Publ. RIMS, Kyoto Univ.
39 (2003), 601–624

Problème de Cauchy Analytique I

By

Yûsaku HAMADA*

Abstract

In this article, we study singularities and analytic continuations of the solution of the Cauchy problem in the complex domain.

Résumé

Dans cet article, nous étudions des singularités et des prolongements analytiques de la solution du problème de Cauchy dans le domaine complexe.

§0. Introduction

J. Leray [L] et L. Gårding, T. Kotake et J. Leray [GKL] ont étudié des singularités et des prolongements analytiques de la solution du problème de Cauchy dans le domaine complexe.

[HLT] ont étudié des principes des prolongements analytiques de la solution du problème de Cauchy.

Dans cet article, nous démontrons quelques résultats sur des singularités et des prolongements analytiques de la solution du problème de Cauchy.

Je remercie vivement M. T. Nishino de ses suggestions très précieuses.

§1. Notations et Résultats

Soient X un voisinage de l'origine dans $\mathbf{C}^{n+1}$ et $x = (x_0, x')\,[x' = (x_1, x'')$, $x'' = (x_2, \ldots, x_n)]$ un point de $\mathbf{C}^{n+1}$, $\|x\| = \max_{0\leq j\leq n} \mid x_j \mid$.

Communicated by K. Saito. Received July 18, 2002. Revised August 26, 2002.
2000 Mathematics Subject Classification(s): Primary 35A20; Secondary 32F15.
*61-36 Tatekura-cho, Shimogamo, Sakyo-Ku, Kyoto 606-0806, Japan.

On considère un opérateur différentiel d'ordre m, à coefficients holomorphes sur X :

$$a(x,D)=\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)D^\alpha, \quad D_i=\partial/\partial x_i, \qquad 0\leq i\leq n.$$

Sa partie principale est notée $g(x,D)$.

Une fonction $F(\xi)\geq \|a(\cdot,\xi)\|_X=\sum_{|\alpha|\leq m}\sup_{x\in X}\mid a_\alpha(x)\mid \xi^\alpha$, $\xi\in(\mathbf{R}_+)^{n+1}$, sera appelée une fonction spectrale de $a(x,D)$ sur X.

Nous obtenons le résultat suivant qui concerne des singularités et des prolongements analytiques de la solution du problème de Cauchy.

D'abord nous faisons l'hypothèse suivante.

Hypothèse 1.1. *$a(x,D)$ est un opérateur différentiel d'ordre m, holomorphe sur le revêtement universel $\mathcal{R}\{x; x_1\neq 0, \|x\|\leq R\}$ d'un domaine $\{x; x_1\neq 0, \|x\|\leq R\}$. Sa partie principale $g(x,D)$ est holomorphe sur $\{x; \|x\|\leq R\}$ et supposons $g(x;1,0,\dots,0)=1$ sur $\{x;\|x\|\leq R\}$. Donc l'hyperplan $S: x_0=0$ est non-caractéristique pour g.*

Nous avons alors

Théorème 1.1. *Soit $a(x,D)$ un opérateur différentiel d'ordre m vérifiant l'hypothèse 1.1.*

Considérons l'équation

$$a(x,D)u(x)=v(x), \tag{1.1}$$

où $v(x)$ est une fonction holomorphe sur $\mathcal{R}\{x; x_1\neq 0, \|x\|\leq R\}$.

Supposons qu'une solution $u(x)$ de (1.1) soit holomorphe sur $\mathcal{R}\{x; \Re x_0>0, x_1\neq 0, \|x\|\leq R\}$, $\Re x_0$ étant la partie réelle de x_0.

Il existe alors une constante $R_0 (0<R_0\leq R)$ ne dépendant que de g et R telle que la solution $u(x)$ se prolonge analytiquement sur $\mathcal{R}\{x; x_1\neq 0, \|x\|\leq R_0\}$.

Preuve. D'après le théorème de Cauchy-Kowalewski (par exemple, la Proposition 2.1, avec $p=0$), la solution $u(x)$ est holomorphe sur $\mathcal{R}\{x; \Re x_0\geq -C_0\mid x_1\mid, x_1\neq 0, \|x\|\leq R'\}, C_0(>0)$ et $R'(0<R'\leq R)$ étant des constantes ne dépendant que de g et R.

Alors le Théorème 1.1 résulte immédiatement de la Proposition suivante due à T. Nishino.

Proposition 1.1. *Soit Ω une partie ouverte et connexe dans $\{x; x_1 \neq 0, \|x\| < R\}$, contenant $\{x; \Re x_0 \geq 0, x_1 \neq 0, \|x\| < R\}$. Supposons que $F(x)$ soit une fonction holomorphe sur $\mathcal{R}(\Omega)$.*

$F(x)$ peut se prolonger alors analytiquement sur $\mathcal{R}\{x; x_1 \neq 0, \|x\| \leq R_0\}$, R_0 étant une constante $0 < R_0 \leq R$.

Remarque 1.1. Il en résulte que, si $F(x)$ est holomorphe sur $\{x; \Re x_0 \geq 0, x_1 \neq 0, \|x\| \leq R\}$, c'est–à–dire que $F(x)$ est uniforme sur $\{x; \Re x_0 \geq 0, x_1 \neq 0, \|x\| \leq R\}$, $F(x)$ est holomorphe sur $\{x; x_1 \neq 0, \|x\| \leq R_0\}$.

Aussi en utilisant le rayon intérieur de Hartogs [N], on peut démontrer ceci.

Preuve de la Proposition 1.1. T. Nishino a démontré élégamment cette Proposition comme suit.

En diminuant un peu $R(> 0)$, par une représentation conforme $x_1 = e^{f(z)}$ de $\mathcal{R}\{x_1; 0 <| x_1 |\leq R\}$ sur $\bar{\Gamma}$(l'adhérence de Γ)$\setminus\{0\}$, où $\Gamma = \{z; | z + 1 |< 1\}$, $G(x_0, z, x'') = F(x_0, e^{f(z)}, x'')$ est holomorphe sur $\{(x_0, z, x''); \Re x_0 \geq 0, z \in \bar{\Gamma} \setminus \{0\}, | x_0 |, \|x''\| \leq R\}$. Soit $\Phi(z, x'')$ le rayon de Hartogs de $G(x_0, z, x'')$ par rapport à x_0 dans le domaine $(\bar{\Gamma} \setminus \{0\}) \times \{x''; \|x''\| \leq R\}$, c'est-à-dire que, pour $x_0^{(0)}$ un point fixé, $\Re x_0^{(0)} > 0$ suffisamment petit, $\Phi(z^{(0)}, x''^{(0)}) = \sup \rho$, où $G(x_0, z, x'')$ est holomorphe sur l'ensemble $\{(x_0, z^{(0)}, x''^{(0)}); | x_0 - x_0^{(0)} |< \rho\}$. Prenons un point quelconque $x'' = x''^{(0)}, \|x''^{(0)}\| \leq R$. $-\log \Phi(z, x''^{(0)})$ est une fonction sous-harmonique sur Γ, bornée supérieurement, semi-continue supérieurement sur $\bar{\Gamma} \setminus \{0\}$ et $-\log \Phi(z, x''^{(0)}) \leq -\log(| x_0^{(0)} | + \delta)$ sur $\partial\Gamma \setminus \{0\}$, $\delta(> 0)$ étant une constante.

T. Nishino nous a suggestionné le Lemme suivant sur le principe du maximum de la fonction sous-harmonique.

Lemme 1.1. *Soit $H(z)$ une fonction sous-harmonique sur Γ, bornée supérieurement et semi-continue supérieurement sur $\bar{\Gamma} \setminus \{0\}$. Supposons que $H(z) \leq M$ sur $\partial\Gamma \setminus \{0\}$.*

On a alors $H(z) \leq M$ sur Γ, c'est-à-dire que $H(z)$ vérifie le principe du maximum sur Γ.

Preuve. Supposons $H(z^{(0)}) = M + \epsilon, \epsilon > 0$, $z^{(0)} \in \Gamma$. Prenons une constante $c(> 0)$ suffisamment petite telle que $c \log | z |< \epsilon/2$ sur Γ et $c \log | z^{(0)}| > -\epsilon/2$. Posons $H_1(z) = \max\{H(z) + c \log | z |, M_1\}$, où $M_1(< M)$ est une constante. $H_1(z)$ est alors une fonction sous-harmonique dans Γ, semi-continue supérieurement sur $\bar{\Gamma}$ et $H_1(z) \leq M + \epsilon/2$ sur $\partial\Gamma$. Par hypothèse, $H_1(z^{(0)}) > M + \epsilon/2$. Ceci est contradictoire au principe du maximum pour la fonction sous-harmonique.

La fin de la preuve de la Proposition 1.1. En employant ce Lemme, on a $-\log \Phi(z, x''^{(0)}) \leq -\log(| x_0^{(0)} | + \delta)$ dans Γ. Ceci démontre la Proposition 1.1.

La Proposition 1.2 suivante donne un prolongement analytique de la solution du problème de Cauchy ayant rapport aux caractéristiques d'opérateur, qui concerne le Théorème 1.1. Nous faisons l'hypothèse suivante.

Hypothèse 1.2. *$a(x, D)$ est un opérateur différentiel d'ordre m, satisfaisant l'hypothèse* 1.1. *Supposons que $x_1 = 0$ soit une surface caractéristique de multiplicité constante $p\,(0 \leq p \leq m)$ pour g. Si $p = 0$, la surface $x_1 = 0$ est non-caractéristique pour g :*

$$g(x, \xi) = \sum_{k=p}^{m} L_k(x, \xi_0, \xi'')\xi_1^{m-k},$$

où $L_k(x, \xi_0, \xi''), p \leq k \leq m$, est un polynôme homogène de degré k en (ξ_0, ξ'') et $L_m(x; 1, 0, \ldots, 0) = 1, L_p(x; 1, 0, \ldots, 0) \neq 0$ sur $\{x; \|x\| \leq R\}$.

Écrivons

$$\begin{aligned} g(0; \xi_0, \xi_1, 0, \ldots, 0) &= \xi_0^p \prod_{j=1}^{\ell} (\xi_0 - \alpha_j \xi_1)^{p_j} \\ &= \left(\prod_{j=1}^{\ell} \alpha_j^{p_j} \right) \xi_0^p \prod_{j=1}^{\ell} (-\beta_j \xi_0 - \xi_1)^{p_j}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

$p + \sum_{j=1}^{\ell} p_j = m, p_j > 0$ entier, les nombres $\alpha_j \in \mathbf{C}, 1 \leq j \leq \ell$, sont distincts,

$$\prod_{j=1}^{\ell} \alpha_j \neq 0 \text{ et } \beta_j = -(1/\alpha_j), \qquad 1 \leq j \leq \ell.$$

Nous avons alors

Proposition 1.2. *Soit $a(x, D)$ un opérateur différentiel d'ordre m vérifiant l'hypothèse* 1.2.

Considérons le problème de Cauchy

$$a(x, D)u(x) = v(x), \quad D_0^k u(0, x') = w_k(x'), \qquad 0 \leq k \leq m - 1, \tag{1.3}$$

où $v(x), w_k(x'), 0 \leq k \leq m - 1$, sont des fonctions holomorphes sur $\mathcal{R}\{x; x_1 \neq 0, \|x\| \leq R\}$.

Supposons qu'une solution $u(x)$ de (1.3) *soit holomorphe sur*

$$\mathcal{R}\{x; \Re x_0 > 0, | x_0 | \leq T | x_1 |, \|x\| \leq R\}, \tag{1.4}$$

T étant une constante telle que $T > T_0 = \max_{1 \leq j \leq \ell} \mid \beta_j \mid$.

Alors la solution $u(x)$ peut se prolonger analytiquement sur $\mathcal{R}\{x; x_1 \neq 0, \|x\| \leq R_0\}, R_0 (0 < R_0 \leq R)$ étant une constante ne dépendant que de g et R.

Note 1.1. Faisons l'hypothèse 1.2. Supposons qu'une solution $u(x)$ de (1.1) soit holomorphe sur la partie (1.4), où $v(x)$ est holomorphe sur $\mathcal{R}\{x; x_1 \neq 0, \|x\| \leq R\}$.

Comme dans le Théorème 1.1, d'après le théorème de Cauchy-Kowalewski, la solution $u(x)$ satisfait le problème (1.3), où $w_k(x'), 0 \leq k \leq m-1$, sont holomorphes sur $\mathcal{R}\{x'; x_1 \neq 0, \|x'\| \leq R\}$. D'après la Proposition 1.2, la solution $u(x)$ peut se prolonger analytiquement sur $\mathcal{R}\{x; x_1 \neq 0, \|x\| \leq R_0\}$.

Remarque 1.2. Si $p = m$, $g(x, D) = L_m(x, D_0, D_{x''})$ est indépendant de D_1. Dans ce cas, la Proposition 1.2, sans la condition (1.4), résulte immédiatement de la Remarque 2.1 de la Proposition 2.1. En effet, le problème de Cauchy (1.3) possède une unique solution holomorphe sur $\mathcal{R}\{x; x_1 \neq 0, \|x\| \leq R_0\}$. (Aussi voir [HT1]).

Dans la Proposition 1.3 suivante, nous étudions un prolongement analytique de la solution du problème de Cauchy et Goursat que nous utilisons pour démontrer la Proposition 1.2.

Hypothèse 1.3. *Soit $\dot{D}_\omega = D_\omega \backslash \{0\}$, où $D_\omega = \{x_0; \mid x_0 \mid \leq \omega\}, (\omega > 0)$.*

Supposons que $A(x, D)$ soit holomorphe sur $\mathcal{R}(\dot{D}_\omega) \times \{x'; \|x'\| \leq R\}$ et que sa partie principale $G(x, D)$ soit holomorphe sur $D_\omega \times \{x'; \|x'\| \leq R\}$.

Supposons en plus que $x_0 = 0$ soit une surface caractéristique de multiplicité constante $p (0 \leq p \leq m)$ pour $G - D_i^p D_0^{m-p}$:

$$G(x, D) = \sum_{k=p}^{m} N_k(x, D_{x'}) D_0^{m-k}, \tag{1.5}$$

où $N_k(x, D_{x'}), p \leq k \leq m$, est un opérateur différentiel d'ordre k en $D_{x'}$ et $N_p(x, D_{x'})$ ne contient pas D_1^p. Si $p = 0, N_0(x, D_{x'}) \equiv 0$.

Nous avons alors

Proposition 1.3. *Soit $A(x, D)$ un opérateur différentiel d'ordre m vérifiant l'hypothèse* 1.3.

Il existe alors une constante $L (\geq 1)$ ne dépendant que de G et R qui possède la propriété suivante:

(i) *Le cas de* $p = 0$.

Pour tout $r, (0 < r \leq R/2)$, *choisissons une constante* $\omega_0(> 0)$ *satisfaisant* $\omega_0 \leq \min\{r/4L, \omega/8\}$, *et* $x_0^{(0)} \in \dot{D}_{\omega_0}$ *un point de base.*

Considérons le problème de Cauchy,

(1.6)
$$D_0^m u(x) = A(x, D)u(x) + v(x), \quad D_0^k u(x_0^{(0)}, x') = w_k(x'), \quad 0 \leq k \leq m-1,$$

où $v(x), w_k(x'), 0 \leq k \leq m-1$, *sont des fonctions holomorphes sur* $\mathcal{R}(\dot{D}_\omega) \times \{x'; \|x'\| \leq r\}$.

Le problème de Cauchy (1.6) *admet alors une unique solution holomorphe sur* $\mathcal{R}(\dot{D}_{\omega_0}) \times \{x'; \|x'\| \leq r/2n\}$.

(ii) *Le cas de* $p \geq 1$.

Pour tout $r, (0 < r \leq R/2)$, *choisissons une constante* $\omega_0(> 0)$ *satisfaisant* $\omega_0 \leq \min\{r/4L^2, \omega/8\}$, *et* $x_0^{(0)} \in \dot{D}_{\omega_0}$ *un point de base.*

Considérons le problème de Goursat

$$(1.7) \qquad \begin{aligned} D_1^p D_0^{m-p} u(x) &= A(x, D)u(x) + v(x), \\ D_0^k u(x_0^{(0)}, x') &= w_{k,0}(x'), \qquad 0 \leq k \leq m-p-1, \\ D_1^h D_0^{m-p} u(x_0, 0, x'') &= w_{m-p,h}(x_0, x''), \qquad 0 \leq h \leq p-1, \end{aligned}$$

où $v(x), w_{k,0}(x'), 0 \leq k \leq m-p-1, w_{m-p,h}(x_0, x''), 0 \leq h \leq p-1$, *sont des fonctions holomorphes sur* $\mathcal{R}(\dot{D}_\omega) \times \{x'; \mid x_1 \mid \leq r/L, \|x''\| \leq r\}$.

Le problème de Goursat (1.7) *admet alors une unique solution holomorphe sur* $\mathcal{R}(\dot{D}_{\omega_0}) \times \{x'; \mid x_1 \mid \leq r/2nL, \|x''\| \leq r/2n\}$.

Dans la section 2, nous donnons quelques préliminaires et puis nous prouvons la Proposition 1.3. La Proposition 1.2 sera démontrée dans la section 3.

§2. Quelques Préliminaires et la Preuve de la Proposition 1.3

Pour démontrer la Proposition 1.3, dans cette section, nous préparons quelques propositions sur des prolongements analytiques des solutions des problèmes de Cauchy et Goursat, et des fonctions analytiques.

D'abord nous précisons des résultats de [HT1], [HT2], [HLT] sur un domaine d'existence de la solution des problèmes de Cauchy et Goursat.

Proposition 2.1. *Soit* $X = \{x; | x_j | \leq R_j, 0 \leq j \leq n\}$ *et* $X_\rho = \{x; |x_j| \leq \rho R_j, 0 \leq j \leq n\}, 0 < \rho < 1$. *Considérons* $A(x, D)$ *un opérateur différentiel d'ordre* m, *holomorphe sur* $X_\rho \cap \{x_0; | x_0 | < r_0\}$. *Sa partie principale* $G(x, D)$ *est holomorphe sur* X *et est de la forme* (1.5) *dans l'hypothèse* 1.3.

Étudions le problème de Cauchy et Goursat

$$
\begin{aligned}
(2.1) \qquad D_1^p D_0^{m-p} u(x) &= A(x, D)u(x) + v(x), \\
D_0^k u(0, x') &= w_{k,0}(x'), \qquad 0 \leq k \leq m - p - 1, \\
D_1^h D_0^{m-p} u(x_0, 0, x'') &= w_{m-p,h}(x_0, x''), \qquad 0 \leq h \leq p - 1,
\end{aligned}
$$

où $v(x), w_{k,0}(x'), 0 \leq k \leq m - p - 1, w_{m-p,h}(x_0, x''), 0 \leq h \leq p - 1$, *sont des fonctions holomorphes sur* $X_\rho \cap \{x_0; | x_0 | < r_0\}$.

Notons $H_X(\xi) = \sum_{k=p}^m \|N_k(\cdot, \xi')\|_X \, \xi_0^{m-k}$, $\xi \in \boldsymbol{R}_+^{n+1}$ *une fonction spectrale sur* X *de l'opérateur* $G(x, D)$.

Pour tout $\zeta_j \geq 1/R_j$, $2 \leq j \leq n$, *il existe alors des nombres* $\zeta_i \geq 1/R_i, i = 0, 1$, *tels que*

$$
\begin{aligned}
(2.2) \qquad & (1/\zeta_1^p \zeta_0^{m-p}) H_X(\zeta) \leq 1 - \rho, \quad \textit{c'est-à-dire que} \\
& (\zeta_0/\zeta_1)^p H_X(1, \zeta'/\zeta_0) \leq 1 - \rho.
\end{aligned}
$$

Le problème (2.1) *possède une unique solution* $u(x)$ *holomorphe sur* $\{x; \sum_{j=0}^n \zeta_j |x_j| < \rho\} \cap \{x_0; | x_0 | < r_0\}$.

Note 2.1. Si $p = 0$, pour tout $\zeta_j \geq 1/R_j, 1 \leq j \leq n$, il existe $\zeta_0 \geq 1/R_0$ tel que $(1/\zeta_0^m) H_X(\zeta) \leq 1 - \rho$. Dans le cas de $p = 0$, si $r_0 \geq \rho R$, la Proposition 2.1 a été déjà démontrée dans [HLT].

Remarque 2.1. Considérons le cas de $p = m$ dans la Proposition 2.1, où x_0 et x_1 sont remplacés par x_1 et x_0 respectivement.

Supposons que $A(x, D)$ soit holomorphe sur $X = \{x; | x_j | \leq R_j, 0 \leq j \leq n\}$ et que $G(x, D)$ soit de la forme:

$G(x, D) = N_m(x, D_0, D_{x''})$ où $N_m(x, D_0, D_{x''})$ est un opŕateur différentiel d'ordre m, indépendant de D_1 et il ne contient pas D_0^m.

Considérons le problème de Cauchy

$$
(2.1)_1 \qquad D_0^m u(x) = A(x, D)u(x) + v(x), \ \ D_0^k u(0, x') = w_k(x'), \ \ 0 \leq k \leq m - 1,
$$

où $v(x), w_k(x'), 0 \leq k \leq m - 1$, sont holomorphes sur X.

Il existe alors des constantes $R'_j(0 < R'_j \leq R_j), j = 0$ et $2 \leq j \leq n$, telles que le problème $(2.1)_1$ possède une unique solution holomorphe sur $\{x; | x_0 | \leq R'_0, | x_1 | \leq R_1, | x_j | \leq R'_j, 2 \leq j \leq n\}$. (Aussi voir [HT1]).

Preuve de la Proposition 2.1. On a

$$H_X(\xi) \leq N \left[\sum_{k=p}^{m} | \xi' |^k \xi_0^{m-k} - \xi_1^p \xi_0^{m-p} \right], \qquad \xi \in \mathbf{R}_+^{n+1}, \ | \xi' | = \sum_{k=1}^{n} \xi_k,$$

où le module des coefficients de $G(x, D)$ sur X est inférieur à une constante $N(\geq 0)$.

Pour tout $\zeta_j \geq 1/R_j, 2 \leq j \leq n$, choisissons des nombres $\zeta_i \geq 1/R_i, i = 0, 1$, tels que

$$\left(\frac{1}{\zeta_1^p \zeta_0^{m-p}}\right) H_X(\zeta) \leq N \left[\left(1 + \frac{| \zeta'' |}{\zeta_1}\right)^p \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{m-p} \left(\frac{| \zeta' |}{\zeta_0}\right)^k \right\} - 1 \right] < 1 - \rho.$$

Ceci démontre (2.2).

En remplaçant u et v par $u - w$ et $v - (D_1^p D_0^{m-p} - A)w$, où $w(x) = \sum_{k=0}^{m-p-1} w_{k,0}(x') x_0^k / k! + \sum_{h=0}^{p-1} w_{m-p,h}(x_0, x'') x_0^{m-p} x_1^h / (m-p)! h!$, nous pouvons nous ramener au cas de $w_{k,0}(x') = 0, 0 \leq k \leq m-p-1, w_{m-p,h}(x_0, x'') = 0, 0 \leq h \leq p-1$.

Nous utilisons une méthode de fonctions majorantes. Pour des séries formelles $f(x) = \sum_\alpha f_\alpha x^\alpha, F(x) = \sum_\alpha F_\alpha x^\alpha$, si $\forall \alpha, | f_\alpha | \leq F_\alpha$, on note $f(x) \ll F(x)$. Posons $z = \sum_{j=0}^{n} \zeta_j x_j$, et

$$0 < r < r_* < r_0, \qquad \eta_0 = 1/r_0 < \eta_* = 1/r_* < \eta = 1/r. \tag{2.3}$$

Écrivons $A(x, D) = G(x, D) + \sum_{k=1}^{m} B_{k-1}(x, D_{x'}) D_0^{m-k}$, où $B_{k-1}(x, D_{x'})$ est un opérateur différentiel d'ordre $k - 1$, holomorphe sur $X_\rho \cap \{x_0; |x_0| < r_0\}$.

On a d'abord $v(x) \ll \dfrac{V}{(1 - \eta x_0)(1 - z/\rho_1)}$, où $V = \max[|v(x)|; x \in X_\rho \cap \{x_0; | x_0 | \leq r_*\}]$ et $\rho_1 (0 < \rho_1 < \rho)$ est une constante quelconque.

Si $u(x) \ll U(x_0, z)$, on a

$$\begin{aligned} A(x, D)u(x) \ll{} & \frac{1}{1 - z} \sum_{k=p}^{m} \|N_k(\cdot, \zeta')\|_X (D_0 + \zeta_0 D_z)^{m-k} D_z^k U(x_0, z) \\ & + \frac{1}{(1 - \eta_* x_0)(1 - z/\rho)} \left[\sum_{k=1}^{m} \|B_{k-1}(\cdot, \zeta')\|_X \right. \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\times \; (D_0 + \zeta_0 D_z)^{m-k} D_z^{k-1} \Big] \, U(x_0, z)$$
$$+ \frac{V}{(1-\eta x_0)(1 - z/\rho_1)}.$$

On rappelle le Lemme suivant dans [HLW].

Lemme 2.1. *Soit* $\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, z \in \boldsymbol{C}$, *une série formelle à coefficient* $c_n \geq 0$ *telle que* $0 \ll (1 - \tau z)\Phi(z)$, $\tau > 0$. *On a alors*

(i) *Si* $\tau > \tau' > 0$, *alors* $\dfrac{1}{1 - \tau' z}\Phi(z) \ll \dfrac{1}{(1 - \tau'/\tau)}\Phi(z)$.

(ii) $\tau^k \Phi(z) \ll D_z^k \Phi(z)$, *pour* $\forall k \geq 0$.

(iii) $0 \ll (1 - \tau z) D_z^k \Phi(z)$, *pour* $\forall k \geq 0$.

Supposons que

$$(2.5) \qquad (1 - \eta x_0) U(x_0, z) \gg 0 \quad \text{et} \quad (1 - z/\rho_1) U(x_0, z) \gg 0.$$

On a alors, vu (2.4) et le Lemme 2.1,

$$(2.6) \qquad A(x, D)u(x)$$
$$\ll \frac{1}{1-\rho_1} \sum_{k=p}^{m} \frac{1}{\zeta_0^{k-p}} \|N_k(\cdot, \zeta')\|_X (D_0 + \zeta_0 D_z)^{m-p} D_z^p U(x_0, z)$$
$$+ \frac{1}{(1 - \eta_*/\eta)(1 - \rho_1/\rho)} B(\zeta)(D_0 + \zeta_0 D_z)^{m-1} U(x_0, z)$$
$$+ \frac{V}{(1 - \eta x_0)(1 - z/\rho_1)},$$

où $B(\zeta)(\geq 0)$ est une fonction de ζ.

Par un raisonnement classique, par exemple, le Théorème 1 dans [HT2], on a $u(x) \ll U(x_0, z)$, pour $z = \sum_{j=0}^{n} \zeta_j x_j$, quand $U(x_0, z)$ vérifie

$$(2.7) \qquad \zeta_1^p (D_0 + \zeta_0 D_z)^{m-p} D_z^p U(x_0, z)$$
$$\gg \frac{1}{(1-\rho_1)\zeta_0^{m-p}} H_X(\zeta)(D_0 + \zeta_0 D_z)^{m-p} D_z^p U(x_0, z)$$
$$+ \frac{1}{(1 - \eta_*/\eta)(1 - \rho_1/\rho)} B(\zeta)(D_0 + \zeta_0 D_z)^{m-1} U(x_0, z)$$
$$+ \frac{V}{(1 - \eta x_0)(1 - z/\rho_1)}.$$

Donc, vu (2.2), pour avoir (2.7), il suffit que $U(x_0,z)$ vérifie

$$\begin{aligned}(D_0+\zeta_0 D_z)^{m-p}D_z^p U(x_0,z) \gg{}& \frac{1-\rho}{1-\rho_1}(D_0+\zeta_0 D_z)^{m-p}D_z^p U(x_0,z)\\ &+\frac{1}{\zeta_1^p(1-\eta_*/\eta)(1-\rho_1/\rho)}\\ &\times B(\zeta)(D_0+\zeta_0 D_z)^{m-1}U(x_0,z)\\ &+\frac{V}{\zeta_1^p(1-\eta x_0)(1-z/\rho_1)},\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}(D_0+\zeta_0 D_z)^{m-p}&D_z^p U(x_0,z)\\ &\gg B_0(\zeta)(D_0+\zeta_0 D_z)^{m-1}U(x_0,z)+\frac{VC_0(\zeta)}{(1-\eta x_0)(1-z/\rho_1)},\end{aligned}\tag{2.8}$$

avec la condition (2.5), où $B_0(\zeta)=\dfrac{1-\rho_1}{\zeta_1^p(\rho-\rho_1)(1-\eta_*/\eta)(1-\rho_1/\rho)}B(\zeta)$ et $C_0(\zeta)=(1-\rho_1)/\zeta_1^p(\rho-\rho_1)$.

Nous rappelons le Lemme suivant dans [HLW].

Lemme 2.2. *Notons* $\Phi_{-k}(z)=\dfrac{z^k}{k!(1-z/\rho_1)}$, $k\geq 0, z\in \boldsymbol{C}$.

On a alors

(i) $(1-z/\rho_1)\Phi_{-k}(z)\gg 0$, *pour* $\forall k\geq 0$.

(ii) $\Phi_{-k}(z)\ll D_z^\ell \Phi_{-k-\ell}(z)$, *pour* $\forall k,\ell\geq 0$.

(iii) *Soit* $0<\rho_2<\rho_1$. *Il existe alors une constante* $c(\geq 0)$ *ne dépendant que de* ρ_1,ρ_2 *telle que pour tout* $k,\ell\geq 0$, *on ait* $\mid D_z^\ell\Phi_{-k}(z)\mid\leq c^{k+\ell+1}\ell!/k!$, *pour* $\mid z\mid\leq\rho_2$.

D'abord considérons le cas de $p=0$ dans (2.8). Considérons

$$(D_0+\zeta_0 D_z)\hat U(x_0,z)\gg B_0(\zeta)\hat U(x_0,z)+\frac{VC_0(\zeta)}{(1-\eta x_0)(1-z/\rho_1)}.\tag{2.9}$$

Notons $\theta_k(x_0)=\dfrac{\eta^k k!}{(1-\eta x_0)^{k+1}}$, pour tout $k\geq 0$.
Posons $\hat U(x_0,z)=VC(\zeta)\theta_0(x_0)\Phi_{-1}(z)e^{B_0(\zeta)x_0}$, où $C(\zeta)=C_0(\zeta)/\zeta_0$. Vu le Lemme 2.1 et 2.2, on a

$$\begin{aligned}&(D_0+\zeta_0 D_z)\hat U(x_0,z)\\ &\gg B_0(\zeta)\hat U(x_0,z)+e^{B_0(\zeta)x_0}VC(\zeta)\theta_0(x_0)(\eta\Phi_{-1}(z)+\zeta_0 D_z\Phi_{-1}(z))\\ &\gg B_0(\zeta)\hat U(x_0,z)+\frac{VC_0(\zeta)}{(1-\eta x_0)(1-z/\rho_1)}.\end{aligned}$$

$\hat{U}(x_0,z)$ satisfait donc (2.9). De plus, vu (2.9), on a alors

$$\begin{aligned}&(D_0+\zeta_0 D_z)^m\hat{U}(x_0,z)\\&\gg B_0(\zeta)(D_0+\zeta_0 D_z)^{m-1}\hat{U}(x_0,z)+VC_0(\zeta)(D_0+\zeta_0 D_z)^{m-1}\\&\quad\times\frac{1}{(1-\eta x_0)(1-z/\rho_1)}\\&\gg B_0(\zeta)(D_0+\zeta_0 D_z)^{m-1}\hat{U}(x_0,z)+\frac{VC_0(\zeta)(\eta+\zeta_0/\rho_1)^{m-1}}{(1-\eta x_0)(1-z/\rho_1)}.\end{aligned}$$

En choisissant

$$U(x_0,z)=\frac{1}{(\eta+\zeta_0/\rho_1)^{m-1}}\hat{U}(x_0,z), \tag{2.10}$$

on voit que $U(x_0,z)$ vérifie (2.5), (2.8) dans le cas de $p=0$.

Ensuite considérons le cas de $p\geq 1$ dans (2.8).

Considérons

$$\begin{aligned}D_z^p\hat{U}(x_0,z)\gg{}&B_0(\zeta)(D_0+\zeta_0 D_z)^{p-1}\hat{U}(x_0,z)\\&+\frac{VC_0(\zeta)}{(1-\eta x_0)(1-z/\rho_1)}.\end{aligned} \tag{2.11}$$

Nous résolvons (2.11) successivement comme suit.

$$D_z^p\hat{U}_0(x_0,z)\gg\frac{VC_0(\zeta)}{(1-\eta x_0)(1-z/\rho_1)}, \tag{2.12}$$

$$\text{pour } k\geq 1, D_z^p\hat{U}_k(x_0,z)\gg B_0(\zeta)(D_0+\zeta_0 D_z)^{p-1}\hat{U}_{k-1}(x_0,z). \tag{2.13}$$

Posons

$$\hat{U}_0(x_0,z)=VC_1(\zeta)\theta_0(x_0)\Phi_{-p}(z). \tag{2.14}$$

Vu le Lemme (2.2), si

$$C_1(\zeta)\geq C_0(\zeta), \tag{2.15}$$

$\hat{U}_0(x_0,z)$ vérifie alors (2.12). Posons pour $k\geq 1$

$$\hat{U}_k(x_0,z)=VC_1(\zeta)^{k+1}(D_0+\zeta_0 D_z)^{k(p-1)}\theta_0(x_0)\Phi_{-(k+1)p}(z). \tag{2.16}$$

Vu le Lemme 2.2, si

$$C_1(\zeta)\geq B_0(\zeta), \tag{2.17}$$

(2.13) est satisfait, donc si

$$C_1(\zeta)=\max\{C_0(\zeta),B_0(\zeta)\}, \tag{2.18}$$

(2.12) et (2.13) sont alors satisfaits. D'après le Lemme 2.2, on a pour $\{(x_0, z);\ | x_0 | < 1/\eta, \|z\| \leq \rho_2\}, \|z\| = \sum_{j=0}^{n} \zeta_j \mid x_j \mid, 0 < \rho_2 < \rho_1$,

$$\begin{aligned}
&|\hat{U}_k(x_0, z)| \\
&\leq VC_1(\zeta)^{k+1} \sum_{\ell=0}^{k(p-1)} \frac{(kp-k)!}{(kp-k-\ell)!\ell!} \zeta_0^{k(p-1)-\ell} \\
&\quad \times \left| D_0^\ell D_z^{k(p-1)-\ell} \theta_0(x_0) \Phi_{-(k+1)p}(z) \right| \\
&\leq VC_1(\zeta)^{k+1} \sum_{\ell=0}^{k(p-1)} \frac{(kp-k)!}{(kp-k-\ell)!\ell!} \frac{\zeta_0^{k(p-1)-\ell} \ell!\, \eta^\ell}{(1-\eta \mid x_0 \mid)^{\ell+1}} \\
&\quad \times c^{k(p-1)-\ell+(k+1)p+1} \frac{[kp-k-\ell]!}{[(k+1)p]!} \\
&\leq VC_1(\zeta)^{k+1} \sum_{\ell=0}^{k(p-1)} \frac{(kp-k)! \zeta_0^{k(p-1)-\ell} \eta^\ell c_1^{k(2p-1)+p+1}}{(kp+p)!(1-\eta \mid x_0 \mid)^{\ell+1}} \\
&\leq VC_1(\zeta)^{k+1} k(p-1) \frac{c_2^{k(p-1)} c_1^{k(2p-1)+p+1}}{(k+p)!(1-\eta \mid x_0 \mid)^{k(p-1)+1}},
\end{aligned}$$

avec une constante $c(\geq 0)$ du Lemme 2.2 et $c_1 = \max\{c, 1\}, c_2 = \max\{\zeta_0, \eta, 1\}$.

La série $\hat{U}(x_0, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{U}_k(x_0, z)$ converge uniformément sur $\{(x_0, z);\ | x_0 | < 1/\eta, \|z\| \leq \rho_2\}$. Comme dans le cas de $p = 0$, vu (2.11), on a

$$\begin{aligned}
(D_0 + \zeta_0 D_z)^{m-p} D_z^p \hat{U}(x_0, z) &\gg B_0(\zeta)(D_0 + \zeta_0 D_z)^{m-1} \hat{U}(x_0, z) \\
&\quad + VC_0(\zeta)(D_0 + \zeta_0 D_z)^{m-p} \frac{1}{(1-\eta x_0)(1-z/\rho_1)} \\
&\gg B_0(\zeta)(D_0 + \zeta_0 D_z)^{m-1} \hat{U}(x_0, z) \\
&\quad + \frac{VC_0(\zeta)(\eta + \zeta_0/\rho_1)^{m-p}}{(1-\eta x_0)(1-z/\rho_1)}.
\end{aligned}$$

En choisissant $U(x_0, z) = \dfrac{1}{(\eta + \zeta_0/\rho_1)^{m-p}} \hat{U}(x_0, z)$, on voit que $U(x_0, z)$ vérifie (2.5), (2.8) avec $p \geq 1$. Puisque $\rho_2, \rho_1, \eta, \eta_*$ sont des constantes quelconques vérifiant $0 < \rho_2 < \rho_1 < \rho$ et $\eta_0 < \eta_* < \eta$, on démontre la Proposition 2.1.

Preuve de la Remarque 2.1. En effet, une fonction spectrale $\|G(\cdot, \xi)\|_X$ de $G(x, D)$ sur X est indépendant de ξ_1.

Le Proposition 2.1 et sa preuve donnent immédiatement le Corollaire suivant.

Corollaire 2.1. *Dans la Proposition* 2.1 *avec* $p = 0$, *supposons que* $A(x, D), v(x), w_k(x'), 0 \leq k \leq m-1$, *sont holomorphes sur* $X_\rho \cap \{x_0; | x_0 | < r_0\}$ *et* $G(x, D)$ *est holomorphe sur* X.

Considérons le problème de Cauchy

$$(2.1)_1 \quad D_0^m u(x) = A(x,D)u(x) + v(x), \quad D_0^k u(0,x') = w_k(x'), \quad 0 \le k \le m-1.$$

Pour tout $\zeta_j \ge 1/R_j, 1 \le j \le n$, *il existe un nombre* $\zeta_0 \ge 1/R_0$ *tel que* $\zeta_0^{-m} H_X(\zeta) \le 1-\rho$.

Le problème $(2.1)_1$ *possède une unique solution* $u(x)$ *holomorphe sur* $\{x; \sum_{j=0}^n \zeta_j |\, x_j \,| < \rho\} \cap \{x_0; |x_0| < r_0\}$ *et, en particulier, un germe* u *de la solution holomorphe sur* $\{x; |x_0| < \min\{\rho/\zeta_0, r_0\}, x' = 0\}$.

Cette Proposition 2.1 donne le Corollaire suivant.

Corollaire 2.2. *Supposons que* $A(x,D)$ *satisfasse l'hypothèse dans la Proposition* 2.1.

Dans le problème (2.1), *pour* $\zeta_j, 0 \le j \le n$ *satisfaisant* (2.2), *les données* $v(x), w_{m-p,h}(x_0, x''), 0 \le h \le p-1$, *et* $w_{k,0}(x'), 0 \le k \le m-p-1$, *sont des fonctions holomorphes sur* $\{x; \sum_{j=0}^n \zeta_j |x_j| < \rho\} \cap \{x_0; |x_0| < r_0\}$ *et* $\{x'; \sum_{j=1}^n \zeta_j |x_j| < \rho\}$ *respectivement.*

La solution $u(x)$ *du problème* (2.1) *est alors holomorphe sur* $\{x; \sum_{j=0}^n \zeta_j \mid x_j \mid < \rho\} \cap \{x_0; \mid x_0 \mid < r_0\}$.

Note 2.2. Dans le problème (2.1), pour $\rho', (0 < \rho' \le \rho)$, et $r_0', (0 < r_0' \le r_0)$, les données $v(x), w_{m-p,h}(x_0, x''), 0 \le h \le p-1$, et $w_{k,0}(x'), 0 \le k \le m-p-1$, sont des fonctions holomorphes sur $\{x; \sum_{j=0}^n \zeta_j \mid x_j \mid < \rho'\} \cap \{x_0; \mid x_0 \mid < r_0'\}$ et $\{x'; \sum_{j=1}^n \zeta_j \mid x_j \mid < \rho'\}$ respectivement.

La solution $u(x)$ du problème (2.1) est alors holomorphe sur $\{x; \sum_{j=0}^n \zeta_j \mid x_j \mid < \rho'\} \cap \{x_0; \mid x_0 \mid < r_0'\}$.

En effet, on a $(1/\zeta_1^p \zeta_0^{m-p}) H_X(\zeta) \le 1 - \rho \le 1 - \rho'$.

Preuve du Corollaire 2.2. Nous employons le lemme suivant [W].

Lemme 2.3 ([W]). *Soit* $f(x)$ *une fonction holomorphe sur* $\{x; \sum_{j=0}^n \xi_j \mid x_j \mid \le 1\}, \xi \in \boldsymbol{R}_+^{n+1}$.

On a alors $f(x) \ll \dfrac{c(n+1,f)}{1-\sum_{j=0}^n \xi_j x_j}$, *où* $c(n+1,f)$ *est une constante ne dépendant que de* n *et de* $\sup\{\mid f(x) \mid; x \in$ *un voisinage de* $\{x; \sum_{j=0}^n \xi_j \mid x_j \mid \le 1\}\}$.

Lemme 2.4. *Soit* $f(x)$ *une fonction holomorphe sur* $\{x; \sum_{j=1}^n \xi_j \mid x_j \mid \le 1\} \cap \{x_0; \mid x_0 \mid \le 1/\eta\}, \xi' \in \boldsymbol{R}_+^n$ *et* $\eta > 0$.

On a alors

$$f(x) \ll \frac{c(n,f)}{(1-\eta x_0)(1-\sum_{j=1}^n \xi_j x_j)}.$$

Preuve du Lemme 2.4. Vu le Lemme 2.3, on a, pour $x_0, \mid x_0 \mid \leq 1/\eta, f(x) = \sum_\alpha D^\alpha_{x'} f(x_0,0) x'^\alpha/\alpha!$ et $\mid D^\alpha_{x'} f(x_0,0) \mid /\alpha! \leq c(n,f)\xi'^\alpha$. On a donc $D^\alpha_{x'} f(x_0,0) \ll c(n,f)\xi'^\alpha \alpha!/(1-\eta x_0)$. Ceci démontre le Lemme 2.4.

Preuve du Corollaire 2.2. En effet, nous pouvons nous ramener au cas de $w_{k,0}(x') = 0, 0 \leq k \leq m-p-1, w_{m-p,h}(x_0, x'') = 0, 0 \leq h \leq p-1$. D'après les Lemmes 2.3 et 2.4, on a $v(x) \ll \dfrac{c(n,v)}{(1-\eta x_0)(1-z/\rho_1)}$, où $z = \sum_{j=0}^n \zeta_j x_j, 0 < \eta = 1/r, 0 < r < r_* < r_0, \eta_0 = 1/r_0 < \eta_* = 1/r_* < \eta = 1/r, 0 < \rho_1 < \rho$. En suivant la preuve de la Proposition 2.1, où V est remplacé par $c(n,v)$, on obtient le Corollaire 2.2.

Nous allons démontrer la Proposition 1.3.

Preuve de la Proposition 1.3.
(i) Le cas de $p \geq 1$.
D'après l'hypothèse, nous pouvons choisir pour une fonction spectrale $H(\xi)$ de $G(x,D)$ sur $D_\omega \times \{x'; \|x'\| \leq R\}$:
$H(\xi) = N\big[\sum_{k=p}^m \mid \xi' \mid^k \xi_0^{m-k} - \xi_1^p \xi_0^{m-p}\big], \xi \in \mathbf{R}^{n+1}_+$, où le module des coefficients de $G(x,D)$ sur $D_\omega \times \{x'; \|x'\| \leq R\}$ est inférieur à une constante $N(\geq 0)$.
Choisissons $\zeta = (\zeta_0, \dots, \zeta_n) \in \mathbf{R}^{n+1}_+$, tel que $\zeta_0 \geq \zeta_1 \geq \zeta_2 = \cdots = \zeta_n$.
On a alors

$$\left(\frac{1}{\zeta_1^p \zeta_0^{m-p}}\right) H(\zeta) \leq N \left[\left(1 + \frac{\mid \zeta'' \mid}{\zeta_1}\right)^p - 1 + \left(\frac{\mid \zeta' \mid}{\zeta_1}\right)^p \left\{\sum_{k=1}^{m-p} \left(\frac{\mid \zeta' \mid}{\zeta_0}\right)^k\right\}\right]$$
$$\leq N\left(pn^p \frac{\zeta_2}{\zeta_1} + mn^m \frac{\zeta_1}{\zeta_0}\right), \text{ car on a } (1+x)^p - 1 \leq pn^{p-1}x, 0 \leq x \leq n-1.$$

Posons $L \geq \max\{2N(pn^p + mn^m), 1\}$. L est donc une constante ne dépendant que de G, R, ω. Choisissons $\zeta_2 = \cdots = \zeta_n = 1/R$, $\zeta_1 = L\zeta_2$, $\zeta_0 = \max\{L\zeta_1, 2/\omega\} = \max\{L^2\zeta_2, 2/\omega\}$.
On a alors $(1/\zeta_1^p \zeta_0^{m-p}) H(\zeta) \leq 1/2$.
Prenons $\omega_0 = \rho/4\zeta_0 \leq \min\{\rho R/4L^2, \omega/8\}$ et un point de base $x_0^{(0)} \in \dot{D}_{\omega_0}$, où $r = \rho R, 0 < \rho \leq 1/2$.
Soit $\gamma : x_0 = x_0(s), s \in [0, 2\omega_0]$, un chemin d'origine $x_0^{(0)}$ et d'extrémité x_0 un point quelconque dans $\dot{D}_{\omega_0}$, s étant la longeur de γ.

Construisons une variété mobile $S(s)$ et un ensemble $W(s)$:

$$S(s) = \left\{ x; x_0 = x_0(s), \sum_{j=1}^{n} \zeta_j \mid x_j \mid < \rho(s) \right\},$$

$$W(s) = \left\{ x; \zeta_0 \mid x_0 - x_0(s) \mid + \sum_{j=1}^{n} \zeta_j \mid x_j \mid < \rho(s) \right\} \\ \cap \{ x_0; \mid x_0 - x_0(s) \mid < \mid x_0(s) \mid \},$$

où $\rho(s) = \rho - \zeta_0 s$.
Pour $s_1 (> s)$ voisin de s, si $\mid x_0(s') - x_0(s) \mid < \mid x_0(s) \mid$ pour tout $s' \in [s, s_1]$, on a $S(s') \subset W(s)$, car $\mid x_0(s') - x_0(s) \mid \leq s' - s$, et $\rho(s) - \zeta_0(s' - s) = \rho(s')$.
Notons que $v(x), w_{m-p,h}(x_0, x''), 0 \leq h \leq p - 1$, sont holomorphes sur $W(s)$.
D'après le Corollaire 2.2, si la solution $u(x)$ du problème (1.7) est holomorphe sur $S(s)$, elle est holomorphe sur $\bigcup_{s \leq s_2 \leq s_1} S(s_2)$. Elle est donc holomorphe sur $\bigcup_{0 \leq s \leq 2\omega_0} S(s)$. La solution $u(x)$ du problème (1.7) peut se prolonger analytiquement sur $\mathcal{R}(\dot{D}_{\omega_0}) \times \{x'; \sum_{j=1}^{n} \zeta_j |x_j| < \rho(2\omega_0) = \rho - 2\zeta_0\omega_0\}$. Puisque $\rho - 2\zeta_0\omega_0 = \rho/2$, $u(x)$ est holomorphe sur $\mathcal{R}(\dot{D}_{\omega_0}) \times \{x'; |x_1| \leq r/2nL, \|x''\| \leq r/2n\}$. Ceci démontre le cas (ii) de la Proposition 1.3.
(ii) Le cas de $p = 0$.
Choisissons $\zeta = (\zeta_0, \dots, \zeta_n) \in \mathbf{R}_+^{n+1}$, tel que $\zeta_0 \geq \zeta_1 = \cdots = \zeta_n$.
On a alors

$$\left(\frac{1}{\zeta_0^m} \right) H(\zeta) \leq N \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\mid \zeta' \mid}{\zeta_0} \right)^k \leq N m n^m \frac{\zeta_1}{\zeta_0}.$$

Posons $L \geq \max\{2Nmn^m, 1\}$. En choisissant $\zeta_1 = \cdots = \zeta_n = 1/R, \zeta_0 = \max\{L\zeta_1, 2/\omega\}$, on a $(1/\zeta_0^m) H(\zeta) \leq 1/2$.
Prenons $\omega_0 = \rho/4\zeta_0 \leq \min\{\rho R/4L, \omega/8\}$ et un point de base $x_0^{(0)} \in \dot{D}_{\omega_0}$, où $r = \rho R, 0 < \rho \leq 1/2$.
Par le mème raisonnement que dans le cas $p \geq 1$, on voit que la solution $u(x)$ du problème (1.6) est holomorphe sur $\mathcal{R}(\dot{D}_{\omega_0}) \times \{x'; \sum_{j=1}^{n} \zeta_j \mid x_j \mid < \rho - 2\zeta_0\omega_0\}$.
Ceci démontre le cas (i) de la Proposition 1.3.

[L] a etudié un prolongement analytique de la solution du problème de Cauchy par le procédé de la variété mobile. En rappelant des raisonnements de [L], [HT1] et [HLT], et en utilisant la Proposition 2.1, nous avons

Proposition 2.2. *Soient $\mathcal{D}$ un domaine dans $\boldsymbol{C}$ et $x_0^{(0)} \in \mathcal{D}$ un point de base.*

Soit $A(x,D) = \sum_{\substack{|\alpha|\le m\\ \alpha_0<m}} A_\alpha(x)D^\alpha$ un opérateur différentiel d'ordre m, holomorphe sur $\mathcal{R}(\mathcal{D}) \times \{x'; \mid x_j \mid \le r_j, 1 \le j \le n\}$.

Étudions le problème de Cauchy

(2.19)
$$D_0^m u(x) = A(x,D)u(x) + v(x), \quad D_0^k u(x_0^{(0)}, x') = w_k(x'), \qquad 0 \le k \le m-1,$$

où $v(x), w_k(x'), 0 \le k \le m-1$, sont des fonctions holomorphes sur $\mathcal{R}(\mathcal{D}) \times \{x'; \mid x_j \mid \le r_j, 1 \le j \le n\}$.

Soient γ un chemin d'origine $x_0^{(0)}$ dans $\mathcal{D}$: $x_0 = t(s), (0 \le s \le s_0), s$ étant la longueur de γ, et $r_j(s)(>0), 1 \le j \le n$, des fonctions de classe C^1, $dr_j(s)/ds < 0$ sur $[0, s_0]$ et $r_j(0) = r_j, 1 \le j \le n$.

Écrivons $H(s;\xi) = \sum_{\substack{|\alpha|=m\\ \alpha_0<m}} \sup_{\substack{|x_j|\le r_j(s),\\ 1\le j\le n}} \mid A_\alpha(t(s), x') \mid \xi^\alpha$, $\xi \in \boldsymbol{R}_+^{n+1}$. Si l'on a pour $s \in [0, s_0]$,

$$H\left(s; 1, (-1)/\rho \frac{dr_1(s)}{ds}, \dots, (-1)/\rho \frac{dr_n(s)}{ds}\right) < 1 - \rho, \tag{2.20}$$

$\rho\,(0 < \rho < 1)$ étant une constante, la solution $u(x)$ du problème (2.19) est holomorphe sur $\{x; x_0 = t(s), \mid x_j \mid \le r_j(s), 1 \le j \le n, s \in [0, s_0]\}$.

Note 2.3. En utilisant cette Proposition 2.3, on peut démontrer aussi le cas (i) de $p = 0$ de la Proposition 1.3.

Preuve. Prenons des fonctions $r_j(s)(>0), 1 \le j \le n$, vérfiant (2.20).

D'abord, nous notons qu'il existe une fonction $\delta(\epsilon, s)(>0)$ pour $\epsilon(>0)$telle qu'on a

$$\begin{aligned} H_\epsilon(s;\xi) &= \sum_{\substack{|\alpha|=m\\ \alpha_0<m}} \sup_{\substack{|x_0-t(s)|\le\epsilon\\ |x_j|\le r_j(s), 1\le j\le n}} \mid A_\alpha(x) \mid \xi^\alpha \\ &\le H(s;\xi) + \delta(\epsilon, s) \sum_{k=1}^n \mid \xi' \mid^k \xi_0^{m-k}, \qquad \xi \in \mathbf{R}_+^{n+1}, \end{aligned} \tag{2.21}$$

où $0 < \epsilon \le \text{dist.}(\partial\mathcal{D}, \gamma)/2$ et quand $\epsilon \to +0$, $\delta(\epsilon, s) \to 0$ uniformément sur $s \in [0, s_0]$.

Construisons une variété mobile $S(s)$ et un ensemble $W(s)$:

$$S(s) = \{x; x_0 = t(s), |x_j| \le r_j(s), 1 \le j \le n\} \text{ et}$$

$$W(s)=\{x;|x_0-t(s)|\leq \sup(\rho/\zeta_0),\ |\,x_j\,|\leq r_j(s), 1\leq j\leq n\},$$

où $\zeta_0(\geq 1/\epsilon)$ vérifie $\zeta_0^{-m}H_\epsilon(s;\zeta)<1-\rho$, pour $\zeta_j\geq 1/(r_j(s)-|x_j|), 1\leq j\leq n$. Ici si $|x_j|=r_j(s)$, alors $1/\zeta_0=0$.

Soit $x=(x_0,x')\in S(s_1)$: $x_0=t(s_1), |x_j|\leq r_j(s_1), 1\leq j\leq n$, pour $s_1(>s), 0<s_1-s<h$, $h(>0)$ étant suffisamment petit.

On a $|t(s_1)-t(s)|\leq (s_1-s)$, et pour $\eta_0=\rho/(s_1-s)$, $\eta_j=1/(r_j(s)-r_j(s_1))$, $1\leq j\leq n$,

$$\begin{aligned}(2.22)\qquad &\eta_0^{-m}H_\epsilon(s;\eta)\\ &=H_\epsilon\left(s;1,\frac{s_1-s}{\rho[r_1(s)-r_1(s_1)]},\dots,\frac{s_1-s}{\rho[r_n(s)-r_n(s_1)]}\right)\\ &=H_\epsilon\left(s;1,(-1)/\rho\frac{dr_1(s_1')}{ds},\dots,(-1)/\rho\frac{dr_n(s_n')}{ds}\right),\end{aligned}$$

où $s\leq s_j'\leq s_1, 1\leq j\leq n$. Puisque la fonction $H_\epsilon(s;1,\zeta_1,\dots,\zeta_n)$ est uniformément continue en ζ' sur un ensemble compact, et vu (2.20), (2.21), pour $h(>0),\epsilon(>0)$ suffisamment petits, on a alors

$$\begin{aligned}(2.22)\qquad &<H_\epsilon\left(s;1,(-1)/\rho\frac{dr_1(s)}{ds},\dots,(-1)/\rho\frac{dr_n(s)}{ds}\right)+\kappa\\ &<H\left(s;1,(-1)/\rho\frac{dr_1(s)}{ds},\dots,(-1)/\rho\frac{dr_n(s)}{ds}\right)+2\kappa\\ &<1-\rho,\ \kappa(>0)\text{ étant une constante suffisamment petite.}\end{aligned}$$

Il en résulte que $S(s_1)\subset W(s)$. D'après le Corollaire 2.1, si la solution $u(x)$ de (2.19) est holomorphe sur $S(s)$, alors elle est holomorphe sur $\bigcup_{s\leq s_2\leq s_1}S(s_2)$. Elle est donc holomorphe sur $\bigcup_{0\leq s\leq s_0}S(s)$. La solution $u(x)$ du problème (2.19) peut se prolonger analytiquement sur $\{x;x_0=t(s),|x_j|\leq r_j(s),1\leq j\leq n, s\in[0,s_0]\}$. Ceci démontre la Proposition 2.2.

La Proposition 2.2 donne le Corollaire suivant.

Corollaire 2.3. *Soient $\mathcal{D}$ un domaine dans $\{t;t\in \boldsymbol{C}\}$ et $t_0\in\mathcal{D}$ un point de base.*

Considérons $\mathcal{A}(t,y,x'',D_t,D_y,D_{x''})$ un opérateur différentiel d'ordre m et $m-1$ en D_t, holomorphe sur $\mathcal{R}(\mathcal{D})\times\{(y,x'');\Re y\leq R_1,\|x''\|\leq R_2\}, R_1$ étant un nombre réelle et $R_2>0$. Sa partie principale est de la forme:

$\mathcal{H}(t,y,x'',D_t,D_y,e^yD_{x''})$, où $\mathcal{H}(t,y,x'',\tau,\eta,\xi'')$ est un polynôme homogène de degré m en τ,η,ξ'' et de degré $m-1$ en τ, à coefficients holomorphes et bornés sur $\mathcal{R}(\mathcal{D})\times\{(y,x'');\Re y\leq R_1,\|x''\|\leq R_2\}$.

Soit γ un chemin d'origine t_0 dans $\mathcal{D}$: $t = t(s), 0 \le s \le s_0$, s étant la longueur de γ.

Étudions le problème de Cauchy

$$\begin{aligned}(2.23)\quad & D_t^m u(t,y,x'') = \mathcal{A}(t,y,x'',D_t,D_y,D_{x''})u(t,y,x'') + v(t,y,x''),\\ & D_t^k u(t_0,y,x'') = w_k(y,x''), \qquad 0 \le k \le m-1,\end{aligned}$$

où $v(t,y,x''), w_k(y,x''), 0 \le k \le m-1$, sont des fonctions holomorphes sur $\mathcal{R}(\mathcal{D}) \times \{(y,x''); \Re y \le r_1, \|x''\| \le r_2\}, r_1 \le R_1, 0 < r_2 \le R_2$.

Il existe alors des constantes $r_1^{(0)}, (r_1^{(0)} \le r_1), r_2^{(0)}, (0 < r_2^{(0)} \le r_2)$ ne dépendant que de $\mathcal{H}, \gamma, R_1, R_2$ et r_1, r_2 telles que la solution $u(t,y,x'')$ du problème (2.23) peut se prolonger analytiquement sur $\gamma \times \{(y,x''); \Re y \le r_1^{(0)}, \|x''\| \le r_2^{(0)}\}$.

Note 2.4. Si le polynôme $\mathcal{H}(t,y,x'',\tau,\eta,\xi'')$ est indépendant de η ou bien ξ'', alors on peut prendre $r_1^{(0)} = r_1$ ou bien $r_2^{(0)} = r_2$ respectivement.

Preuve. Nous pouvons choisir pour une fonction spectrale $H(\tau,\eta,\xi'')$ d'opérateur différentiel $\mathcal{H}(t,y,x'',D_t,D_y,e^y D_{x''})$ sur $\mathcal{R}(\mathcal{D}) \times \{(y,x''); \Re y \le R_1, \|x''\| \le R_2\}$:

$H(\tau,\eta,\xi'') = H_0\left[(\tau+\eta+e^{R_1} \mid \xi'' \mid)^m - \tau^m\right]$, $(\tau,\eta,\xi'') \in \mathbf{R}_+^{n+1}$, où le module des coefficients du polynôme $\mathcal{H}(t,y,x'',\tau,\eta,\xi'')$ sur $\mathcal{R}(\mathcal{D}) \times \{(y,x''); \Re y \le R_1, \|x''\| \le R_2\}$ est inférieur à $H_0 (\ge 0)$.

Nous considérons d'abord le cas de $H_0 > 0$.

Construisons une variété mobile $S(s)$ et un ensemble $W(s)$:

$$\begin{aligned} S(s) &= \{(t,y,x''); t = t(s), \Re y \le r_1 - As, \|x''\| \le r_2 - Bs\},\\ W(s) &= \left\{ \begin{matrix} (t,y,x''); \mid t - t(s) \mid \le \sup(1/2\tau), \\ \Re y \le r_1 - As, \|x''\| \le r_2 - Bs \end{matrix} \right\}, \end{aligned}$$

où $A(>0), B(>0)$ sont des constantes ultérieurement déterminées et $\tau\,(\ge 2/\mathrm{dist.}(\gamma,\partial\mathcal{D}))$ est un nombre satisfaisant

$$\frac{1}{\tau^m} H_0\left[(\tau+\eta+e^{R_1} \mid \xi'' \mid)^m - \tau^m\right] < \frac{1}{2}, \qquad \text{pour } \eta \ge \frac{1}{r_1 - As - \Re y},$$

$\xi_j \ge \dfrac{1}{r_2 - Bs - \mid x_j \mid}$, $2 \le j \le n$. Ici si $\Re y = r_1 - As$ ou bien $\mid x_j \mid = r_2 - Bs$, alors $1/\tau = 0$.

Choisissons pour A, B : $\dfrac{1}{A} < \dfrac{1}{4}\left[\left(1 + \dfrac{1}{2H_0}\right)^{1/m} - 1\right], \qquad B \le \dfrac{r_2}{2s_0}.$

Nous reprenons R_1 plus petit, sans modifier H_0, comme suit:

$$e^{R_1} < \frac{B}{4n}\left[\left(1+\frac{1}{2H_0}\right)^{1/m} - 1\right].$$

Nous avons alors $H_0\left[\left(1+\frac{2}{A}+\frac{2ne^{R_1}}{B}\right)^m - 1\right] < \frac{1}{2}$. Comme dans la preuve de la Proposition 2.2, nous avons donc, pour $s_1(> s)$ suffisamment voisin de s, $S(s_1) \subset W(s)$. D'après le Corollaire 2.1, la solution $u(t, y, x'')$ peut se prolonger analytiquement sur

$$\bigcup_{0\le s\le s_0} S(s) = \left\{ \begin{array}{l} (t, y, x''); t = t(s), \Re y \le r_1 - As, \\ \qquad\qquad\qquad \|x''\| \le r_2 - Bs, 0 \le s \le s_0 \end{array} \right\},$$

$r_2 - Bs_0 \ge r_2/2 > 0$. La solution $u(t, y, x'')$ est donc holomorphe sur $\{(t, y, x'');$ $t \in \gamma$, $\Re y \le r_1^{(0)}$, $\|x''\| \le r_2^{(0)}\}$, où $r_1^{(0)} = r_1 - As_0$, $r_2^{(0)} = r_2 - Bs_0 \ge r_2/2$.

De même, on peut démontrer facilement la Note 2.4 et donc le cas de $H_0 = 0$. Ceci démontre le Corollaire 2.3.

Nous rappelons le théorème de continuité de Hartogs sur le prolongement analytique de fonctions analytiques.

Proposition 2.3. *Soient Ω un domaine de $\boldsymbol{C}^n$ et Γ une region fermée dans $\boldsymbol{C}$ dont la frontière $\partial\Gamma$ est une courbe γ fermée simple et rectifiable de Jordan dans $\boldsymbol{C}: w = t(\sigma), \sigma \in [0, 1], t(0) = t(1)$. Supposons que*

(i) *une fonction $f(z, w)$ peut se prolonger analytiquement le long du chemin (z, γ) d'origine $(z, t(0))$ et d'extrémité $(z, t(1))$ pour tout $z \in \Omega$.*

(ii) *il existe une partie ouverte $\Delta \subset \Omega$ telle que la fonction $f(z, w)$ est holomorphe sur $\Delta \times \Gamma$.*

La fonction $f(z, w)$ est alors holomorphe sur $\Omega \times \Gamma$.

Note 2.5. Bien entendu, dans (i), ce n'est pas nécessaire que la fonction $f(z, w)$ est uniforme le long du chemin (z, γ) pour tout $z \in \Omega$.

Preuve. En effet, pour tout $(z, w) \in \Omega \times \Gamma^\circ$(l'intérieur de Γ), posons $F(z, w) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z, \zeta)}{\zeta - w} d\zeta.$

La fonction $F(z, w)$ est holomorphe sur $\Omega \times \Gamma^\circ$ et on a $F(z, w) = f(z, w)$ sur $\Delta \times \Gamma^\circ$.

Ceci démontre la Proposition 2.3.

§3. Preuve de la Proposition 1.2

En utilisant les résultats dans la Section 2, nous allons démontrer la Proposition 1.2 dans cette section. $u(x)$ est la solution du problème de Cauchy

$$a(x,D)u(x)=v(x),\quad D_0^k u(0,x')=w_k(x'),\qquad 0\le k\le m-1, \tag{3.1}$$

où $v(x), w_k(x'), 0\le k\le m-1$ sont des fonctions holomorphes sur $\mathcal{R}\{x; x_1\neq 0, \|x\|\le R\}$.

Vu la Remarque 1.2, nous pouvons supposer $0\le p<m$ dans la Proposition 1.2.

Effectuons le changement de variables

$$t=x_0/x_1,\qquad s=x_1. \tag{3.2}$$

On a donc

$$D_0=\frac{1}{s}D_t,\qquad D_1=\frac{1}{s}(-tD_t+sD_s). \tag{3.3}$$

Posons

$$\begin{aligned} &U(t,s,x'')=u(ts,s,x''),\qquad V(t,s,x'')=v(ts,s,x''),\\ &W_k(s,x'')=s^k w_k(s,x''),\qquad 0\le k\le m-1. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Le problème (3.1) se transforme alors en le problème

$$\begin{aligned} &a\left(ts,s,x'',\frac{1}{s}D_t,\frac{1}{s}[-tD_t+sD_s],D_{x''}\right)U(t,s,x'')=V(t,s,x''),\\ &D_t^k U(0,s,x'')=W_k(s,x''),\qquad 0\le k\le m-1. \end{aligned} \tag{3.5}$$

On a noté ici:

$$\begin{aligned} &a\left(ts,s,x'',\frac{1}{s}D_t,\frac{1}{s}[-tD_t+sD_s],D_{x''}\right)\\ &\quad=\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(ts,s,x'')\left(\frac{1}{s}D_t\right)^{\alpha_0}\left(\frac{1}{s}[-tD_t+sD_s]\right)^{\alpha_1}D_{x''}^{\alpha''}. \end{aligned}$$

Les coefficients d'opérateur et les données $V(t,s,x''), W_k(s,x''), 0\le k\le m-1$, sont holomorphes sur

$$\mathcal{R}\{(t,s,x''); |\,ts\,|\le R, 0<|\,s\,|\le R, \|x''\|\le R\}. \tag{3.6}$$

De plus, faisons le changement de variable

$$s = e^y. \tag{3.7}$$

On a alors

$$D_0 = e^{-y}D_t, \qquad D_1 = e^{-y}(-tD_t + D_y). \tag{3.8}$$

Le problème (3.5) se transforme en le problème

$$\begin{aligned}
&g(te^y, e^y, x'', D_t, -tD_t + D_y, e^y D_{x''})\hat{U}(t, y, x'') \\
&\quad + e^{my} b(te^y, e^y, x'', e^{-y}D_t, e^{-y}[-tD_t + D_y], D_{x''})\hat{U}(t, y, x'') \\
&\qquad = \hat{V}(t, y, x''), \\
&D_t^k \hat{U}(0, y, x'') = \hat{W}_k(y, x''), \qquad 0 \leq k \leq m-1,
\end{aligned} \tag{3.9}$$

où $a(x, D) = g(x, D) + b(x, D), b(x, D)$ est un opérateur differentiel d'ordre $m-1$ et $\hat{U}(t, y, x'') = U(t, e^y, x''), \hat{V}(t, y, x'') = e^{my}V(t, e^y, x'')$, $\hat{W}_k(y, x'') = W_k(e^y, x''), 0 \leq k \leq m-1$.

Les coefficients d'opérateur et les données $\hat{V}(t, y, x''), \hat{W}_k(y, x''), 0 \leq k \leq m-1$, sont holomorphes sur

$$\{(t, y, x''); \mid t \mid e^{\Re y} \leq R, e^{\Re y} \leq R, \|x''\| \leq R\}. \tag{3.10}$$

Le coefficient $N(t, y, x'')$ de D_t^m dans l'opérateur $g(te^y, e^y, x'', D_t, -tD_t + D_y, e^y D_{x''})$ est

$$N(t, y, x'') = g(te^y, e^y, x'', 1, -t, 0, \dots, 0). \tag{3.11}$$

Nous rappelons (1.2):

$$g(0; \xi_0, \xi_1, 0, \dots, 0) = \xi_0^p \prod_{j=1}^{\ell} (\xi_0 - \alpha_j \xi_1)^{p_j} = \left(\prod_{j=1}^{\ell} \alpha_j^{p_j} \right) \xi_0^p \prod_{j=1}^{\ell} (-\beta_j \xi_0 - \xi_1)^{p_j},$$

$p + \sum_{j=1}^{\ell} p_j = m$, les nombres $\alpha_j \in \mathbf{C}, 1 \leq j \leq \ell$, sont distincts, $\prod_{j=1}^{\ell} \alpha_j \neq 0$ et $\beta_j = -(1/\alpha_j), 1 \leq j \leq \ell$.

Nous avons supposé $0 \leq p < m$.

Pour tout $\delta(> 0)$ suffisamment petit et tout $T \geq T_0 + \delta, T_0 = \max_{1 \leq j \leq \ell} \mid \beta_j \mid$ tels que les disques $\{t; \mid t - \beta_j \mid \leq \delta\}, 1 \leq j \leq \ell$, sont distincts et que le disque

$\{t; \mid t \mid \leq T\}$ contient les disques $\{t; \mid t - \beta_j \mid \leq \delta\}, 1 \leq j \leq \ell$, on a

$$\begin{aligned}\lim_{\Re y \to -\infty} \mid N(t, y, 0) \mid = \mid g(0; 1, -t, 0, \dots, 0) \mid &= \prod_{j=1}^{\ell} \mid \alpha_j \mid^{p_j} \mid t - \beta_j \mid^{p_j} \\ &\geq \prod_{j=1}^{\ell} \mid \alpha_j \mid^{p_j} \delta^{m-p} = 2N_0 > 0, \text{uniformément sur}\end{aligned}$$

$\{(t, y); \mid t \mid \leq T, \mid t - \beta_j \mid \geq \delta, 1 \leq j \leq \ell, \mid \Im y \mid < \infty\}, \Im y$ étant la partie imaginaire de y.

Il existe donc une constante $R_1 (0 < R_1 \leq R)$ ne dépendant que de g et R, T, δ telle que $\mid N(t, y, x'') \mid \geq N_0$ sur

$$\left\{ \begin{matrix} (t, y, x''); \mid t \mid \leq T, e^{\Re y} \leq R_1, \|x''\| \leq R_1, \\ \mid t - \beta_j \mid \geq \delta, 1 \leq j \leq \ell \end{matrix} \right\}, \tag{3.12}$$

où $T \geq T_0 + \delta, \delta > 0$.

Le problème (3.9) s'ecrit alors comme suit:

$$\begin{aligned} & D_t^m \hat{U}(t, y, x'') = \mathcal{A}(t, y, x'', D_t, D_y, D_{x''}) \hat{U}(t, y, x'') + \hat{V}(t, y, x''), \\ & D_t^k \hat{U}(0, y, x'') = \hat{W}_k(y, x''), \qquad 0 \leq k \leq m - 1. \end{aligned} \tag{3.13}$$

La partie principale $\mathcal{H}(t, y, x'', D_t, D_y, e^y D_{x''})$ de $\mathcal{A}$ est

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}(t, y, x'', D_t, D_y, e^y D_{x''}) \\ & \quad = \frac{-1}{N(t, y, x'')} [g(te^y, e^y, x'', D_t, -tD_t + D_y, e^y D_{x''}) \\ & \quad - N(t, y, x'') D_t^m]. \end{aligned} \tag{3.14}$$

L'opŕateur $\mathcal{A}$ et les fonction $\hat{V}(t, y, x''), \hat{W}_k(y, x''), 0 \leq k \leq m - 1$ sont holomorphes sur la partie (3.12).

D'après le théorème de Cauchy-Kowalewski, la solution $\hat{U}(t, y, x)$ est holomorphe sur $\{(t, y, x''); \mid t \mid < \epsilon, e^{\Re y} \leq R_1, \|x''\| \leq R_1\}$, $\epsilon (> 0)$ étant une constante suffisamment petite, en diminuant $R_1 (> 0)$ si nécessaire.

D'autre part, d'après l'hypothèse de la Proposition 1.2, la solution $\hat{U}(t, y, x'')$ est holomorphe sur

$$\{(t, y, x''); \mid t \mid \leq T_1 = T_0 + \delta, \mid t \mid e^{\Re y} \leq R_1, \|x''\| \leq R_1, \Re(te^y) \geq 0\}, \tag{3.15}$$

$\delta (> 0)$ étant une constante suffisamment petite et en diminuant R_1 si nécessaire.

Puisque on a $\Re(te^y) = \mid t \mid e^{\Re y}\cos(\theta + \Im y), t = \mid t \mid e^{i\theta}$, l'inégalité $\Re(te^y) \geq 0$ est equivalente à

$$\{(\theta, \Im y); [2n - (1/2)]\pi \leq \theta + \Im y \leq [2n + (1/2)]\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}. \tag{3.16}$$

Soient des secteurs circulaires $F_k = \{t; \mid t \mid \leq T_1, t = \mid t \mid e^{i\theta}, \mid \theta - \theta_k \mid < (\pi/2) - \sigma_k\}, 1 \leq k \leq k_0$, avec des constantes $\theta_k (0 \leq \theta_k \leq 2\pi), \sigma_k (0 < \sigma_k < \pi/2), 1 \leq k \leq k_0$, tels qu'on a, pour $\delta (> 0)$ suffisamment petit, $\bigcup_{k=1}^{k_0} F_k \supset \{t; \mid t \mid \leq T_1\}$ et $\partial F_k \bigcap \{t; \mid t - \beta_j \mid \leq \delta\} = \emptyset$ pour tout $k, j, 1 \leq k \leq k_0, 1 \leq j \leq \ell$.

Les frontières ∂F_k de $F_k, 1 \leq k \leq k_0$ sont des chemins fermés $\gamma_k, 0 \leq k \leq k_0$, d'origine $t = 0$, orientées dans le sens positif: $\gamma_k : t = t_k(\sigma), \sigma \in [0, 1], t_k(0) = t_k(1) = 0, 0 \leq k \leq k_0$.

D'après le Corollaire 2.3, la solution $\hat{U}(t, y, x'')$ peut se prolonger analytiquement sur l'ensemble $\{(t, y, x''); t \in \gamma_k, e^{\Re y} \leq R_2, \|x''\| \leq R_2\}, 1 \leq k \leq k_0$, avec une constante $R_2 (0 < R_2 \leq R_1)$.

Vu (3.15) et (3.16), elle est holomorphe sur $\{(t, y, x''); t \in F_k, e^{\Re y} \leq R_2, -\sigma_k < \theta_k + \Im y < \sigma_k, \|x''\| \leq R_2\}, \quad 1 \leq k \leq k_0$. D'après la Proposition 2.3, la solution $\hat{U}(t, y, x'')$ est alors holomorphe sur $\{(t, y, x''); t \in F_k, e^{\Re y} \leq R_2, \|x''\| \leq R_2\}, 1 \leq k \leq k_0$, et donc sur $\{(t, y, x''); \mid t \mid \leq T_1, e^{\Re y} \leq R_2, \|x''\| \leq R_2\}$. $U(t, s, x'')$ est alors holomorphe sur $\mathcal{R}\{(t, s, x''); \mid t \mid \leq T_1, 0 < \mid s \mid \leq R_2, \|x''\| \leq R_2\}$.

Donc, en utilisant encore le Corollaire 2.3, pour tout $T \geq T_1$, il existe une constante $R_3 (0 < R_3 \leq R_2)$ ne dépendant que de g et T telle que $U(t, s, x'')$ est holomorphe sur $\mathcal{R}\{(t, s, x''); \mid t \mid \leq T, 0 < \mid s \mid \leq R_3, \|x''\| \leq R_3\}$. On voit donc que la solution $u(x)$ du problème (3.1) est holomorphe sur $\mathcal{R}\{x; \mid x_0 \mid \leq T \mid x_1 \mid, x_1 \neq 0, \|x\| \leq R_3\}$. D'après la Proposition 1.3, où x_0, x_1 sont remplacés par x_1, x_0 respectivement, et l'hypothèse 1.2 sur g, il existe une constante $L (\geq 1)$ ne dépendant que de g et R qui possède la propriété suivante: Prenons $T \geq 4L, 0 < \omega_0 \leq R_3/8L^2$ et $x_1^{(0)}, 0 < \mid x_1^{(0)} \mid = \omega_0$ un point de base. Puisque la solution $u(x)$ est holomorphe sur $\mathcal{R}\{x; \mid x_0 \mid \leq T \mid x_1 \mid, x_1 \neq 0, \|x'\| \leq R_3\}$, $D_1^k u(x_0, x_1^{(0)}, x'') = w_{0,k}(x_0, x''), 0 \leq k \leq m - p - 1$, et $D_0^h D_1^{m-p} u(0, x') = w_{h,m-p}(x'), 0 \leq h \leq p - 1$ sont des fonctions holomorphes sur $\mathcal{R}\{x; \mid x_0 \mid \leq T\omega_0, x_1 \neq 0, \|x'\| \leq R_3\}$. La solution $u(x)$ du problème de (3.1) est donc la solution du problème de Goursat

$$\begin{aligned} &a(x, D)u(x) = v(x), \\ &D_1^k u(x_0, x_1^{(0)}, x'') = w_{0,k}(x_0, x''), \qquad 0 \leq k \leq m - p - 1, \\ &D_0^h D_1^{m-p} u(0, x') = w_{h,m-p}(x'), \qquad 0 \leq h \leq p - 1. \end{aligned} \tag{3.17}$$

D'après la Proposition 1.3, où x_0, x_1 sont remplacés par x_1, x_0 respectivement, la solution $u(x)$ du problème (3.17) est holomorphe sur $\mathcal{R}\{x; \mid x_0 \mid \leq$

$R_3/4nL, 0 <| x_1 |\leq \omega_0, \|x'\| \leq R_3/4n\}$. Par suite, en prenant une constante $R_0 = \min\{R_3/4nL, \omega_0\}$ ne dépendant que de g et R, la solution $u(x)$ du problème (3.1) est holomorphe sur $\mathcal{R}\{x; x_1 \neq 0, \|x\| \leq R_0\}$. Ceci démontre la Proposition 1.2.

Références

[GKL] Gårding, L., Kotake, T. et Leray, J., Uniformisation et développement asymptotique de la solution du problème de Cauchy linéaire à données holomorphes; analogue avec la théorie des ondes asymptotiques et approchées, *Bull. Soc. Math. France*, **92** (1964), 263-361.

[HLT] Hamada, Y., Leray, J. et Takeuchi, A., Prolongements analytiques de la solution du problème de Cauchy linéaire, *J. Math. Pures Appl.*, **64** (1985), 257-319.

[HLW] Hamada, Y., Leray, J. et Wagschal, C., Systèmes d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples: problème de Cauchy ramifié; hyperbolicité partielle, *J. Math. Pures Appl.*, **55** (1976), 297-353.

[HT1] Hamada, Y. et Takeuchi, A., Sur le prolongement analytique de la solution du problème de Cauchy, *C. R. Acad. Sc. Paris*, *Sér. I*, **295** (1982), 329-332. Observation du présenteur.

[HT2] ———, Sur un domaine d'existence et un prolongement analytique des solutions de problèmes de Goursat, *J. Math. Pures Appl.*, **75** (1996), 469-483.

[H] Hamada, Y., Sur le prolongement analytique de la solution du problème de Cauchy pour certains opérateurs différentiels de partie principale à coefficients polynomiaux, à paraître a *Tohoku Math. J.*

[Hö] Hörmander, L., An Introduction to Complex Analysis in Several Variables, North Holland, Amsterdam, 1990, 3rd edition.

[L] Leray, J., Uniformisation de la solution du problème linéaire analytique de Cauchy près de la variété qui porte les données de Cauchy (Problème de Cauchy I), *Bull. Soc. Math. France*, **85** (1957), 389-429.

[N] Nishino, T., *Theory of Functions of Several Complex Variables* [Tahensu Kansu Ron] (en japonais), Univ. of Tokyo Press, 1996. Function theory in several complex variables. Transl. Math. Monogr. **193**, A.M.S.

[W] Wagschal, C., Une généralisation du problème de Goursat pour des systèmes d'équations intégro-différentielles holomorphes ou partiellement holomorphes, *J. Math. Pures Appl.*, **53** (1974), 99-132.