*Publ. RIMS, Kyoto Univ.*
**41** (2005), 139–173

# Interaction de Strates Consécutives II

By

Daniel Barlet*

## Abstract

This article completes the results of our previous paper [B.91] on interaction of consecutive strata for the vanishing cycles. In the same context that loc. cit., we treat here the tangling phenomenon for a given cohomology class of the Milnor's fiber of $f$ at the origin in the case where its nilpotency order for the given eigenvalue $e^{-2i\pi.u} \neq 1$ of the monodromy is not necessarily bigger or equal than the nilpotency order of the monodromy for this eigenvalue at the generic point of the big stratum. We show that this tangling phenomenon can always be detected on the poles of the meromorphic extension of the distribution $\int_X |f|^{2\lambda}\square$.

## Préambule

L'idée d'un préambule distinct et indépendant de l'introduction proprement dite de cet article m'est venue en réfléchissant à la rédaction d'une seconde version de ce texte "plus accessible" que la première (voir [B.01]). Etudiant depuis une quinzaine d'années le phénomène d'interaction de strates pour les cycles évanescents via sa "lecture" sur le prolongement méromorphe de la distribution $|f|^{2\lambda}$ je suis arrivé à la conclusion qu'il était nécessaire d'expliquer aux lecteurs potentiels les idées et les difficultés cachées derrière des énoncés qui peuvent paraître assez "hermétiques" (poussé aussi dans cette direction par les critiques pertinentes d'un rapporteur[1] ayant visiblement un peu souffert sur la première version...). Ce faisant, j'essaierais aussi de situer le présent travail par rapport à [B.91] dont il est un complément "naturel". Il n'est cependant pas

Communicated by M. Kashiwara. Received June 23, 2003.
2000 Mathematics Subject Classification(s): 32-S-25, 32-S-40, 32-S-50.
Key words: vanishing cycles, non isolated singularity.
*Université Henri Poincaré et Institut Universitaire de France, Institut Elie Cartan (Nancy) UMR 7502 UHP-CNRS-INRIA BP 239-F-54506 Vandoeuvre-lès-Nancy Cedex, France.
[1] je profite de l'occasion pour le remercier.

inutile d'expliquer pourquoi ce "complément naturel" donne lieu à des énoncés nettement plus compliqués.

L'idée qui soutend le phénomème d'interaction de strates consécutives[2] est que, dans la situation considérée, la partie spectrale $\psi_f(u)$ relative à la valeur propre $e^{-2i\pi u} \neq 1$ du complexe des cycles évanescents $\psi_f$ de $f$ qui présente, par hypothèse, deux faisceaux de cohomologie, n'est pas nécessairement quasi-isomorphe, en tant que complexe à cohomologie constructible muni d'un automorphisme de monodromie, à la somme directe de ses deux faisceaux de cohomologie, convenablement décalés, munie des monodromies correspondantes. Nous considèrerons qu'il n' y a pas interaction[3] si cette décomposition en somme directe a lieu. Quand c'est le cas, l'ordre de nilpotence de la monodromie agissant dans la catégorie dérivée coïncide avec celui de l'action "naïve" de la monodromie $T$ agissant sur les faisceaux de cohomologie $H^n(u)$ et $H^{n-1}(u)$ de $\psi_f(u)$. Cette action est évidemment beaucoup plus simple à déterminer et se calcule "effectivement" au moins sur les exemples simples.

Par contre, on peut s'attendre, quand il y a interaction, à un ordre de nilpotence plus élevé pour l'action de $T$ dans la catégorie dérivée, provoquant alors des pôles "inattendus" dans le prolongement méromorphe de la distribution $|f|^{2\lambda}$. Notre approche ici consiste à considérer une classe $e \in H^n(u)$ et à déterminer si "$e$" est emmêlée[4] ou non[5].

L'application $\theta : H^n(u) \to H^2_0(S, H^{n-1}(u))$ qui correspond à la flèche ci-dessous de la suite spectrale sphérique (voir [G.58] p. 83) d' hypercohomologie à support l'origine:

$$H^1_0(S, H^{n-1}(u)) \xrightarrow{\eta} \mathbb{H}^n_0(X, \psi_f(u)) \xrightarrow{\zeta} H^0_0(X, H^n(u)) \xrightarrow{\theta} H^2_0(S, H^{n-1}(u))$$

via l'identification évidente $H^0_0(X, H^n(u)) \cong H^n(u)$ qui résulte du fait que ce faisceau est porté par l'origine, est un premier test d'emmêlement. En effet la décomposition:

$$\psi_f(u) \xrightarrow{q.i.} H^n(u)[n] \oplus H^{n-1}(u)[n-1]$$

[2]consécutives au sens que la petite strate est de codimension 1 dans l'adhérence de la grosse strate.

[3]globalement; nous regarderons plus loin pour chaque classe donnée s'il y a interaction ou non

[4]quand les deux strates interagissent nous parlerons d'emmêlement.

[5]Nous considèrerons ici qu'une classe $e \in H^n(u)$ n'est pas emmêlée s'il existe un sous-espace vectoriel $V \subset H^n_c(u)$ stable par la monodromie, sur lequel l'application "can" d'oubli de support est injective et tel que $e \in can(V)$. Il sera facile de déduire de nos résultats qu'une classe est emmêlée en ce sens si et seulement si elle produit via les théorèmes 1 et 2 des pôles "inattendus"; voir la conclusion de l'article.

donnerait $\theta = 0$ et une décomposition en somme directe (via $\zeta \oplus \eta^{-1}$) compatibles aux monodromies

$$\mathbb{H}_0^n(X, \psi_f(u)) \cong H^n(u) \oplus H_0^1(S, H^{n-1}(u)).$$

Il est donc naturel de considérer comme emmêlée toute classe $e \in H^n(u)$ telle que $\theta(e)$ soit non nul. Nous verrons que cette non nullité équivaut à la condition $e \notin can(H_c^n(u))$. Ceci correspond au fait que dans le cas où la singularité de f est isolée relativement à la valeur propre $e^{-2i\pi u} \neq 1$, l' application canonique $H_c^n(u) \to H^n(u)$ est un isomorphisme (voir [B.91] th. 3 p. 408).

Le théorème 1 traduira analytiquement cette condition topologique à travers l'existence de pôles produits par la classe $e$ en $\lambda = -u$ dans le prolongement méromorphe de la distribution $|f|^{2\lambda}$ sur $X - \{0\}$[6]. Ceci ne peut se voir localement sur $X - \{0\}$; il s'agit d'un phénomène global qui nécessite la formulation sophistiquée du théorème 1. En effet, localement sur $X - \{0\}$ la classe $e$ est triviale.

Dans [B.91] le fait de ne considérer que des classes dont l'ordre de nilpotence $k$ est au moins égal à l'ordre de nilpotence $k_0$ de la monodromie de $f$ agissant sur le système local associé à $H^{n-1}(u)$ permet de négliger les pôles qui apparaissent sur $X - \{0\}$ puisqu'ils sont d'ordre au plus $k_0$; ce qui permet de se focaliser sur les pôles d'ordre strictement plus grand que $k$ qui sont alors concentrés à l'origine. Ceci explique pourquoi le théorème 1 n'a pas d'analogue évident dans [B.91]. Cependant la proposition 11 de loc. cit. sera un ingrédient essentiel de la preuve de ce résultat.

L'objectif suivant est plus délicat, car nous voulons comprendre quand une classe $e \in can(H_c^n(u))$ est quand même emmêlée. L'idée est alors de montrer que c'est le cas quand elle produit des pôles pour $|f|^{2\lambda}$, concentrés en 0 cette fois, qui sont d'ordre strictement plus grands que ce que l'on attend (à savoir l'ordre de nilpotence de la classe $e$ considérée). De façon précise si on a $\mathcal{N}_n^k(e) = 0$ et $\mathcal{N}_n^{k-1}(e) \neq 0$[7] on attend des pôles d'ordre $k$ (à nouveau, c'est ce qui arrive dans le cas où la singularité de $f$ est isolée pour la valeur propre $e^{-2i\pi u} \neq 1$). L'emmêlement se produira si chaque fois que l'on écrit $e = can(\varepsilon)$ avec $\varepsilon \in H_c^n(u)$ l'ordre de nilpotence de $\varepsilon$ dans $H_c^n(u)$ est strictement supérieur à celui de $e$.

Le gros problème est maintenant dans le choix des formes-test que l'on intègre contre une forme représentant la classe $e$ considérée pour étudier le prolongement méromorphe de $|f|^{2\lambda}$. En effet, il faudra s'assurer que les pôles que

[6] plus précisément de $|f|^{2\lambda}\bar{f}^{-j}$ pour $j \in \mathbb{N}, j \gg 1$.

[7] $2i\pi\mathcal{N}_n$ sera le logarithme nilpotent de l'automorphisme unipotent $e^{2i\pi u}T$ de $H^n(u)$.

nous allons voir sont réellement produits par l'emmêlement de $e$ et non par les dites formes-test. Ce point est le plus délicat et oblige à donner une formulation assez sophistiquée au théorème 2, une fois construit l'invariant adéquat (qui s'obtient en généralisant l'invariant introduit et utilisé dans [B.91].)

Pour ce faire nous utilisons deux idées. La première est de choisir des formes "adaptées" pour représenter la classe considérée. Cela permettra d'assurer déjà que l'on introduira pas de phénomènes parasites en raison de pôles non concentrés à l'origine. Les représentants adaptés vérifierons une condition de support (rencontrant S suivant un compact), ce qui traduira analytiquement la condition topologique $e \in can(H^n_c(u))$. La seconde idée consiste à n'utiliser que des formes-test qui ne produisent pas de pôles d'ordre $\geq k+1$ sur $X^*$(où $k$ est l'ordre de nilpotence de $e$). Le théorème 2 donne alors une condition nécessaire et suffisante pour que, pour chaque entier $h \in [1, k-1]$[8], une telle classe produise un pôle d'ordre $\geq k+h+1$. Bien sûr, pour $k \geq k_0$ on retrouve un résultat obtenu dans [B.91].

### Et le Cas de la Valeur Propre 1??

Nous voulons attirer ici l'attention du lecteur sur le fait que, pour la valeur propre 1, l'analogue des hypothèses standards que l'on formule de la même façon à condition de considérer la cohomologie **réduite** des fibres de Milnor, est en fait un problème à **trois** strates, qui de plus ne sont pas consécutives pour $n \geq 3$. La manière la plus simple d'en convaincre le lecteur est probablement de lui faire constater que pour une fonction à singularité isolée, la valeur propre 1 présente déjà deux strates non consécutives pour $n \geq 2$. En effet, ne considérer que la cohomologie réduite laisse penser que l'on s'est débarrassé (à peu de frais) de la strate formée par les points lisses de $f^{-1}(0)$ (pour $n \geq 1, f$ à singularité isolée implique $f$ réduite). Ce serait le cas précisément si cette strate lisse n'était pas emmêlée avec la petite strate représentée par l'origine (si 1 est valeur propre de la monodromie agissant sur $H^n(F, \mathbb{C})$, où F désigne la fibre de Milnor de $f$ à l'origine).

**Mais ceci n'est jamais le cas**, comme le montre le théorème de contribution "sureffective" (voir [B.84]). En effet ce théorème affirme que tout vecteur propre de $T$ (agissant en degré strictement positif) pour la valeur propre 1 produit un pôle d'ordre $\geq 2$ dans le prolongement méromorphe de la distribution $|f|^{2\lambda}$. Plus généralement, on y montre que l'emmêlement de strates se produit **toujours** pour la valeur propre 1 entre toute strate d'intérieur vide dans $f^{-1}(0)$ et la strate ouverte de $f^{-1}(0)$.

[8]c'est une conséquence du théorème que les pôles produits par $e$ sont toujours d'ordre $\leq 2k$.

Ceci explique pourquoi nous ne considérons pas ici la valeur propre 1 (comme c'était déjà le cas dans [B.91])[9].

## Introduction

Le but de cet article est de compléter l'étude faite dans [B.91] du phénomène d'emmêlement de strates consécutives pour les cycles évanescents. Commençons par rappeler que si $f : X \to D$ est un représentant d'un germe non constant de fonction holomorphe à l'origine de $\mathbb{C}^N$, le complexe $\psi_f$ des cycles évanescents de $f$ est un complexe à cohomologie $\mathbb{C}-$constructible muni d'un automorphisme de monodromie $T$. La fibre en $x \in f^{-1}(0)$ de son p-ième faisceau de cohomologie est le p-ième groupe de cohomologie de la fibre de Milnor de $f$ en $x$, sur lequel $T$ induit l'action usuelle de la monodromie de $f$. La perversité de ce complexe se traduit par le fait que le support du faisceau $H^p(\psi_f)$ est analytique fermé de codimension pure p dans $f^{-1}(0)$.

Fixons $u \in \mathbb{Q} \cap ]0,1[$ et considérons la partie spectrale $\psi_f(u)$ de $\psi_f$ relative à la valeur propre $e^{-2i\pi u}$ de $T$. Notons par q le plus petit entier tel que le q-ième faisceau de cohomologie de $\psi_f(u)$ soit non nul. Son support $\Sigma$ est alors analytique fermé de codimension q dans $f^{-1}(0)$. Supposons que $H^{q+1}(\psi_f(u))$ ne soit pas nul et choisissons un point générique $x_1$ de son support $\Sigma_1$. Soit P un plan affine générique de dimension q + 2 passant par $x_1$. Alors un théorème de restriction non caractéristique (voir par exemple [B.M.89]) nous ramène à la situation considérée dans [B.91] que nous décrivons ci-dessous:

### Les hypothèses standards

Soit $X$ un voisinage ouvert de l'origine dans $\mathbb{C}^{n+1}$ $(n \geq 1)$ que nous supposerons de Stein et contractible. Considérons une fonction holomorphe non constante $f : X \to D$ vérifiant $f(0) = 0$ et $\{df_x = 0 \Rightarrow f(x) = 0\}$.

Soit $u \in \mathbb{Q} \cap ]0,1[$ un nombre rationnel fixé et notons par $H^p(u)$ le faisceau $\mathbb{C}-$constructible sur $Y = f^{-1}(0)$ défini par la partie spectrale associée à la valeur propre $e^{-2i\pi u}$ du p-ième faisceau de cohomologie du complexe $\psi_f$ des cycles évanescents de f. Nous ferons les hypothèses suivantes:

(i) Le faisceau $H^n(u)$ est concentré à l'origine.

(ii) Le faisceau $H^{n-1}(u)$ est concentré sur une courbe S telle que chaque composante irréductible de S contienne l'origine, soit lisse en dehors de l'origine et soit un disque topologique.

[9] added in proofs: le cas de la valeur propre 1 est étudié dans mon récent préprint de l'Institut E. Cartan no 38 (2004) intitulé "Interaction de strates consécutives III: le cas de la valueur propre 1" (80 pages).

(iii) Le faisceau $H^{n-1}(u)$ est un système local sur $S^* = S - \{0\}$.

(iv) Les faisceaux $H^{n-j}(u)$ sont nuls pour $j \geq 2$.

Nous noterons dans la suite par $k_0$ l'ordre de nilpotence de la monodromie de $f$ agissant sur le système local $H^{n-1}(u)|_{S^*}$.

*Remarque.* Les conditions (i), (ii) et (iii) sont toujours satisfaites pour un germe non constant de fonction holomorphe à l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$, quitte à choisir $X$ assez petit. Mais, bien sûr, (iv) est restrictive pour $n \geq 3$.

Dans [B.91] nous avons étudié, pour des éléments de $H^n(u)$ dont l'ordre de nilpotence $k$ est au moins égal à $k_0$, le phénomène d'emmêlements de strates consécutives. Nous y expliquions quand un bloc de Jordan d'ordre $k \geq k_0$ donne naissance à des pôles d'ordres strictement plus grands que $k$ dans le prolongement méromorphe de la distribution $|f|^{2\lambda}$ (en un sens qui est précisé dans [B.91]).

Notre propos ici est d'examiner le même problème pour $k$ arbitraire. On conçoit facilement que les pôles "produits" sont beaucoup plus difficilement détectables pour $k < k_0$ puisque la distribution $|f|^{2\lambda}$ a déjà le long de $S^*$ des pôles d'ordre $k_0$ en $-u - j$ pour $j \in \mathbb{N},\ j \gg 1$, qui vont "cacher" les pôles que nous cherchons à détecter.

Notre premier objectif sera de caractériser l'image de l'application canonique

$$can : H^n_c(u) \longrightarrow H^n(u)^{10}$$

en terme du prolongement méromorphe de $|f|^{2\lambda}$ sur $X - \{0\}$.

Comme le faisceau $H^n(u)$ est nul sur $X - \{0\}$ ceci n'est pas possible en utilisant les sections d'un faisceau (par exemple les courants pôlaires de $|f|^{2\lambda}$ sur $X - \{0\}$) puisqu'une section d'un faisceau qui est localement nulle est nulle. Ceci nous conduit à associer à un bloc de Jordan de $H^n(u)$ un objet global sur $X^*$: nous utiliserons pour cela des formes linéaires continues sur la cohomologie de de Rham $f-$relative à support compact dans $X^*$.

Pour formuler ce premier théorème nous utiliserons la représentation des classes de $H^n(u)$ utilisée dans [B.91] par des formes semi-méromorphes $w = (w_1, \cdots, w_k)$ vérifiant, si $e \in H^n(u)$ a un ordre de nipotence inférieur ou égal à $k$:

$$(1) \qquad dw_j = u\frac{df}{f} \wedge w_j + \frac{df}{f} \wedge w_{j-1} \qquad \forall j \in [1, k] \qquad (w_0 = 0)$$

[10] en degré $n, H^n(u)$ est simplement le sous-espace spectral de la monodromie agissant sur $H^n(F, \mathbb{C})$ pour la valeur propre $e^{-2i\pi u}$, où $F$ désigne la fibre de Milnor de $f$ à l'origine. Ici $H^n_c(u)$ désigne l'analogue pour la cohomologie à support compact; *can* est l'application "d'oubli de support".

avec $r^n(k)(w) = e$. Le morphisme $r^n(k)$ est défini dans [B.91] p. 427.

Notons par $2i\pi\mathcal{N}_n$ le logarithme nilpotent de l'automorphisme unipotent $e^{2i\pi u}T$ de $H^n(u)$. On a alors le

**Théorème 1.** *Dans la situation des "hypothèses standards" définies ci-dessus, considérons une classe $e \in H^n(u)$ vérifiant, pour un entier $d \geq 0$ donné, $\mathcal{N}_n^d(e) \notin can(H_c^n(u))$ où $can : H_c^n(u) \to H^n(u)$ est l'application d'oubli de support introduite plus haut. Alors il existe $j \in \mathbb{N}$ et $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(X^*)^{n+1}$ vérifiant les conditions "$C$" suivantes*

- C1) $d\varphi \equiv 0$ *près de* $S^*$.
- C2) $d\bar{f} \wedge \varphi \equiv 0$ *près de* $S^*$.

*et tels que le prolongement méromorphe de la fonction holomorphe pour $Re\lambda \gg 1$*

$$\lambda \longrightarrow \int_{X^*} |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j} \frac{df}{f} \wedge w_k \wedge \varphi \tag{2}$$

*ait un pôle d'ordre $\geq d+1$ en $\lambda = -u$, où $w = (w_1, \cdots, w_k)$ représente la classe $e \in H^n(u)$ au sens qui a été précisé ci-dessus (donc $w$ vérifie (1) et $r^n(k)(w) = e$). Réciproquement, si $\mathcal{N}_n^d(e) \in can(H_c^n(u))$, pour tout $j \in \mathbb{N}$ et toute $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(X^*)^{n+1}$ vérifiant les conditions "$C$", le prolongement méromorphe de (2) a des pôles d'ordre $\leq d$ en $\lambda = -u$ pour tout choix du représentant $w$ de la classe $e$.*

Notre second problème est de tester l'emmêlement éventuel d'une classe $e$ donnée qui est dans l'image de l'application "*can*". Pour cela nous commençons par généraliser la construction de "l'obstruction" définie dans [B.91] (voir p. 410) en construisant pour chaque entier $k$ une application linéaire compatibles aux monodromies

$$\widetilde{sob}_k : Ker\mathcal{N}_n^k \cap Im(can) \longrightarrow \frac{H_0^1(S, H^{n-1}(u))}{\mathcal{N}_{n-1}^k(H_0^1(S, H^{n-1}(u))}$$

où $2i\pi\mathcal{N}_{n-1}$ désigne le logarithme nilpotent de l'automorphisme unipotent $e^{2i\pi u}T$ du faisceau $H^{n-1}(u)$ de support $S$.

La filtration $F_h$ image réciproque par $\widetilde{sob}_k$ de la filtration $Ker\mathcal{N}_{n-1}^h$ sur le quotient

$$\frac{H_0^1(S, H^{n-1}(u))}{\mathcal{N}_{n-1}^k(H_0^1(S, H^{n-1}(u))}$$

testera alors le degré d'emmêlement, comme le montre le théorème 2 ci-dessous.

Avant de pouvoir énoncer ce résultat nous devons donner la

**Definition.** Soit $e \in H^n(u)$ vérifiant $e \in Im(can)$. Soit $k$ un entier tel que l'on ait $e \in Ker\mathcal{N}_n^k$. Nous dirons que $w = (w_1, \dots, w_k)$ est un représentant **adapté** de $e$ si d'abord $w$ est un k-uplet de n-formes semi-méromorphes à pôles dans $f = 0$ vérifiant la condition (1) ainsi que $r^n(k)(w) = e$ et si le support de $\frac{df}{f} \wedge w_k$ rencontre $S$ en un compact.

Il est facile de voir que l'existence d'un représentant adapté pour une classe $e \in H^n(u)$ implique la condition $e \in Im(can)$. Nous montrerons que cette condition est suffisante pour l'existence d'un représentant adapté (pour $k$ assez grand, voir le début du paragraphe 3 b)).

Pour tester l'emmêlement de la classe donnée $e \in Im(can)$ nous allons utiliser des formes-test "spéciales", pour lesquelles nous savons déjà (grace au théorème 1[11]) qu'elles ne produisent pas sur $X^*$ des pôles d'ordre $\geq k+1$ où l'entier $k$ est fixé pour que l'on ait $e \in Ker\mathcal{N}_n^k \cap Im(can)$.

**Théorème 2.** *Dans la situation des hypothèses standards, considèrons $e \in Ker\mathcal{N}_n^k \cap Im(can)$. Pour $h \in [0, k-1]$ supposons que $\mathcal{N}_{n-1}^h \widetilde{sob}_k(e) \neq 0$ dans le quotient*

$$\frac{H_0^1(S, H^{n-1}(u))}{\mathcal{N}_{n-1}^k(H_0^1(S, H^{n-1}(u))}.$$

*Alors il existe $\varepsilon \in H^n(u)$ vérifiant $\theta(\mathcal{N}_n^k \varepsilon) = 0$ et un entier $j \in \mathbb{N}$ assez grand, tels que le prolongement méromorphe de*

$$\lambda \longrightarrow \int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j} \frac{df}{f} \wedge w_k \wedge \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge \bar{v}_k \tag{3}$$

*ait un pôle d'ordre $\geq k+h+1$ en $\lambda = -u$ pour tout choix d'un représentant adapté $w$ de $e$ et tout choix d'un représentant $v$ de $\varepsilon$.*

*Réciproquement, si on a*

$$\mathcal{N}_{n-1}^h \widetilde{sob}_k(e) \in \mathcal{N}_{n-1}^k(H_0^1(S, H^{n-1}(u))$$

*le prolongement méromorphe de (3) a des pôles d'ordre $\leq k+h$ en $\lambda = -u$ pour tout choix de $j \in \mathbb{Z}$, tout choix de $\varepsilon \in H^n(u)$ vérifiant $\mathcal{N}_n^k \varepsilon \in Im(can)$ et tout choix du représentant $w$ adapté à $e$ et du représentant $v$ de $\varepsilon$.*

On remarquera que la filtration $F_h$ définie plus haut teste donc exactement l'ordre "excédentaire" des pôles produits par la classe $e$ donnée. Ceci

[11] On prendra garde ici que l'on applique le théorème 1 aux formes test en utilisant l'hypothèse sur la classe $e$ pour montrer que la différence de deux représentants adaptés de cette classe multipliée par $f^N \wedge df$ avec $N \in \mathbb{N}$, $N \gg 1$ donne une fonction test vérifiant les hypothèses C1) et C2) du théorème 1. Voir la proposition 5 du paragraphe 3 b).

permettrait de définir l'ordre d'emmêlement de la classe considérée dans cette situation.

Ces deux théorèmes décrivent en termes "topologiques"[12] et raisonnablement calculables, au moins sur des exemples simples, le phénomène d'interaction de strates consécutives au niveau d'une classe de cohomologie donnée. Claude Sabbah a montré récemment que l'ordre des pôles de la distribution $|f|^{2\lambda}$ est donné par l'ordre de nilpotence de la monodromie agissant sur le complexe des cycles évanescents $\psi_f$ (voir [S] pour un énoncé précis). L'intérêt de nos présents résultats est de permettre de calculer sur des objets assez simples et "concrets" cet ordre de nilpotence. Ceci étant, même s'ils paraissent plus accessibles qu'un calcul dans la catégorie dérivée, le lecteur pourra aisément se convaincre qu'ils sont loin d'être faciles à expliciter ne serait-ce que pour un polynôme à trois variables présentant une demi-douzaine de monômes...

## §1

### a)

Fixons $u \in \mathbb{Q}\cap]0,1[$ et plaçons-nous dans les hypothèses standards définies plus haut. Commençons par rappeler comment on calcule les faisceaux de cohomologie $H^{n-1}(u)$ et $H^n(u)$ en terme de formes différentielles semi-méromorphes sur $X$ à pôles dans $Y = f^{-1}(0)$. Nous utiliserons ici le complexe $\big(\mathcal{E}^\bullet(k), \delta^\bullet\big)$ introduit dans [B.91] p. 443, pour $k \in \mathbb{N}^*$, où $\mathcal{E}^p$ est le faisceau sur $X$ des formes $C^\infty$ de degré $p$ et où on pose

$$\mathcal{E}^p(k) := \mathcal{E}^p[f^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^k.$$

La différentielle $\delta(:= \delta_u)$ de degré $+1$ est donnée par

$$\delta\Big(\frac{\alpha}{f^m} \otimes \nu\Big) = d\Big(\frac{\alpha}{f^m}\Big) \otimes \nu - \frac{df}{f} \wedge \frac{\alpha}{f^m} \otimes (u.Id + N_k)(\nu)$$

où $N_k := \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ est dans $End_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^k)$.

On a alors les résultats suivants, où $h^i(k)$ désigne le i-ième faisceau de cohomologie du complexe $\big(\mathcal{E}^\bullet(k), \delta^\bullet\big)$ (voir [B.91] a. Lemmes 6 et 7 et c. proposition 1).

[12] il ne résulte pas de nos démonstrations que les applications $\widetilde{sob}_k$ sont de nature topologique, bien que cela paraisse fort plausible!

P1) on a des applications canoniques

$$r^j(k) : h^j(k) \longrightarrow H^j(u)$$

dont les images sont les $\mathrm{Ker}\mathcal{N}_j^k$ où $(2i\pi)\mathcal{N}_j$ est le logarithme nilpotent de l'endomorphisme unipotent $e^{2i\pi u}T_j$, $T_j$ désignant la monodromie agissant sur $H^j(u)$.

P2) on a $h^i(k) = 0$ pour $i \neq n, n-1$ et $r^{n-1}(k) : h^{n-1}(k) \longrightarrow Ker\mathcal{N}_{n-1}^k$ est un isomorphisme pour tout $k$.

P3) on a la suite exacte de faisceaux

$$0 \longrightarrow \mathrm{Coker}\,\mathcal{N}_{n-1}^k \longrightarrow h^n(k) \longrightarrow \mathrm{Ker}\mathcal{N}_n^k \longrightarrow 0.$$

P4) en recollant la suite exacte ci-dessus avec la suite exacte:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\mathcal{N}_{n-1}^k \longrightarrow H^{n-1}(u) \xrightarrow{\mathcal{N}_{n-1}^k} H^{n-1}(u)$$
$$\longrightarrow \mathrm{Coker}\,\mathcal{N}_{n-1}^k \longrightarrow 0$$

on obtient l'isomorphisme de suites exactes:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}\mathcal{N}_{n-1}^k \arrow[r] & H^{n-1}(u) \arrow[r, "\mathcal{N}_{n-1}^k"] & H^{n-1}(u) \arrow[r] & h^n(k) \arrow[r] & \mathrm{Ker}\mathcal{N}_n^k \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & h^{n-1}(k) \arrow[r, "j"] \arrow[u, "r^{n-1}(k)"'] & h^{n-1}(k'+k) \arrow[r, "\pi"] \arrow[u, "r^{n-1}(k'+k)"'] & h^{n-1}(k') \arrow[r, "\tau"] \arrow[u, "r^{n-1}(k')"'] & h^n(k) \arrow[r] \arrow[u, "id"'] & \mathrm{Ker}\mathcal{N}_n^k \arrow[r] \arrow[u, "id"'] & 0
\end{tikzcd}$$

où $j$ est induite par le morphisme défini par l'inclusion:

$$\mathbb{C}^k \hookrightarrow \mathbb{C}^{k'} \oplus \mathbb{C}^k$$

où $\pi$ est induite par la projection:

$$\mathbb{C}^{k'} \oplus \mathbb{C}^k \longrightarrow \mathbb{C}^{k'}$$

et où $\tau$ est induite par le morphisme de complexes de faisceaux:

$$\tau_{k',k} : \big(\mathcal{E}^\bullet(k'), \delta^\bullet\big) \longrightarrow \big(\mathcal{E}^{\bullet+1}(k), \delta^{\bullet+1}\big)$$

de degré +1 donné par

$$\tau_{k',k}\Big(\sum_{j=1}^{k'} \alpha_j \otimes e_j\Big) = \frac{df}{f} \wedge \alpha_{k'} \otimes \varepsilon_1$$

où $e_1 ... e_{k'}$ et $\varepsilon_1 ... \varepsilon_k$ sont les bases canoniques de $\mathbb{C}^{k'}$ et $\mathbb{C}^k$ respectivement.

P5) comme les faisceaux $\mathcal{E}^\bullet(k)$ sont fins, on a les isomorphismes suivants

$$\begin{array}{lll} \forall U \subset X & H^{n-1}\Big(H^0\big(U, \mathcal{E}^\bullet(k)\big), \delta^\bullet\Big) \longrightarrow H^0(U, \mathrm{Ker}\mathcal{N}^k_{n-1}) \\ \forall U \subset X^* & H^n\Big(H^0\big(U, \mathcal{E}^\bullet(k)\big), \delta^\bullet\Big) \longrightarrow H^1(U, \mathrm{Ker}\mathcal{N}^k_{n-1}) \\ \text{et} \quad r^n(k): & \dfrac{H^n\big(H^0(U, \mathcal{E}^\bullet(k)), \delta^\bullet\big)}{\tau_{k',k} H^{n-1}\big(H^0(U, \mathcal{E}^\bullet(k')), \delta^\bullet\big)} \longrightarrow \mathrm{Ker}\mathcal{N}^k_n \end{array}$$

pour tout $k' \geq k_0$ et tout $U \ni 0$.

**b)**

Nous allons donner maintenant une description de l'application $\theta$ introduite dans [B.91] qui sera mieux adaptée au cas où $k < k_0$ qui nous intéresse ici.

**Proposition 1.** *Sous les hypothèses standards, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $k' \geq k_0$ on a une application linéaire*

$$\theta_{k,k'} : \mathrm{Ker}\mathcal{N}^k_n \longrightarrow H^1\big(S^*, h^{n-1}(k'+k)\big)$$

*vérifiant les propriétés suivantes:*

1) *pour $k_0 \leq k' \leq k$"*

$$j_{k'+k, k''+k} \circ \theta_{k,k'} = \theta_{k,k"}$$

*et l'application $\theta_k := r^{n-1}(k'+k) \circ \theta_{k,k'}$ ne dépend pas de $k' \geq k_0$;*

2) *pour $l \geq k$ on a $\theta_l | \mathrm{Ker}\mathcal{N}^k_n = \theta_k$ et donc l'application*

$$\theta : H^n(u) \longrightarrow H^1\big(S^*, H^{n-1}(u)\big)$$

*obtenue pour $l \gg 1$ ne dépend pas de $l$ et vérifie*

$$\theta | \mathrm{Ker}\mathcal{N}^k_n = \theta_k \quad \forall k \in \mathbb{N};$$

3) *le noyau de $\theta$ est l'image de l'application canonique*

$$can : H^n_c(u) \longrightarrow H^n(u);$$

4) *pour $k \in \mathbb{N}$ et pour $e \in \mathrm{Ker}\mathcal{N}^k_n \cap \mathrm{Ker}\theta$ on a*[13] $e \in can\big(\mathrm{Ker}\mathcal{N}^{k+k_0}_c\big)$.

*Remarque.* L'application $\theta_k$ pour $k < k_0$ n'est pas définie dans [B.91] mais la définition de $\theta$ et les propriétés 3) et 4) y sont déjà présentes (voir la proposition 7 et le corollaire 8 p.411).

*Preuve de la Proposition* 1. Commençons par la construction de l'application $\theta_{k,k'}$: pour $e \in \mathrm{Ker}\mathcal{N}^k_n$ choisissons $\omega \in H^0(X, \mathcal{E}^n(k))) \cap \mathrm{Ker}\,\delta$ induisant $e$ via $r^n(k)$. Pour $\sigma \in S^*$, il existe un voisinage ouvert $U_\sigma$ de $\sigma$, $\alpha_\sigma \in H^0(U_\sigma, \mathcal{E}^{n-1}(k')) \cap \mathrm{Ker}\,\delta$ et $\beta \in H^0(U_\sigma, \mathcal{E}^{n-1}(k+k'))$ (voir la propriété P4) ci-dessus et le fait que le faisceau $H^n(u)$ est concentré à l'origine) vérifiant:

$$\omega|_{U_\sigma} = \tau_{k',k}(\alpha_\sigma) + \delta(\beta_\sigma). \tag{4}$$

Définissons alors $\gamma_\sigma \in H^0(U_\sigma, \mathcal{E}^{n-1}(k+k'))$ en posant:

$$\gamma_\sigma := \begin{pmatrix} -\beta_\sigma \\ \alpha_\sigma \end{pmatrix}.$$

Alors on a $\delta\gamma_\sigma = j_{k,k'+k}(\omega|_{U_\sigma})$ grâce à (4) et donc $(\gamma_{\sigma'} - \gamma_\sigma)$ définit une classe dans $H^1\big(S^*, h^{n-1}(k'+k)\big)$. Montrons que cette classe dépend seulement de $e, k$ et $k'$ et non des autres choix effectués:

Si l'on change les choix de $\alpha_\sigma$ et $\beta_\sigma$ vérifiant (4) en $\alpha'_\sigma = \alpha_\sigma + a_\sigma$ et $\beta'_\sigma = \beta_\sigma + b_\sigma$ avec $\delta a_\sigma = 0$, on aura sur $U_\sigma$

$$\tau_{k',k}(a_\sigma) + \delta\, b_\sigma = 0.$$

Alors $\gamma'_\sigma = \gamma_\sigma + \begin{pmatrix} -b_\sigma \\ a_\sigma \end{pmatrix}$ avec $\delta \begin{pmatrix} -b_\sigma \\ a_\sigma \end{pmatrix} = 0$ et on aura $\gamma'_\sigma - \gamma'_{\sigma'} = \gamma_\sigma - \gamma_{\sigma'} + \vartheta\Gamma$[14] où $\Gamma \in C^0\big(\mathcal{U}, h^{n-1}(k'+k)\big)$ est donné par

$$\Gamma_\sigma := \begin{pmatrix} -b_\sigma \\ a_\sigma \end{pmatrix}.$$

D'où l'indépendance des choix de $\alpha_\sigma$ et $\beta_\sigma$.

[13] on verra en fait plus loin que l'on peut améliorer ce résultat pour $k < k_0$ en remplaçant $k + k_0$ par $2k$ (voir la remarque qui suit la proposition 4).

[14] où $\vartheta$ désigne le bord de Čech

Si nous changeons maintenant le choix de $\omega$ induisant $e$ nous devons considérer (d'après la propriété P5))

$$\omega' = \omega + \tau_{k',k}(a) + \delta(b)$$

où $a \in H^0\big(X, \mathcal{E}^{n-1}(k')\big) \cap \mathrm{Ker}\delta$ et $b \in H^0\big(X, \mathcal{E}^{n-1}(k)\big)$. Alors nous pouvons choisir $\tilde{\alpha}_\sigma := a|_{U_\sigma} + \alpha_\sigma$ et $\tilde{\beta}_\sigma := b|_{U_\sigma} + \beta_\sigma$. Ceci implique que $\tilde{\gamma}_{\sigma'} - \tilde{\gamma}_\sigma$ ne change pas sur $U_\sigma \cap U_{\sigma'}$.

Donc l'application $\theta_{k,k'}$ est bien définie.

Considèrons maintenant $k_0 \leq k' \leq k''$; la formule

$$j_{k'+k,k''+k} \circ \theta_{k',k} = \theta_{k'',k}$$

est alors conséquence du fait que l'on peut choisir $j_{k',k''}(\alpha_\sigma)$ pour écrire

$$\omega|_{U_\sigma} = \tau_{k'',k'}\big(j_{k',k''}(\alpha_\sigma)\big) + \delta\,\beta_\sigma$$

grâce à l'indépendance des choix montrée ci-dessus.

Nous obtenons alors

$$j_{k'+k,k''+k}\begin{pmatrix}-\beta_\sigma\\ \alpha_\sigma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\beta_\sigma\\ j_{k',k}(\alpha_\sigma)\end{pmatrix}$$

et 1) est démontrée.

Pour montrer 2) choisissons $k' \geq k_0$ et supposons que nous avons écrit

$$j_{k,k'+l}(\omega)|_{U_\sigma} = \begin{pmatrix}-\omega|_{U_\sigma}\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = \delta\begin{pmatrix}-\beta_\sigma\\ u_\sigma\\ v_\sigma\end{pmatrix}$$

où $\beta_\sigma \in H^0\big(U_\sigma, \mathcal{E}^{n-1}(k)\big), u_\sigma \in H^0\big(U_\sigma, \mathcal{E}^{n-1}(l-k)\big)$ et $v_\sigma \in H^0\big(U_\sigma, \mathcal{E}^{n-1}(k')\big)$. Alors $\theta_l(e)$ sera induit par le cocycle

$$\begin{pmatrix}\beta_\sigma - \beta_{\sigma'}\\ u_{\sigma'} - u_\sigma\\ v_{\sigma'} - v_\sigma\end{pmatrix} \quad \text{dans} \quad H^1\big(S^*, h^{n-1}(k'+l)\big).$$

Remarquons que $\alpha_\sigma := \begin{pmatrix}u_\sigma\\ v_\sigma\end{pmatrix} \in H^0\big(U_\sigma, \mathcal{E}^{n-1}(k'+l-k)\big)$ vérifie $\delta\,\alpha_\sigma = 0$ et

$$\omega|_{U_\sigma} = \tau_{k'+l-k,k}(\alpha_\sigma) + \delta\,\beta_\sigma.$$

Donc $\theta_k(e)$ sera induit dans $H^1\big(S^*, h^{n-1}(k'+l)\big)$ par le cocycle

$$\begin{pmatrix} \beta_\sigma - \beta_{\sigma'} \\ \alpha_{\sigma'} - \alpha_\sigma \end{pmatrix}$$

ce qui prouve 2) grâce à 1).

Supposons maintenant que l'on a $\theta_k(e) = 0$. Alors, quitte à raffiner le recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de $S^*$, on peut supposer qu'il existe une cochaîne $(x_\sigma) \in C^0\big(\mathcal{U}, h^{n-1}(k'+k)\big)$ telle que

$$\gamma_\sigma - \gamma_{\sigma'} = x_\sigma - x_{\sigma'} \quad \text{sur} \quad U_\sigma \cap U_{\sigma'}.$$

Alors $\Gamma|_{U_\sigma} := \gamma_\sigma - x_\sigma$ est une section globale sur $S^*$ du faisceau $\mathcal{E}^{n-1}(k'+k)$ qui vérifie

$$\delta\Gamma = j_{k,k'+k}\big(\omega|_{S^*}\big).$$

Soit $\rho \in C_c^\infty(X), \rho \equiv 1$ près de l'origine. Alors la section

$$j_{k,k'+k}(\omega) - \delta\big((1-\rho)\Gamma\big)$$

sur $S$ du faisceau $\mathcal{E}^n(k'+k)$ est à support compact et $\delta-$fermée. Elle est identiquement nulle près de $S - S \cap Supp(\rho)$; on peut donc la prolonger par 0 à un voisinage de $f^{-1}(0)$ avec un support $f-$propre. Elle induit donc une classe $\varepsilon \in H_c^n(u)$ qui vérifie $\mathrm{can}(\varepsilon) = e$ et $\mathcal{N}_c^{k'+k}\varepsilon = 0$ dans $H_c^n(u)$. Donc si nous choisissons $k' = k_0$ nous en déduisons l'inclusion:

$$\mathrm{Ker}\mathcal{N}_n^k \cap \mathrm{Ker}\,\theta_k \subset \mathrm{can}\big(\mathrm{Ker}\mathcal{N}_c^{k+k_0}\big).$$

Supposons maintenant $e \in \mathrm{Im\ can}$. Nous pouvons alors trouver

$$\widehat{\omega} \in H^0_{c/f}\big(X, \mathcal{E}^n(k'+k)\big) \cap \mathrm{Ker}\,\delta;$$

telle que l'on ait[15] $r_c^n(k)(\widehat{\omega}) = \varepsilon \in H_c^n(u)$ avec $\varepsilon = e$.

Si $X' \subset\subset X$ vérifie $\mathrm{Supp}(\widehat{\omega}) \cap (X - \overline{X}') \cap Y = \emptyset$ nous pouvons choisir, pour chaque $\sigma \in S \cap (X - \overline{X}'), \beta_\sigma = 0$ et $\alpha_\sigma = 0$ dans (4). Ceci montre que la restriction à $S \cap (X - \overline{X}')$ de $\theta_{k,k'}(e)$ sera nulle dans $H^1\big(S^* \cap (X - \overline{X}'), h^{n-1}(k'+k)\big)$. Comme $h^{n-1}(k'+k) \simeq H^{n-1}(u)$ est un système local sur $S^*$ cela donne la nullité de $\theta_{k,k'}(e)$ dans $H^1\big(S^*, h^{n-1}(k'+k)\big)$. ∎

[15] ici c/f désigne la famille paracompactifiante des fermés f-propres de $X$ et $r_c^n(k)$ l'analogue à support f-propre de $r^n(k)$.

### c) Definition of $\widetilde{ob}_k$

La suite exacte de faisceaux sur $S$

$$0 \longrightarrow \operatorname{Coker} \mathcal{N}_{n-1}^k \longrightarrow h^n(k) \longrightarrow \operatorname{Ker} \mathcal{N}_n^k \longrightarrow 0 \tag{5}$$

et le fait que le faisceau $H^n(u)$ est à support l'origine donnent un isomorphisme de faisceaux sur $S^*$:

$$\operatorname{Coker} \mathcal{N}_{n-1}^k \longrightarrow h^n(k).$$

Nous avons donc un morphisme

$$ob_k : h^n(k)_0 \longrightarrow H^0\big(S^*,\, \operatorname{Coker} \mathcal{N}_{n-1}^k\big) \tag{6}$$

et en composant avec l'application naturelle:

$$H^0\big(S^*,\, \operatorname{Coker} \mathcal{N}_{n-1}^k\big) \longrightarrow H^1_{\{0\}}\big(S,\, \operatorname{Coker} \mathcal{N}_{n-1}^k\big)$$

on obtient l'application linéaire:

$$\widetilde{ob}_k : \operatorname{Ker} \mathcal{N}_n^k \longrightarrow H^1_{\{0\}}\big(S, \operatorname{Coker} \mathcal{N}_{n-1}^k\big). \tag{7}$$

Comme $k$ n'est pas supposé être plus grand ou égal à $k_0$, il y a une relation entre $\theta_k$ et $\widetilde{ob}_k$ qui est donnée par la proposition suivante.

**Proposition 2.** *Soit* $\nu_k : H^1\big(S^*, H^{n-1}(u)\big) \longrightarrow H^1\big(S^*,\, \mathrm{Im}\mathcal{N}_{n-1}^k\big)$ *l'application induite par* $\mathcal{N}_{n-1}^k : H^{n-1}(u) \longrightarrow \mathrm{Im}\mathcal{N}_{n-1}^k$ *et soit* $\partial : H^0(S^*,\, \mathrm{Coker}\mathcal{N}_{n-1}^k) \longrightarrow H^1\big(S^*,\, \mathrm{Im}\mathcal{N}_{n-1}^k\big)$ *le connecteur de la suite exacte de cohomologie de la suite exacte de faisceaux*:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}\mathcal{N}_{n-1}^k \longrightarrow H^{n-1}(u) \longrightarrow \operatorname{Coker} \mathcal{N}_{n-1}^k \longrightarrow 0.$$

*Alors on a*

$$\partial \,\circ\, ob_k = \nu_k \,\circ\, \theta_k \tag{8}$$

*Remarques.*

1) On a un isomorphisme

$$\vartheta : H^1\big(S^*, \mathrm{Im}\mathcal{N}_{n-1}^k\big) \longrightarrow H^2_{\{0\}}\big(S, \mathrm{Im}\mathcal{N}_{n-1}^k\big)$$

puisque $H^i\big(S, \mathrm{Im}\mathcal{N}_{n-1}^k\big) = 0$ pour $i \geq 1$. La formule (8) est donc équivalente à la formule (8 bis) suivante:

$$\widetilde{\partial} \circ \widetilde{ob}_k = \vartheta \circ \nu_k \circ \theta_k \tag{8 bis}$$

où $\widetilde{\partial} : H^1_{\{0\}}\big(S,\, \mathrm{Coker}\mathcal{N}_{n-1}^k\big) \longrightarrow H^2_{\{0\}}\big(S, \mathrm{Im}\mathcal{N}_{n-1}^k\big)$ est le connecteur.

2) Soit $i_k : H^1\big(S^*, \mathrm{Im}\mathcal{N}^k_{n-1}\big) \longrightarrow H^1\big(S^*, H^{n-1}(u)\big)$ l'application induite par l'inclusion évidente de $\mathrm{Im}\mathcal{N}^k_{n-1}$ dans $H^{n-1}(u)$.

Alors on a $i_k \circ \nu_k \circ \theta_k = 0$ parce que $i_k \circ \nu_k \circ \theta_k = \mathcal{N}^k_{n-1} \circ \theta_k = \theta_k \circ \mathcal{N}^k_n = 0$.

*Preuve.* Remarquons que

$$ob_k(\omega)|_{U_\sigma} = \alpha_\sigma,$$

que la condition de recollement dans $H^0\big(S^*, \mathrm{Coker}\mathcal{N}^k_{n-1}\big)$ vient du fait que $\tau_{k',k}(\alpha_\sigma - \alpha_{\sigma'})$ est nul dans $H^0\big(U_\sigma \cap U_{\sigma'}, h^n(k)\big)$ et que l'on a $\mathrm{Ker}\tau_{k',k} \simeq \mathrm{Im}\mathcal{N}^k_{n-1}$ d'après la propriété P4) rappelée plus haut.

On en déduit immédiatement l'égalité

$$\partial ob_k(\omega) = (\alpha_\sigma - \alpha_{\sigma'})$$

dans $H^1\big(S^*, \mathrm{Im}\mathcal{N}^k_{n-1}\big)$ ainsi que

$$\nu_k\big(\theta_k(e)\big) = (\alpha_\sigma - \alpha_{\sigma'})$$

où $r^n(k)(\omega) = e \in \mathrm{Ker}\mathcal{N}^k_n$. ∎

Nous définirons

$$\eta_k : \mathrm{Ker}\mathcal{N}^k_n \longrightarrow H^1\big(S^*, \mathrm{Im}\mathcal{N}^k_{n-1}\big)$$

par $\quad \partial \circ ob_k = \nu_k \circ \theta_k := \eta_k$.

L'annulation de $\eta_k(e)$ est équivalente à chacune des deux propriétés suivantes:

i) $\widetilde{ob}_k(e)$ est dans l'image de $H^1_{\{0\}}\big(S, H^{n-1}(u)\big)$

ii) $\theta_k(e)$ est dans l'image de l'application

$$H^1\big(S^*, \mathrm{Ker}\mathcal{N}^k_{n-1}\big) \longrightarrow H^1\big(S^*, H^{n-1}(u)\big).$$

Bien sur, pour $k \geq k_0$ ces conditions sont automatiquement vérifiées car on a $\mathrm{Ker}\mathcal{N}^k_{n-1} = H^{n-1}(u) = \mathrm{Coker}\mathcal{N}^k_{n-1}$ et on a $\eta_k = 0$.

## §2

Commençons par décrire un cas simple où notre prolongement méromorphe n'aura pas de pôles congrus à $-u$ *modulo* $\mathbb{Z}$.

**Proposition 3.** *Plaçons-nous sous les hypothèses standards. Soit $U$ un ouvert de $X$ et considérons $\beta \in H^0\big(U, \mathcal{E}^{n-1}(1)\big)$*[16] *et $\psi \in C_c^\infty(U)^{n+1}$ une $(n+1)-$forme $C^\infty$ à support compact dans $U$ vérifiant*

- C1) $d\psi = 0$ au voisinage de $U \cap S$
- C2) $d\bar{f} \wedge \psi = 0$ au voisinage de $U \cap S$.

*Alors le prolongement méromorphe de*

$$\lambda \longrightarrow \int_U |f|^{2\lambda} \frac{df}{f} \wedge d\beta \wedge \psi$$

*n'a pas de pôles pour $\lambda \in -u + \mathbb{Z}$.*

*Preuve.* On a $d\big(|f|^{2\lambda} \frac{df}{f} \wedge \beta \wedge \psi\big) = -|f|^{2\lambda} \frac{df}{f} \wedge d\beta \wedge \psi + |f|^{2\lambda}(\chi_1 + \lambda\chi_2)$ pour $\mathrm{Re}\lambda >> 1$, où $\chi_i$ $(i = 1, 2)$ sont des $(2n+2)-$formes semi-méromorphes à supports compacts dans $U$ vérifiant $\mathrm{Supp}\chi_i \cap S = \emptyset$. D'après la formule de Stokes, on aura pour $\mathrm{Re}\lambda >> 1$

$$\int_U |f|^{2\lambda} \frac{df}{f} \wedge d\beta \wedge \psi = \int_U |f|^{2\lambda}(\chi_1 + \lambda\chi_2).$$

Cette égalité reste vraie pour les prolongements méromorphes. Et, comme $\mathrm{Supp}\chi_i \cap S = \emptyset$, le prolongement méromorphe de $\int_U |f|^{2\lambda}\chi$ ne peut avoir de pôles dans $-u+\mathbb{Z}$ d'après les hypothèses standards et le théorème de Malgrange-Kashiwara (voir [M.83] et [K.84]) puisque $Supp(\chi) \cap S = \emptyset$. ∎

**Corollaire**. *Considèrons un ouvert $U \subset X^*$ et un entier $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $e \in \mathrm{Ker}\mathcal{N}_n^k$ et $\omega \in H^0\big(X, \mathcal{E}^n(k)\big) \cap \mathrm{Ker}\,\delta$ une forme représentant $e$ $\big(r^n(k)(\omega) = e\big)$. Pour toute $\psi \in C_c^\infty(U)^{n+1}$ vérifiant* C1) *et* C2) *et pour tout $j \in \mathbb{Z}$ les parties polaires en tout point de $-u + \mathbb{Z}$ du prolongement méromorphe de*

$$\lambda \longrightarrow \int_U |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j} \frac{df}{f} \wedge \omega_k \wedge \psi$$

*ne dépendent que de $e \in \mathrm{Ker}\mathcal{N}_n^k$ et de la classe de $\psi$ dans le quotient*

$$Q_U := \frac{\{\psi \in C_c^\infty(U)^{n+1}, \psi \textit{ verifiant } \mathrm{C1)} \textit{ et } \mathrm{C2)}\}}{\{\psi = d\chi \textit{ pres de } S \cap U, \textit{avec } d\bar{f} \wedge \chi = 0 \textit{ pres de } S \cap U\}}.$$

*Preuve.* Soient $\omega$ et $\omega'$ dans $H^0\big(X, \mathcal{E}^n(k)\big) \cap \mathrm{Ker}\,\delta$ induisant $e$. On a donc $r^n(k)(\omega' - \omega) = 0$ et on peut écrire grâce à la propriété P5)

$$\omega' - \omega = \tau_{k',k}(\alpha) + \delta\beta$$

[16] donc $\beta$ est simplement une forme semi-méromorphe de degré $n-1$ sur $U$ à pôles dans $U \cap (f = 0)$.

où $\alpha \in H^0\big(X, \mathcal{E}^{n-1}(k')\big) \cap \operatorname{Ker}\delta$ et $\beta \in H^0\big(X, \mathcal{E}^{n-1}(k)\big)$. On en déduit l'égalité

$$\frac{df}{f} \wedge (\omega'_k - \omega_k) = \frac{df}{f} \wedge d\beta_k$$

et pour $\psi \in C_c^\infty(U)$ vérifiant les conditions C1) et C2) de la proposition 3, cela donne que le prolongement méromorphe de

$$\lambda \longrightarrow \int_X |f|^{2\lambda} \frac{df}{f} \wedge d\beta_k \wedge \psi$$

n'a pas de pôles dans $-u + \mathbb{Z}$.

En remplaçant $\psi$ par $\bar{f}^j \psi$ on en conclut l'indépendance du choix de $\omega$ représentant $e$.

Considérons une forme $\psi$ pouvant s'écrire $\psi = d\chi$ près de $S \cap U$, avec $\chi \in C_c^\infty(U)^n$ telle que $d\bar{f} \wedge \chi = 0$ près de $S \cap U$. Nous pouvons écrire, pour $\mathrm{Re}\lambda >> 1$

$$|f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j} \frac{df}{f} \wedge \omega_k \wedge \psi = (-1)^{n+1} d\big(|f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j} \frac{df}{f} \wedge \omega_k \wedge \chi\big) + |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j} (\rho_1 + \lambda \rho_2)$$

où $\rho_i$, $i = 1, 2$, sont des formes semi-méromorphes sur $U$ de degré $2n+2$ à supports compacts vérifiant

$$\operatorname{Supp} \rho_i \cap S = \emptyset.$$

Nous concluons en utilisant, comme précédemment, la formule de Stokes, le prolongement méromorphe et le théorème de Malgrange-Kashiwara. ■

*Remarques.*

1) Comme on a $|f|^{2(\lambda-j)} \bar{f}^j = |f|^{2\lambda} f^{-j}$ la condition de n'avoir pas de pôles pour tout $j \in \mathbb{Z}$ sur l'ensemble $-u + \mathbb{Z}$ est la même pour

$$\int_X |f|^{2\lambda} f^{-j} \frac{df}{f} \wedge \omega_k \wedge \psi \quad \text{ou pour} \quad \int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j} \frac{df}{f} \wedge \omega_k \wedge \psi.$$

2) Il est facile de vérifier que pour $\omega$ donnée dans $H^0\big(X, \mathcal{E}^n(k)\big) \cap \operatorname{Ker}\delta$ et pour $j \in \mathbb{Z}$ les courants[17]

$$\zeta_{j,p} := P_p\big(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j} \frac{df}{f} \wedge \omega_k \wedge \square\big)$$

sont à supports dans $S$ pour $p \geq 1$ et vérifient

$$d\zeta_{j,p} \wedge d\bar{f} = 0.$$

[17] ici $P_p$ est le coefficient de $(\lambda + u)^{-p}$ dans le développement de Laurent en $\lambda = -u$.

Si nous les considérons comme formes linéaires continues sur l'espace vectoriel (localement convexe) des $\psi \in C_c^\infty(U)^{n+1}$ qui vérifient les conditions C1) et C2) de la proposition 3, cela signifie que nous regardons leurs classes dans le quotient

$$Q'_U := \frac{\{\zeta, \mathrm{Supp}\zeta \subset S / d\zeta \wedge d\bar{f} = 0\}}{\{\zeta = d\bar{f} \wedge \mathcal{U} + dV, \mathrm{Supp}\mathcal{U}, V \subset S\}}$$

qui est le dual topologique de $Q_U$.

Le corollaire de la proposition 3 permet de définir une application

$$H^n(u) \longrightarrow \Pi_{\substack{j\in\mathbb{Z} \\ p\geq 1}} (Q'_U)_{j,p}$$

pour tout ouvert $U$ de $X$. Pour $U$ une petite boule centrée en $\sigma \in S^*$, cette application est nulle: cela résulte de la surjectivité pour $k' \geq k_0$ de l'application

$$\tau_{k',k} : h^{n-1}(k') \longrightarrow h^n(k)$$

le long de $S^*$. En effet, localement sur $S^*$, on peut écrire

$$\frac{df}{f} \wedge \omega_k = \frac{df}{f} \wedge d\beta$$

où $\beta \in H^0\big(U, \mathcal{E}^{n-1}(1)\big)$; on conclut alors grace à la proposition 3.

Par contre, pour un ouvert $U$ tel que $U \cap S^*$ ne soit pas contractible[18], ces applications ne seront plus nulles en général. En fait, le théorème suivant montre même que pour $j$ assez grand et $U = X^*$ la $j$-ième composante de cette application est injective sur $H^n(u)/Im(can)$.

**Théorème 1.** *Dans la situation des "hypothèses standards" définies ci-dessus, considérons une classe $e \in H^n(u)$ vérifiant, pour un entier $d \geq 0$ donné,*

$$\mathcal{N}_n^d(e) \notin can(H_c^n(u))$$

*où $can : H_c^n(u) \to H^n(u)$ est l'application d'oubli de support introduite plus haut. Alors il existe $j \in \mathbb{N}$ et $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(X^*)^{n+1}$ vérifiant les conditions "C" suivantes*

- C1) $d\varphi \equiv 0$ *près de* $S^*$,
- C2) $d\bar{f} \wedge \varphi \equiv 0$ *près de* $S^*$,

*et tels que le prolongement méromorphe de la fonction*

$$\lambda \longrightarrow \int_{X^*} |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j} \frac{df}{f} \wedge w_k \wedge \varphi \tag{9}$$

[18] en fait il s'agit de voir si le $H^1$ du système local $H^{n-1}(u)$ n'est pas nul sur $U \cap S^*$.

*ait un pôle d'ordre* $\geq d+1$ *en* $\lambda = -u$, *où* $w = (w_1, \cdots, w_k)$ *représente la classe* $e \in H^n(u)$ *au sens qui a été précisé ci-dessus* (*donc* $w$ *vérifie* (1) *et* $r^n(k)(w) = e$). *Réciproquement, si* $\mathcal{N}_n^d(e) \in can(H_c^n(u))$, *pour tout* $j \in \mathbb{N}$ *et toute* $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(X^*)^{n+1}$ *vérifiant les conditions "C", le prolongement méromorphe de* (9) *a des pôles d'ordre* $\leq d$ *en* $\lambda = -u$ *pour tout choix du représentant* $w$ *de la classe* $e$.

*Preuve.* Nous allons commencer par nous ramener à montrer le résultat pour $d = 0$ : supposons donc prouvé le cas $d = 0$ et montrons le cas général. Soit donc $\varepsilon := \mathcal{N}_n^d e$ avec $d \geq 1$ et soit $w$ une forme représentant $e$; donc $(w_{k-d}, ..., w_1)$ est dans $H^0\big(X, \mathcal{E}_{k-d}^n\big) \cap \operatorname{Ker} \delta$ et représente $\varepsilon$. Alors, d'après le cas $d = 0$, il existe $j \in \mathbb{N}$ et $\psi \in C_c^\infty(X^*)^{n+1}$ vérifiant les conditions C1) et C2) tels que le prolongement méromorphe de

$$\lambda \longrightarrow \int_{X^*} |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j} \frac{df}{f} \wedge w_{k-d} \wedge \psi$$

ait un pôle d'ordre $\geq 1$ en $\lambda = -u$.

Le lemme suivant permet alors de conclure.

**Lemme.** *Nous conservons les notations précédentes. Soit* $l \in [1, k-1]$ *et supposons que* $\int_{X^*} |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j} \frac{df}{f} \wedge w_h \wedge \psi$ *ait un pôle d'ordre* $l$ *exactement en* $\lambda = -u$. *Alors* $\int_{X^*} |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j} \frac{df}{f} \wedge w_{h+1} \wedge \psi$ *a un pôle d'ordre exactement* $l+1$ *en* $\lambda = -u$.

*Preuve du lemme.* On a $\delta w = 0$. Cela donne

$$dw_{h+1} = u \frac{df}{f} \wedge w_{h+1} + \frac{df}{f} \wedge w_h, \quad \forall h \in [0, k-1].$$

Donc pour Re $\lambda >> 1$, dans un voisinage de $S \cap \operatorname{Supp} \psi$ on aura

$$d\big(|f|^{2\lambda} \bar{f}^{-1} w_{h+1} \wedge \psi\big) = (\lambda + u)|f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j} \frac{df}{f} \wedge w_{h+1} \wedge \psi + |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j} \frac{df}{f} \wedge w_h \wedge \psi.$$

Mais les pôles en $\lambda = -u$ du prolongement méromorphe de $|f|^{2\lambda}$ sont à support dans $S$ en raison des hypothèses standards. Donc la formule de Stokes et le prolongement analytique permettent de conclure. ∎

Passons maintenant à la preuve de la partie directe du théorème 1 dans le cas $d = 0$.

Notre hypothèse $e \notin \mathrm{can}\big(H^n_c(u)\big)$ est équivalente à $\theta_k(e) \neq 0$ ($k$ assez grand). Grace à l'accouplement sesquilinéaire[19]

$$\tilde{h} : H^0\big(S^*, H^{n-1}(u)\big) \times H^1\big(S^*, H^{n-1}(u)\big) \longrightarrow \mathbb{C}$$

nous pouvons trouver $\alpha$ dans $H^0\big(S^*, H^{n-1}(u)\big)$ tel que $\tilde{h}\big(\alpha, \theta_k(e)\big) \neq 0$, puisque $\tilde{h}$ est non dégénéré. Choisissons une forme $\widetilde{\alpha} \in H^0\big(S^*, \mathcal{E}^{n-1}(k)\big)$ vérifiant $\delta\widetilde{\alpha} = 0$ représentant $\alpha$ ainsi qu'une fonction $\rho \in C^\infty_c(X)$ telle que $\rho \equiv 1$ près de l'origine. D'après la proposition 11 de [B.91], avec $v = \tau_k(\widetilde{\alpha})$ et $\gamma = d\rho$, on a

$$\mathrm{Res}\Big(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda}\frac{df}{f} \wedge w_k \wedge \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge \bar{\widetilde{\alpha}}_k \wedge d\rho\Big) \neq 0$$

puisque ce résidu vaut $\tilde{h}\big(\alpha, \theta_k(e)\big)$ à $\pm(2i\pi)^n$ près.

Soit $h \in \mathbb{N}$ assez grand pour que

$$\psi := \bar{f}^h \overline{\frac{df}{f}} \wedge \bar{\widetilde{\alpha}}_k \wedge d\rho$$

soit dans $C^\infty_c(X^*)^{n+1}$. C'est possible puisque le support de $d\rho$ est un compact de $X^*$ et puisque $\widetilde{\alpha}$ est semi-méromorphe près de $S^*$. On a alors $d\bar{f} \wedge \psi = 0$ et $d\psi = 0$ près de $S^*$. En choisissant $j = -h$ on obtient bien un pôle d'ordre $\geq 1$ en $\lambda = -u$ pour le prolongement méromorphe de

$$\int_{X^*} |f|^{2\lambda}\bar{f}^{-j}\frac{df}{f} \wedge w_k \wedge \psi$$

ce qui achève la preuve de la partie directe du théorème 1.

Pour la réciproque, il est également suffisant de traiter le cas $d = 0$ grace au lemme ci-dessus. Soit donc $e \in \mathrm{can}\big(H^n_c(u)\big)$, pour tout $\varepsilon > 0$ nous pouvons trouver une forme $w_\varepsilon \in H^0\big(X, \mathcal{E}(k)\big) \cap \mathrm{Ker}\,\delta$ $\quad(k >> 1)$ telle que $f^{-1}(0) \cap \mathrm{Supp}\, w_\varepsilon \subset B(0, \varepsilon)$. Donc, en utilisant la proposition 1, pour toute $\psi \in C^\infty_c(X^*)$ donnée, vérifiant les conditions C1) et C2), on peut prendre $\varepsilon$ assez petit pour avoir

$$\mathrm{Supp}\psi \cap \mathrm{Supp}\, w_\varepsilon \, \cap \, S^* = \emptyset.$$

Ceci implique évidemment qu'en $\lambda = -u$

$$\lambda \longrightarrow \int_{X^*} |f|^{2\lambda}\bar{f}^{-j}\frac{df}{f} \wedge (w_\varepsilon)_k \wedge \psi$$

n'a pas de pôle, $\forall j \in \mathbb{Z}$. ■

[19] défini dans [B.91] p. 462; il est induit par la dualité (hermitienne) de Poincaré sur la cohomologie de la fibre de Milnor de la restriction de $f$ à une section hyperplane transverse à $S^*$.

*Remarques.*

1) Comme on sait que les pôles aux points de $-u+\mathbb{Z}$ pour $|f|^{2\lambda}$ sont d'ordre $\leq k_0$, le théorème 1 implique que l'on a

$$\mathcal{N}_n^{k_0} H^n(u) \subset \operatorname{can}\big(H_c^n(u)\big).$$

Ce résultat a déjà été obtenu dans [B.91] corollaire 8.

2) Soit $S^* = \cup_{j\in J} S_j^*$ la décomposition de $S^*$ en composantes connexes[20]. Alors $\theta\big(\mathcal{N}^d(e)\big) \in \oplus_{j\in J} H^1\big(S_j^*, H^{n-1}(u)\big)$ et la forme sesquilinéaire $\tilde{h}$ se décompose également suivant les branches de $S$. Si nous supposons que la composante de $\theta\big(\mathcal{N}^d(e)\big)$ sur $H^1\big(S_j^*, H^{n-1}(u)\big)$ est $\neq 0$, nous pouvons être plus précis dans le théorème 1 et chosir $\psi$ vérifiant $\operatorname{Supp}\psi \cap S^* \subset S_j^*$.

Cela signifie que nous pouvons préciser pour chaque branche de $S$ quel est l'ordre d'emmêlement de la classe $e$ considérée. Bien sur, cet ordre d'emmêlement peut différer d'une branche à l'autre !

## §3

### a)

Le premier objectif de ce paragraphe est la construction de l'invariant que nous allons utiliser pour mesurer l'emmêlement d'une classe $e \in Im(can)$.

Il est obtenu en "relevant" la restriction de $\widetilde{ob}_k$ à Ker $\theta_k$.

**Proposition 4.** *Sur Ker $\theta_k \subset \operatorname{Ker}\mathcal{N}_n^k$ il existe une application linéaire*

$$\widetilde{sob}_k : \operatorname{Ker}\theta_k \longrightarrow \frac{H^1_{\{0\}}\big(S, H^{n-1}(u)\big)}{\mathcal{N}^k H^1_{\{0\}}\big(S, H^{n-1}(u)\big)}$$

*dont le noyau est* $\operatorname{can}\big(\operatorname{Ker}\mathcal{N}_c^k\big)$.

*Composée avec l'application évidente*

$$\frac{H^1_{\{0\}}\big(S, H^{n-1}(u)\big)}{\mathcal{N}^k H^1_{\{0\}}\big(S, H^{n-1}(u)\big)} \longrightarrow H^1_{\{0\}}\big(S, \operatorname{Coker}\mathcal{N}_{n-1}^k\big)$$

$\widetilde{sob}_k$ *redonne l'application* $\widetilde{ob}_k$ *de* [B.91].

*Preuve.* Soit $e \in \operatorname{Ker}\mathcal{N}_n^k$ tel que $\theta_k(e) = 0$ et soit $w \in H^0\big(X, \mathcal{E}^n(k)\big) \cap \operatorname{Ker}\delta$ une forme représentant la classe $e$ (i.e. $r^n(k)(w) = e\big)$. Localement le long de $S^*$ nous pouvons écrire, pour tout $k' \geq k_0$

$$w|_{U_\sigma} = \tau_{k',k}(\alpha_\sigma) + \delta(\beta_\sigma) \tag{10}$$

[20]Donc $S = \cup_{j\in J} S_j$ est la décomposition de $S$ en composantes irréductibles.

où $\alpha_\sigma \in H^0\big(U_\sigma, \mathcal{E}^{n-1}(k')\big) \cap \operatorname{Ker}\delta$ et $\beta_\sigma \in H^0\big(U_\sigma, \mathcal{E}^{n-1}(k)\big)$. Alors $\gamma_\sigma = \begin{pmatrix} -\beta_\sigma \\ \alpha_\sigma \end{pmatrix} \in H^0\big(U_\sigma, \mathcal{E}^{n-1}(k'+k)\big)$ donne le cocycle

$$[\gamma_{\sigma'} - \gamma_\sigma] \in Z^1\big(\mathcal{U}, H^{n-1}(u)\big)$$

dont la classe dans $H^1\big(S^*, H^{n-1}(u)\big)$ est $\theta_k(e)$.

Modulo un raffinement du recouvrement $\mathcal{U} := \big(U_\sigma\big)_{\sigma \in S^*}$ considéré, notre hypothèse $\theta_k(e) = 0$ nous permet de trouver une 0-cochaîne $\begin{pmatrix} -b_\sigma \\ a_\sigma \end{pmatrix}$ dans $C^0\big(\mathcal{U}, \mathcal{E}^{n-1}(k'+k)\big)$, vérifiant $\delta \begin{pmatrix} -b_\sigma \\ a_\sigma \end{pmatrix} = 0$ et

$$\begin{pmatrix} b_\sigma - b_{\sigma'} \\ a_{\sigma'} - a_\sigma \end{pmatrix} = \gamma_{\sigma'} - \gamma_\sigma \quad \text{sur} \quad U_\sigma \cap U_{\sigma'}.$$

Donc $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} b_\sigma - \beta_\sigma \\ \alpha_\sigma - a_\sigma \end{pmatrix}$ est une section globale sur $S^*$ de $\mathcal{E}^{n-1}(k'+k)$ et nous avons

$$\begin{pmatrix} -w|_{S^*} \\ 0 \end{pmatrix} = \delta \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \text{le long de } S^*.$$

Nous définissons $\widetilde{sob}_k(e)$ comme la classe du quotient

$$H^1_{\{0\}}\big(S, H^{n-1}(u)\big) \Big/ \mathcal{N}^k_{n-1} H^1_{\{0\}}\big(S, H^{n-1}(u)\big)$$

induite par $v$ (qui est $\delta-$fermée) en utilisant l'isomorphisme de faisceaux $h^{n-1}(k') \longrightarrow H^{n-1}(u)$ sur $S^*$ ( $k' \geq k_0$).

Un autre choix pour $u$ et $v$ conduit à

$$\begin{pmatrix} -w|_{S^*} \\ o \end{pmatrix} = \delta \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \quad \text{sur } S^*,$$

ce qui donne $\quad \delta \begin{pmatrix} u - u' \\ v - v' \end{pmatrix} = 0.$

Si $\zeta$ est la classe induite dans $H^1_{\{0\}}\big(S, H^{n-1}(u)\big)$ par $\begin{pmatrix} u - u' \\ v - v' \end{pmatrix}$ dans $H^0\big(S^*, \mathcal{E}^{n-1}(k'+k)\big) \cap \operatorname{Ker}\delta$, on aura $\pi_{k'+k,k'}(\zeta) = [v] - [v']$ et donc

$$\mathcal{N}^k_{n-1}\zeta = [v] - [v'] \quad \text{dans} \quad H^1_{\{0\}}\big(S, H^{n-1}(u)\big)$$

puisque le diagrame suivant commute sur $S^*$ et puisque ses flèches verticales $r^{n-1}(k'+k)$ et $r^{n-1}(k')$ sont des isomorphismes pour $k' \geq k_0$

$$\begin{tikzcd} h^{n-1}(k'+k) \arrow[r, "\tau_{k'+k,k'}"] \arrow[d] & h^{n-1}(k') \arrow[d] \\ H^{n-1}(u) \arrow[r, "\mathcal{N}^k_{n-1}"] & H^{n-1}(u). \end{tikzcd}$$

Supposons que nous changeons le choix de $w$. Nous allons donc le remplacer par $w+\delta b-\tau_{k',k}a$ où $b \in H^0\big(X,\mathcal{E}^{n-1}(k)\big)$ et $a \in H^0\big(X,\mathcal{E}^{n}(k')\big) \cap \operatorname{Ker}\delta$. Nous aurons donc

$$\delta \begin{pmatrix} u-b \\ v-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(w+\delta b-\tau_{k',k}a)|_{S^*} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Comme $a \in H^0\big(S, H^{n-1}(u)\big)$ on en déduit

$$[v-a]=[v] \quad \text{dans} \quad H^1_{\{0\}}\big(S,H^{n-1}(u)\big)$$

d'où l'indépendance du choix du représentant $w$ considéré.

Supposons maintenant que l'on ait $\widetilde{sob}_k(e)=0$. On peut alors écrire

$$v = v_1|_{S^*} + v_2$$

où $v_1 \in H^0\big(X,\mathcal{E}^{n-1}(k')\big) \cap \operatorname{Ker}\delta$ et où $v_2$ est dans $\mathcal{N}^k_{n-1}H^0\big(S^*,H^{n-1}(u)\big)$. Cela signifie qu'il existe $u_2 \in H^0\big(S^*,\mathcal{E}^{n-1}(k)\big)$ tel que

$$\delta \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{le long de } S^*.$$

On obtient $\tau_{k',k}(v_2) = \delta u_2$ sur $S^*$ et comme $\delta \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -w|_{S^*} \\ 0 \end{pmatrix}$ donne $\delta u - \tau_{k',k}v + w|_{S^*} = 0$, la forme

$$\widehat{w} := w - \tau_{k',k}(v_1)$$

vérifie $\widehat{w}|_{S^*} = \delta(u_2-u)$ sur $S^*$. Mais $\widehat{w}$ est aussi un représentant de la classe $e$ et il en est de même de $\widehat{w}-\delta\big((1-\rho)(u_2-u)\big)$ où $\rho \in C^\infty_c(X)$ vaut identiquement 1 près de l'origine.

Définissons $\varepsilon \in H^n_c(u)$ par $\varepsilon = r^n_c(k)\big[\widehat{w}-\delta\big((1-\rho)(u_2-u)\big)\big]$. On a alors

$$\mathcal{N}^k_c\varepsilon = 0 \quad \text{dans } H^n_c(u)$$

et can $\varepsilon = e$. On a donc prouvé l'inclusion $\operatorname{Ker}(\widetilde{sob}_k) \subset \operatorname{can}(\operatorname{Ker}\mathcal{N}^k_c)$.

La réciproque est facile car si $\widetilde{w} \in H^0_{c/f}\big(X, \mathcal{E}^n(k)\big) \cap \operatorname{Ker}\delta$ vérifie $r^n_c(k)(\widetilde{w}) = \varepsilon$ et can $\varepsilon = e$, l'annulation de $\widetilde{w}$ sur $S - S \cap K$ où $K$ est un compact, implique $\theta_k(e) = 0$ puisque $H^{n-1}(u)$ est un système local sur $S^*$. De plus, on pourra écrire

$$\begin{pmatrix} -\widetilde{w}|_{S-S\cap K} \\ 0 \end{pmatrix} = \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{le long de } S - S \cap K$$

et donc $\widetilde{sob}_k(e)$ sera nul dans $H^0\big(S - S\cap K,\, H^{n-1}(u)\big)$. Nous en concluons que $\widetilde{sob}_k(e) = 0$ à nouveau parce que $H^{n-1}(u)$ est un système local sur $S^*$.

Pour achever la preuve, il nous reste à montrer que l'image de $[v] = \widetilde{sob}_k(e)$ dans $H^1_{\{0\}}\big(S, \operatorname{Coker}\mathcal{N}^k_{n-1}\big)$ est $\widetilde{ob}_k(e)$. Mais la relation $w|_{S^*} = \tau_{k',k}(v) - \delta u$ permet d'écrire $w|_{U_\sigma} = \tau_{k',k}(\alpha_\sigma) + \delta\beta_\sigma$ avec $\alpha_\sigma := v|_{U_\sigma}$ et $\beta_\sigma = -u|_{U_\sigma}$. La section sur $S^*$ du faisceau $\operatorname{Coker}\mathcal{N}^k_{n-1}$ définie par $\tau_{k',k}(\alpha_\sigma)$ est $\tau_{k',k}(v)$. ■

*Remarque.* La condition $\theta_k(e) = 0$ implique $\eta_k(e) = 0$. Donc, par le connecteur

$$\partial : H^1_{\{0\}}\big(S, \operatorname{Coker}\mathcal{N}^k_{n-1}\big) \longrightarrow H^2_{\{0\}}\big(S, \operatorname{Im}\mathcal{N}^k_{n-1}\big)$$

$\widetilde{ob}_k(e)$ donne 0. Il est donc possible de prouver directement que $\widetilde{ob}_k(e)$ se relève dans $H^1_{\{0\}}\big(S, H^{n-1}(u)\big)$ sous l'hypothèse $\eta_k(e) = 0$. Mais ce relèvement n'est défini que modulo l'image de $H^1_{\{0\}}\big(S, \operatorname{Im}\mathcal{N}^k_{n-1}\big)$ qui est, en général, strictement plus grande que $\mathcal{N}^k_{n-1} H^1_{\{0\}}\big(S, H^{n-1}(u)\big)$ puisque la surjection

$$\mathcal{N}^k_{n-1} : H^{n-1}(u) \longrightarrow \operatorname{Im}\mathcal{N}^k_{n-1}$$

donne seulement la suite exacte

$$H^1_{\{0\}}\big(S, H^{n-1}(u)\big) \longrightarrow H^1_{\{0\}}\big(S, \operatorname{Im}\mathcal{N}^k_{n-1}\big) \longrightarrow H^2_{\{0\}}\big(S, \operatorname{Ker}\mathcal{N}^k_{n-1}\big)$$

et puisque la flèche $H^2_{\{0\}}\big(S, \operatorname{Ker}\mathcal{N}^k_{n-1}\big) \to H^2_{\{0\}}\big(S, H^n(u)\big)$ n'est pas injective en général, pour $k < k_0$.

La proposition ci-dessus n'est donc probablement pas vraie sous l'hypothèse plus faible $e \in \operatorname{Ker}\, \eta_{\mathrm{k}}$.

## b)

Soit $e \in \operatorname{Ker}\mathcal{N}^k \cap \operatorname{Im}(\mathrm{can})$.

**Definition.** Nous dirons qu'un représentant $\widetilde{w} \in H^0\big(X, \mathcal{E}^n(k)\big) \cap \operatorname{Ker}\delta$ de la classe $e$ est **adapté** si la condition suivante est réalisée

(11) $$\operatorname{Supp}\Big(\frac{df}{f} \wedge \widetilde{w}_k\Big) \cap S \textit{ est compact dans } X.$$

Commençons par prouver l'existence de représentants adaptés pour une classe $e \in \mathrm{Ker}\mathcal{N}^k \cap \mathrm{Im}(\mathrm{can})$.

Soit $w \in H^0\big(X, \mathcal{E}^n(k)\big) \cap \mathrm{Ker}\,\delta$ un représentant de la classe $e$ (i.e. on a $r^n(k)(w) = e\big)$. Notre hypothèse $e \in \mathrm{Im}(\mathrm{can})$ qui équivaut à la nullité de $\theta_{k',k}$ pour $k' \geq k_0$ permet d'écrire (voir la preuve de la proposition 4)

$$w|_{S^*} = \tau_{k',k}(v) + \delta u$$

où $v \in H^0\big(S^*, \mathcal{E}^{n-1}(k')\big) \cap \mathrm{Ker}\,\delta$ et $u \in H^0\big(S^*, \mathcal{E}^{n-1}(k)\big)$. Choisissons une fonction $\rho \in C_c^\infty(X)$ telle que $\rho \equiv 1$ près de 0 et définissons

$$\widetilde{w} := w - \delta\big((1-\rho)u\big).$$

Soit $K = \mathrm{Supp}\,\rho$; il est clair qu'en dehors de K on a, le long de $S$

$$\widetilde{w} = \tau_{k',k}(v)$$

et donc $\dfrac{df}{f} \wedge \widetilde{w}_k \equiv 0$. Donc $\widetilde{w}$ est adaptée.

**Proposition 5.** *Soit $e \in \mathrm{Ker}\mathcal{N}^k \cap \mathrm{Im}(\mathrm{can})$ et $\widetilde{w}$ un représentant adapté de $e$. Soit $e'' \in H^n(u)$ une classe vérifiant $\mathcal{N}^k\theta(e'') = 0$ et choisissons $w''$ dans $H^0\big(X, \mathcal{E}^n(k'')\big) \cap \mathrm{Ker}\,\delta$ une forme représentant la classe $e''$, où $k''$ est un entier assez grand.*

*Alors les parties polaires d'ordre $> k$ en $\lambda = -u$ du prolongement méromorphe de la fonction*

$$\lambda \longrightarrow \int_X |f|^{2\lambda} f^{-j} \frac{df}{f} \wedge \widetilde{w}_k \wedge \overline{\frac{df}{f}} \wedge \overline{w}''_{k''} \tag{12}$$

*où $j \in \mathbb{Z}$, dépendent seulement des classes $e, e''$ et de $j$ et pas des choix des représentants $\widetilde{w}$ and $w''$.*

*Remarque.* L'hypothèse que le représentant $\widetilde{w}$ est adapté est essentielle pour donner un sens aux parties polaires de (12) en $\lambda = -u$ : si $\sigma \in C_c^\infty(X)$ est identiquement égale à 1 au voisinage de $\mathrm{Supp}\Big(\dfrac{df}{f} \wedge \widetilde{w}_k\Big) \cap S$, alors pour $\mathrm{Re}\lambda >> 1$ la fonction

$$\lambda \longrightarrow \int_X |f|^{2\lambda} f^{-j} \frac{df}{f} \wedge \widetilde{w}_k \wedge \overline{\frac{df}{f}} \wedge \overline{w}''_{k''} \cdot \sigma \tag{13}$$

est holomorphe et admet un prolongement méromorphe au plan complexe tout entier. De plus, comme nous savons que les parties polaires en $\lambda = -u + \mathbb{Z}$ de

$|f|^{2\lambda}$ sont des courants à supports dans $S$, changer le choix de $\sigma$ ne change pas les parties polaires de (13) en ces points.

*Preuve de la proposition* 5. Commençons par choisir un représentant $w \in H^0\big(X, \mathcal{E}^n(k)\big) \cap \operatorname{Ker}\delta$ induisant $e$ et écrivons comme précédemment

$$w|_{S^*} = \tau(v) + \delta(u).$$

Posons alors $\widetilde{w} := w - \delta\big((1-\rho)u\big)$. Si on change les choix de $u$ et $v$, on aura

$$w|_{S^*} = \tau(v') + \delta(u')$$

avec $v' \in H^0\big(S^*, \mathcal{E}^{n-1}(k')\big) \cap \operatorname{Ker}\delta$ et $u' \in H^0\big(S^*, \mathcal{E}^{n-1}(k)\big)$; définissons

$$\widetilde{w}' := w - \delta\big((1-\rho)u'\big).$$

On aura alors

$$\frac{df}{f} \wedge (\widetilde{w}'_k - \widetilde{w}_k) = \frac{df}{f} \wedge d\big[(1-\rho)(u_k - u'_k)\big].$$

Posons alors, pour $l \in \mathbb{N}$ assez grand

$$\overline{\psi} := f^l \frac{df}{f} \wedge d\big((1-\rho)(u_k - u'_k)\big).$$

Comme on a $\dfrac{df}{f} \wedge d(u - u') \equiv 0$ près de $S^*$, modulo une troncature de $\psi$ **loin de** $S^*$, on peut supposer que $\psi \in C^\infty_c(X^*)$ et vérifie

- C1) $d\psi = 0$ au voisinage de $S^*$,
- C2) $d\bar{f} \wedge \psi = 0$ au voisinage de $S^*$.

On peut alors appliquer le théorème 1 à $e$" et $\psi$; on obtient que les pôles en $\lambda = -u$ du prolongement méromorphe de

$$\lambda \longrightarrow \int_{X^*} |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j-l} \frac{df}{f} \wedge \bar{w}''_{k''} \wedge \psi$$

sont d'ordre $\leq k$. Donc les parties polaires en $\lambda = -u$ d'ordre $> k$ pour (12) ne changent pas quand on remplace $\widetilde{w}$ par $\widetilde{w'}$.

Examinons maintenant le changement de choix de la fonction $\rho$: pour $\widetilde{\rho}$ un autre choix de $\rho$ soit $\widehat{w} = w - \delta\big((1-\widetilde{\rho})u\big)$ le représentant adapté de $e$ correspondant. On aura

$$\widehat{w} - \widetilde{w} = \delta\big((\widetilde{\rho} - \rho)u\big)$$

et donc
$$\frac{df}{f} \wedge \big(\widehat{w}_k - \widetilde{w}_k\big) = \frac{df}{f} \wedge d\big((\widetilde{\rho} - \rho)u_k\big).$$
Mais $(\widetilde{\rho} - \rho)u_k \in H^0_c\big(X^*, \mathcal{E}^{n-1}(k)\big)$ et la formule de Stokes donne facilement que
$$\lambda \longrightarrow \int_{X^*} |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j} \frac{df}{f} \wedge d\big((\widetilde{\rho} - \rho)u_k\big) \wedge \overline{\frac{df}{f}} \wedge \overline{w}''_{k''}$$
n'a pas de pôle en $\lambda = -u$.

Considérons maintenant un autre choix de $w$. On aura alors un représentant $w'$ de $e$, et on pourra écrire
$$w' = w + \tau_{k',k}(a) + \delta(b)$$
où $a \in H^0\big(X, \mathcal{E}^{n-1}(k')\big) \cap \operatorname{Ker} \delta$ et $b \in H^0\big(X, \mathcal{E}^{n-1}(k)\big)$. Cela donne
$$\widetilde{w}' = w' - \delta\big((1-\rho)(u+b)\big).$$
Comme on a $w'|_{S^*} = \tau_{k',k}(v+a) - \delta(u+b)$, on en déduit
$$\begin{aligned} \widetilde{w}' - \widetilde{w} &= -w + \delta\big((1-\rho)u\big) + w' - \delta\big((1-\rho)(u+b)\big) \\ &= \tau(a) + \delta(b) - \delta\big((1-\rho)b\big) \end{aligned}$$

et $\dfrac{df}{f} \wedge (\widetilde{w}'_k - \widetilde{w}_k) = \dfrac{df}{f} \wedge d(\rho b_k)$.

On en conclut, à nouveau grace à la formule de Stokes, que
$$\lambda \longrightarrow \int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j} \frac{df}{f} \wedge d(\rho b_k) \wedge \overline{\frac{df}{f}} \wedge \overline{w}''_{k''}$$
n'a pas de pôle en $\lambda = -u$.

Pour terminer notre démonstration il suffit de remarquer que si $w_1$ est un représentant adapté quelconque de $e$ (i.e. pas nécessairement construit comme plus haut) et si l'on écrit
$$w_1|_{S^*} = \tau(v_1) + \delta u_1$$
alors on a $\dfrac{df}{f} \wedge (w_1)_k = \dfrac{df}{f} \wedge d(u_1)_k$ près de $S^*$, et donc $\dfrac{df}{f} \wedge d(u_1)_k = 0$ disons en dehors $K$ (le long de $S^*$).

Posons $\widetilde{w}_1 := w_1 - \delta\big((1-\rho)u_1\big)$ où $\rho \in C^\infty_c(X)$ vérifie $\rho \equiv 1$ près de $K$. Alors près de $S \cap K$ on a $\widetilde{w}_1 = w_1$. Mais le long de $S^* - S \cap K$ on a $\dfrac{df}{f} \wedge d(u_1)_k = 0$.

Donc on obtient le long de $S$

$$\frac{df}{f} \wedge (\widetilde{w}_1 - w_1)_k = \frac{df}{f} \wedge d\rho \wedge (u_1)_k$$

avec $\frac{df}{f} \wedge d\rho \wedge d(u_1)_k \equiv 0$ près de $S$.

Appliquer à nouveau le théorème 1 à $e''$ avec

$$\overline{\psi} := f^l \frac{df}{f} \wedge d\rho \wedge (u_1)_k \qquad \text{pour} \qquad l >> 1$$

permet d'achever la démonstration. ■

**c)**

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le résultat principal de ce paragraphe.

**Théorème 2.** *Dans la situation des hypothèses standards, considérons une classe* $e \in Ker\mathcal{N}_n^k \cap Im(can)$. *Pour* $h \in [0, k-1]$ *supposons que* $\mathcal{N}_{n-1}^h \widetilde{sob}_k(e) \neq 0$ *dans le quotient*

$$\frac{H_0^1(S, H^{n-1}(u))}{\mathcal{N}_{n-1}^k(H_0^1(S, H^{n-1}(u))}.$$

*Alors il existe* $\varepsilon \in H^n(u)$ *vérifiant* $\theta(\mathcal{N}_n^k \varepsilon) = 0$ *et* $j \in \mathbb{N}$ *assez grand, tels que le prolongement méromorphe de*

$$\lambda \longrightarrow \int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j} \frac{df}{f} \wedge w_k \wedge \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge \bar{v}_k \tag{14}$$

*ait un pôle d'ordre* $\geq k + h + 1$ *en* $\lambda = -u$ *pour tout choix d'un représentant adapté* $w$ *de* $e$ *et tout choix d'un représentant* $v$ *de* $\varepsilon$. *Réciproquement, si on a*

$$\mathcal{N}_{n-1}^h \widetilde{sob}_k(e) \in \mathcal{N}_{n-1}^k(H_0^1(S, H^{n-1}(u))$$

*le prolongement méromorphe de* (14) *a des pôles d'ordre* $\leq k + h$ *en* $\lambda = -u$ *pour tout choix de* $j \in \mathbb{Z}$, *tout choix de* $\varepsilon \in H^n(u)$ *vérifiant* $\mathcal{N}_n^k \varepsilon \in Im(can)$ *et tout choix des représentants* $w$ (*adapté*) *de* $e$ *et* $v$ *de* $\varepsilon$.

*Remarques.*

1) Une conséquence évidente du théorème 2 est le fait que pour une classe $e \in \mathrm{Ker}\mathcal{N}_n^k \cap \mathrm{Im(can)}$ et une classe $e''$ telle que $\mathcal{N}_{n-1}^k \theta(e'') = 0$, l'ordre du pôle en $\lambda = -u$ de (14), pour tout entier $j$ donné, est au plus égal à $2k$.

2) Si l'on suppose que $k \geq k_0$, la condition $\mathcal{N}^k_{n-1}\theta(e'') = 0$ est vide et $\widetilde{sob}_k(e) \in H^1_{\{0\}}\big(S, H^{n-1}(u)\big)$ se réduit à $\widetilde{ob}_k(e)$. Le théorème 2 doit être comparé dans ce cas au théorème 13 de [B.91].

*Preuve du théorème* 2. Commençons par reprendre la construction de $\widetilde{sob}_k(e)$. Choisissons $w \in H^0\big(X, \mathcal{E}^n(k)\big) \cap \operatorname{Ker}\delta$ induisant $e$ $\big($i.e. $r^n(k)(w) = e\big)$ et écrivons le long de $S^*$, grace à l'hypothèse $\theta_k(e) = 0$ (c'est-a-dire que $e \in \operatorname{Im}(\mathrm{can})$)

$$w|_{S^*} = \tau_{k',k}(v) + \delta u$$

où $v \in H^0\big(S^*, \mathcal{E}^{n-1}(k')\big) \cap \operatorname{Ker}\delta$ et $u \in H^0\big(S^*, \mathcal{E}^{n-1}(k)\big)$. Mais $\widetilde{sob}_k(e)$ est la classe induite par $v$ dans $H^1_{\{0\}}\big(S, H^{n-1}(u)\big)\Big/\mathcal{N}^k_{n-1}H^1_{\{0\}}\big(S, H^{n-1}(u)\big)$. On remarquera que le choix de $k' \geq k_0$ permet d'utiliser l'isomorphisme $h^{n-1}(k') \longrightarrow H^{n-1}(u)$ sur $S^*$ donné par $r^{n-1}(k')$.

Notre hypothèse sur $\widetilde{sob}_k(e)$ nous dit que $\mathcal{N}^h_{n-1}[v]$ n'est pas dans

$$\mathcal{N}^k_{n-1}H^1_{\{0\}}\big(S, H^{n-1}(u)\big).$$

Utilisons la proposition 12 de [B.91] qui nous donne que l'image de

$$\theta : H^n(u) \longrightarrow H^1\big(S^*, H^{n-1}(u)\big)$$

est exactement l'orthogonal de $H^0\big(S, H^{n-1}(u)\big)$ pour l'accouplement sesquilinéaire

$$\widetilde{h} : H^0\big(S^*, H^{n-1}(u)\big) \times H^1\big(S^*, H^{n-1}(u)\big) \longrightarrow \mathbb{C}$$

défini dans [B.91] p. 412; nous pouvons donc trouver $e'' \in H^n(u)$ tel que

1) $\qquad \mathcal{N}^k_{n-1}\theta(e'') \qquad = 0$

2) $\quad \widetilde{h}\big(\mathcal{N}^h_{n-1}\widetilde{sob}_k(e), \theta(e'')\big) \neq 0.$

Ces deux conditions sont obtenues en remarquant que le noyau de $\mathcal{N}^k_{n-1}$ dans $H^1\big(S^*, H^{n-1}(u)\big)$ est l'orthogonal pour $\widetilde{h}$ de $\mathcal{N}^k_{n-1}H^1_{\{0\}}\big(S, H^{n-1}(u)\big)$ grace à l'invariance de $\widetilde{h}$ par la monodromie correspondant à la formule (voir le lemme 1 p. 456 de [B.91])

$$\widetilde{h}(\mathcal{N}_{n-1}\alpha, \beta) = \widetilde{h}(\alpha, \mathcal{N}_{n-1}\beta).$$

Donc la seconde condition donne

2′) $$\widetilde{h}\big(\widetilde{sob}_k(e), \mathcal{N}^h_{n-1}\theta(e'')\big) \neq 0$$

et la relation $\mathcal{N}_{n-1} \circ \theta = \theta \circ \mathcal{N}_n$ (voir [B.91] lemme 1 p. 441) donne

$$2'') \qquad \widetilde{h}\big(\widetilde{sob}_k(e), \theta(\mathcal{N}_n^h e'')\big) \neq 0.$$

Choisissons maintenant $k'' \geq k_0 + h$ et $w'' \in H^0\big(X, \mathcal{E}^n(k'')\big) \cap \operatorname{Ker}\delta$ induisant $e''$. Alors $\pi_{k'',k''-h}(w'')$ induit $\mathcal{N}_n^h e''$.

Utilisons la proposition 11 de [B.91] pour calculer le nombre de 2''). Comme $v$ induit $\widetilde{sob}_k(e)$, cela donne

$$\begin{aligned}
&(2i\pi)^n \widetilde{h}\big(\widetilde{sob}_k(e), \theta(\mathcal{N}^h e'')\big) \\
&\quad = \operatorname{Res}\left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \frac{df}{f} \wedge v_{k'} \wedge \frac{\overline{df}}{f} \wedge \overline{w}''_{k''-h} \wedge d\rho\right)
\end{aligned}$$

où $\rho \in C_c^\infty(X)$ est identiquement égale à 1 près de l'origine. Considérons une fonction $\sigma \in C_c^\infty(X), \sigma \equiv 1$ près de l'origine et vérifiant

$$K = \operatorname{Supp}(\sigma) \subset \big\{x \in X / \rho \equiv 1 \text{ au voisinage de } x\big\}.$$

Définissons $\widetilde{w} := w - \delta\big((1-\rho)u\big)$. Le long de $S - S \cap K$ on a

$$\widetilde{w} = \tau_{k',k}(v)$$

ce qui implique $\widetilde{w}_1 = \dfrac{df}{f} \wedge v_{k'}$ et $\widetilde{w}_j = 0$ pour $j \geq 2$ près de $S \cap \operatorname{Supp}(d\rho)$.

Comme les parties polaires en $\lambda = -u$ sont à supports dans $S$, on aura

$$(15) \qquad \operatorname{Res}\Big(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \widetilde{w}_1 \wedge \frac{\overline{df}}{f} \wedge \overline{w}''_{k''-h} \wedge d\rho\Big) \neq 0.$$

Utilisons maintenant le fait que pour $\operatorname{Re}(\lambda) >> 1$ nous avons

$$\begin{aligned}
(16) \qquad d\left(|f|^{2\lambda} \rho \widetilde{w}_j \frac{\overline{df}}{f} \wedge \overline{w}''_{k''-h}\right) &= (\lambda + u)|f|^{2\lambda} \rho \frac{df}{f} \wedge \widetilde{w}_j \wedge \frac{\overline{df}}{f} \wedge \overline{w}''_{k''-h} \\
&\quad + |f|^{2\lambda} d\rho \wedge \widetilde{w}_j \wedge \frac{\overline{df}}{f} \wedge \overline{w}''_{k''-h} \\
&\quad + |f|^{2\lambda} \rho \frac{df}{f} \wedge \widetilde{w}_{j-1} \wedge \frac{\overline{df}}{f} \wedge \overline{w}''_{k''-h}
\end{aligned}$$

où on a posé $w_0 = 0$. Pour $j \geq 2$ on aura

$$\begin{aligned}
(17) \qquad & P_{j+1}\Big(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \rho \frac{df}{f} \wedge \widetilde{w}_j \wedge \frac{d\bar{f}}{f} \wedge \overline{w}''_{k''-h}\Big) \\
&\quad = -P_j\Big(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \rho \frac{df}{f} \wedge \widetilde{w}_{j-1} \wedge \frac{d\bar{f}}{f} \wedge \overline{w}''_{k''-h}\Big),
\end{aligned}$$

puisque pour $j \geq 2$ $\mathrm{Supp}(\widetilde{w}_j) \cap \mathrm{Supp}(d\rho) \cap S = \emptyset$. Pour $j = 1$ (16) donne

$$
\begin{aligned}
(18) \qquad & P_2\Big(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \rho \frac{df}{f} \wedge \widetilde{w}_1 \wedge \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge \overline{w}''_{k''-h}\Big) \\
&= -\mathrm{Res}\Big(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} d\rho \wedge \widetilde{w}_1 \wedge \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge \overline{w}''_{k''-h}\Big) \\
&\neq 0
\end{aligned}
$$

grace à (15). On en déduit

$$
(19) \qquad P_{k+1}\Big(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \rho \frac{df}{f} \wedge \widetilde{w}_k \wedge \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge \overline{w}''_{k''-h}\Big) \neq 0.
$$

Comme $\delta w'' = 0$ on aura pour $\mathrm{Re}(\lambda) >> 1$

$$
\begin{aligned}
(20) \qquad d\left(|f|^{2\lambda} \frac{df}{f} \wedge \widetilde{w}_k \wedge \rho \overline{w}''_{k-l}\right) &= |f|^{2\lambda} d\rho \wedge \frac{df}{f} \wedge \widetilde{w}_k \wedge \overline{w}''_{k''-l} \\
&+ (\lambda + u)|f|^{2\lambda} \rho \frac{df}{f} \wedge \widetilde{w}_k \wedge \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge \overline{w}''_{k''-l} \\
&+ |f|^{2\lambda} \rho \frac{df}{f} \wedge \widetilde{w}_k \wedge \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge \overline{w}''_{k''-l-1}.
\end{aligned}
$$

Comme $\mathrm{Supp}(d\rho) \cap \mathrm{Supp}\big(\frac{df}{f} \wedge \widetilde{w}_k\big) \cap S = \emptyset$, on aura pour tout $j \geq 1$

$$
\begin{aligned}
(21) \qquad & P_{j+1}\Big(\lambda = -u, \int_x |f|^{2\lambda} \rho \frac{df}{f} \wedge \widetilde{w}_k \wedge \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge \overline{w}"_{k''-l}\Big) \\
&= -P_j\Big(\lambda = -u, \int_x |f|^{2\lambda} \rho \frac{df}{f} \wedge \widetilde{w}_k \wedge \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge \overline{w}''_{k''-l-1}\Big).
\end{aligned}
$$

Cela donne grace à (19)

$$
(22) \qquad P_{k+h+1}\Big(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \rho \frac{df}{f} \wedge \widetilde{w}_k \wedge \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge \overline{w}''_{k''}\Big) \neq 0
$$

et la partie directe du théorème 2 est prouvée. La réciproque est une conséquence simple du même calcul grace à la non dégénérescence de $\widetilde{h}$. ■

*Remarque.* Dans la formule (22) nous pouvons omettre $\rho$ car si $\tilde{\rho}$ est un autre choix d'une fonction dans $\mathcal{C}_c^\infty(X)$ valant identiquement 1 près de l'origine et nulle près du support de $\dfrac{df}{f} \wedge \widetilde{w}_k$ intersecté avec $S$[21], nous pouvons poser, pour $l \in \mathbb{N}$ assez grand,

[21]Cette intersection est compacte car $\tilde{w}$ est adapté.

$$\overline{\psi} := f^l \frac{df}{f} \wedge \widetilde{w}_k.(\widetilde{\rho} - \rho).$$

Alors $\psi \in C_c^\infty(X)^{n+1}$ vérifie $d\bar{f} \wedge \psi = 0$ et $d\psi = 0$ près de $S$ car $\widetilde{\rho} - \rho \equiv 0$ près $S \cap \operatorname{Supp} \frac{df}{f} \wedge \widetilde{w}_k$.

En utilisant le théorème 1 pour $e''$ qui vérifie $\mathcal{N}^k \theta(e'') = 0$ on obtient que

$$\lambda \longrightarrow \int_X |f|^{2\lambda} \frac{df}{f} w''_{k''} \wedge \psi \cdot \bar{f}^{-l}$$

n'a pas de pôle d'ordre $> k$ en $\lambda = -u$.

**Proposition 6.** *Sous les hypothèses standards considérons* $e \in H^n(u)$ *dans* $\operatorname{Ker}\mathcal{N}^k \cap$ *Im*$(can)$. *On a équivalence entre*

(i) $\quad \mathcal{N}^h \widetilde{sob}_k(e) = 0 \quad$ *dans* $\quad \dfrac{H^1_{\{0\}}\big(S, H^{n-1}(u)\big)}{\mathcal{N}^k H^1_{\{0\}}\big(S, H^{n-1}(u)\big)}$

(ii) $\quad \mathcal{N}^h e \in \operatorname{can}(\operatorname{Ker}\mathcal{N}_c^k)$

*Preuve.* Commençons par montrer que pour $h \in \mathbb{N}$ on a

$$\mathcal{N}^h_{n-1} \widetilde{sob}_k(e) = \widetilde{sob}_k(\mathcal{N}^h_n e). \tag{23}$$

Revenons à la définition de $\widetilde{sob}_k(e)$ où $w \in H^0\big(X, \mathcal{E}^n(k)\big) \cap \operatorname{Ker}\delta$ est une forme qui représente la classe $e$. Ecrivons le long de $S^*$

$$-w|_{S^*} = \tau_{k',k}(v) + \delta u.$$

La preuve de (23) se ramène alors essentiellement à prouver l'égalité suivante entre sections du faisceau $h^n(k)$:

$$N_k \circ \tau_{k',k}(\alpha) = -\tau_{k',k} \circ N_{k'}(\alpha)$$

pour $\alpha \in \mathcal{E}^{n-1}(k')$ vérifiant $\delta\alpha = 0$. Ceci se ramène aux deux égalités évidentes:

$$\begin{aligned} d\alpha_{k'} - u\frac{df}{f} \wedge \alpha_{k'} &= \frac{df}{f} \wedge \alpha_{k'-1} \\ -\frac{df}{f} \wedge \alpha_{k'} &= d(0) - u\frac{df}{f} \wedge (0) - \frac{df}{f} \wedge \alpha_{k'}. \end{aligned}$$

Maintenant pour prouver la proposition, il suffit de traiter le cas $h = 0$.

Supposons donc $\widetilde{sob}_k(e) = 0$; cela signifie que nous pouvons trouver un élément $u_1 \in H^0\big(S^*, \mathcal{E}^{n-1}(k)\big)$ tel que

$$\delta \begin{pmatrix} u_1 \\ v \end{pmatrix} = 0 \quad \text{sur } S^*.$$

On obtient donc $\begin{pmatrix} -w|_{S^*} \\ 0 \end{pmatrix} = \delta \begin{pmatrix} u - u_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sur $S^*$ ou, de façon équivalente,

$$w|_{S^*} = \delta(u_1 - u).$$

Choisissons une fonction $\rho \in C_c^\infty(X)$ valant identiquement 1 près de l'origine et définissons $\xi := w - \delta\big((1-\rho)(u_1 - u)\big)$. On peut prolonger $\xi$ dans $H^0\big(X, \mathcal{E}^n(k)\big) \cap$ Ker $\delta$ avec un support f-propre[22]. Posons alors

$$\varepsilon := r_c^n(k)(\xi) \in H_c^n(u).$$

On a ainsi exhibé une classe de Ker$\mathcal{N}_c^k$ vérifiant can $\varepsilon = e$.

Réciproquement, si $e =$ can $\varepsilon$ avec $\mathcal{N}_c^k \varepsilon = 0$, représentons la classe $\varepsilon$ par $\xi \in H^0\big(X, \mathcal{E}^n(k)\big) \cap$ Ker $\delta$ avec un support f-propre. Alors $\xi$ représente également la classe $e$ (on oublie la condition de support). Ceci montre qu'il existe un compact K de $X$ tel que l'on ait

$$\widetilde{sob}_k(e)\big|_{S - S\cap K} = 0.$$

Mais comme $H^n(u)$ est un système local sur $S^*$ on en conclut que $\widetilde{sob}_k(e)$ est nul. ∎

## Conclusion

Soit $e \in H^n(u)$ une classe donnée d'ordre de nilpotence $k \in \mathbb{N}^*$ (donc $\mathcal{N}_n^k(e) = 0$ et $\mathcal{N}_n^{k-1}(e) \neq 0$). Soit $l$ le plus petit entier tel que l'on ait

$$\mathcal{N}_n^l(e) \in Im(can).$$

Si on a $l > 0$, alors $\mathcal{N}_n^{l-1}(e) \notin Im(can)$ et le théorème 1 nous donne un pôle d'ordre $l > 0$ le long de $S^*$ provoqué par e. D'où un emmêlement d'ordre $\geq l \geq 1$ le long de $S^*$.

[22] Comme plus haut, on utilise ici le fait que $\xi$ est nulle au voisinage de $S - S \cap K$ où K est un voisinage compact de l'origine, pour prolonger $\xi$ par 0 au voisinage de $f^{-1}(0)$.

Si on a $l = 0$, alors $e \in Im(can)$. Supposons d'abord que $\widetilde{sob}_k(e) \neq 0$. Soit $h$ le plus grand entier tel que l'on ait

$$\mathcal{N}^h \widetilde{sob}_k(e) \neq 0 \quad dans \quad \frac{H^1_{\{0\}}\big(S, H^{n-1}(u)\big)}{\mathcal{N}^k H^1_{\{0\}}\big(S, H^{n-1}(u)\big)}.$$

Alors le théorème 2 donne un pôle d'ordre $\geq k+h+1$ provoqué par $e$. Et donc un emmêlement d'ordre $\geq h+1$ "visible" à l'origine.

Il reste seulement le cas $l = 0$ et $\widetilde{sob}_k(e) = 0$. Mais dans ce cas, la proposition 6 nous dit que l'on a $e \in \mathrm{can}(\mathrm{Ker}\mathcal{N}_c^k)$. On a donc un sous-espace vectoriel $V$ de $H^n_c(u)$ qui est invariant par la monodromie et qui vérifie:

- i) $can|_V : V \longrightarrow can(V)$ est bijective,
- ii) $e \in can(V)$.

Il suffit en effet de prendre une classe $\varepsilon \in \mathrm{Ker}\mathcal{N}_c^k$ vérifiant $can\ \varepsilon = e$ et de définir $V$ comme le sous-espace stable par la monodromie de $H^n_c(u)$ engendré par $\varepsilon$.

Nous sommes donc dans la situation "non emmêlée" pour la classe $e$.

## References


[B.84] Barlet, D., Contribution du cup-produit de la fibre de Milnor aux poles de $|f|^{2\lambda}$, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **34** (1984), 75-107.

[B.M.89] Barlet, D. et Maire, H.-M., Asymptotic expansion of complex integrals via Mellin transform, *J. Funct. Anal.*, **83** (1989), 233-257.

[B.91] Barlet, D., Intéraction de strates consécutives pour les cycles évanescents, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) **24** (1991), 401-506.

[B.01] ———, Tangling of consecutive strata for vanishing cycles II, *Preprint* 2001/36, *Institut E.Cartan Nancy.*

[G.58] Godement, R., Théorie des Faisceaux. Hermann, Paris, 1964.

[K.84] Kashiwara, M., The Riemann-Hilbert Problem for Holonomic Systems, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **20** (1984), 319-365.

[M.83] Malgrange, B., Polynome de Bernstein-Sato et cohomologie évanescente. Analyse et Topologie sur les espaces singuliers, *Asterisque*, **101-102** (1983), 230-242.

[S] Sabbah, C., Vanishing cycles and Hermitian duality (à paraître).