, H. L., Froese, R. G., Kirsch, W. and Simon, B., *Schrödinger operators*, Springer Verlag, 1987.

[10] De Bièvre, S. and Pravica, D. W., Spectral analysis for optical fibres and stratified fluids, *J. Funct. Anal.,* **98** (1991), 404–436.

[11] Dermenjian, Y., Durand, M. and Iftimie, V., Spectral analysis of an acoustic multistratified perturbed cylinder, *Comm. PDE*, **23**: 1–2 (1998), 141–169.

[12] Froese, R. G. and Herbst, I., A new proof of the Mourre estimate, *Duke Math. J.,* **49** (1982), 1075–1085.

[13] Iftimie, V., Opérateurs différentiels magnétiques: stabilité des trous dans le spectre, invariance du spectre essentiel et applications, *Comm. PDE*, **18**: 3–4 (1993), 651–686.

[14] Mourre, E., Absence of singular continuous spectrum for certain self-adjoint operators, *Comm. Math. Phys.*, **78** (1981), 391–408.

[15] Perry, P., Sigal, I. M. and Simon, B., Spectral analysis of N-body Schrödinger operators, *Ann. Math.*, **114** (1981), 519–567.