Publ. RIMS Kyoto Univ. **48** (2012), 139–181
DOI 10.2977/PRIMS/65

Problème de Cauchy et Goursat Analytique

par

Yûsaku Hamada, Takashi Ōkaji et Yoshitsugu Takei

Abstract

We study singularities and analytic continuations of the solution of the Cauchy and Goursat problem in the complex domain and give some examples.

2010 Mathematics Subject Classification: Primary 35A20; Secondary 35G05.
Keywords: Cauchy problem, Goursat problem, analytic continuation.

§1. Énoncés des résultats

[HLT] a étudié des principes des prolongements analytiques et des domaines d'existence de la solution du problème de Cauchy dans le domaine complexe.

[HT], [H1] et [H2] ont étudié le domaine d'existence de la solution du problème de Cauchy et Goursat. En continuant ces résultats, dans cet article nous étudions le problème de Cauchy et Goursat pour l'opérateur différentiel de partie principale à coefficients polynomiaux. Les Théorèmes 1.1, 1.2 et les Corollaires 1.1, 1.2 précisent le domaine d'existence de la solution.

Dans le Chapitre 2, nous appliquons ces théorèmes et corollaires à une équation qui se rattache à l'équation hypergéométrique de Gauss. Pour un prolongement analytique de la solution de cette équation, nous préparons quelques lemmes de la topologie élémentaire sur des déformations de chemins. Dans le Chapitre 3, nous appliquons ces théorèmes et corollaires à des équations qui se rattachent aux équations de Bessel et de Kummer.

Communicated by S. Mukai. Received March 1, 2011.

Y. Hamada: 61-36 Tatekura-cho, Shimogamo, Sakyo-Ku, Kyoto 606-0806, Japan;
e-mail: yhamada@oak.ocn.ne.jp
T. Ōkaji: Department of Mathematics, Graduate School of Sciences, Kyoto University,
Kyoto 606-8502, Japan;
e-mail: okaji@math.kyoto-u.ac.jp
Y. Takei: Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University,
Kyoto 606-8502, Japan;
e-mail: takei@kurims.kyoto-u.ac.jp

Soient $x = (x_0, x')$ $[x' = (x_1, x''),\ x'' = (x_2, \dots, x_n)]$ un point de $\mathbb{C}^{n+1}$ et X un domaine de $\mathbb{C}^{n+1}$. On note $\|x\| = \max_{0\le i\le n} |x_i|$.

On considère un opérateur différentiel d'ordre m, à coefficients holomorphes sur X,

$$a(x, D) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x) D^\alpha, \qquad D_i = \partial/\partial x_i,\ 0 \le i \le n.$$

Sa partie principale est notée $h(x, D)$.

Hypothèse 1.1. *Supposons que $h(x, \xi)$ soit de la forme*

$$h(x, \xi) = \xi_1^p \xi_0^{m-p} + \sum_{k=p}^{m} h_k(x, \xi') \xi_0^{m-k}, \qquad 0 \le p \le m,$$

où $h_k(x, \xi')$, $p \le k \le m$, est un polynôme homogène de degré k en $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ et $h_p(x, \xi')$ ne contient pas ξ_1^p. Si $p = 0, h_0(x, \xi') \equiv 0$.

Nous supposons l'Hypothèse 1.1 valable.

Étudions le problème de Cauchy et Goursat

$$\begin{aligned} &a(x, D)u(x) = v(x), \\ &D_0^k u(0, x') = w_{k,0}(x'), \quad 0 \le k \le m - p - 1, \\ &D_1^\ell D_0^{m-p} u(x_0, 0, x'') = w_{m-p,\ell}(x_0, x''), \quad 0 \le \ell \le p - 1, \end{aligned} \tag{1.1}$$

où $v(x)$, $w_{k,0}(x')$, $0 \le k \le m - p - 1$, et $w_{m-p,\ell}(x_0, x'')$, $0 \le \ell \le p - 1$, sont des fonctions holomorphes sur X.

Si l'Hypothèse 1.1 n'est pas satisfaite, l'unicité du problème de Cauchy et Goursat (1.1) n'est pas valable en général (voir [L3]).

Proposition 1.1. *Soit $X = \{x;\ |x_j| \le r_j,\ 0 \le j \le n\}$. Notons*

$$\begin{aligned} H_X(\xi) &= \|h(\cdot, \xi) - \xi_1^p \xi_0^{m-p}\|_X \\ &= \sum_{|\alpha|=m,\ \alpha_0 \le m-p,\ (\alpha_0,\alpha_1)\ne(m-p,p)} \sup_{x\in X} |a_\alpha(x)| \xi^\alpha \qquad \textit{pour } \xi \in (\mathbb{R}_+)^{n+1}. \end{aligned}$$

Pour $\theta_j = 1/r_j$, $2 \le j \le n$, il existe des nombres $\theta_i \ge 1/r_i$, $i = 0, 1$, tels que

$$H_X(\theta)/\theta_1^p \theta_0^{m-p} < 1. \tag{1.2}$$

Le problème de Cauchy et Goursat (1.1) *possède une unique solution $u(x)$ holomorphe sur*

$$\Big\{x;\ \sum_{j=0}^{n} \theta_j |x_j| < 1 - H_X(\theta)/\theta_1^p \theta_0^{m-p}\Big\}. \tag{1.3}$$

Preuve. Cette proposition a été déjà démontrée dans [H2] sous une forme plus précise. Ici nous en donnons une démonstration un peu plus simple. D'abord, on démontre (1.2). Posons $M = \sup_{x\in X,\, |\alpha|=m} |a_\alpha(x)|$.

Pour $\xi \in (\mathbb{R}_+)^{n+1}$, on a alors $H_X(\xi) \le M\{\sum_{k=p}^m |\xi'|^k \xi_0^{m-k} - \xi_1^p \xi_0^{m-p}\}$, $|\xi'| = \sum_{i=1}^n \xi_i$. Pour $\theta_j = 1/r_j$, $2 \le j \le n$, choisissons $\theta_i \ge 1/r_i$, $i = 0, 1$, tels que

$$H_X(\theta)/\theta_1^p\theta_0^{m-p} \le M\left\{\left(1+\frac{|\theta''|}{\theta_1}\right)^p\left[1+\sum_{k=1}^{m-p}\left(\frac{|\theta'|}{\theta_0}\right)^k\right]-1\right\} < 1.$$

Ceci démontre (1.2).

Soit $w(x)$ la solution du problème de Cauchy et Goursat

$$\begin{aligned}&D_1^pD_0^{m-p}w(x) = 0, \qquad D_0^k w(0,x') = w_{0,k}(0,x'), \qquad 0 \le k \le m-p-1,\\ &D_1^\ell D_0^{m-p} w(x_0, 0, x'') = w_{m-p,\ell}(x_0, x''), \qquad 0 \le \ell \le p-1.\end{aligned}$$

En remplaçant u et v par $u - w$ et $v - a(x,D)w$, nous pouvons nous ramener au cas de $w_{k,0}(0,x') = w_{m-p,\ell}(x_0,x'') = 0$, $0 \le k \le m-p-1$, $0 \le \ell \le p-1$, dans (1.1).

Nous utilisons la méthode de fonctions majorantes. Pour des séries formelles $f(x) = \sum_\alpha f_\alpha x^\alpha$, $F(x) = \sum_\alpha F_\alpha x^\alpha$, si $|f_\alpha| \le F_\alpha$ pour tout α, on note $f(x) \ll F(x)$.

Par un raisonnement classique, par exemple, comme dans [HT], on voit que la solution formelle $u(x)$ de (1.1) vérifie $u(x) \ll \hat{u}(x)$ si $\hat{u}(x)$ vérifie

$$\begin{gathered}D_1^pD_0^{m-p}\hat{u}(x) \gg \{D_1^pD_0^{m-p} - a(x,D)\}\hat{u}(x) + v(x),\\ D_0^k\hat{u}(0,x') = D_1^\ell D_0^{m-p}\hat{u}(x_0,0,x'') = 0, \qquad 0 \le k \le m-p-1, \qquad 0 \le \ell \le p-1.\end{gathered}$$

Posons $z = \sum_{j=0}^n \theta_j x_j$. On a d'abord $v(x) \ll V/(1-z)$, où $V = \max_{x\in X} |v(x)|$.

Pour $u(x) \ll U(z)$, on a

$$\{D_1^pD_0^{m-p} - a(x,D)\}u(x) \ll \frac{1}{1-z}\{H_X(\theta)D_z^m + A(\theta, D_z)\}U(z),$$

où

$$\sum_{|\alpha|\le m-1} \sup_{x\in X} |a_\alpha(x)|\theta^\alpha D_z^{|\alpha|}U(z) \ll A(1+|\theta|)^{m-1}\sum_{k=0}^{m-1} D_z^k U(z) = A(\theta, D_z)U(z),$$

où $A = \sup_{x\in X,\, |\alpha|\le m-1} |a_\alpha(x)| \ge 0$.

La unique solution formelle $u(x)$ de (1.1) vérifie $u(x) \ll U(z)$ quand on choisit $U(z) \gg 0$ tel que

$$\theta_1^p\theta_0^{m-p}D_z^mU(z) \gg \frac{1}{1-z}\{[H_X(\theta)D_z^m + A(\theta,D_z)]U(z) + V\}. \tag{1.4}$$

D'après (1.2), l'inégalité (1.4) est vérifiée quand

$$\frac{\theta_1^p\theta_0^{m-p}\{(1-H_X(\theta)/\theta_1^p\theta_0^{m-p})-z\}}{1-z}D_z^mU(z)\gg\frac{1}{1-z}\{A(\theta,D_z)U(z)+V\}.$$

On a donc $u(x)\ll U(z)$ si $U(z)$ est la solution du problème

$$\begin{aligned}&D_z^mU(z)=\frac{1}{\theta_1^p\theta_0^{m-p}\{(1-H_X(\theta)/\theta_1^p\theta_0^{m-p})-z\}}\{A(\theta,D_z)U(z)+V\},\\&D_z^kU(0)=0,\quad 0\le k\le m-1.\end{aligned}$$

La solution $U(z)$ est holomorphe sur $\{z;\ |z|<1-H_X(\theta)/\theta_1^p\theta_0^{m-p}\}$, donc $u(x)$ est holomorphe sur $\{x;\ \sum_{j=0}^n\theta_j|x_j|<1-H_X(\theta)/\theta_1^p\theta_0^{m-p}\}$. Ceci démontre la Proposition 1.1.

Remarque 1.1. Dans le problème (1.1), les données de Cauchy et Goursat

$$\begin{aligned}D_0^ku(0,x')&=w_{k,0}(x'), &&0\le k\le m-p-1,\\ D_1^\ell D_0^{m-p}u(x_0,0,x'')&=w_{m-p,\ell}(x_0,x''), &&0\le\ell\le p-1,\end{aligned}$$

sont équivalentes aux données

$$\begin{aligned}D_1^\ell u(x_0,0,x'')&=\tilde w_{0,\ell}(x_0,x''), &&0\le\ell\le p-1,\\ D_0^kD_1^pu(0,x')&=\tilde w_{k,p}(x'), &&0\le k\le m-p-1.\end{aligned}$$

En effet, pour $0\le\ell\le p-1$, on a

$$\begin{aligned}\tilde w_{0,\ell}(x_0,x'')&=D_1^\ell u(x_0,0,x'')\\&=\sum_{h=0}^{m-p-1}\frac{D_0^hD_1^\ell u(0,0,x'')}{h!}x_0^h\\&\quad+\frac{1}{(m-p-1)!}\int_0^{x_0}(x_0-t)^{m-p-1}D_0^{m-p}D_1^\ell u(t,0,x'')\,dt\\&=\sum_{h=0}^{m-p-1}\frac{D_1^\ell w_{h,0}(0,x'')}{h!}x_0^h+\frac{1}{(m-p-1)!}\int_0^{x_0}(x_0-t)^{m-p-1}w_{m-p,\ell}(t,x'')\,dt.\end{aligned}$$

Pour $0\le k\le m-p-1$, on a

$$\tilde w_{k,p}(x')=D_0^kD_1^pu(0,x')=D_1^pw_{k,0}(x').$$

De même, les $w_{k,0}(x')$, $w_{m-p,\ell}(x_0,x'')$, $0\le k\le m-p-1$, $0\le\ell\le p-1$, sont représentés par $\tilde w_{0,\ell}(x_0,x'')$, $0\le\ell\le p-1$, $\tilde w_{k,p}(x')$, $0\le k\le m-p-1$.

Remarque 1.2. Supposons $X=\mathbb{C}^{n+1}$. Les coefficients de $a(x,D)$, les données $v(x)$, $w_{k,0}(x')$, $0\le k\le m-p-1$, et $w_{m-p-1,\ell}(x_0,x'')$, $0\le\ell\le p-1$, sont holomorphes sur $X = \mathbb{C}^{n+1}$. D'après la Proposition 1.1, le problème (1.1) possède une unique solution holomorphe au voisinage de l'origine. Si $p = 0$, le problème (1.1) possède une unique solution holomorphe au voisinage de l'hyperplan $x_0 = 0$. Pour $p \geq 1$, la solution du problème (1.1) n'est plus holomorphe au voisinage de $\{x_0 = 0\} \cup \{x_1 = 0\}$ en général.

Exemple 1.1. Considérons le problème de Goursat

$$[D_0 + (x_1 - 1)^2 D_1] D_1 u(x) = 0, \qquad u(0, x_1) = x_1^2/2, \qquad D_0 u(x_0, 0) = 0,$$

donc $u(x_0, 0) = 0, D_1 u(0, x_1) = x_1$. La solution est

$$u(x) = \int_0^{x_1} \frac{\sigma - 1}{x_0(\sigma - 1) + 1}\, d\sigma + x_1 = \frac{x_0 x_1 - \log(1 - x_0 + x_0 x_1) + \log(1 - x_0)}{x_0^2} + x_1.$$

La solution est holomorphe au voisinage de l'origine et elle a les singularités sur $K_1 \cup K_2$, où $K_1 = \{x_0 = 1\}$ et $K_2 = \{(x_1 - 1)x_0 + 1 = 0\}$. Après avoir contourné $K_1 \cup K_2$, elle a la singularité sur $\{x_0 = 0\}$.

Plus précisément, soit π la projection naturelle du revêtement universel $\mathcal{R}(\mathbb{C}^2 \setminus (K_1 \cup K_2))$ du domaine $\mathbb{C}^2 \setminus (K_1 \cup K_2)$ au $\mathbb{C}^2 \setminus (K_1 \cup K_2)$. Prenons $\tilde{0}$ un point de base dans $\mathcal{R}(\mathbb{C}^2 \setminus (K_1 \cup K_2))$ tel que $\pi(\tilde{0}) = 0$. La solution $u(x)$ peut se prolonger analytiquement sur $\mathcal{R}(\mathbb{C}^2 \setminus (K_1 \cup K_2)) \setminus \tilde{L}$, où $\tilde{L} = \pi^{-1}\{x_0 = 0\} \setminus \widetilde{S}_1$, où $\widetilde{S}_1$ est la composante connexe de $\pi^{-1}\{x_0 = 0\}$ contenant $\tilde{0}$.

Exemple 1.2. Considérons le problème de Goursat

$$[D_1 + x_2^2 D_2] D_0 u(x) = 0, \quad u(0, x') = 0, \quad D_0 u(x_0, 0, x_2) = x_2, \quad x = (x_0, x_1, x_2).$$

La solution est

$$u(x) = x_0 x_2 / (x_1 x_2 + 1).$$

Elle est holomorphe au voisinage de l'origine et singulière sur $\{x_1 x_2 + 1 = 0\}$.

Nous étudions globalement un prolongement analytique de la solution du problème de Cauchy et Goursat. On utilise des raisonnements de [HLT] et [H1].

Théorème 1.1. *Faisons l'hypothèse* 1.1, *où* $X = \{x; |x_0| \leq R, x' \in \mathbb{C}^n\}$. *Supposons que* $h_k(x, \xi')$, $p \leq k \leq m$, *est un polynôme en* x' *de degré* $(k - p)\mu$, μ *un entier,* $\mu \geq 0$:

$$h_k(x, \xi') = \sum_{|\alpha'| = k,\, |\beta'| \leq (k-p)\mu} a_\alpha^{\beta'}(x_0) {x'}^{\beta'} {\xi'}^{\alpha'},$$

où les $a_\alpha^{\beta'}(x_0)$ *sont holomorphes sur* $\{x_0; |x_0| \leq R\}$. *Posons*

$$M(R) = \{\sup |a_\alpha^{\beta'}(x_0)|; \, |x_0| \leq R, \, |\alpha'| = k, \, |\beta'| \leq (k - p)\mu, \, p \leq k \leq m\}.$$

Alors le problème de Cauchy et Goursat (1.1) *possède une unique solution holomorphe sur*

$$\{(x_0, x');\ |x_0| \le C \min[C_0^{\mu_0}/\|x'\|^{\mu_0}, 1, R]\},$$

où $\mu_0 = \max\{\mu - 1, 0\}$ *et* C, C_0 $(0 < C, C_0 \le 1)$ *sont des constantes ne dépendant que de* $M(R)$.

Preuve. Nous utilisons un raisonnement de [H1] modifié. Posons pour tout $R_1 > 0$,

$$\begin{aligned} H_{(R,R_1)}(\xi) &= \|\xi_1^p \xi_0^{m-p} - h(\cdot, \xi)\|_{X(R,R_1)} \\ &= \sum_{|\alpha|=m,\, \alpha_0 \le m-p,\, (\alpha_0,\alpha_1)\ne(m-p,p)} \sup_{x \in X(R,R_1)} |a_\alpha(x)|\xi^\alpha, \qquad \xi \in (\mathbb{R}_+)^{n+1}, \end{aligned}$$

où $X(R, R_1) = \{x; |x_0| \le R, \|x'\| \le R_1\}$. Pour $\xi_0 \ge 1/R$, $\xi_1 \ge 1/R_1$, $\xi_j = 1/R_1$, $2 \le j \le n$, on a

$$\begin{aligned} &H_{R,R_1}(\xi)/\xi_1^p \xi_0^{m-p} \\ &\le M(R)\Big\{[|\xi'|^p - \xi_1^p]\xi_0^{m-p} + \sum_{k=1}^{m-p} \sup_{\|x'\| \le R_1} \Big(1 + \sum_{i=1}^n |x_i|\Big)^{k\mu} |\xi'|^{p+k} \xi_0^{m-p-k}\Big\}/\xi_1^p \xi_0^{m-p} \\ &= M(R)\Big\{[(|\xi'|/\xi_1)^p - 1] + \sum_{k=1}^{m-p} \sup_{\|x'\| \le R_1} \Big(1 + \sum_{i=1}^n |x_i|\Big)^{k\mu} |\xi'|^{p+k}\}/\xi_1^p \xi_0^k\Big\}. \end{aligned}$$

Pour $p \ge 0$, on a $(1+x)^p - 1 \le 2px$ pour $0 \le x \le \delta_p$, où $\delta_p = \infty$ pour $p = 0, 1$, et $\delta_p = 2^{1/(p-1)} - 1$ pour $p \ge 2$. Donc $(|\xi'|/\xi_1)^p - 1 \le (1+|\xi''|/\xi_1)^p - 1 \le 2p|\xi''|/\xi_1$ pour $|\xi''|/\xi_1 \le \delta_p$.

Pour tout $R_1 > 0$, choisissons $\xi_j = 1/R_1$, $2 \le j \le n$, et

$$\xi_1 \ge C_1/R_1, \qquad C_1 = \max\{1, 16pnM(R), n/\delta_p\} \ge 1. \tag{1.5}$$

Alors

$$T_1 = M(R)\{(|\xi'|/\xi_1)^p - 1\} \le 1/8.$$

Pour tout $R_1 \ge 1$, et $\xi_0 \ge 1/R$, $\xi_1 = C_1/R_1 \ge 1/R_1$, $\xi_j = 1/R_1$, $2 \le j \le n$, on a

$$\begin{aligned} T_2 &= M(R)\Big\{\sum_{k=1}^{m-p} \sup_{\|x'\| \le R_1} \Big(1 + \sum_{i=1}^n |x_i|\Big)^{k\mu} |\xi'|^{p+k}/\xi_1^p \xi_0^k\Big\} \\ &\le M(R)\Big\{\sum_{k=1}^{m-p} (1 + nR_1)^{k\mu} (|\xi'|/\xi_1)^p (|\xi'|/\xi_0)^k\Big\} \\ &\le M(R)\Big\{\sum_{k=1}^{m-p} (2nR_1)^{k\mu} n^p [(C_1 + n)/R_1 \xi_0]^k\Big\} \end{aligned}$$

$$= M(R)n^p\Big\{\sum_{k=1}^{m-p} 2^{k\mu}n^{k\mu}(C_1+n)^k R_1^{k(\mu-1)}/\xi_0^k\Big\}$$
$$\le M(R)n^p\Big\{\sum_{k=1}^{m-p} [2^{\mu}n^{\mu}(C_1+n)R_1^{\mu_0}/\xi_0]^k\Big\}.$$

Par suite, si $2^\mu n^\mu (C_1+n)R_1^{\mu_0}/\xi_0 \le 1$, on a

$$T_2 \le M(R)m2^\mu n^{p+\mu}(C_1+n)R_1^{\mu_0}/\xi_0.$$

Choisissons

$$\xi_0 \ge \max\{1/R, 2^\mu n^\mu (C_1+n)R_1^{\mu_0}, 8M(R)m2^\mu n^{p+\mu}(C_1+n)R_1^{\mu_0}\};$$

on a alors $T_2 \le 1/8$.

Ainsi, en prenant pour tout $R_1 \ge 1$, $\xi_1 = C_1/R_1$, $\xi_j = 1/R_1$, $2 \le j \le n$, et

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \max\{1/R, C_2R_1^{\mu_0}\},\\ C_2 &= \max\{2^\mu n^\mu (C_1+n), 8M(R)m2^\mu n^{p+\mu}(C_1+n)\}, \end{aligned} \tag{1.6}$$

on a

$$H_{R,R_1}(\xi)/\xi_1^p\xi_0^{m-p} \le T_1+T_2 \le 1/4 < 1.$$

D'après la Proposition 1.1, la solution $u(x)$ est alors holomorphe sur $\{x;\ \xi_0|x_0| + \sum_{i=1}^n \xi_i|x_i| \le 1/2\}$ et donc sur $\{x;\ |x_0| \le 1/4\xi_0,\ |x_i| \le 1/4n\xi_i,\ 1 \le i \le n\}$.

D'après (1.5) et (1.6), pour tout $R_1 \ge 1$, il existe C_1, C_2 (≥ 1) des constantes ne dépendant que de $M(R)$ telles que $u(x)$ est holomorphe sur

$$\{x;\ |x_0| \le \min[R/4, 1/4C_2R_1^{\mu_0}],\ |x_1| \le R_1/4nC_1,\ |x_j| \le R_1/4n,\ 2 \le j \le n\}.$$

Il s'ensuit que pour tout $R_1 \ge 1$, $u(x)$ est holomorphe sur $\{x;|x_0| \le C\min[1/R_1^{\mu_0}, R],\ \|x'\| \le C_0R_1\}$, où $C = 1/4C_2$, $C_0 = 1/4nC_1$. Ainsi, $u(x)$ est holomorphe sur $\{x;|x_0| \le C\min[C_0^{\mu_0}/\|x'\|^{\mu_0}, 1, R]\}$. Ceci démontre le Théorème 1.1.

Corollaire 1.1. *Soit $\mathcal{D}$ un domaine de $\mathbb{C}$ et $0 \in \mathcal{D}$ un point de base. $\mathcal{R}(\mathcal{D})$ est le revêtement universel de $\mathcal{D}$. Supposons que dans* (1.1)*, les coefficients de l'opérateur $a(x,D)$ et les données $v(x)$, $w_{k,0}(x')$, $0 \le k \le m-p-1$, $w_{m-p,\ell}(x_0,x'')$, $0 \le \ell \le p-1$, se prolongent analytiquement sur $\mathcal{R}(\mathcal{D}) \times \mathbb{C}^n$ et que la partie principale $h(x,D)$ holomorphe sur $\mathcal{R}(\mathcal{D}) \times \mathbb{C}^n$ satisfasse la condition du Théorème* 1.1 *avec $\mu = 0, 1$, c'est-à-dire*

$$h_k(x,\xi') = \sum_{|\alpha'|=k,\,|\beta'|\le(k-p)\mu} a_\alpha^{\beta'}(x_0)x'^{\beta'}\xi'^{\alpha'},$$

où les $a_\alpha^{\beta'}(x_0)$ sont holomorphes sur $\mathcal{R}(\mathcal{D})$. Le problème (1.1) *possède alors une* *unique solution holomorphe sur* $\mathcal{R}(\mathcal{D}) \times \mathbb{C}^n$. *En particulier, au cas de* $\mathcal{D} = \mathbb{C}$, *la solution est une fonction entière sur* $\mathbb{C}^{n+1}$.

Note 1.1. Au cas de $p = 0$, ce corollaire a été démontré dans [HLT] et [H1]. Au cas de $p = 0$ et $\mathcal{D} = \mathbb{C}$, ceci a été déjà démontré dans [P], [HLT] et [PW]. Un résultat de [HLT] pour $p = 0$ est d'une forme plus précise que ci-dessus.

Preuve. On utilise le même raisonnement que dans [H1]. Soit γ un chemin quelconque d'origine 0 dans $\mathcal{D}$, $\gamma = \{x_0 = \gamma(t);\, t \in [0,1]\}, \gamma(t)$ étant une fonction continue sur $[0,1]$ et $\gamma(0) = 0$. D'abord, notons que d'après le Théorème 1.1, la solution $u(x)$ est holomorphe sur $V(0) \times \mathbb{C}^n$, $V(0)$ étant un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$. Posons $\tau_0 = \sup \tau$, où pour $\gamma_\tau = \{x_0 = \gamma(t);\, t \in [0,\tau],\, 0 \le \tau \le 1\}$, il existe un voisinage $V(\gamma_\tau)$ de γ_τ dans $\mathbb{C}$ tel que la solution $u(x)$ du problème (1.1) soit holomorphe sur $V(\gamma_\tau) \times \mathbb{C}^n$. Au voisinage de $x_0 = \gamma(\tau_0)$, tous les coefficients $a_\alpha^{\beta'}(x_0)$ de $h(x,\xi)$ sont holomorphes et bornés. Alors pour τ $(0 < \tau < \tau_0)$ près de τ_0, les $D_0^k u(\gamma(\tau), x')$, $0 \le k \le m-p-1$, sont holomorphes sur $\mathbb{C}^n$ et $w_{m-p,\ell}(x_0, x'')$, $0 \le \ell \le p-1$, sont holomorphes sur $\mathcal{R}(\mathcal{D}) \times \mathbb{C}^{n-1}$. On considère le problème de Cauchy et Goursat pour $x_0 = \gamma(\tau)$, $x_1 = 0$, avec les données $v(x)$, $D_0^k u(\gamma(\tau), x')$, $0 \le k \le m-p-1$, $D_1^\ell D_0^{m-p} u(x_0, 0, x'') = w_{m-p,\ell}(x_0, x'')$, $0 \le \ell \le p-1$, holomorphes sur $\mathcal{R}(\mathcal{D}) \times \mathbb{C}^n$. D'après le Théorème 1.1, $u(x)$ est holomorphe sur $V(\gamma(\tau_0)) \times \mathbb{C}^n$, où $V(\gamma(\tau_0))$ est un voisinage de $\gamma(\tau_0)$. On voit donc que $\tau_0 = 1$ et que la solution $u(x)$ peut se prolonger analytiquement sur $V(\gamma) \times \mathbb{C}^n$, $V(\gamma)$ étant un voisinage de γ dans $\mathbb{C}$. D'après les Propositions 7.1 et 7.2 dans [HLT], la solution $u(x)$ peut se prolonger analytiquement sur $\mathcal{R}(\mathcal{D}) \times \mathbb{C}^n$. Ceci démontre le Corollaire 1.1.

Ensuite, nous considérons le cas où les parties principales des opérateurs ont des coefficients polynomiaux en $x'' = (x_2, \ldots, x_n)$.

Théorème 1.2. *Étudions le problème*

$$(1.1) \qquad \begin{aligned} &a(x,D)u(x) = v(x), \\ &D_0^k u(0,x') = w_{k,0}(x'), \qquad 0 \le k \le m-p-1, \\ &D_1^\ell D_0^{m-p} u(x_0, 0, x'') = w_{m-p,\ell}(x_0, x''), \qquad 0 \le \ell \le p-1. \end{aligned}$$

Supposons que l'opérateur $a(x,D)$ *est holomorphe sur* $\{x = (x_0, x_1, x'');\, |x_0| \le R_0^*,\, |x_1| \le R_1^*,\, x'' \in \mathbb{C}^{n-1}\}$, $R_i^* > 0$, $i = 0,1$, *étant des constantes, et que les coefficients de la partie principale* $h(x,D)$ *de l'opérateur* $a(x,D) = h(x,D) + b(x,D)$ *sont des polynômes en* x'' *:*

$$(1.7) \qquad h(x,D) = D_1^p D_0^{m-p} - \sum_{k=0}^{m-p} h_{p+k}(x, D') D_0^{m-p-k},$$

où

$$h_{p+k}(x,D') = \sum_{\substack{\alpha_0=m-p-k,\, \alpha_1+|\alpha''|=p+k,\\ \alpha_1\le p,\, |\alpha''|\ge 1,\, |\beta''|\le \mu|\alpha''|}} a^{\beta''}_{\alpha_0,\alpha_1,\alpha''}(x_0,x_1)x''^{\beta''}D^{\alpha''}_{x''}D_1^{\alpha_1}, \tag{1.8}$$

où $|\alpha''| = \sum_{i=2}^n \alpha_i$, *et les coefficients* $a^{\beta''}_{\alpha_0,\alpha_1,\alpha''}(x_0,x_1)$ *sont holomorphes sur* $\{x=(x_0,x_1);\ |x_0|\le R_0^*,\ |x_1|\le R_1^*\}$ *;* μ *est un entier* ≥ 0*. Soit*

$$M = \max\{|a^{\beta''}_{\alpha_0,\alpha_1,\alpha''}(x_0,x_1)|;\ |x_0|\le R_0^*,\ |x_1|\le R_1^*,\ \alpha_0+\alpha_1+|\alpha''|=m,\ \alpha_0\le m-p,\ \alpha_1\le p,\ |\alpha''|\ge 1,\ |\beta''|\le\mu|\alpha''|\}. \tag{1.9}$$

Pour tout $v(x)$, $w_{k,0}(x')$, $w_{m-p,\ell}(x_0,x'')$, $0\le k\le m-p-1$, $0\le \ell\le p-1$, *holomorphes sur* $\{x;\ |x_0|<r_0,\ |x_1|<r_1,\ x''\in\mathbb{C}^{n-1}\}$, $0<r_i\le\min\{R_i^*/2,1\}$, $i=0,1$, *le problème* (1.1) *possède une unique solution* $u(x)$ *holomorphe sur* $\{x;\ |x_i|<\min[r_i, C\min\{1/M,1\}/\|x''\|^{\mu_0}],\ i=0,1,\ x''\in\mathbb{C}^{n-1}\}$, *où* C $(0<C\le 1)$ *est une constante ne dépendant que de* m,n,p *et* $\mu_0=\max\{\mu-1,0\}$.

En particulier, quand $\mu=0,1$, *soient* $0<r_i\le C\min\{1/M, R_i^*/2, 1\}$, $i=0,1$.

Pour tout $v(x)$, $w_{k,0}(x')$, $w_{m-p,\ell}(x_0,x'')$, $0\le k\le m-p-1$, $0\le\ell\le p-1$, *holomorphes sur* $\{x;\ |x_0|<r_0,\ |x_1|<r_1,\ x''\in\mathbb{C}^{n-1}\}$, *la solution* $u(x)$ *est holomorphe sur* $\{x;\ |x_0|<r_0,\ |x_1|<r_1,\ x''\in\mathbb{C}^{n-1}\}$.

Remarque 1.3. Si les coefficients $a_\alpha(x)$ de $h(x,D)$ sont des polynômes en x'' de degré $|\beta|>|\alpha''|$, la solution du problème (1.1) n'est plus holomorphe en $\{x''\in\mathbb{C}^{n-1}\}$ en général, comme on l'a vu dans l'Exemple 1.2.

Preuve du théorème 1.2. Nous considérons d'abord le cas où

(I) Les données $v(x)$, $w_{k,0}(x')$, $w_{m-p,\ell}(x_0,x'')$, $0\le k\le m-p-1$, $0\le\ell\le p-1$ sont holomorphes sur $\{x;\ |x_0|\le r_0,\ |x_1|\le r_1,\ x''\in\mathbb{C}^{n-1}\}$.

Nous pouvons nous ramener au cas de $w_{k,0}(x')=w_{m-p,\ell}(x_0,x'')=0$, $0\le\ell\le p-1$.

Soient $z=x_2+\cdots+x_n$. Pour tout R_i, $0<R_i\le R_i^*$, $i=0,1$, et r,R, $0<r<R$, on considère une équation majorante du problème (1.1) :

$$D_1^pD_0^{m-p}U(x_0,x_1,z) \gg [H(x_0,x_1,z,D_0,D_1,D_z)+B(x_0,x_1,z,D_0,D_1,D_z)]U(x_0,x_1,z)+V(x_0,x_1,z), \tag{1.10}$$

où $v(x)\ll V(x_0,x_1,x_2+\cdots+x_n)$ et

$$V(x_0,x_1,z) = \frac{\|v\|(r_0,r_1,r)}{(1-\frac{x_0}{r_0})(1-\frac{x_1}{r_1})(1-\frac{z}{r})}, \tag{1.11}$$

$$\|v\|(r_0,r_1,r) = \max\{|v(x)|;\ |x_i|\le r_i,\ 0\le i\le 1,\ |x_j|\le r,\ 2\le j\le n\},$$

et posons

$$(1.12)\quad H(x_0,x_1,z,D_0,D_1,D_z) = \frac{M}{(1-\frac{x_0}{R_0})(1-\frac{x_1}{R_1})(1-\frac{z}{R})} \sum_{\substack{0\le k\le m-p,\, 0\le \ell\le p,\\ 1\le k+\ell}} (1+nR)^{\mu(k+\ell)}(nD_z)^{k+\ell} D_1^{p-\ell} D_0^{m-p-k},$$

$$(1.13)\quad B(x_0,x_1,z,D_0,D_1,D_z) = \frac{M(R_0,R_1,R)}{(1-\frac{x_0}{R_0})(1-\frac{x_1}{R_1})(1-\frac{z}{R})} \sum_{0\le k\le m-1} (D_0+D_1+nD_z)^k,$$

où M est le maximum sur $\{(x_0,x_1);\ |x_0|\le R_0^*,\ |x_1|\le R_1^*\}$ des coefficients de polynômes en x'' des opérateurs $h(x,D)$, c'est-à-dire,

$$(1.9)\quad M = \max\{|a^{\beta''}_{\alpha_0,\alpha_1,\alpha''}(x)|;\ \alpha_0+\alpha_1+|\alpha''| = m,\ \alpha_0\le m-p,\ \alpha_1\le p,\ |\alpha''|\ge 1,\ |\beta''|\le\mu|\alpha''|,\ |x_0|\le R_0^*, |x_1|\le R_1^*\},$$

$$(1.14)\quad M(R_0,R_1,R) = \text{le maximum des modules des coefficients de } b(x,D) \text{ sur } \{x;\ |x_i|\le R_i,\ i=0,1,\ \|x''\|\le R\}.$$

D'après le théorème classique, pour une solution $U(x_0,x_1,z)$ de (1.10), on a

$$(1.15)\quad u(x) \ll U(x_0,x_1,x_2+\cdots+x_n).$$

Définissons $U_k(x_0,x_1,z)$, $k\ge 0$, par une solution de l'équation majorante : pour $k=0$,

$$(1.16)\quad D_1^p D_0^{m-p} U_0(x_0,x_1,z) \gg H(x_0,x_1,z,D_0,D_1,D_z)U_0(x_0,x_1,z) + V(x_0,x_1,z),$$

et pour $k\ge 0$,

$$(1.17)\quad D_1^p D_0^{m-p} U_{k+1}(x_0,x_1,z) \gg H(x_0,x_1,z,D_0,D_1,D_z)U_{k+1} + B(x_0,x_1,z,D_0,D_1,D_z)U_k(x_0,x_1,z).$$

Posons $U(x_0,x_1,z) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x_0,x_1,z)$; alors $U(x_0,x_1,z)$ satisfait l'équation majorante (1.10).

Posons

$$(1.18)\quad U_0(x_0,x_1,z) = \frac{\|v\|(r_0,r_1,r)e^{c_0x_0+c_1x_1}}{(1-\frac{x_0}{r_0})(1-\frac{x_1}{r_1})[1-(\alpha_0x_0+\alpha_1x_1+\frac{z}{r})]},$$

où $c_0, c_1\ge 1$ et $\alpha_0,\alpha_1>0$ sont des constantes ultérieurement déterminées.

Lemme 1.1 ([HLW], [W]). *Soient $z, z_1\in\mathbb{C}$. Pour $0<r<R$, on a*

$$(1.19)\quad \frac{1}{(1-\frac{z}{R})(1-\frac{z}{r})} \ll \frac{1}{(1-\frac{r}{R})(1-\frac{z}{r})},$$

$$\frac{1}{(1-\frac{z}{R})[1-(z_1+\frac{z}{r})]} \ll \frac{1}{(1-\frac{r}{R})[1-(z_1+\frac{z}{r})]}. \tag{1.20}$$

En particulier, pour $\alpha_0, \alpha_1 > 0$,

$$\frac{1}{(1-\frac{z}{R})[1-(\alpha_0 x_0+\alpha_1 x_1+\frac{z}{r})]} \ll \frac{1}{(1-\frac{r}{R})[1-(\alpha_0 x_0+\alpha_1 x_1+\frac{z}{r})]}.$$

Preuve. D'après [W] et [HLW], on a (1.19). Pour (1.20), on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-\frac{z}{R})[1-(z_1+\frac{z}{r})]} &= \frac{1}{(1-\frac{z}{R})(1-\frac{z}{r})(1-\frac{z_1}{1-\frac{z}{r}})} \ll \frac{1}{(1-\frac{r}{R})(1-\frac{z}{r})(1-\frac{z_1}{1-\frac{z}{r}})}\\ &= \frac{1}{(1-\frac{r}{R})[1-(z_1+\frac{z}{r})]}.\end{aligned}$$

Lemme 1.2. *On a*

$$D_0U_0 \gg \alpha_0 r D_z U_0, \quad D_1U_0 \gg \alpha_1 r D_z U_0, \quad D_0U_0 \gg c_0U_0, D_1U_0 \gg c_1U_0. \tag{1.21}$$

Preuve. En fait, d'après (1.18), on a

$$D_0U_0 \gg \alpha_0 \frac{\|v\|(r_0,r_1,r)e^{c_0x_0+c_1x_1}}{(1-\frac{x_0}{r_0})(1-\frac{x_1}{r_1})[1-(\alpha_0x_0+\alpha_1x_1+\frac{z}{r})]^2} = \alpha_0 r D_z U_0.$$

De même, on obtient la seconde inégalité de (1.21). Les autres sont évidentes.

D'après (1.18) et les Lemmes 1.1 et 1.2, on a

$$\begin{aligned} HU_0 &= \frac{M}{(1-\frac{x_0}{R_0})(1-\frac{x_1}{R_1})(1-\frac{z}{R})}\\ &\quad\times \sum_{\substack{0\le k\le m-p,\, 0\le \ell\le p,\\ 1\le k+\ell}} (1+nR)^{\mu(k+\ell)}(nD_z)^{k+\ell}D_1^{p-\ell}D_0^{m-p-k}U_0\\ &\ll \frac{M}{(1-\frac{r_0}{R_0})(1-\frac{r_1}{R_1})(1-\frac{r}{R})}\\ &\quad\times \sum_{\substack{0\le k\le m-p,\, 0\le \ell\le p,\\ 1\le k+\ell}} (1+nR)^{\mu(k+\ell)}(nD_z)^{k+\ell}D_1^{p-\ell}D_0^{m-p-k}U_0\\ &\ll \frac{M}{(1-\frac{r_0}{R_0})(1-\frac{r_1}{R_1})(1-\frac{r}{R})}\\ &\quad\times \Bigg[\sum_{\substack{0\le k\le m-p,\, 0\le \ell\le p,\\ 1\le k+\ell}} (1+nR)^{\mu(k+\ell)}\frac{n^{k+\ell}}{\alpha_0^k\alpha_1^\ell r^{k+\ell}}\Bigg]D_1^pD_0^{m-p}U_0.\end{aligned}$$

Pour $R = 2r$, $R_0 = 2r_0$, $R_1 = 2r_1$, $r \geq 1$, donc $1 + R \leq 2R$, on a

$$\begin{aligned}
HU_0 &\ll 8M\Bigg[\sum_{\substack{0\le k\le m-p,\,0\le\ell\le p,\\ 1\le k+\ell}} 2^{k+\ell} n^{(\mu+1)(k+\ell)} \frac{(1+R)^{\mu(k+\ell)}}{(1+R)^{k+\ell}\alpha_0^k\alpha_1^\ell}\Bigg] D_1^p D_0^{m-p} U_0 \\
&\ll 8M\Bigg[\sum_{\substack{0\le k\le m-p,\,0\le\ell\le p,\\ 1\le k+\ell}} 2^{k+\ell} n^{(\mu+1)(k+\ell)} \frac{(1+R)^{\mu_0(k+\ell)}}{\alpha_0^k\alpha_1^\ell}\Bigg] D_1^p D_0^{m-p} U_0 \\
&\ll 8M\Bigg[\sum_{\substack{0\le k\le m-p,\,0\le\ell\le p,\\ 1\le k+\ell}} [2^{1+\mu_0} n^{\mu_0+2} R^{\mu_0}/\alpha_0]^k [2^{1+\mu_0} n^{\mu_0+2} R^{\mu_0}/\alpha_1]^\ell\Bigg] \\
&\quad \times D_1^p D_0^{m-p} U_0.
\end{aligned}$$

En choisissant $\alpha_0, \alpha_1 \geq 2^{1+\mu_0} n^{\mu_0+2} R^{\mu_0}$, on a

$$HU_0 \ll \max_{0\le i\le 1} [8M(m+1)(p+1)2^{1+\mu_0} n^{\mu_0+2} R^{\mu_0}/\alpha_i] D_1^p D_0^{m-p} U_0.$$

Prenons enfin

$$\begin{aligned}
&R = 2r, \quad R_0 = 2r_0, \quad R_1 = 2r_1, \quad r \geq 1, \\
&\alpha_0, \alpha_1 \geq \max\{M, 1\}(m+1)(p+1)2^{5+2\mu_0} n^{\mu_0+2} r^{\mu_0}.
\end{aligned} \tag{1.22}$$

On a alors

$$HU_0 \ll \frac{1}{2} D_1^p D_0^{m-p} U_0. \tag{1.23}$$

Aussi d'après le Lemme 1.2, on a $D_1^p D_0^{m-p} U_0 \gg c_1^p c_0^{m-p} U_0$. Choisissons c_0, c_1 avec

$$c_1^p c_0^{m-p} \geq 2, \qquad c_0, c_1 \geq 1. \tag{1.24}$$

On a alors

$$\frac{1}{2} D_1^p D_0^{m-p} U_0 \gg U_0 \gg V. \tag{1.25}$$

Lemme 1.3. *Pour $\lambda, \nu \geq 0$, $0 \leq k \leq m-p$, $0 \leq \ell \leq p$, on a*

$$D_1^p D_0^{m-p}\left(\frac{x_0^\lambda x_1^\nu}{\lambda!\nu!} U_0\right) \gg (\alpha_0 r)^k (\alpha_1 r)^\ell D_z^{k+\ell} D_1^{p-\ell} D_0^{m-p-k}\left(\frac{x_0^\lambda x_1^\nu}{\lambda!\nu!} U_0\right). \tag{1.26}$$

Preuve. En effet, d'après le Lemme 1.2, on a

$$\begin{aligned}
D_1^p D_0^{m-p}\left(\frac{x_0^\lambda x_1^\nu}{\lambda!\nu!} U_0\right) &= D_1^{p-\ell} D_0^{m-p-k} D_1^\ell D_0^k \left(\frac{x_0^\lambda x_1^\nu}{\lambda!\nu!} U_0\right) \\
&\gg D_1^{p-\ell} D_0^{m-p-k}\left(\frac{x_0^\lambda x_1^\nu}{\lambda!\nu!} D_1^\ell D_0^k U_0\right)
\end{aligned}$$

$$\gg D_1^{p-\ell} D_0^{m-p-k}\left(\frac{x_0^\lambda x_1^\nu}{\lambda!\nu!}(\alpha_0 r)^k(\alpha_1 r)^\ell D_z^{k+\ell} U_0\right)$$
$$\gg (\alpha_0 r)^k(\alpha_1 r)^\ell D_z^{k+\ell} D_1^{p-\ell} D_0^{m-p-k}\left(\frac{x_0^\lambda x_1^\nu}{\lambda!\nu!} U_0\right).$$

Ceci démontre le Lemme 1.3.

Posons pour $s \geq 0$,

$$U_s(x_0,x_1,z) = (2\Gamma)^s \frac{x_1^{sp} x_0^{s(m-p)}}{(sp)![s(m-p)]!}(D_0+D_1)^{s(m-1)} U_0(x_0,x_1,z), \tag{1.27}$$

où

$$\Gamma = 8M(R_0,R_1,R)m(1+n)^{m-1}. \tag{1.28}$$

D'après (1.12), les Lemmes 1.1–1.3 et (1.22), pour $s \geq 0$, on a

$$HU_{s+1} \ll 8M \sum_{\substack{0\leq k\leq m-p,\, 0\leq \ell\leq p,\\ 1\leq k+\ell}} (1+nR)^{\mu(k+\ell)}(nD_z)^{k+\ell} D_1^{p-\ell} D_0^{m-p-k} U_{s+1}$$
$$\ll 8M\left[\sum_{\substack{0\leq k\leq m-p,\, 0\leq \ell\leq p,\\ 1\leq k+\ell}} (1+nR)^{\mu(k+\ell)} n^{k+\ell}\frac{1}{\alpha_0^k\alpha_1^\ell r^{k+\ell}}\right] D_1^p D_0^{m-p} U_{s+1}.$$

D'après (1.22), on a

$$HU_{s+1} \ll \frac{1}{2} D_1^p D_0^{m-p} U_{s+1}. \tag{1.29}$$

Puis d'après (1.13), les Lemmes 1.1–1.3, (1.22) et (1.27), nous avons

$$BU_s = \frac{M(R_0,R_1,R)}{(1-\frac{x_0}{R_0})(1-\frac{x_1}{R_1})(1-\frac{z}{R})}\sum_{0\leq k\leq m-1}(D_0+D_1+nD_z)^k U_s$$
$$\ll \frac{M(R_0,R_1,R)}{(1-\frac{r_0}{R_0})(1-\frac{r_1}{R_1})(1-\frac{r}{R})}\sum_{0\leq k\leq m-1}(D_0+D_1+nD_z)^k U_s$$
$$\ll 8M(R_0,R_1,R)\sum_{0\leq k\leq m-1}(D_0+D_1+nD_z)^k U_s$$
$$\ll 8M(R_0,R_1,R)m(1+n)^{m-1}(D_0+D_1)^{m-1}U_s = \Gamma(D_0+D_1)^{m-1}U_s.$$

D'autre part, d'après (1.26), on a

$$D_1^p D_0^{m-p} U_{s+1} \gg (2\Gamma)^{s+1}\frac{x_1^{sp} x_0^{s(m-p)}}{(sp)![s(m-p)]!}(D_0+D_1)^{(s+1)(m-1)} U_0$$
$$\gg 2\Gamma(D_0+D_1)^{m-1} U_s$$

et on a alors

$$BU_s \ll \frac{1}{2} D_1^p D_0^{m-p} U_{s+1}. \tag{1.30}$$

Ainsi d'après (1.23), (1.25), (1.29) et (1.30), nous avons

$$D_1^p D_0^{m-p} U_0 \gg HU_0 + V,$$

et pour $s \geq 0$,

$$D_1^p D_0^{m-p} U_{s+1} \gg HU_{s+1} + BU_s.$$

Ceci démontre que $U = \sum_{s=0}^{\infty} U_s$ satisfait (1.10).

Pour la convergence de cette série, nous avons

$$\sum_{s=0}^{\infty} |U_s| \leq \sum_{s=0}^{\infty} (2\Gamma)^s \frac{|x_1|^{sp} |x_0|^{s(m-p)}}{(sp)![s(m-p)]!} |(D_0 + D_1)^{s(m-1)} U_0|.$$

Posons

$$0 < \rho_0 < \min\{r_0, 1/4\alpha_0\}, \qquad 0 < \rho_1 < \min\{r_0, 1/4\alpha_1\}; \tag{1.31}$$

on a alors

$$U_0(x_0, x_1, z) \ll \frac{A}{(1 - \frac{x_0}{\rho_0})(1 - \frac{x_1}{\rho_1})(1 - \frac{2z}{r})},$$

où

$$A = \frac{\|v\|(r_0, r_1, r) e^{c_0 \rho_0 + c_1 \rho_1}}{(1 - \frac{\rho_0}{r_0})(1 - \frac{\rho_1}{r_1})[\frac{1}{2} - (\alpha_0 \rho_0 + \alpha_1 \rho_1)]}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
&(D_0 + D_1)^{s(m-1)} \left[\frac{1}{(1 - \frac{x_0}{\rho_0})(1 - \frac{x_1}{\rho_1})} \right] \\
&\qquad = \sum_{i+j=s(m-1)} \frac{[s(m-1)]!}{i!j!} D_0^i D_1^j \left[\frac{1}{(1 - \frac{x_0}{\rho_0})(1 - \frac{x_1}{\rho_1})} \right] \\
&\qquad = \sum_{i+j=s(m-1)} \frac{[s(m-1)]!}{i!j!} \frac{i!j!}{\rho_0^i (1 - \frac{x_0}{\rho_0})^{i+1} \rho_1^j (1 - \frac{x_1}{\rho_1})^{j+1}} \\
&\qquad = [s(m-1)]! \sum_{i+j=s(m-1)} \frac{1}{\rho_0^i (1 - \frac{x_0}{\rho_0})^{i+1} \rho_1^j (1 - \frac{x_1}{\rho_1})^{j+1}} \\
&\qquad \ll \frac{[s(m-1)]!}{(1 - \frac{x_0}{\rho_0})(1 - \frac{x_1}{\rho_1})} \left[\frac{1}{\rho_0 (1 - \frac{x_0}{\rho_0})} + \frac{1}{\rho_1 (1 - \frac{x_1}{\rho_1})} \right]^{s(m-1)}.
\end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned}
&|(D_0 + D_1)^{s(m-1)} U_0(x_0, x_1, z)| \\
&\qquad \leq \frac{A[s(m-1)]!}{(1 - \frac{|x_0|}{\rho_0})(1 - \frac{|x_1|}{\rho_1})(1 - \frac{2|z|}{r})} \left(\frac{1}{\rho_0 - |x_0|} + \frac{1}{\rho_1 - |x_1|} \right)^{s(m-1)}.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\sum_{s=0}^{\infty}|U_s| \le \frac{A}{(1-\frac{|x_0|}{\rho_0})(1-\frac{|x_1|}{\rho_1})(1-\frac{2|z|}{r})} \times \sum_{s=0}^{\infty}(2\Gamma)^s \frac{|x_1|^{sp}|x_0|^{s(m-p)}}{(sp)![s(m-p)]!}[s(m-1)]!\left(\frac{1}{\rho_0-|x_0|}+\frac{1}{\rho_1-|x_1|}\right)^{s(m-1)}.$$

Vu que $2^{sm}(sp)![s(m-p)]! \ge (sm)!$ et $s![s(m-1)]! \le (sm)!$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{s=0}^{\infty}|U_s| &\le \frac{A}{(1-\frac{|x_0|}{\rho_0})(1-\frac{|x_1|}{\rho_1})(1-\frac{2|z|}{r})} \\ &\quad\times \sum_{s=0}^{\infty}(2\Gamma)^s|x_1|^{sp}|x_0|^{s(m-p)}2^{sm}\frac{[s(m-1)]!}{(sm)!}\left(\frac{1}{\rho_0-|x_0|}+\frac{1}{\rho_1-|x_1|}\right)^{s(m-1)} \\ &\le \frac{A}{(1-\frac{|x_0|}{\rho_0})(1-\frac{|x_1|}{\rho_1})(1-\frac{2|z|}{r})} \\ &\quad\times \sum_{s=0}^{\infty}(2\Gamma)^s|x_1|^{sp}|x_0|^{s(m-p)}2^{sm}\frac{1}{s!}\left(\frac{1}{\rho_0-|x_0|}+\frac{1}{\rho_1-|x_1|}\right)^{s(m-1)}.\end{aligned}$$

On voit donc que la série $\sum_{s=0}^{\infty}|U_s(x_0,x_1,x_2+\cdots+x_n)|$ est uniformément convergente sur tout ensemble compact dans $\{x;\, |x_0|<\rho_0,\ |x_1|<\rho_1,\ \|x''\|\le r/4n,\ x''\in\mathbb{C}^{n-1}\}$. Il vient que $u(x)$ est holomorphe sur $\{x;\, |x_0|<\rho_0,\ |x_1|<\rho_1,\ \|x''\|\le r/4n,\ x''\in\mathbb{C}^{n-1}\}$. D'après (1.22) et (1.31), $u(x)$ est donc holomorphe sur $\{x;\, |x_i|<\min\{r_i,\ 1/4\alpha_i\},\ i=0,1,\ \|x''\|\ \le r/4n,\ x''\in\mathbb{C}^{n-1}\}$, et par conséquent sur $\{x;\, |x_i|<\min[r_i, C\min\{1/M,1\}/\|x''\|^{\mu_0}],\ i=0,1,\ x''\in\mathbb{C}^{n-1}\}$, où $C=[(m+1)(p+1)2^{7+4\mu_0}n^{2\mu_0+2}]^{-1}$ est une constante $(0<C\le 1)$ ne dépendant que de m, n, p et μ_0.

Enfin nous considérons le cas où

(II) Les données $v(x)$, $w_{k,0}(x')$, $w_{m-p,\ell}(x_0,x'')$, $0\le k\le m-p-1$, $0\le \ell\le p-1$, sont holomorphes sur $\{x;\, |x_0|<r_0, |x_1|<r_1,\ x''\in\mathbb{C}^{n-1}\}$. Pour tout r_0', r_1', $0<r_0'<r_0$, $0<r_1'<r_1$, les $v(x)$, $w_{k,0}(x')$, $w_{m-p,\ell}(x_0,x'')$, $0\le k\le m-p-1$, $0\le\ell\le p-1$, sont holomorphes sur $\{x;\, |x_0|\le r_0',\ |x_1|\le r_1',\ x''\in\mathbb{C}^{n-1}\}$.

D'après le cas (I), la solution $u(x)$ est alors holomorphe sur $\{x; |x_i| < \min[r_i', C\min\{1/M,1\}/\|x''\|^{\mu_0}],\ i=0,1,\ x''\in\mathbb{C}^{n-1}\}$. En prenant $r_i'\to r_i$, $0\le i \le 1$, la solution $u(x)$ est holomorphe sur $\{x;\, |x_i|<\min[r_i, C\min\{1/M,1\}/\|x''\|^{\mu_0}],\ i=0,1,\ x''\in\mathbb{C}^{n-1}\}$. Ceci démontre le théorème 1.2.

Nous étudions un prolongement analytique de la solution du Théorème 1.2 au cas de $\mu=0,1$.

Corollaire 1.2. *Soient pour* $0 \leq i \leq 1, \mathcal{D}_i$ *un domaine du plan* x_i *avec* $\mathcal{D}_i \ni 0$ *et* 0 *un point de base dans* $\mathcal{D}_i$. *Supposons que dans le problème* (1.1), *l'opérateur* $a(x, D)$ *est holomorphe sur* $\mathcal{D}_0 \times \mathcal{D}_1 \times \mathbb{C}^{n-1}$ *et la partie principale* $h(x, D)$ *de* $a(x, D)$ *satisfait* (1.7), (1.8) *avec* $\mu = 0, 1$,

$$h(x,D) = D_1^p D_0^{m-p} - \sum_{\substack{\alpha_0+\alpha_1+|\alpha''|=m,\\ \alpha_0 \leq m-p,\, \alpha_1 \leq p,\, (\alpha_0,\alpha_1)\neq(m-p,p),\, |\alpha''|\geq 1}} a_{\alpha_0,\alpha_1,\alpha''}(x) D_{x''}^{\alpha''} D_1^{\alpha_1} D_0^{\alpha_0},$$

où $|\alpha''| = \sum_{i=2}^n \alpha_i$ *et de plus que les coefficients* $a_{\alpha_0,\alpha_1,\alpha''}(x)$ *sont des polynômes de degré* $|\alpha''|$, *c'est-à-dire,* $a_{\alpha_0,\alpha_1,\alpha''}(x) = \sum_{|\beta''|\leq|\alpha''|} a^{\beta''}_{\alpha_0,\alpha_1,\alpha''}(x_0, x_1) x''^{\beta''}$. *Soient les* $v(x)$, $w_{k,0}(x')$, $w_{m-p,\ell}(x_0, x'')$, $0 \leq k \leq m-p-1$, $0 \leq \ell \leq p-1$, *des fonctions holomorphes sur* $\mathcal{R}(\mathcal{D}_0) \times \mathcal{R}(\mathcal{D}_1) \times \mathbb{C}^{n-1}$. *La solution* $u(x)$ *du problème* (1.1) *est alors holomorphe au voisinage de l'origine et elle se prolonge analytiquement sur*

$$\mathcal{R}(\mathcal{D}_0) \times \mathcal{R}(\mathcal{D}_1) \times \mathbb{C}^{n-1} = \mathcal{R}(\mathcal{D}_0 \times \mathcal{D}_1) \times \mathbb{C}^{n-1}.$$

Preuve. Soient pour $i = 0, 1$, γ_i un chemin de la classe C^1 dans $\mathcal{D}_i$ de 0 à x_i, un point quelconque dans $\mathcal{D}_i$. Prenons un domaine $\mathcal{D}'_i$ tel que $\gamma_i \subset \mathcal{D}'_i \subset \overline{\mathcal{D}'_i} \subset \mathcal{D}_i$ et $\overline{\mathcal{D}'_i}$ est compact. Soit M le maximum du module des coefficients des polynômes en x'' dans $h(x, D)$ sur $\overline{\mathcal{D}'_0} \times \overline{\mathcal{D}'_1}$, c'est -à-dire, $M = \max\{|a^{\beta''}_{\alpha_0,\alpha_1,\alpha''}(x_0, x_1)|;\ (x_0, x_1) \in \overline{\mathcal{D}'_0} \times \overline{\mathcal{D}'_1},\ \alpha_0 + \alpha_1 + |\alpha''| = m,\ \alpha_0 \leq m-p,\ \alpha_1 \leq p,\ (\alpha_0, \alpha_1) \neq (m-p, p),\ |\alpha''| \geq 1,\ |\beta''| \leq |\alpha''|\}$.

Soit $R_i^* = \mathrm{dist}(\gamma_i, \partial\mathcal{D}'_i)$ la distance entre γ_i et $\partial\mathcal{D}'_i$, la frontière de $\mathcal{D}'_i$.

Appliquons le Théorème 1.2 et soient $r_i\ (> 0) \leq \min\{C/M, R_i^*/2, 1\}, i = 0, 1$, où C $(0 < C \leq 1)$ est une constante ne dépendant que de m, n, p, dans le Théorème 1.2.

Prenons des points $x_i^{(0)} = 0, x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \ldots, x_i^{(m_i)} = x_i$, de γ_i, $i = 0, 1$, tels que $|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| < r_i$, $1 \leq k \leq m_i$, $i = 0, 1$.

Soit $C_i^{(k)}$ le disque de centre $x_i^{(k)}$ et de rayon r_i, $0 \leq k \leq m_i$, $i = 0, 1$; on a donc $\bigcup_{k=0}^{m_i} C_i^{(k)} \supset \gamma_i$, $i = 0, 1$.

Considérons le problème de Goursat (1.1) avec les données $v(x)$, $w_{k,0}(x')$, $w_{m-p,\ell}(x_0, x'')$, $0 \leq k \leq m-p-1$, $0 \leq \ell \leq p-1$, holomorphes sur $C_0^{(0)} \times C_1^{(0)} \times \mathbb{C}^{n-1}$.

D'après le Théorème 1.2, la solution $u(x)$ est holomorphe sur $C_0^{(0)} \times C_1^{(0)} \times \mathbb{C}^{n-1}$. Les fonctions $D_0^k u(x_0^{(1)}, x'), D_1^\ell D_0^{m-p} u(x_0, 0, x'')$, $0 \leq k \leq m-p-1$, $0 \leq \ell \leq p-1$, sont holomorphes sur $C_0^{(1)} \times C_1^{(0)} \times \mathbb{C}^{n-1}$. Considérons le problème de Goursat (1.1) avec les données $v(x), D_0^k u(x_0^{(1)}, x'), D_1^\ell D_0^{m-p} u(x_0, 0, x''), 0 \leq k \leq m-p-1, 0 \leq \ell \leq p-1$. La solution $u(x)$ est holomorphe sur $C_0^{(1)} \times C_1^{(0)} \times \mathbb{C}^{n-1}$. Les $D_0^k u(x_0^{(2)}, x'), D_1^\ell D_0^{m-p} u(x_0, 0, x''), 0 \leq k \leq m-p-1, 0 \leq \ell \leq p-1$, sont holomorphes sur $C_0^{(2)} \times C_1^{(0)} \times \mathbb{C}^{n-1}$ et donc la solution $u(x)$ est holomorphe sur $C_0^{(2)} \times C_1^{(0)} \times \mathbb{C}^{n-1}$.

En répétant ce raisonnement, la solution $u(x)$ est holomorphe sur $C_0^{(m_0)} \times C_1^{(0)} \times \mathbb{C}^{n-1}$ et donc sur $\bigcup_{j=0}^{m_0} C_0^{(j)} \times C_1^{(0)} \times \mathbb{C}^{n-1}$.

Ensuite, comme $u(x)$ est holomorphe sur $C_0^{(0)} \times C_1^{(0)} \times \mathbb{C}^{n-1}$, les fonctions $D_0^k u(0,x')$, $D_1^\ell D_0^{m-p} u(x_0, x_1^{(1)}, x'')$, $0 \le k \le m-p-1$, $0 \le \ell \le p-1$, sont holomorphes sur $C_0^{(0)} \times C_1^{(1)} \times \mathbb{C}^{n-1}$ et la solution $u(x)$ est alors holomorphe sur $C_0^{(0)} \times C_1^{(1)} \times \mathbb{C}^{n-1}$. Les $D_0^k u(x_0^{(1)}, x'), D_1^\ell D_0^{m-p} u(x_0, x_1^{(1)}, x''), 0 \le k \le m-p-1, 0 \le \ell \le p-1$, sont holomorphes sur $C_0^{(1)} \times C_1^{(1)} \times \mathbb{C}^{n-1}$ et donc $u(x)$ est holomorphe sur $C_0^{(1)} \times C_1^{(1)} \times \mathbb{C}^{n-1}$. Comme $D_0^k u(x_0^{(2)}, x'), D_1^\ell D_0^{m-p} u(x_0, x_1^{(1)}, x''), 0 \le k \le m-p-1, 0 \le \ell \le p-1$, sont holomorphes sur $C_0^{(2)} \times C_1^{(0)} \times \mathbb{C}^2$, la solution $u(x)$ est holomorphe sur $C_0^{(2)} \times C_1^{(1)} \times \mathbb{C}^{n-1}$.

En répétant ce raisonnement, it vient que la solution $u(x)$ est holomorphe sur $\bigcup_{j=0}^{m_0} C_0^{(j)} \times C_1^{(1)} \times \mathbb{C}^{n-1}$. De même, on voit que $u(x)$ est holomorphe sur $\bigcup_{0 \le j \le m_0,\, 0 \le k \le m_1} C_0^{(j)} \times C_1^{(k)} \times \mathbb{C}^{n-1}$. Ainsi $u(x)$ est holomorphe sur $\gamma_0 \times \gamma_1 \times \mathbb{C}^{n-1}$ et donc peut se prolonger analytiquement sur $\mathcal{R}(\mathcal{D}_0) \times \mathcal{R}(\mathcal{D}_1) \times \mathbb{C}^{n-1}$. Ceci démontre le Corollaire 1.2.

Dans les sections suivantes, nous appliquons ces résultats aux quelques problèmes de Cauchy et Goursat particuliers.

§2. Quelques exemples qui se rattachent à l'équation hypergéométrique de Gauss

Considérons le problème de Cauchy

$$\mathcal{G}u(x) = \{x_0(1-x_0)D_0^2 + [D_1 - (D_2 + D_3 + 1)x_0]D_0 - D_2 D_3\}u(x) = 0 \tag{2.1}$$

avec les données

$$u(1/2, x') = w_0(x'), \qquad D_0 u(1/2, x') = w_1(x'), \tag{2.2}$$

où $w_i(x')$, $0 \le i \le 1$, sont des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}^3$, et on note

$$x = (x_0, x') \in \mathbb{C}^4, \qquad x' = (x_1, x_2, x_3).$$

D'après le Corollaire 1.1 avec $p = 0$, nous avons :

Proposition 2.1. *Le problème de Cauchy* (2.1), (2.2) *possède une unique solution holomorphe sur* $\mathcal{R}[\mathbb{C}^4 \setminus \{x_0 = 0, 1\}]$.

L'équation (2.1) se rattache à l'équation hypergéométrique de Gauss.

Nous étudions des propriétés des solutions de (2.1). D'abord on étudie une solution de (2.1) holomorphe au voisinage de l'origine. Bien entendu, on a la solution

$$u(x) = e^{\gamma x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3} F(\alpha, \beta, \gamma, x_0), \tag{2.3}$$

où $F(\alpha, \beta, \gamma, x_0)$ est la fonction hypergéométrique de Gauss. $u(x)$ est holomorphe sur $\{x; |x_0| < 1, x' \in \mathbb{C}^3\}$ pour $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3, \gamma \neq 0, -1, -2, \dots$.

L'équation fondamentale déterminante relative au point $x_0 = 0$ pour (2.1) est symboliquement $\lambda^2 + (D_1 - 1)\lambda = 0$. Les racines sont $\lambda = 0$ et $\lambda = 1 - D_1$.

On cherche une solution de l'équation (2.1) sous la forme

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x') x_0^n. \tag{2.4}$$

Pour que (2.4) satisfasse (2.1), il suffit que les $a_n(x')$ vérifient les relations

$$(D_1 + n - 1) a_n(x') = \frac{1}{n}(D_2 + n - 1)(D_3 + n - 1) a_{n-1}(x'), \quad n \geq 1. \tag{2.5}$$

On donne d'abord $a_0(x') = u(0, x')$ et puis les $a_n(0, x''), n \geq 1$, c'est-à-dire, les données

$$u(0, x') = a_0(x'), \quad u(x_0, 0, x'') = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(0, x'') x_0^n, \tag{2.6}$$

avec les conditions de compatibilité et de convergence de cette série. Ceci signifie le problème de Goursat

$$\mathcal{G}u(x) = 0, \tag{2.1}$$

avec les données

$$u(x_0, 0, x'') = w_{0,0}(x_0, x''), \quad D_1 u(0, x') = w_{0,1}(x') = D_1 a_0(x'). \tag{2.7}$$

D'après la Proposition 1.1 et en utilisant le raisonnement du Théorème 1.1, où les x_0 et x_1 sont remplacés par x_1 et x_0 respectivement, nous avons :

Proposition 2.2. *Considérons le problème de Goursat*

$$\mathcal{G}u(x) = v(x) \tag{2.8}$$

avec les données

$$u(x_0, 0, x'') = w_{0,0}(x_0, x''), \quad D_1 u(0, x') = w_{0,1}(x'). \tag{2.9}$$

(i) *Si* $v(x), w_{0,0}(x_0, x''), w_{0,1}(x')$ *sont holomorphes au voisinage de l'origine, le problème* (2.8), (2.9) *possède une unique solution holomorphe dans un voisinage de l'origine.*

(ii) *Si* $v(x), w_{0,0}(x_0, x''), w_{0,1}(x')$ *sont holomorphes sur* $\mathbb{C}^4$*, le problème* (2.8), (2.9) *possède une unique solution holomorphe sur* $\Delta \times \mathbb{C}^2$*, où*

$$\Delta = \{x \in \mathbb{C}^2;\ |x_0|\,|x_1| \le C_0,\ |x_1| \le r_1\} \cup \{x \in \mathbb{C}^2;\ |x_0| \le d b^{\,a|x_1|},\ |x_0| \le r_0\},$$

où C_0 $(0 < C_0 < 1)$*,* a (> 1)*,* b $(0 < b < 1)$*,* d $(0 < d < 1)$ *et* r_0, r_1 $(0 < r_0,$ $r_1 < 1)$ *sont des constantes ne dépendant que de* $\mathcal{G}$*.*

Note 2.1. Dans la preuve, nous avons choisit des constantes $C_0 = 1/96 \times 16$, $a = 160$, $b = 1/16$, $d = 1/16$, $r_0 = 1/16$, $r_1 = 1/96$.

Preuve. Le cas (i) résulte de la Proposition 1.1. Quant au cas (ii), on peut se réduire au problème avec $w_{0,0}(x') = w_{1,0}(x_0, x'') = 0$ dans (2.8), (2.9). On utilise un raisonnement un peu plus précis que celui dans le Théorème 1.1.

Soit pour $R_0 > 0$,

$$H_{R_0}(\xi) = \sup_{|x_0| \le R_0} \{|x_0(1-x_0)|\xi_0^2 + (\xi_2+\xi_3)|x_0|\xi_0 + \xi_2\xi_3\}, \qquad \xi \in (\mathbb{R}_+)^4.$$

On a $H_{R_0}(\xi)/\xi_1\xi_0 \le R_0(1+R_0)\xi_0/\xi_1 + (\xi_2+\xi_3)R_0/\xi_1 + \xi_2\xi_3/\xi_1\xi_0$. En prenant pour $R' > 0$, $\xi_j = 1/R'$, $2 \le j \le 3$, et $\xi_0 = 1/R_0$, on a

$$H_{R_0}(\xi)/\xi_1\xi_0 \le (1+R_0)/\xi_1 + 2R_0/R'\xi_1 + 1/\xi_1\xi_0(R')^2.$$

(I) *Le cas où* $R_0 \ge 1$. On choisit $\xi_0 = 1/R_0$. Pour tout $R' \ge 1$, on a $H_{R_0}(\xi)/\xi_1\xi_0 \le 2R_0/\xi_1 + R_0(2/R' + 1/R'^2)/\xi_1 \le 2R_0/\xi_1 + 3R_0/R'\xi_1$. Pour tout $R' \ge 3$, on a $H_{R_0}(\xi)/\xi_1\xi_0 \le 3R_0/\xi_1$. Donc pour $\xi_1 \ge 6R_0$, on a $H_{R_0}(\xi)/\xi_1\xi_0 \le 3R_0/\xi_1 \le 1/2$.

D'après la Proposition 1.1, où les x_0 et x_1 sont remplacés par x_1 et x_0 respectivement, la solution $u(x)$ est holomorphe sur $\{x;\ \sum_{i=0}^{3} \xi_i|x_i| \le 1/4\}$, donc sur $\{x;\ |x_i| \le 1/16\xi_i,\ 0 \le i \le 3\}$. Pour tout $R' \ge 3$ et tout $R_0 \ge 1$ indépendant de R', $u(x)$ est holomorphe sur $\{x;\ |x_0| \le R_0/16,\ |x_1| \le 1/96R_0,\ |x_i| \le R'/16,\ 2 \le i \le 3\}$. Ceci signifie que la solution $u(x)$ est holomorphe sur $\{x;\ |x_0|\,|x_1| \le C_0 = 1/96 \times 16,\ |x_1| \le 1/96,\ x'' \in \mathbb{C}^2\}$.

(II) *Le cas où* $0 < R_0 \le 1$. Pour tout $R' \ge 1$, $\xi_j = 1/R'$, $2 \le j \le 3$, et $\xi_0 = 1/R_0$, on a

$$\begin{aligned} H_{R_0}(\xi)/\xi_1\xi_0 &\le R_0(1+R_0)\xi_0/\xi_1 + (\xi_2+\xi_3)R_0/\xi_1 + \xi_2\xi_3/\xi_1\xi_0 \\ &\le 2/\xi_1 + 2R_0/R'\xi_1 + R_0/R'\xi_1 \le 2/\xi_1 + 3R_0/R'\xi_1 \le 5/\xi_1. \end{aligned}$$

Choisissons $\xi_1 \geq 10$, $\xi_0 = 1/R_0$, $\xi_2 = \xi_3 = 1/R'$; alors $H_{R_0}(\xi)/\xi_1\xi_0 \leq 1/2$. D'après la Proposition 1.1, où x_0, x_1 sont remplacés par x_1, x_0, la solution $u(x)$ est holomorphe sur $\{x;\ \sum_{i=0}^{3} \xi_i|x_i| \leq 1/4\}$, donc sur $\{x;\ |x_i| \leq 1/16\xi_i,\ 0 \leq i \leq 3\}$.

Pour tout $R' \geq 1$ et tout $R_0\,(0 < R_0 \leq 1)$ indépendant de R', $u(x)$ est holomorphe sur $\{x;\ |x_0| \leq R_0/16,\ |x_1| \leq 1/160,\ |x_i| \leq R'/16,\ 2 \leq i \leq 3\}$ et donc sur $\{x;\ |x_0| \leq R_0/16,\ |x_1| \leq 1/160,\ x'' \in \mathbb{C}^2\}$.

D'abord, nous allons prolonger analytiquement le long de l'axe réel non négatif $\{x_1 = t;\ 0 \leq t < \infty\}$ dans le plan $\{x_1 \in \mathbb{C}\}$.

On considère le problème de Goursat (2.8) pour $x_0 = 0$, $x_1 = x_1^{(1)} = 1/160$, avec les données $v(x), u(0, x') = 0$ et $D_0 u(x_0, x_1^{(1)}, x''), x_1^{(1)} = 1/160$. On note que $D_0 u(x_0, x_1^{(1)}, x'')$ est holomorphe sur $\{x;\ |x_0| \leq R_0/16,\ x'' \in \mathbb{C}^2\}$. Comme on vient de le voir, la solution de ce problème de Goursat est holomorphe sur $\{x;\ |x_0| \leq R_0/16^2,\ |x_1 - x_1^{(1)}| \leq 1/160,\ x'' \in \mathbb{C}^2\}$. En répétant ce procédé, on voit que la solution du problème de Goursat (2.8) et (2.9) est holomorphe sur $\{x;\ |x_0| \leq R_0/16^n,\ (n-1)/160 \leq x_1 \leq n/160,\ n \geq 1,\ x'' \in \mathbb{C}^2\}$.

De même, la solution $u(x)$ peut se prolonger analytiquement sur $\{x;\ |x_0| \leq R_0/16^n, x_1 = e^{i\theta}t, (n-1)/160 \leq t \leq n/160,\ n \geq 1,\ 0 \leq \theta < 2\pi,\ x'' \in \mathbb{C}^2\}$. Donc $u(x)$ est holomorphe sur $\{x;\ |x_0| \leq R_0/16^n,\ (n-1)/160 \leq |x_1| \leq n/160,\ n \geq 1,\ x'' \in \mathbb{C}^2\}$. Il en résulte que la solution $u(x)$ du problème (2.8), (2.9) est holomorphe sur $\{x;\ |x_0| \leq d b^{a|x_1|},\ |x_0| \leq r_0, x'' \in \mathbb{C}^2\}$, où $a = 160$, $b = 1/16$, $d = 1/16$, $r_0 = 1/16$ sont des constantes ne dépendant que de $\mathcal{G}$. Des cas (I) et (II), nous obtenons la Proposition 2.2(ii) et la Note 2.1.

Pour expliciter le domaine d'existence de la solution, nous rappelons quelques définitions et résultats sur des domaines étalés et des revêtements ([GF], [M]).

Définition 2.1. Soient $\widetilde{X}$ un espace topologique séparé, connexe, et p une application, localement homéomorphe, de $\widetilde{X}$ dans $\mathbb{C}^n$. On dit que $(\widetilde{X}, p)$ est un *domaine étalé* (au-dessus de $\mathbb{C}^n$). Choisissons un point $\widetilde{x}_0$ de $\widetilde{X}$. Soit $x_0 = p(\widetilde{x}_0) \in \mathbb{C}^n$. Ce point sera nommé *point de base* et le domaine étalé sera alors noté $\mathcal{E} = (\widetilde{X}, p, \widetilde{x}_0)$.

Définition 2.2. Soient $X, \widetilde{X}$ des espaces topologiques séparés, connexes et localement connexes par arcs, et $p : \widetilde{X} \to X$ une application continue ayant les propriétés suivantes : Pour tout $x \in X$, il existe un voisinage U de x ouvert et connexe par arcs tel que p est un homéomorphisme de toute composante connexe par arcs de $p^{-1}(U)$ sur U. On dit que $(\widetilde{X}, p)$ est un *revêtement* de X et que p est la *projection.* Soit $x_0 \in X$ un point fixé et $(\widetilde{X}, p, \widetilde{x}_0)$ est un revêtement avec un point de base $\widetilde{x}_0$, $p(\widetilde{x}_0) = x_0$.

Un revêtement d'un domaine de $\mathbb{C}^n$ est donc un domaine étalé (au-dessus de $\mathbb{C}^n$).

Lemme 2.1. *Soient $(\widetilde{X}, p, \widetilde{x}_0)$ un revêtement de X, $p(\widetilde{x}_0) = x_0$. Alors p induit p_* un homomorphisme injectif du groupe fondamental $\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ dans $\pi(X, x_0)$.*

Pour tout chemin α d'origine x dans X, il existe un unique chemin $\widetilde{\alpha}$ d'origine $\widetilde{x}$ dans $\widetilde{X}$ tel que $p(\widetilde{\alpha}) = \alpha, p(\widetilde{x}) = x$; $\widetilde{\alpha}$ est dit un relèvement de α.

Soit Y un espace topologique connexe et localement connexe par arcs, et soit $y_0 \in Y$. Étant donnée une application continue $f : Y \to X$, $f(y_0) = x_0$, il existe un relèvement $\widetilde{f} : Y \to \widetilde{X}$, $\widetilde{f}(y_0) = \widetilde{x}_0$, c'est-à-dire, $p \circ \widetilde{f} = f$, si et seulement si $f_*\pi(Y, y_0) \subset p_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$, où f_* est l'application induite par f.

Lemme 2.2. *Soient X un espace topologique séparé connexe, localement connexe par arcs, ayant un revêtement universel $(\mathcal{R}(X), p, \widehat{x}_0)$, $p(\widehat{x}_0) = x_0$ et G un sous-groupe de $\pi(X, x_0)$. Il existe alors un revêtement $(\widetilde{X}, r, \widetilde{x}_0)$ de X tel que $r_*\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) = G$ et $r(\widetilde{x}_0) = x_0$.*

Soient $\mathcal{E}_j = (\widetilde{X}_j, p_j, \widetilde{x}_j)$, $j = 1, 2$, des domaines étalés. On dit que $\mathcal{E}_1$ est *contenu* dans $\mathcal{E}_2$ et on écrit $\mathcal{E}_1 < \mathcal{E}_2$ s'il existe une application continue $\varphi : \widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}_2$ telle que $p_1 = p_2 \circ \varphi$ et $\varphi(\widetilde{x}_1) = \widetilde{x}_2$. Si $\mathcal{E}_1 < \mathcal{E}_2$ et $\mathcal{E}_2 < \mathcal{E}_1$, on écrit $\mathcal{E}_1 \simeq \mathcal{E}_2$.

Lemme 2.3. *Soient X_1, X_2 des domaines dans $\mathbb{C}^n$ et $x_0 \in X_1 \subset X_2$. Alors $(\mathcal{R}(X_1), p_1, \widetilde{x}_1) < (\mathcal{R}(X_2), p_2, \widetilde{x}_2)$, $p_j(\widetilde{x}_j) = x_0$, où p_j est la projection naturelle de $\mathcal{R}(X_j)$ sur X_j, $j = 0, 1$.*

Preuve. Soit i l'injection $X_1 \to X_2$. D'après le Lemme 2.1, il existe un relèvement $\widetilde{i}$ de $i \circ p_1$ tel que $\widetilde{i} : \mathcal{R}(X_1) \to \mathcal{R}(X_2)$ et $i \circ p_1 = p_2 \circ \widetilde{i}$.

Soient des domaines étalés $\mathcal{E}_\iota = (\widetilde{X}_\iota, p_\iota, \widetilde{x}_\iota)$, $p_\iota(\widetilde{x}_\iota) = x_0 \in \mathbb{C}^n$, $\iota \in I$. D'après [GF, Chap. II.7], on a :

Lemme 2.4. *Il existe un domaine $\mathcal{E} = (\widetilde{X}, p, x_0)$ tel que pour tout $\iota \in I$:*

1. $\mathcal{E}_\iota < \mathcal{E}$,
2. *si $\mathcal{E}' = (\widetilde{X}', p', \widetilde{x}'_0)$, $p'(\widetilde{x}'_0) = x_0$, est un domaine étalé et $\mathcal{E}_\iota < \mathcal{E}'$ pour tout $\iota \in I$, on a $\mathcal{E} < \mathcal{E}'$, c'est-à-dire, $\mathcal{E}$ est le plus petit domaine étalé contenant tous les domaines étalés $\mathcal{E}_\iota$, $\iota \in I$.*

On écrit $\mathcal{E} = \bigcup_{\iota \in I} \mathcal{E}_\iota$. On a alors $\widetilde{X} = \bigcup_{\iota \in I} \varphi_\iota(\widetilde{X}_\iota)$, où φ_ι est l'application canonique : $\varphi_\iota : \widetilde{X}_\iota \to \widetilde{X}$ pour $\iota \in I$.

Pour $1 \leq j \leq 2$ soient $\mathcal{E}_j = (\widetilde{X}_j, p_j, \widetilde{x}_j)$, $p_j(\widetilde{x}_j) = x_0$, un domaine étalé au-dessus de $\mathbb{C}^n$ et f_j une fonction holomorphe sur $\mathcal{E}_j$. Supposons qu'il existe $\mathcal{E}_0 = (\widetilde{X}_0, p_0, \widetilde{x}_0)$, $p_0(\widetilde{x}_0) = x_0$, tel que $\mathcal{E}_0 < \mathcal{E}_j$, $1 \leq j \leq 2$, et $f_1|\widetilde{X}_0 = f_2|\widetilde{X}_0$, où $f_j|\widetilde{X}_0$ est la restriction de f_j sur $\widetilde{X}_0$. Il existe alors une unique fonction holomorphe $\widetilde{f}$ sur $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$ telle que $\widetilde{f}|\widetilde{X}_j = f_j$, $1 \leq j \leq 2$ (voir [GF]).

Nous pouvons démontrer :

Lemme 2.5. *Soient* $\mathcal{E}_\iota = (\widetilde{X}_\iota, p_\iota, \widetilde{x}_\iota)$, $p_\iota(\widetilde{x}_\iota) = x_0$, $\iota \in I$, *une famille des domaines étalés,* $\bigcup_{\iota\in I}\mathcal{E}_\iota = \mathcal{E} = (\widetilde{X}, p, \widetilde{x}_0)$, $p(\widetilde{x}_0) = x_0$, *le plus petit domaine étalé contenant tous* $\mathcal{E}_\iota$, $\iota \in I$, *et* φ_ι *l'application canonique de* $\widetilde{X}_\iota$ *dans* $\widetilde{X}$. *On a alors* $\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) = \langle \varphi_{\iota *}\pi(\widetilde{X}_\iota, \widetilde{x}_\iota), \iota \in I\rangle$, *où* $\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ *est le groupe fondamental de* $(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ *et, étant donnés des sous-groupes* H_ι, $\iota \in I$, *d'un groupe* H, *nous notons* $\langle H_\iota,\, \iota \in I\rangle$ *le plus petit sous-groupe de* H *contenant tous les* H_ι, $\iota \in I$.

En particulier, soient pour tout $\iota \in I, (\widetilde{X}_\iota, p_\iota, \widetilde{x}_\iota) = (\mathcal{R}(X_\iota), p_\iota, \widetilde{x}_\iota)$, *où* $p_\iota(\widetilde{x}_\iota) = x_0$, *et* X_ι *est un domaine de* $\mathbb{C}^n$. *Alors* $(\widetilde{X}, p, \widetilde{x}_0) = \bigcup_{\iota\in I}(\mathcal{R}(X_\iota), p_\iota, \widetilde{x}_\iota)$, *où* $p(\widetilde{x}_0) = x_0$, *est simplement connexe.*

Preuve. Notons $G = \langle \varphi_{\iota *}\pi(\widetilde{X}_\iota, \widetilde{x}_\iota), \iota \in I\rangle \subset \pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$. D'après le Lemme 2.2, il existe un revêtement $(\widetilde{X}', r, \widetilde{x}'_0)$, $r(\widetilde{x}'_0) = \widetilde{x}_0$, de $\widetilde{X}$ tel que $r_*\pi(\widetilde{X}', \widetilde{x}') = G$. $\mathcal{E}' = (\widetilde{X}', pr, \widetilde{x}'_0)$ est un domaine étalé et $\mathcal{E}' < \mathcal{E}$. D'après le Lemme 2.1, il existe une application continue $\psi_\iota : \widetilde{X}_\iota \to \widetilde{X}'$ telle que $r\psi_\iota = \varphi_\iota$, donc $pr\psi_\iota = p\varphi_\iota = p_\iota$, $\iota \in I$. On a alors $\mathcal{E}_\iota < \mathcal{E}' < \mathcal{E}$, $\iota \in I$, et donc $\mathcal{E}' \simeq \mathcal{E}$. Cela implique que $\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) = G$. Le lemme est démontré.

Nous revenons au problème de Goursat.

Soient Δ la réunion de $\{(x_0, x_1) \in \mathbb{C}^2;\ |x_0|\,|x_1| \le C_0,\ |x_1| \le r_1\}$ et $\{(x_0, x_1) \in \mathbb{C}^2;\ |x_0| \le db^{a|x_1|},\ |x_0| \le r_0\}$, avec des constantes C_0 $(0 < C_0 < 1)$, a (> 1), b $(0 < b < 1)$, d $(0 < d < 1)$ et r_0, r_1 $(0 < r_0, r_1 < 1)$ ne dépendant que de $\mathcal{G}$, le domaine donné dans la Proposition 2.2(ii), et

$$\Delta_0 = \mathbb{C}^2 \setminus [K \cup \{x_0 = 0, 1\}], \qquad \Delta_1 = \mathbb{C}^2 \setminus [K \cup \{x_0 = 1\} \cup \{e^{x_1} = 1\}], \qquad \text{où}$$
$$K = \{(x_0, x_1);\ (x_0 - 1)e^{x_1} = x_0\}.$$

Pour $i = 0, 1$, p_i est la projection naturelle de $\mathcal{R}(\Delta_i)$ dans $\mathbb{C}^2$.

Soient $\mathcal{R}(\Delta_i) \ni \widetilde{x}^{(i)}$, $p_0(\widetilde{x}^{(0)}) = (x_0^{(0)}, 0)$, $p_1(\widetilde{x}^{(1)}) = (0, x_1^{(1)})$, $|x_0^{(0)}|, |x_1^{(1)}|$ $(\ne 0)$ suffisamment petit, $S_0 = \{x_1 = 0\}, S_1 = \{x_0 = 0\}$ et pour $i = 0, 1$, $\widetilde{S}_i$ la composante connexe de $p_i^{-1}(S_i)$ contenant $\widetilde{x}^{(i)}$.

On note $\widetilde{L}_0 = p_0^{-1}(\{e^{x_1} = 1\}) \setminus \widetilde{S}_0$ et $\widetilde{L}_1 = p_1^{-1}(S_1) \setminus \widetilde{S}_1$.

Soient pour $i = 0, 1$, $\widetilde{p}_i$ la projection naturelle de $\mathcal{R}[\mathcal{R}(\Delta_i) \setminus \widetilde{L}_i]$ sur $\mathcal{R}(\Delta_i) \setminus \widetilde{L}_i$ et $\widetilde{p}_i(\widehat{x}^{(i)}) = \widetilde{x}^{(i)}$, $\widehat{x}^{(i)} \in \mathcal{R}[\mathcal{R}(\Delta_i) \setminus \widetilde{L}_i]$.

On note $x_* = (x_0^{(0)}, x_1^{(1)})$, $|x_0^{(0)}|, |x_1^{(1)}|$ $(\ne 0)$ suffisamment petit, pour $i = 0, 1$, $\widetilde{x}_*^{(i)} \in \mathcal{R}(\Delta_i) \setminus \widetilde{L}_i$, près de $\widetilde{x}^{(i)}$, $p_i(\widetilde{x}_*^{(i)}) = x_*$ et $\widehat{x}_*^{(i)} \in \mathcal{R}[\mathcal{R}(\Delta_i) \setminus \widetilde{L}_i]$, $\widetilde{p}_i(\widehat{x}_*^{(i)}) = \widetilde{x}_*^{(i)}$.

Le plus petit domaine étalé $(\Delta, \mathrm{id}, x_*) \cup \bigcup_{i=0}^{1}(\mathcal{R}[\mathcal{R}(\Delta_i) \setminus \widetilde{L}_i], \widetilde{p}_i, \widehat{x}_*^{(i)})$, id étant l'application identique, contenant $(\Delta, \mathrm{id}, x_*)$ et $(\mathcal{R}[\mathcal{R}(\Delta_i) \setminus \widetilde{L}_i], \widetilde{p}_i, \widehat{x}_*^{(i)})$, $i = 0, 1$, est simplement connexe.

Soient p la projection naturelle de $\mathcal{R}(\mathbb{C}^2 \setminus [K \cup \{x_0 = 0\} \cup \{x_0 = 1\} \cup \{e^{x_1} = 1\}])$ dans $\mathbb{C}^2$, et $p(\widetilde{x}_*) = x_*$, où $\widetilde{x}_* \in \mathcal{R}(\mathbb{C}^2 \setminus [K \cup \{x_0 = 0\} \cup \{x_0 = 1\} \cup \{e^{x_1} = 1\}])$.

On a alors $(\mathcal{R}(\mathbb{C}^2 \setminus [K \cup \{x_0 = 0\} \cup \{x_0 = 1\} \cup \{e^{x_1} = 1\}]), p, \widetilde{x}_*) < (\Delta, \mathrm{id}, x_*) \cup \bigcup_{i=0}^{1} (\mathcal{R}[\mathcal{R}(\Delta_i) \setminus \widetilde{L}_i], \widetilde{p}_i, \widehat{x}_*^{(i)})$.

La proposition suivante est principale dans le Chapitre 2.

Proposition 2.3. *Considérons le problème de Goursat* (2.8) *et* (2.9)*, où les* $v(x)$*,* $w_{0,0}(x_0, x'')$*,* $w_{0,1}(x')$ *sont holomorphes sur* $\mathbb{C}^4$*.*

La solution $u(x)$ *peut se prolonger alors analytiquement sur*

$$\Big[(\Delta, \mathrm{id}, x_*) \cup \bigcup_{i=0}^{1} (\mathcal{R}[\mathcal{R}(\Delta_i) \setminus \widetilde{L}_i], \widetilde{p}_i, \widehat{x}_*^{(i)})\Big] \times \mathbb{C}^2.$$

Plus simplement, cette solution $u(x)$ *est holomorphe au voisinage d'un point* $(x_0^{(0)}, x_1^{(1)}, 0, 0)$*,* $|x_0^{(0)}|, |x_1^{(1)}|$ $(\neq 0)$ *suffisamment petit, et se prolonge analytiquement sur* $(\mathcal{R}(\mathbb{C}^2 \setminus [K \cup \{x_0 = 0\} \cup \{x_0 = 1\} \cup \{e^{x_1} = 1\}]), p, \widetilde{x}_*) \times \mathbb{C}^2$*. En effet, on a*

$$\begin{aligned}\big(\mathcal{R}(\mathbb{C}^2 \setminus [K \cup \{x_0 = 0\} \cup \{x_0 = 1\} \cup \{e^{x_1} = 1\}]), p, \widetilde{x}_*\big) \times \mathbb{C}^2 \\ < \bigcup_{i=0}^{1} (\mathcal{R}[\mathcal{R}(\Delta_i) \setminus \widetilde{L}_i], \widetilde{p}_i, \widehat{x}_*^{(i)}) \times \mathbb{C}^2.\end{aligned}$$

Exemple 2.1. Considérons le problème de Goursat $\mathcal{G}u(x) = 0$ avec $u(x_0, 0, x'') = x_0$, $D_1 u(0, x') = 0$. La solution $u(x)$ est

$$u(x) = \frac{1}{e^{-x_1} - 1} \log\{1 + x_0(e^{-x_1} - 1)\}.$$

(Aussi voir la Proposition 2.5.)

Pour démontrer cette proposition, nous préparons la Proposition 2.4 et quelques lemmes.

D'abord, nous faisons le changement de variables

$$X_0 = \frac{x_0}{x_0 - 1}, \quad X_1 = e^{x_1}; \quad x_0 = \frac{X_0}{X_0 - 1}, \quad x_1 = \log X_1, \tag{2.10}$$

et écrivons

$$\begin{aligned} \widehat{v}(X_0, X_1, x'') &= v\Big(\frac{X_0}{X_0 - 1}, \log X_1, x''\Big), \\ \widehat{u}(X_0, X_1, x'') &= u\Big(\frac{X_0}{X_0 - 1}, \log X_1, x''\Big). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Le problème (2.8) et (2.9) se transforme en le problème

$$\begin{aligned}\Big[X_0 D_{X_0} + X_1 D_{X_1} - (D_2 + D_3 + 1)\frac{X_0}{X_0 - 1}\Big](-1)(X_0 - 1)^2 D_{X_0} \widehat{u} \\ = D_2 D_3 \widehat{u} + \widehat{v},\end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\widehat{u}(0, X_1, x'') = D_{X_0}\widehat{u}(X_0, 1, x'') = 0. \tag{2.13}$$

Ensuite nous faisons le changement de variables

$$z_0 = X_0/X_1, \quad z_1 = X_1; \quad X_0 = z_0 z_1, \quad X_1 = z_1, \tag{2.14}$$

et écrivons

$$\begin{aligned} U(z_0, z_1, x'') &= \widehat{u}(z_0 z_1, z_1, x'') = u\Big(\frac{z_0 z_1}{z_0 z_1 - 1}, \log z_1, x''\Big), \\ V(z_0, z_1, x'') &= \widehat{v}(z_0 z_1, z_1, x'') = v\Big(\frac{z_0 z_1}{z_0 z_1 - 1}, \log z_1, x''\Big), \\ u(x) &= \widehat{u}\Big(\frac{x_0}{x_0 - 1}, e^{x_1}, x''\Big) = U\Big(\frac{x_0}{(x_0 - 1)e^{x_1}}, e^{x_1}, x''\Big). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Le problème (2.12) et (2.13), et donc le problème (2.8) et (2.9), se transforme en le problème

$$\begin{aligned} D_{z_0}D_{z_1}U + \Big(\frac{2z_0}{z_0 z_1 - 1} - \frac{1}{z_1}\Big)D_{z_0}U - \frac{z_0}{z_0 z_1 - 1}(D_2 + D_3 + 1)D_{z_0}U \\ = -\frac{1}{(z_0 z_1 - 1)^2}D_2 D_3 U - \frac{1}{(z_0 z_1 - 1)^2}V, \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$U(0, z_1, x'') = D_{z_0}U(z_0, 1, x'') = 0. \tag{2.17}$$

Soient

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \{(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2;\ z_0 z_1 \neq 1,\ z_0 \neq 0, 1,\ z_1 \neq 0\}, \\ \Omega_1 &= \{(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2;\ z_0 z_1 \neq 1,\ z_0 \neq 1,\ z_1 \neq 0, 1\}. \end{aligned}$$

Pour $i = 0, 1$, q_i est la projection naturelle de $\mathcal{R}(\Omega_i)$ dans $\mathbb{C}^2$. Soient $\mathcal{R}(\Omega_i) \ni \widetilde{z}^{(i)}$ un point de base et $q_0(\widetilde{z}^{(0)}) = (z_0^{(0)}, 1)$, $q_1(\widetilde{z}^{(1)}) = (0, z_1^{(1)})$, $|z_0^{(0)}|, |z_1^{(1)} - 1|$ $(\neq 0)$ suffisamment petit. Soient $B_0 = \{(z_0, z_1);\ z_0 \neq 0, 1,\ z_1 = 1\}$, $B_1 = \{(z_0, z_1);\ z_0 = 0,\ z_1 \neq 0, 1\}$ et pour $i = 0, 1$, $\widetilde{B}_i$ la composante connexe de $q_i^{-1}(B_i)$ contenant $\widetilde{z}^{(i)}$, et $\widetilde{N}_i = q_i^{-1}(B_i) \setminus \widetilde{B}_i$.

Pour $i = 0, 1$, $\widetilde{q}_i$ est la projection naturelle de $\mathcal{R}[\mathcal{R}(\Omega_i) \setminus \widetilde{N}_i]$ sur $\mathcal{R}(\Omega_i) \setminus \widetilde{N}_i$, et $\widetilde{q}_i(\widehat{z}^{(i)}) = \widetilde{z}^{(i)}$, où $\widehat{z}^{(i)} \in \mathcal{R}[\mathcal{R}(\Omega_i) \setminus \widetilde{N}_i]$.

On note $z_* = (z_0^{(0)}, z_1^{(1)})$, $|z_0^{(0)}|, |z_1^{(1)} - 1|$ $(\neq 0)$ suffisamment petit, pour $i = 0, 1, \widetilde{z}_*^{(i)} \in \mathcal{R}(\Omega_i) \setminus \widetilde{N}_i$, près de $\widetilde{z}^{(i)}, q_i(\widetilde{z}_*^{(i)}) = z_*$ et $\widehat{z}_*^{(i)} \in \mathcal{R}[\mathcal{R}(\Omega_i) \setminus \widetilde{N}_i]$, $\widetilde{q}_i(\widehat{z}_*^{(i)}) = \widetilde{z}_*^{(i)}$.

Le plus petit domaine étalé $\bigcup_{i=0}^{1}(\mathcal{R}[\mathcal{R}(\Omega_i) \setminus \widetilde{N}_i], \widetilde{q}_i, \widehat{z}_*^{(i)})$ contenant $(\mathcal{R}[\mathcal{R}(\Omega_0) \setminus \widetilde{N}_0], \widetilde{q}_0, \widehat{z}_*^{(0)})$ et $(\mathcal{R}[\mathcal{R}(\Omega_1) \setminus \widetilde{N}_1], \widetilde{q}_1, \widehat{z}_*^{(1)})$ est simplement connexe.

Enfin, écrivons $\Omega_* = \{(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2;\ z_0 z_1 \neq 1,\ z_0 \neq 0, 1,\ z_1 \neq 0, 1\}$. On note q la projection naturelle de $\mathcal{R}(\Omega_*)$ sur Ω_* et $q(\widetilde{z}_*) = z_*$, où $\widetilde{z}_* \in \mathcal{R}(\Omega_*)$. On a $\big(\mathcal{R}(\Omega_*), q, \widetilde{z}_*\big) < \bigcup_{i=0}^{1}(\mathcal{R}[\mathcal{R}(\Omega_i) \setminus \widetilde{N}_i], \widetilde{q}_i, \widehat{z}_*^{(i)})$.

Nous allons prouver:

Proposition 2.4. *Le problème de Goursat* (2.16) *et* (2.17) *possède une unique solution holomorphe sur le plus petit domaine étalé* $\bigcup_{i=0}^{1}(\mathcal{R}[\mathcal{R}(\Omega_i)\setminus\widetilde{N}_i],\widetilde{q}_i,\widehat{z}_*^{(i)})$ $\times\,\mathbb{C}^2$. *Plus simplement, la solution* $U(z_0,z_1,x'')$ *est holomorphe au voisinage d'un point* $(z_0^{(0)},z_1^{(1)},0,0)$, $|z_0^{(0)}|,|z_1^{(1)}-1|$ $(\neq 0)$ *suffisamment petit, et peut se prolonger analytiquement sur* $\big(\mathcal{R}(\Omega_*),q,\widetilde{z}_*\big)\times\mathbb{C}^2$. *En effet, on a*

$$(\mathcal{R}(\Omega_*),q,\widetilde{z}_*)\times\mathbb{C}^2<\bigcup_{i=0}^{1}(\mathcal{R}[\mathcal{R}(\Omega_i)\setminus\widetilde{N}_i],\widetilde{q}_i,\widehat{z}_*^{(i)})\times\mathbb{C}^2.$$

Exemple 2.2. Considérons le problème

$$D_{z_0}D_{z_1}U+\left(\frac{z_0}{z_0z_1-1}-\frac{1}{z_1}\right)D_{z_0}U=0,\ U(0,z_1)=0,\ D_{z_0}U(z_0,1)=-\frac{1}{(1-z_0)^2}.$$

La solution est $U(z_0,z_1)=\frac{z_1}{1-z_1}\log\big(\frac{1-z_0}{1-z_0z_1}\big)$.

De la Proposition 2.4, nous obtenons la Proposition 2.3. En effet, les surfaces $\{z_0z_1=1\},\{z_0=0\},\{z_0=1\},\{z_0=\infty\}$ et $\{z_1=1\}$ correspondent aux surfaces $\{x_0=\infty\},\{x_0=0\},\{x_0=e^{x_1}(x_0-1)\},\{x_0=1\}$ et $\{e^{x_1}=1\}$. Ceci démontre la Proposition 2.3.

Pour des prolongements analytiques des solutions des problèmes (2.8), (2.9) et (2.16), (2.17), nous préparons quelques lemmes sur les classes d'homotopie des courbes dans un domaine $\mathcal{D}$ du plan $\mathbb{C}$.

Dans la suite, nous supposons toujours que des courbes et des chemins sont réguliers par morceaux ; une courbe $\ell=\{z=z(\tau)\in\mathbb{C};\,0\le\tau\le a\}$ est dit régulier par morceaux, si $[0,a]$ peut être subdivisé en un nombre fini d'intervalles $0=\tau_1<\tau_2<\cdots<\tau_k=a$ tels que $z(\tau)$ est continue sur $[0,a]$, C^1 et $z'(\tau)\neq 0$ dans chaque intervalle $[\tau_i,\tau_{i+1}]$.

Nous écrivons $\ell[t]=\{z=z(\tau);\,0\le\tau\le t\}$, pour $s\le t$, $\ell[s,t]=\{z=z(\tau);\,s\le\tau\le t\}$; pour $t\le s$, $\ell[s,t]=\ell[t,s]^{-1}=\{z=z(\tau);\,t\le\tau\le s\}$ et en particulier $\ell[0,t]=\ell[t]$.

Nous disons qu'une courbe $\{z=z(\tau);\,0\le\tau\le a\}$ est une *courbe ouverte de Jordan* si $z(\tau_1)=z(\tau_2)$ signifie $\tau_1=\tau_2$; en particulier, une courbe $\{z=z_0\}$, c'est-à-dire, un seul point $z=z_0$ est aussi une courbe ouverte de Jordan.

Si ℓ est une courbe ouverte de Jordan et analytique par morceaux, nous disons que ℓ est une C^ω_J courbe ouverte.

Une courbe sera dite une *ligne polygonale* si elle se compose d'un nombre fini de segments.

Lemme 2.6. *Soient* $\mathcal{D}\ni 0$ *dans le plan* $\mathbb{C}$ *et* $\ell=\{z=\gamma(\tau);\,0\le\tau\le 1\}$, $\gamma(0)=0$, $\gamma(\tau)\neq 0$, $0<\tau\le 1$, *une ligne polygonale ouverte d'origine* 0 *et d'extrémité*

$z_0 = \gamma(1)$ dans $\mathcal{D}$. Pour tout $t \in [0,1]$, on peut alors joindre le point $z = \gamma(t) \in \ell$ à 0 par une C_J^ω courbe ouverte dépendant continûment de t,

$$L^t = \{z = \gamma(\tau, t);\ 0 \le \tau \le 1\}, \tag{2.18}$$

homotope à la courbe $\ell[t] = \{z = \gamma(\tau);\ 0 \le \tau \le t\}$, $L^t \simeq \ell[t]$ dans $\mathcal{D}$, où $\gamma(\tau,t)$ est une fonction continue en $(\tau,t) \in [0,1] \times [0,1]$ et de la classe C^ω par morceaux en τ et $\gamma_\tau(\tau,t) \neq 0$.

Avant la preuve de ce lemme, nous donnons quelques définitions et lemmes.

Définition 2.3. Soit $\sigma = \{z = \gamma(\tau);\ 0 \le \tau \le 1\}$ une C_J^ω courbe ouverte d'origine 0 et d'extrémité $z_0 = \gamma(1)$ dans un domaine $\mathcal{D}$ de $\mathbb{C}$. La C_J^ω *classe d'homotopie* $\{\sigma\}_J$ de σ dans $\mathcal{D}$ est l'ensemble de toutes les courbes ouvertes de Jordan homotopes à σ dans $\mathcal{D}$ d'origine 0 et d'extrémité $z_0 = \gamma(1)$, c'est-à-dire, pour toute C_J^ω courbe ouverte $\sigma_1 \in \{\sigma\}_J$, $\sigma_1 = \{z = \gamma_1(\tau);\ 0 \le \tau \le 1\}$, $\gamma_1(0) = 0$, $\gamma_1(1) = \gamma(1)$, il existe une fonction continue $\gamma(\tau,t)$ sur $[0,1] \times [0,1]$, $\gamma(0,t) = 0$, $\gamma(1,t) = z_0 = \gamma(1) = \gamma_1(1)$ pour tout $t \in [0,1]$, telle que pour tout $t \in [0,1]$, $\{z = \gamma(\tau,t);\ \tau \in [0,1]\}$ est une C_J^ω courbe ouverte d'origine 0 et d'extrémité $z_0 = \gamma(1)$; on dit que σ_1 est C_J^ω *homotope* à σ.

En particulier, on peut prendre une ligne polygonale ouverte de Jordan dans $\{\sigma\}_J$.

Nous rappelons quelques notions concernant les ensembles partiellement ordonnés.

Définition 2.4. Soit $\mathcal{F}$ un ensemble de N éléments avec un ordre partiel $<$. Si $\alpha_1 < \cdots < \alpha_q$, $\alpha_i \in \mathcal{F}$, $\{\alpha_1, \dots, \alpha_q\}$ est appelé *chaîne* et i est le *c-degré* de α_i dans cette chaîne. En général, des chaînes contenant α ne sont pas uniques.

Le maximum des c-degrés de α dans des chaînes contenant α est appelé *degré* de α dans $\mathcal{F}$, $1 \le \text{degré}(\alpha) \le N$. Si pour $\alpha \in \mathcal{F}$ il n'existe aucun élément $x \in \mathcal{F}$ tel que $x < \alpha$, le degré de α dans $\mathcal{F}$ est égal à 1. Si $\alpha_{1,1} < \alpha_{1,2} < \cdots < \alpha_{1,q} < \alpha$ et $\alpha_{2,1} < \alpha_{2,2} < \cdots < \alpha_{2,r} < \alpha$, on a $\text{degré}(\alpha) \ge \max\{q, r\} + 1$.

Si pour $\alpha \in \mathcal{F}$, il n'existe aucun élément $x \in \mathcal{F}$ tel que $x > \alpha$, α est appelé *élément maximal* de $\mathcal{F}$.

Lemme 2.7. (i) *Soient $C(c,r) = \{z;\ |z-c| < r\}$, $a, b, d \in \partial C(c,r)$, $a, b \neq d$, et σ une C_J^ω courbe ouverte d'origine a et d'extrémité b dans $\overline{C(c,r)}$ et $\sigma \cap \partial C(c,r) = \{a,b\}$. Soit D le domaine limité par σ et $(\!(ab)\!)$ dans $C(c,r)$, où $(\!(ab)\!)$ est un arc $\widehat{ab}$ orienté de $\partial C(c,r)$ ne contenant pas d. Alors σ est C_J^ω homotope à $(\!(ab)\!)$ dans $\overline{D}$.*

(ii) *Soient* $[a_1, a_2]$ *un segment orienté et* m *une* C^ω_J *courbe ouverte d'origine* a_1 *et d'extrémité* a_2, $[a_1, a_2] \cap m = \{a_1, a_2\}$. *Soit* D *le domaine limité par* $[a_1, a_2]$ *et* m. *Pour tout* $z \in [a_1, a_2]$, *il existe* m^z *une* C^ω_J *courbe ouverte d'origine* a_1 *et d'extrémité* z *dans* $\overline{D}$ *dépendant continûment de* z *telle que* $m^{a_2} = m$ *et* $m^{a_1} = \{a_1\}$. *De plus,* m^z *est* C^ω_J *homotope à* $m \circ [a_2, z]$ *dans* $\overline{D}$.

Preuve. (i) Soit $w = f(z)$ une représentation conforme de D sur $C_w(c, r) = \{w;\ |w - c| < r\}$, où $f(a) = a$, $f(b) = b$ et $f(\sigma) = (\!(ab)\!)_d$ est l'arc $\overset{\frown}{ab}$ de $\partial C_w(c, r)$ contenant $d \in \partial C_w(c, r)$.

On déforme continûment $(\!(ab)\!)_d$ en l'arc $(\!(ab)\!)$ ne contenant pas d par des arcs circulaires joignant a, b dans $\overline{C(c, r)}$. Par l'application inverse $z = f^{-1}(w)$, on voit alors que σ est C^ω_J homotope à $(\!(ab)\!)$ dans $\overline{D}$. Cela démontre (i).

(ii) Soient $w = f(\zeta)$ une représentation conforme de D sur un demi-disque $\widetilde{D}$ de diamètre $[a_1, a_2]$ tel que $f(m)$ est le demi-cercle $\overset{\frown}{a_1 a_2}$ de diamètre $[a_1, a_2]$ dans $\overline{\widetilde{D}}$. Soient $\widetilde{z} = f(z)$ et $\overset{\frown}{a_1\widetilde{z}}$ le demi-cercle de diamètre $[a_1, \widetilde{z}]$ dans $\overline{\widetilde{D}}$. En posant $m^z = f^{-1}(\overset{\frown}{a_1\widetilde{z}})$, on obtient (ii).

Lemme 2.8. *Soient un disque ouvert* $C(c, r)$, $d \in \partial C(c, r)$ *et un disque ouvert* C_1 *contenu dans* $C(c, r)$ *tel que* $\overline{C(c, r)} \cap \overline{C_1} = \{d\}$. *Soient* σ *une* C^ω_J *courbe ouverte dans* $\overline{C(c, r)}$ *d'origine* a *et d'extrémité* b, $a, b \in \partial C(c, r), a, b \neq d$, *telle que* $\sigma \cap \partial C(c, r) = \{a, b\}$, $(\!(ab)\!)$ *l'arc de* $\partial C(c, r)$ *ne contenant pas* d *et* D *le domaine limité par* $(\!(ab)\!)$ *et* σ. *Alors si des parties de* σ *passent par* C_1, *en utilisant le Lemme* 2.7, *on déforme ces parties en* ∂C_1. *Ainsi on obtient une* C^ω_J *courbe ouverte* σ' *hors de* C_1 *et* C^ω_J *homotope à* σ *dans* $\overline{D}$.

Lemme 2.9. *Soient* $C(c, r) = \{z;\ |z - c| < r\}$, $d \in \partial C(c, r)$ *et pour* $a_i, b_i \in \partial C(c, r)$, $1 \leq i \leq \ell$, $a_i, b_i \neq d$, $(\!(a_i b_i)\!)$ *l'arc ne contenant pas* d, *et* σ_i, *et* $1 \leq i \leq \ell$, *une* C^ω_J *courbe ouverte d'origine* a_i *et d'extrémité* b_i *dans* $\overline{C(c, r)}$ *telle que* $\sigma_i \cap \partial C(c, r) = \{a_i, b_i\}$ *et* $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ *pour* $i \neq j$.

Les $(\!(a_i b_i)\!)$, $1 \leq i \leq \ell$, *constituent un ensemble partiellement ordonné par inclusion.*

(i) *Supposons que* $(\!(a_\ell b_\ell)\!)$ *est un seul élément maximal dans cet ensemble. Soit* D_i, $1 \leq i \leq \ell$, *le domaine limité par* σ_i *et* $(\!(a_i b_i)\!)$. *Les* D_i, $1 \leq i \leq \ell$, *constituent un ensemble partiellement ordonné par inclusion, avec le même ordre que* $(\!(a_i b_i)\!)$, *et* D_ℓ *un seul élément maximal dans cet ensemble. Soit* $q \leq l$ *le degré de* σ_ℓ *et* D_ℓ *dans ces ensembles partiellement ordonnés.*

Soient des disques ouverts C_i, $1 \leq i \leq \ell$, $C(c, r) \cup \{d\} \supset \overline{C_1} \supset C_1 \supset \cdots \supset C_{i-1} \supset \overline{C_i} \supset C_i \supset \cdots \supset \overline{C_\ell} \supset C_\ell \ni c$ *dans* $\overline{C(c, r)}$ *tels que* ∂C_i, $1 \leq i \leq \ell$, *sont tangents à* $\partial C(c, r)$ *en* d.

Soient $D_{i,j}$, $1 \leq i \leq q$, $1 \leq j \leq k_i$, les éléments de $\{D_1, \ldots, D_\ell\}$ de degré i et $\sigma_{i,j}$ les éléments de $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_\ell\}$ correspondant aux $D_{i,j}$, en particulier, $D_{q,1} = D_\ell$, $\sigma_{q,1} = \sigma_\ell$. D'abord d'après le Lemme 2.8, on déforme $\sigma_{1,j}$, $1 \leq j \leq k_1$, en $\sigma'_{1,j}$ un chemin détourné de $\sigma_{1,j}$ hors de C_1 tel que $\sigma'_{1,j}$ consiste des parties de $\sigma_{1,j}$ et des parties de ∂C_1, et $\sigma'_{1,j}$ est C^ω_J homotope à $\sigma_{1,j}$ dans $\overline{D_{1,j}}$.

Puis, de même, en continuant ce procédé, pour $\sigma_{i,j}$, $1 \leq j \leq k_i$, de degré $i \geq 2$, en utilisant le Lemme 2.8, on déforme $\sigma_{i,j}$ en $\sigma'_{i,j}$ un chemin détourné de $\sigma_{i,j}$ hors de C_i tel que $\sigma'_{i,j}$ consiste des parties de $\sigma_{i,j}$ et des parties de ∂C_i, $\sigma'_{i,j}$ est C^ω_J homotope à $\sigma_{i,j}$ dans $\overline{D}_{i,j}$ et $\sigma'_{i,j}$ ne coupe pas tout $\sigma'_{i-1,j'}, 1 \leq j' \leq k_1$. Finalement, on déforme σ_ℓ en σ'_ℓ détourné de σ_ℓ hors de C_q tel que σ'_ℓ consiste des parties de σ_ℓ et des parties de ∂C_q, σ'_ℓ est C^ω_J homotope à σ_ℓ dans $\overline{D_\ell}$ et σ'_ℓ ne coupe pas tout $\sigma'_{q-1,i}$, $1 \leq i \leq k_{q-1}$.

(ii) *Le cas général. Nous divisons σ_i, D_i, $0 \leq i \leq p$, en les groupes $\mathcal{A}^{(1)}, \ldots, \mathcal{A}^{(r)}$ telles que chaque groupe $\mathcal{A}^{(h)}, 1 \leq h \leq r$, possède un seul élément maximal.*

Le groupe $\mathcal{A}^{(h)}, 1 \leq h \leq r$, consiste des éléments $\sigma^{(h)}_{i,1}, \ldots, \sigma^{(h)}_{i,k_i}$ de degré i, $1 \leq i \leq \ell_h - 1$, et $\sigma_{\ell_h,1}$ un seul élément maximal de degré ℓ_h dans $\mathcal{A}^{(h)}$.

On applique le cas (i) *à chaque groupe $\mathcal{A}^{(h)}$. On peut alors déformer pour $1 \leq i \leq p$, σ_i en σ'_i un chemin détourné de σ_i, une C^ω_J courbe ouverte telle que σ'_i est C^ω_J homotope à σ_i dans $\overline{D_i}$, σ'_i, $1 \leq i \leq p$, est hors de C_p et $\sigma'_i \cap \sigma'_j = \emptyset, i \neq j$.*

Lemme 2.10. (i) *Soient un disque ouvert $C(c_0, r)$, $C(c_0, r) \ni c$, $\partial C(c_0, r) \ni a, d$, $a \neq d$, un segment orienté $[d, c]$, et $b \in (d, c) = [d, c] \setminus \{d, c\}$. Soit α une C^ω_J courbe ouverte d'origine a et d'extrémité b dans $C(c_0, r)$ telle que $\alpha \cap [d, c]$ consiste d'un nombre fini des points et des segments. Pour tout $z \in [b, c]$, il existe alors β^z une C^ω_J courbe ouverte d'origine a et d'extrémité z dépendant continûment de z dans $C(c_0, r) \cup \{a\}$ telle que $\beta^b = \alpha$ et β^z est homotope à $\alpha \circ [b, z]$ dans $C(c_0, r) \cup \{a\}$.*

(ii) *Soient $\mathcal{D}$ un domaine de $\mathbb{C}$ et $\alpha = \{z = \alpha(\tau); 0 \leq \tau \leq 1\}$ une C^ω_J courbe ouverte dans $\mathcal{D}$. Supposons que pour $t_1 \in (0, 1)$ fixé, $\alpha[t_1] = \{z = \alpha(\tau); 0 \leq \tau \leq t_1\}$ est C^ω_J homotope à $\beta = \{z = \beta(\tau); 0 \leq \tau \leq 1\}$ dans $\mathcal{D}$, $\beta(0) = \alpha(0)$, et $\beta(1) = \alpha(t_1)$. Il existe alors pour tout $t \in [t_1, 1]$, $\widehat{\alpha}^t = \{z = \widehat{\alpha}(\tau, t); 0 \leq \tau \leq 1\}$ une C^ω_J courbe ouverte d'origine $\alpha(0)$ et d'extrémité $\alpha(t)$ dépendant continûment de t dans $\mathcal{D}$ telle que $\widehat{\alpha}^{t_1} = \alpha[t_1]$, $\widehat{\alpha}^1 = \beta \circ \alpha[t_1, 1]$.*

Preuve. (i) Tout d'abord, si $\alpha \cap [b, c] = \{b\}$, en posant pour tout $z \in [b, c]$, $\beta^z = \alpha \circ [b, z]$, le lemme est démontré. Puis si $\alpha \cap [b, c] \supset [b, b_1]$, où b_1 est le plus loin de b dans $(b, c] = [b, c] \setminus \{b\}$, pour tout $z \in [b, b_1]$, posons $\beta^z = \alpha[a, b_1] \circ [b_1, z]$, où $\alpha[a, b_1]$ est la partie de α de a à b_1, et β^z satisfait la condition du lemme. Sinon, soit b_1 le point le plus près de b dans $(b, c] \cap \alpha$. D'après le Lemme 2.7(ii), pour tout $z \in [b, b_1]$, il existe m^z_1 une C^ω_J courbe ouverte d'origine b_1 et d'extrémité z

dépendant continûment de z dans $\overline{D}_1$ telle que $m_1^b = \alpha[b_1, b], m_1^{b_1} = \{b_1\}$, où D_1 est le domaine limité par $\alpha[b_1, b]$ et $[b, b_1]$. Pour tout $z \in [b, b_1]$, on peut définir alors $\beta^z = \alpha[a, b_1] \circ m_1^z$, satisfaisant la condition du lemme. En fait, $\alpha[a, b_1] \cap D_1 = \emptyset$ et β^z est homotope à $\alpha \circ [b, z]$ dans $C(c, r)$.

Si $\alpha[a, b_1] \cap [b_1, c] \supset [b_1, b_2]$, où b_2 est le plus loin de b_1 dans $[b_1, c]$, pour tout $z \in [b_1, b_2]$, posons $\beta^z = \alpha[a, b_2] \circ [b_2, z]$ et β^z satisfait la condition du lemme. Sinon, soit b_2 le point le plus près de b_1 dans $(b_1, c] \cap \alpha[a, b_1]$. D'après le Lemme 2.7(ii), pour tout $z \in [b_1, b_2]$, il existe m_2^z une C_J^ω courbe ouverte d'origine b_2 et d'extrémité z dépendant continûment de z dans $\overline{D}_2$ telle que $m_2^{b_1} = \alpha[b_2, b_1]$, $m_2^{b_2} = \{b_2\}$, où D_2 est le domaine limité par $\alpha[b_2, b_1]$ et $[b_1, b_2]$. On peut définir alors $\beta^z = \alpha[a, b_2] \circ m_2^z$, satisfaisant la condition du lemme. En fait, $\alpha[a, b_2] \cap D_2 = \emptyset$ et β^z est homotope à $\alpha \circ [b, z]$ dans $C(c, r)$.

Enfin, successivement, pour tout $z \in [b, b_k]$, $k \geq 1$, on peut définir β^z satisfaisant la condition du lemme. Si $b_k = c$, le lemme est démontré. Sinon, donc si $\alpha[a, b_k] \cap [b_k, c] = \{b_k\}$, pour tout $z \in [b_k, c]$ posons $\beta^z = \alpha[a, b_k] \circ [b_k, z]$, et β^z satisfait la condition du lemme. Ceci démontre (i).

(ii) Par l'hypothèse, il existe $H(u, v)$ une fonction continue dans $[0, 1] \times [0, 1]$ telle que $H(\tau, 0) = \alpha(\tau t_1)$, $0 \leq \tau \leq 1$, $H(\tau, 1) = \beta(\tau)$, $0 \leq \tau \leq 1$. Pour tout $v \in [0, 1]$, $H(0, v) = \alpha(0)$, $H(1, v) = \alpha(t_1)$, et $\{z = H(\tau, v); 0 \leq \tau \leq 1\}$ est une C_J^ω courbe ouverte dans $\mathcal{D}$. Posons pour tout $t \in [t_1, 1]$, $\widehat{\alpha}^t = \big\{z = H\big(\tau, \frac{t - t_1}{1 - t_1}\big);\ 0 \leq \tau \leq 1\big\} \circ \alpha[t_1, t]$. Ceci satisfait la condition (ii).

Preuve du Lemme 2.6. Nous écrivons

$$\Sigma = \{s \in [0, 1];\ \text{pour tout } t \leq s, \text{ le point } z = \gamma(t) \text{ est joint à } 0 \text{ par } L^t,$$
$$\text{une } C_J^\omega \text{ courbe ouverte du type (2.18) telle que } \ell[t] \simeq L^t \text{ dans } \mathcal{D}\}.$$

On a $\Sigma \ni t_0$ pour $t_0 > 0$ suffisamment petit, donc $\Sigma \neq \emptyset$.

On note que si $\Sigma \ni 1$, donc $\Sigma = [0, 1]$, le lemme est démontré.

(I) Nous démontrons que l'ensemble Σ est ouvert. Prenons $s \in \Sigma$, $0 \leq s < 1$, fixé et inscrivons un disque ouvert $C(\gamma(s), \epsilon) = \{z; |z - \gamma(s)| < \epsilon\}$ de centre $\gamma(s)$ et de rayon ϵ suffisamment petit dans $\mathcal{D}$. On peut supposer que $\ell[t_0, s]$, $\ell[s, t_1]$, $0 < t_0 < s$, $s < t_1 < 1$, sont des segments $\subset \overline{C(\gamma(s), \epsilon)}$, $\gamma(t_0), \gamma(t_1) \in \partial C(\gamma(s), \epsilon)$. On peut supposer de plus que $L^s \cap \ell[s, t_1] = \{\gamma(s)\}$ ou bien $L^s \cap \ell[t_1, s] = [\gamma(t_1), \gamma(s)]$.

(i) Si $L^s \cap \ell[s, t_1] = \{\gamma(s)\}$, pour tout $t \in [s, t_1)$, posons $L^t = L^s \circ [\gamma(s), \gamma(t)]$ et L^t satisfait la condition du Lemme 2.6. On a donc $[s, t_1) \subset \Sigma$ et Σ est ouvert.

(ii) Si $L^s \cap \ell[t_1, s] = [\gamma(t_1), \gamma(s)] = L^s[\tau_1, 1]$, $0 < \tau_1 < 1$, avec $\gamma(t_1) = \gamma(\tau_1, s)$, nous posons pour tout $t \in [s, t_1), L^t = L^s[\tau_1] \circ [\gamma(\tau_1, s), \gamma(t)]$. Alors L^t satisfait la condition du lemme. On a donc $[s, t_1) \subset \Sigma$ et Σ est ouvert.

(i) et (ii) démontrent que Σ est ouvert.

(II) Posons $t_* = \sup\{t \in [0,1];\, t \in \Sigma\}$.

Soit $C(\gamma(t_*),\epsilon) \subset \mathcal{D}$, avec $\epsilon > 0$ suffisamment petit ; il existe $t_0 \in [0,1]$ tel que $\ell[t_0, t_*]$ est un segment $\subset \overline{C(\gamma(t_*),\epsilon)}$ et $\gamma(t_0) \in \partial C(\gamma(t_*),\epsilon)$. Pour $\delta > 0$ suffisamment petit, il existe $s \in \Sigma, s \in (t_* - \delta, t_*]$, tel que $L^s = \{z = \gamma(\tau, s);\, 0 \leq \tau \leq 1)\}$ est une C^ω_J courbe ouverte du type (2.18). On a $L^s \simeq \ell[s]$ dans $\mathcal{D}$.

Soient $\gamma(t_1, s), \gamma(t_2, s), \ldots, \gamma(t_{2p-1}, s), \gamma(t_{2p}, s), \gamma(t_{2p+1}, s)$, $t_1 < t_2 \leq t_3 < \cdots < t_{2i} \leq t_{2i+1} < t_{2i+2} \leq \cdots \leq t_{2p+1}$, les points de L^s sur $\partial C(\gamma(t_*),\epsilon)$ tels que pour $0 \leq i \leq p-1$, $L^s[t_{2i+1}, t_{2i+2}] \subset C(\gamma(t_*),\epsilon) \cup \{\gamma(t_{2i+1}, s), \gamma(t_{2i+2}, s)\}$, pour $1 \leq i \leq p$, $L^s[t_{2i}, t_{2i+1}] \cap C(\gamma(t_*),\epsilon) = \emptyset$, et $\gamma(t_{2p+1}, s)$ est le dernier point de L^s sur $\partial C(\gamma(t_*),\epsilon)$, c'est-à-dire, que pour tout $\tau > t_{2p+1}$, $\gamma(\tau, s) \subset C(\gamma(t_*),\epsilon)$.

Nous choisissons, pour $0 \leq i \leq p-1$, l'arc $(\!(\gamma(t_{2i+1}, s)\gamma(t_{2i+2}, s))\!)$ du cercle $\partial C(\gamma(t_*),\epsilon)$ comme celui qui ne contient pas le point $\gamma(t_{2p+1}, s)$. Ces arcs constituent un ensemble partiellement ordonné par inclusion.

Écrivons, pour $0 \leq i \leq p-1$, $\sigma_i = L^s[t_{2i+1}, t_{2i+2}]$, $(\!(a_i b_i)\!) = (\!(\gamma(t_{2i+1}, s)\gamma(t_{2i+2}, s))\!)$ et D_i le domaine limité par σ_i et $(\!(a_i b_i)\!)$. Ces domaines aussi constituent un ensemble partiellement ordonné avec le même ordre que l'ensemble des arcs.

Soient des disques ouverts C_j, $1 \leq j \leq p$, $C(\gamma(t_*),\epsilon) \cup \{\gamma(t_{2p+1}, s)\} \supset \overline{C_1} \supset C_1 \supset \cdots \supset C_{i-1} \supset \overline{C_i} \supset C_i \supset \cdots \supset \overline{C_p} \supset C_p \ni \{\gamma(t_*)\}$ dans $\overline{C(\gamma(t_*),\epsilon)}$ tels que ∂C_i, $1 \leq i \leq p$, sont tangents à $\partial C(\gamma(t_*),\epsilon)$ en $\gamma(t_{2p+1}, s)$ et $C_p \cup \{\gamma(t_{2p+1}, s)\} \supset L^s[t_{2p+1}, 1] = \{z = \gamma(\tau, s);\, t_{2p+1} \leq \tau \leq 1\}$, et $\ell[s, t_*] \subset C_p$.

Nous notons que $L^s[t_{2p+1}, 1] \subset C(\gamma(t_*),\epsilon) \setminus \bigcup_{i=1}^p D_i$.

Appliquons le Lemme 2.9(ii).

On obtient pour $1 \leq i \leq p-1$, σ_i' une C^ω_J courbe ouverte, un chemin détourné de σ_i, telle que σ_i' est C^ω_J homotope à σ_i dans $\overline{D_i}$.

En remplaçant $\sigma_i = L^s[t_{2i+1}, t_{2i+2}]$ par σ_i', on obtient $\widehat{L}^s$ une C^ω_J courbe ouverte hors de $C_p \cup \{\gamma(t_{2p+1}, s)\}$, d'origine 0 et d'extrémité $\gamma(t_{2p+1}, s)$, détournée de $L^s[t_{2p+1}] = \{z = \gamma(\tau, s);\, 0 \leq \tau \leq t_{2p+1}\}$, et $\widehat{L}^s = \{z = \widehat{\gamma}(\tau, s);\, 0 \leq \tau \leq 1\}$, où $\widehat{\gamma}(1, s) = \gamma(t_{2p+1}, s)$. De plus, $\widehat{L}^s$ est C^ω_J homotope à $L^s[t_{2p+1}]$ dans $\bigcup_{i=1}^p \overline{D_i} \cup [\mathcal{D} \setminus C(\gamma(t_*),\epsilon)]$.

Appliquons le Lemme 2.10(ii).

En effet, on peut alors définir une fonction $H(u, v)$, continue dans $[0,1] \times [0,1]$ qui satisfait $H(\tau, 0) = \gamma(\tau t_{2p+1}, s)$, $0 \leq \tau \leq 1$, $H(\tau, 1) = \widehat{\gamma}(\tau, s)$, $0 \leq \tau \leq 1$, pour tout $0 \leq v \leq 1$, $H(0, v) = 0$, $H(1, v) = \gamma(t_{2p+1}, s)$, et $\{z = H(\tau, v);\, 0 \leq \tau \leq 1\}$ est une C^ω_J courbe ouverte d'origine 0 et d'extrémité $\gamma(t_{2p+1}, s)$.

On peut supposer que pour $t' > s$ suffisamment près de s, $L^s \cap \ell[s, t'] = \{\gamma(s)\}$ ou bien $L^s \cap \ell[s, t'] = [\gamma(t'), \gamma(s)]$.

(i) Si $L^s \cap \ell[s,t'] = \{\gamma(s)\}$, nous posons pour $s \le t \le t'$, $L^t = \{z = \gamma(\tau,t);\ 0 \le \tau \le 1\} = \bigl\{z = H\bigl(\tau, \frac{t-s}{t'-s}\bigr);\ 0 \le \tau \le 1\bigr\} \circ L^s[t_{2p+1},1] \circ \ell[s,t]$. Pour $s \le t \le t'$, L^t satisfait la condition du lemme.

(ii) Si $L^s \cap \ell[s,t'] = [\gamma(t'),\gamma(s)]$, nous posons pour $s \le t \le t'$, $L^t = \{z = \gamma(\tau,t);\ 0 \le \tau \le 1\} = \bigl\{z = H\bigl(\tau, \frac{t-s}{t'-s}\bigr);\ 0 \le \tau \le 1\bigr\} \circ L^s[t_{2p+1},\widetilde{t}] \circ \ell[t',t]$, où le paramètre $\widetilde{t}\,(t_{2p+1} < \widetilde{t} < 1)$ est déterminé par $\gamma(\widetilde{t},s) = \gamma(t')$. Pour $s \le t \le t'$, L^t satisfait la condition du lemme et $L^{t'} \cap \{C_p \cup \{\gamma(t_{2p+1},s)\} = L^{t'}[t'',1]$, où $\gamma(t'',t') = \gamma(t_{2p+1},s)$.

Donc, nous appliquons le Lemme 2.10(i), où $C(c_0,r) = C_p$, $a = \gamma(t'',t') = \gamma(t_{2p+1},s)$, $b = \gamma(t')$, $c = \gamma(t_*)$, $d = \partial C_p \cap \ell[t_0,t_*], \alpha = L^{t'}[t'',1]$, et $z = \gamma(t)$ pour $t' \le t \le t_*$.

Pour $t' \le t \le t_*$, nous désignons $\beta^{\gamma(t)}$ par $M^t = \{z = \widetilde{\gamma}(\tau,t);\ 0 \le \tau \le 1\}$. Alors M^t est une C^ω_J courbe ouverte d'origine $\gamma(t_{2p+1},s)$ et d'extrémité $\gamma(t)$, dépendant continûment de t et homotope à $L^{t'}[t'',1] \circ [\gamma(t'),\gamma(t)]$.

Définissons pour $t' \le t \le t_*$, $L^t = \widehat{L}^s \circ M^t$; alors L^t est pour tout $0 \le t \le t_*$ une C^ω_J courbe ouverte d'origine 0 et d'extrémité $\gamma(t)$, dépendant continûment de t qui est homotope à $\ell[t]$ dans $\mathcal{D}$. Ceci signifie $t_* \in \Sigma$.

Si $t_* < 1$, d'après (I), il existe $\delta > 0$ suffisamment petit tel que $t_* + \delta < 1$ et $t_* + \delta \in \Sigma$. Cela contredit la définition de t_*. Donc $t_* = 1 \in \Sigma$. Ceci démontre le Lemme 2.6.

Lemme 2.11. *Soient ℓ_1 une C^ω_J courbe ouverte d'origine* 1 *et d'extrémité ζ_1 quelconque dans $\{z_1;\ z_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$ et L_0 une C^ω_J courbe ouverte d'origine* 0 *et d'extrémité ζ_0 quelconque dans $\mathbb{C} \setminus \{1/\zeta_1, 1\}$; $L_0 = \{z_0 = \gamma(\tau);\ 0 \le \tau \le 1\}$, $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = \zeta_0$.*

Soient l'application $T : z_1 = 1/z_0$, et $T(L_0)$ l'image de L_0 par T qui est une C^ω_J courbe ouverte du point infini ∞ à $T(\zeta_0) = 1/\zeta_0$.

Pour tout $t \in [0,1]$, il existe alors une C^ω_J courbe ouverte $L_1^t \subset \mathbb{C} \setminus T(L_0[t])$ d'origine 1 *et d'extrémité ζ_1 dépendant continûment de t, et $L_1^0 = \ell_1$. Ici on a noté $L_0[t] = \{z_0 = \gamma(\tau);\ 0 \le \tau \le t\}$ et $L_1^t = \{z_1 = \gamma(\tau,t);\ 0 \le \tau \le 1\}$, $0 \le t \le 1$, où $\gamma(\tau,t)$ est une fonction continue en $(\tau,t) \in [0,1] \times [0,1]$ et de la classe C^ω par morceaux en τ et $\gamma_\tau(\tau,t) \ne 0$.*

Soit $L_1 = L_1^1$. On a donc

$$L_0 \times L_1 = \{(z_0,z_1);\ z_0 \in L_0, z_1 \in L_1\} \subset \mathbb{C}^2 \setminus [\{z_0 z_1 = 1\} \cup \{z_0 = 1\} \cup \{z_1 = 0\}].$$

Nous appelons L_1 une déformation continue de ℓ_1 par L_0.

Preuve. Écrivons $\Sigma = \{s \in [0,1]$; pour tout $t \le s$, il existe une C^ω_J courbe ouverte L_1^t d'origine 1 et d'extrémité ζ_1 dépendant continûment de t avec $L_1^t \subset \mathbb{C} \setminus T(L_0[t])$ et $L_1^0 = \ell_1\}$.

On voit d'abord que $\Sigma \ni 0$ et donc $\Sigma \neq \emptyset$. On note que si $\Sigma \ni 1$, donc $\Sigma = [0,1]$, le lemme est démontré.

(I) L'ensemble Σ est ouvert. En effet, prenons $s \in \Sigma$, $0 \leq s < 1$; $T(L_0[s])$ est alors un chemin de ∞ à $1/\gamma(s)$ dans $\mathbb{C} \setminus \{1, \zeta_1\}$ et il existe une C^ω_J courbe ouverte $L^s_1 \subset \mathbb{C} \setminus T(L_0[s])$ de 1 à ζ_1.

Considérons un disque ouvert $C(1/\gamma(s), \epsilon)$ de centre $1/\gamma(s)$ et de rayon $\epsilon > 0$, ϵ suffisamment petit, tel que $C(1/\gamma(s), \epsilon) \subset \mathbb{C} \setminus \{0, 1, \zeta_1\}$ et $L^s_1 \subset \mathbb{C} \setminus C(1/\gamma(s), \epsilon)$, c'est-à-dire, $C(1/\gamma(s), \epsilon)$ ne contient pas de points de L^s_1.

Prenons $\delta > 0$ suffisamment petit tel que pour tout $t \in (s - \delta, s + \delta)$, on a $1/\gamma(t) \in C(1/\gamma(s), \epsilon)$. On a alors $L^s_1 \subset \mathbb{C} \setminus T(L_0[t])$ pour tout $t \in [s, s+\delta)$. Nous posons $L^t_1 = L^s_1$ pour tout $t \in [s, s+\delta)$ et donc $t \in \Sigma$. Ainsi on voit que Σ est ouvert.

(II) Posons $t_* = \sup\{t \in [0,1];\, t \in \Sigma\}$. Considérons $C(1/\gamma(t_*), \epsilon) \subset \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, ϵ (> 0) suffisamment petit, tel que $T(L_0)$ coupe le cercle $\partial C(1/\gamma(t_*), \epsilon)$ en seuls deux points $1/\gamma(t_0), 1/\gamma(t_{**})$ $(t_0 < t_{**})$. Prenons s suffisamment près de t_*, $s < t_*$, et $1/\gamma(s) \in C(1/\gamma(t_*), \epsilon)$ tel que L^s_1 est une C^ω_J courbe ouverte de 1 à ζ_1 telle que $L^s_1 \subset \mathbb{C} \setminus T(L_0[s])$.

Si cette courbe L^s_1 coupe $\partial C(1/\gamma(t_*), \epsilon)$, nous la modifions. Sinon, nous ne la modifions pas.

Soient $\gamma(t_1, s), \gamma(t_2, s), \ldots, \gamma(t_{2p-1}, s), \gamma(t_{2p}, s)$, $t_1 < t_2 \leq t_3 < \cdots < t_{2i} \leq t_{2i+1} < t_{2i+2} \leq \cdots \leq t_{2p-1} < t_{2p}$, les points de L^s_1 sur $\partial C(1/\gamma(t_*), \epsilon)$ tels que $L^s_1[t_{2i+1}, t_{2i+2}] \subset C(1/\gamma(t_*), \epsilon) \cup \{\gamma(t_{2i+2}, s), \gamma(t_{2i+3}, s)\}$, $0 \leq i \leq p-1$, et $L^s_1[t_{2i+2}, t_{2i+3}] \cap C(1/\gamma(t_*), \epsilon) = \emptyset$, $0 \leq i \leq p-2$, et $\gamma(t_{2p}, s)$ est le dernier point de L^s_1 sur $\partial C(1/\gamma(t_*), \epsilon)$. Écrivons pour $0 \leq i \leq p-1$, $\sigma_i = L^s[t_{2i+1}, t_{2i+2}]$ et $((a_i b_i)) = ((\gamma(t_{2i+1}, s)\gamma(t_{2i+2}, s)))$ l'arc de $\partial C(1/\gamma(t_*), \epsilon)$ ne contenant pas $1/\gamma(t_0)$. Soit D_i, $1 \leq i \leq p$, le domaine limité par σ_i et $((a_i b_i))$.

Appliquons le Lemme 2.9(ii), comme dans la partie (II) de la preuve du Lemme 2.6.

Dans le Lemme 2.9(ii), nous prenons un disque ouvert C_p tel que ∂C_p est tangent à $\partial C(1/\gamma(t_*), \epsilon)$ en le point $z_1 = 1/\gamma(t_0)$, $\overline{C_p} \subset C(1/\gamma(t_*), \epsilon) \cup \{z_1 = 1/\gamma(t_0)\}$ et $C_p \cup \{z_1 = 1/\gamma(t_0)\} \supset T(L_0)[t_0, t_*] = \{z_1 = 1/\gamma(\tau);\, t_0 \leq \tau \leq t_*\}$.

En utilisant le Lemme 2.9(ii), on peut construire une C^ω_J courbe ouverte telle que la partie $\bigcup_{i=0}^{p-1} L^s_1[t_{2i+1}, t_{2i+2}]$ de L^s_1 dans $\overline{C(1/\gamma(t_*), \epsilon)}$ est déformée dans $\overline{C(1/\gamma(t_*), \epsilon)} \setminus C_p$. Notons cette courbe $\widehat{L}^s_1 = \{z = \widehat{\gamma}(\tau, s);\, 0 \leq \tau \leq 1\}$, $\widehat{\gamma}(0, s) = 1$, $\widehat{\gamma}(1, s) = \zeta_1$. Alors $\hat{L}^s_1$ est contenu dans $\mathbb{C} \setminus \bigcup_{i=1}^p D_i$ et $\widehat{L}^s_1$ est C^ω_J homotope à L^s_1 dans $\mathbb{C} \setminus T(L_0[s])$.

On a $\hat{L}^s_1 \subset \overline{C(1/\gamma(t_*), \epsilon)} \setminus C_p$.

On peut alors définir une fonction $H(u, v)$ continue dans $[0,1] \times [0,1]$ telle que $H(\tau, 0) = \gamma(\tau, s)$, $0 \leq \tau \leq 1$, $H(\tau, 1) = \widehat{\gamma}(\tau, s)$, $0 \leq \tau \leq 1$, pour tout

$0 \leq v \leq 1, H(0,v) = 0, H(1,v) = \zeta_1$, et $\{z = H(\tau,u);\, 0 \leq \tau \leq 1\}$ est une C^ω_J courbe ouverte d'origine 0 et d'extrémité ζ_1.

Appliquons le Lemme 2.10(ii).

Prenons s_1 $(s < s_1 < t_*)$ suffisamment près de s tel que $T(L_0)[s,s_1] \subset C_p \subset C(\gamma(t_*),\epsilon) \setminus \bigcup_{i=1}^p D_i$.

Définissons pour $s \leq t \leq s_1$, $L_1^t = \big\{z = H\big(\tau, \frac{t-s}{s_1-s}\big);\, 0 \leq \tau \leq 1\big\}$ et pour $s_1 \leq t \leq t_*$, $L_1^t = L_1^{s_1} = \{z = \widehat{\gamma}(\tau,s_1);\, 0 \leq \tau \leq 1\}$. Alors L_1^t est une C^ω_J courbe ouverte de 0 à ζ_1 dépendant continûment t et $L_1^t \subset \mathbb{C} \setminus T(L_0^t)$.

On a donc $t_* \in \Sigma$. Si $t_* < 1$, d'après (I), il existe $\delta > 0$ suffisamment petit tel que $t_* + \delta \in \Sigma$ et cela contredit la définition de t_*. On a donc $t_* = 1$. Ceci démontre le Lemme 2.11.

De même, nous avons :

Lemme 2.12. *Soient ℓ_0 une C^ω_J courbe ouverte d'origine 0 et d'extrémité $\zeta_0 \neq 1$ quelconque et L_1 une C^ω_J courbe ouverte d'origine 1 et d'extrémité ζ_1 quelconque dans $\mathbb{C} \setminus \{1/\zeta_0, 0\}$, $L_1 = \{z_1 = \gamma(\tau);\, 0 \leq \tau \leq 1\}$, $\gamma(0) = 1$, $\gamma(1) = \zeta_1$.*

Soient l'application $T^{-1} : z_0 = 1/z_1$, et $T^{-1}(L_1)$ l'image de L_1 par T^{-1} qui est une C^ω_J courbe ouverte du point 1 à $\zeta_0 = 1/\zeta_1$.

Pour tout $t \in [0,1]$, il existe alors une C^ω_J courbe ouverte $L_0^t \subset \mathbb{C} \setminus T^{-1}(L_1[t])$ d'origine 0 et d'extrémité ζ_0 dépendant continûment de t et $L_0^0 = \ell_0$. Ici on a noté $L_1[t] = \{z_1 = \gamma(\tau);\, 0 \leq \tau \leq t\}$ et $L_0^t = \{z_0 = \gamma(\tau,t);\, 0 \leq \tau \leq 1\}$, $0 \leq t \leq 1$, où $\gamma(\tau,t)$ est une fonction continue en $(\tau,t) \in [0,1] \times [0,1]$ et de la classe C^ω par morceaux en τ et $\gamma_\tau(\tau,t) \neq 0$.

Soit $L_0 = L_0^1$. On a donc

$$L_0 \times L_1 = \{(z_0,z_1);\, z_0 \in L_0, z_1 \in L_1\} \subset \mathbb{C}^2 \setminus [\{z_0 z_1 = 1\} \cup \{z_0 = 1\} \cup \{z_1 = 0\}].$$

Nous appelons L_0 une déformation continue de ℓ_0 par L_1.

Nous pouvons généraliser le Lemme 2.11.

Soient $\mathcal{D} \ni 0$ un domaine dans le plan de $x \in \mathbb{C}$ et $P(x,z) = a_0(x)z^m + a_1(x)z^{m-1} + \cdots + a_m(x)$ un polynôme de degré m en z à coefficients holomorphes dans $\mathcal{D}$, sans facteur multiple. Son discriminant est noté $\theta(x)$.

Écrivons $F = \{(x,z) \in \mathcal{D}_* \times \mathbb{C};\, P(x,z) \neq 0\}$, où $\mathcal{D}_* = \mathcal{D} \setminus [\{x \in \mathcal{D};\, a_0(x) = a_m(x) = 0\} \cup \{x \in \mathcal{D};\, \theta(x) = 0\}]$, supposé $0 \in \mathcal{D}_*$. Alors F est un espace fibré localement trivial de base $\mathcal{D}_*$, fibre $\mathbb{C} \setminus \{1,\ldots,m\}$ et projection naturelle $\omega : F \ni (x,z) \mapsto (x,0) \in \mathcal{D}_* \times \{z = 0\}$, et $\omega^{-1}(x,0) = \mathbb{C} \setminus \{z;\, P(x,z) = 0\}$.

Notons $z = \eta_i(x), 1 \leq i \leq m$, les fonctions holomorphes au voisinage de $x = 0 \in \mathcal{D}_*$ satisfaisant $P(x,z) = 0$; alors les $\eta_i(x), 1 \leq i \leq m$, peuvent se prolonger analytiquement le long de toutes les courbes dans $\mathcal{D}_*$.

Lemme 2.13. *Soit ℓ une C_J^ω courbe d'origine 0 et d'extrémité ζ quelconque dans $\mathbb{C}\setminus[\{z;\, P(0,z)=0\}\cup\{z;\, P(x^{(0)},z)=0\}]$, où $x^{(0)}$ est un point quelconque de $\mathcal{D}_*$. Soit L_0 une C_J^ω courbe ouverte d'origine 0 et d'extrémité $x^{(0)}$ dans $\mathcal{D}_*\setminus\{x\in\mathcal{D}_*;\, P(x,\zeta)=0\}$; on a $L_0=\{x=\gamma(\tau);\, 0\le\tau\le 1\}$, $\gamma(0)=0$, $\gamma(1)=x^{(0)}$ et donc $P(\gamma(\tau),\zeta)\neq 0$ pour $0\le\tau\le 1$.*

Pour tout $t\in[0,1]$, il existe alors une C_J^ω courbe ouverte $L_1^t\subset\mathbb{C}\setminus\bigcup_{x\in L_0[t]}\{z;\, P(x,z)=0\}=\mathbb{C}\setminus\bigcup_{x\in L_0[t]}\{z=\eta_i(x);\, 1\le i\le m\}$ d'origine 0 et d'extrémité ζ dépendant continûment de $t\in[0,1]$, et $L^0=\ell$, où on a noté $L_0[t]=\{x=\gamma(\tau);\, 0\le\tau\le t\}$. On a donc $L_0\times L_1^1=\{(x,z);\, x\in L_0,\, z\in L_1^1\}\subset F$.

Nous appelons L_1^1 une déformation continue de ℓ par L_0.

Preuve. Nous pouvons démontrer le Lemme 2.13 par le même raisonnement que celui dans la preuve du Lemme 2.11.

Écrivons $\Sigma=\{s\in[0,1];$ pour tout $t\le s$, il existe une courbe ouverte de Jordan L_1^t qui satisfait la condition du lemme: $L_1^t=\{z_1=\gamma(\tau,t);\, 0\le\tau\le 1\}$, $0\le t\le 1$, où $\gamma(\tau,t)$ est une fonction continue dans $[0,1]\times[0,1]$ de la classe C^ω par morceaux en τ et $\gamma_\tau(\tau,t)\neq 0\}$.

On voit d'abord que $\Sigma\ni 0$ et donc $\Sigma\neq\emptyset$. On note que si $\Sigma\ni 1$, donc $\Sigma=[0,1]$, le lemme est démontré.

(I) L'ensemble Σ est ouvert. En effet, prenons $s\in\Sigma$, $0\le s<1$; il existe une C_J^ω courbe ouverte $L_1^s\subset\mathbb{C}\setminus\bigcup_{x\in L_0[s]}\{z;\, P(x,z)=0\}=\mathbb{C}\setminus\bigcup_{x\in L_0[s]}\{z=\eta_i(x);\, 1\le i\le m\}$.

Considérons pour chaque i, $1\le i\le m$, un disque ouvert $C(\eta_i(\gamma(s)),\epsilon)$ de centre $\eta_i(\gamma(s))$ et de rayon $\epsilon>0$ suffisamment petit tel que $C(\eta_i(\gamma(s)),\epsilon)\subset\mathbb{C}\setminus\{0,\zeta\}$ et $L_1^s\subset\mathbb{C}\setminus C(\eta_i(\gamma(s)),\epsilon)$, c'est-à-dire, $C(\eta_i(\gamma(s)),\epsilon)$ ne contient pas de points de L_1^s.

Prenons $\delta>0$ suffisamment petit tel que pour tout $t\in(s-\delta,s+\delta)$, on a $\eta_i(\gamma(t))\in C(\eta_i(\gamma(s)),\epsilon)$, $1\le i\le m$. Alors $L_1^s\subset\mathbb{C}\setminus\{z=\eta_i(\gamma(t))\}$ pour tout $t\in[s,s+\delta), 1\le i\le m$. Nous posons $L_1^t=L_1^s$ pour tout $t\in[s,s+\delta)$ et donc $t\in\Sigma$. Ainsi on voit que Σ est ouvert.

(II) Posons $t_*=\sup\{t\in[0,1];\, t\in\Sigma\}$. Considérons pour chaque i, $1\le i\le m$, $C(\eta_i(\gamma(t_*)),\epsilon)\subset\mathbb{C}\setminus\{0,\zeta\}$, ϵ (>0) suffisamment petit tel que $\{z=\eta_i(\gamma(\tau));\, 0\le\tau\le 1\}$ coupe le cercle $\partial C(\eta_i(\gamma(t_*)),\epsilon)$ en seuls deux points $\eta_i(\gamma(t_{0,i})),\eta_i(\gamma(t_{**,i}))$ $(t_{0,i}<t_{**,i})$.

Prenons s suffisamment près de t_*, $s<t_*$, et $\eta_i(\gamma(s))\in C(\eta_i(\gamma(t_*)),\epsilon)$ tel que L_1^s est une C_J^ω courbe ouverte de 0 à ζ telle que $L_1^s\subset\mathbb{C}\setminus\bigcup_{x\in L_0[s]}\{z=\eta_i(x);$ $1\le i\le m\}$.

Si cette courbe L_1^s coupe pour quelques $j, 1 \leq j \leq m, \partial C(\eta_j(\gamma(t_*)), \epsilon)$, nous modifions L_1^s dans $C(\eta_j(\gamma(t_*)), \epsilon)$. Sinon, nous ne modifions pas L_1^s dans $C(\eta_j(\gamma(t_*)), \epsilon)$.

Soient $\gamma(t_1^{(j)}, s), \gamma(t_2^{(j)}, s), \ldots, \gamma(t_{2p-1}^{(j)}, s), \gamma(t_{2p}^{(j)}, s), t_1^{(j)} < t_2^{(j)} \leq t_3^{(j)} < \cdots < t_{2i}^{(j)} \leq t_{2i+1}^{(j)} < \cdots \leq t_{2p-1}^{(j)} < t_{2p}^{(j)}$, les points de L^s sur $\partial C(\eta_j(\gamma(t_*)), \epsilon)$ tels que $L_1^s[t_{2i+1}^{(j)}, t_{2i+2}^{(j)}] \subset C(\eta_j(\gamma(t_*)), \epsilon) \cup \{\gamma(t_{2i+1}^{(j)}, s), \gamma(t_{2i+2}^{(j)}, s)\}$, $0 \leq i \leq p_j - 1$, et $L_1^s[t_{2i+2}^{(j)}, t_{2i+3}^{(j)}] \cap C(\eta_j(\gamma(t_*)), \epsilon) = \emptyset$, $0 \leq i \leq p_j - 2$, et $\gamma(t_{2p_j}^{(j)}, s)$ est le point dernier de L_1^s sur $\partial C(\eta_j(\gamma(t_*)), \epsilon)$.

Soit pour $1 \leq j \leq m$, un disque C_{p_j} tel que ∂C_{p_j} est tangent à $\partial C(\eta_j(\gamma(t_*)), \epsilon)$ en le point $z = \eta_j(\gamma(t_0^{(j)})), \overline{C_{p_j}} \subset C(\eta_j(\gamma(t_*)), \epsilon) \cup \{z = \eta_j(\gamma(t_0^{(j)}))\}$ et $C_{p_j} \cup \{z = \eta_j(\gamma(t_0^{(j)}))\} \supset \{z = \eta_j(\gamma(\tau)); t_0^{(j)} \leq \tau \leq t_*\}$. En utilisant le Lemme 2.9(ii), comme dans la partie (II) de la preuve du Lemme 2.11, on peut construire un chemin $\hat{L}_1^s = \{z = \hat{\gamma}(\tau, s); 0 \leq \tau \leq 1\}$ tel que la partie $\bigcup_{i=0}^{p_j-1} L_1^s[t_{2i+1}^{(j)}, t_{2i+2}^{(j)}]$ de L_1^s dans $\overline{C(\eta_j(\gamma(t_*)), \epsilon)}$ est détournée dans $\overline{C(\eta_j(\gamma(t_*)), \epsilon)} \setminus C_{p_j}$.

En utilisant le Lemme 2.10(ii) et le même raisonnement que celui dans la partie (II) de la preuve du Lemme 2.11, nous pouvons construire pour $s \leq t \leq t_*$, L_1^t une C_J^ω courbe ouverte de 0 à ζ_1 dépendant continûment de t telle que $L_1^t \subset \mathbb{C} \setminus \bigcup_{x \in L_0[t]} \{z; P(x, z) = 0\} = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{x \in L_0[t]} \{z; z = \eta_i(x), 1 \leq i \leq m\}$.

On a donc $t_* \in \Sigma$. Si $t_* < 1$, d'après (I), il existe $\delta > 0$ suffisamment petit tel que $t_* + \delta \in \Sigma$ et cela contredit la définition de t_*. On a donc $t_* = 1$. Ceci démontre le Lemme 2.13.

Preuve de la Proposition 2.4. (I) Soit $\Omega_0 = \{(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2; z_0 z_1 \neq 1, z_0 \neq 0, 1, z_1 \neq 0\}$; c'est un espace fibré localement trivial de base $B_0 = \{(z_0, 1) \in \mathbb{C}^2; z_0 \neq 0, 1\}$ et projection naturelle $\omega_0 : \Omega_0 \ni (z_0, z_1) \mapsto (z_0, 1) \in B_0$, et $\omega_0^{-1}((z_0, 1)) = \{(z_0, z_1); z_1 \neq 1/z_0, 0\}$.

Soient $(z_0^{(0)}, 1) \in \Omega_0, |z_0^{(0)}|$ $(\neq 0)$ suffisamment petit, un point de base et (ζ_0, ζ_1) un point quelconque de Ω_0.

D'après les propriétés d'espaces fibrés, un chemin quelconque dans Ω_0 d'origine $(z_0^{(0)}, 1)$ et d'extrémité (ζ_0, ζ_1) est homotope à un chemin composé $(\ell_0', 1) \circ (\zeta_0, \Lambda_1)$ dans Ω_0, où $(\ell_0', 1)$ est une courbe de $(z_0^{(0)}, 1)$ à $(\zeta_0, 1)$ dans B_0 et (ζ_0, Λ_1) est une courbe de $(\zeta_0, 1)$ à (ζ_0, ζ_1) dans $\omega_0^{-1}((\zeta_0, 1)) = \{(\zeta_0, z_1) \in \mathbb{C}^2; z_1 \neq 1/\zeta_0, 0\}$.

Pour démontrer la Proposition 2.4, d'après le Lemme 2.6, on peut supposer que $(\ell_0', 1), (\zeta_0, \Lambda_1)$ sont des C_J^ω courbes ouvertes.

Joignons $(0, 1)$ à $(z_0^{(0)}, 1)$ par $(\ell_0'', 1)$ dans B_0 et considérons un chemin composé $(\ell_0'', 1) \circ (\ell_0', 1) \circ (\zeta_0, \Lambda_1) = (\ell_0, 1) \circ (\zeta_0, \Lambda_1)$ tel que ℓ_0 est une C_J^ω courbe ouverte d'origine 0 et d'extrémité ζ_0 dans $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

D'après le Lemme 2.11, il existe alors une C_J^ω courbe ouverte Λ_0 de déformation continue de ℓ_0 par Λ_1 telle que $\Lambda_0 \times \Lambda_1 \subset \{(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2; z_0 z_1 \neq 1, z_0 \neq 1,$

$z_1 \neq 0\}$. D'après le Théorème 1.2 et le Corollaire 1.2, où $m = 2$, $p = 1$, la solution $U(z, x'')$ du problème de Goursat (2.16) et (2.17) peut se prolonger analytiquement sur $\Lambda_0 \times \Lambda_1 \times \mathbb{C}^2$ et donc sur $\mathcal{R}[\mathcal{R}(\Omega_0) \setminus \widetilde{N}_0] \times \mathbb{C}^2$, avec un point de base $\widetilde{z}^{(0)}$ de $\mathcal{R}(\Omega_0)$, $q_0(\widetilde{z}^{(0)}) = (z_0^{(0)}, 1)$.

Nous suivons le même raisonnement.

(II) Soit $\Omega_1 = \{(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2;\ z_0 z_1 \neq 1, z_0 \neq 1, z_1 \neq 0, 1\}$; c'est un espace fibré localement trivial de base $B_1 = \{(0, z_1) \in \mathbb{C}^2;\ z_1 \neq 0, 1\}$, de fibre $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}\}$ et de projection naturelle $\omega_1 : \Omega_1 \ni (z_0, z_1) \mapsto (0, z_1) \in B_1$. La fibre de $(0, z_1)$, $z_1 \neq 0, 1$, est $\omega_1^{-1}((0, z_1)) = \{(z_0, z_1);\ z_0 \neq 1/z_1, 0\}$. Soient $(0, z_1^{(1)}) \in \Omega_1, |z_1^{(1)} - 1|$ $(\neq 0)$ suffisamment petit, un point de base et (ζ_0, ζ_1) un point quelconque de Ω_1.

Pour démontrer la Proposition 2.4, d'après les propriétés d'espaces fibrés et le Lemme 2.6, on peut supposer qu'un chemin quelconque dans Ω_1 d'origine $(0, z_1^{(1)})$ et d'extrémité (ζ_0, ζ_1) est un chemin composé $(0, \ell_1') \circ (\Gamma_0, \zeta_1)$, où $(0, \ell_1')$ est une C_J^ω courbe ouverte de $(0, z_1^{(1)})$ à $(0, \zeta_1)$ dans B_1 et (Γ_0, ζ_1) est une C_J^ω courbe ouverte de $(0, \zeta_1)$ à (ζ_0, ζ_1) dans $\omega_1^{-1}((0, \zeta_1)) = \{(z_0, \zeta_1) \in \mathbb{C}^2;\ z_0 \neq 1/\zeta_1\}$.

Joignons $(0, 1)$ à $(0, z_1^{(1)})$ par $(0, \ell_1'')$ dans B_1 et considérons un chemin composé $(0, \ell_1'') \circ (0, \ell_1') \circ (\Gamma_0, \zeta_1) = (0, \ell_1) \circ (\Gamma_0, \zeta_1)$ tel que ℓ_1 est une C_J^ω courbe ouverte d'origine 1 et d'extrémité ζ_1 dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. D'après le Lemme 2.11, il existe alors une C_J^ω courbe ouverte Γ_1 de déformation continue de ℓ_1 par Γ_0 telle que $\Gamma_0 \times \Gamma_1 \subset \{(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2;\ z_0 z_1 \neq 1,\ z_0 \neq 1,\ z_1 \neq 0\}$.

D'après le Théorème 1.2 et le Corollaire 1.2, où $m = 2$, $p = 1$, la solution $U(z, x'')$ du problème de Goursat (2.16) et (2.17) peut se prolonger analytiquement sur $\Gamma_0 \times \Gamma_1 \times \mathbb{C}^2$ et donc sur $\mathcal{R}[\mathcal{R}(\Omega_1) \setminus \widetilde{N}_1] \times \mathbb{C}^2$, avec un point de base $\widetilde{z}^{(1)}$ de $\mathcal{R}(\Omega_1)$, $q_1(\widetilde{z}^{(1)}) = (0, z_1^{(1)})$.

Nous pouvons prendre pour $i = 0, 1$ un point de base $\widetilde{z}_*^{(i)} \in \mathcal{R}(\Omega_i) \setminus \widetilde{N}_i$ tel que $q_i(\widetilde{z}_*^{(i)}) = (z_0^{(0)}, z_1^{(1)})$, avec $|z_0^{(0)}|, |z_1^{(1)} - 1|$ $(\neq 0)$ suffisamment petit.

La solution $U(z, x'')$ peut se prolonger alors analytiquement sur le plus petit domaine étalé $\{\bigcup_{i=0}^{1} (\mathcal{R}[\mathcal{R}(\Omega_i) \setminus \widetilde{N}_i], \widetilde{q}_i, \widehat{z}_*^{(i)})\} \times \mathbb{C}^2$.

Enfin, soit $\Omega_* = \{(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2;\ z_0 z_1 \neq 1,\ z_0 \neq 0, 1,\ z_1 \neq 0, 1\}$; nous avons alors pour $i = 0, 1$, $\Omega_* \subset \Omega_i$ et en vertu du Lemme 2.3, $(\mathcal{R}(\Omega_*), q, \widetilde{z}_*) < (\mathcal{R}(\Omega_i), q_i, \widetilde{z}_*^{(i)})$, donc $(\mathcal{R}(\Omega_*), q, \widetilde{z}_*) < (\mathcal{R}(\Omega_i) \setminus \widetilde{N}_i, q_i, \widetilde{z}_*^{(i)})$, $i = 0, 1$. Il résulte du Lemme 2.3, que $(\mathcal{R}(\Omega_*), q, \widetilde{z}_*) < (\mathcal{R}[\mathcal{R}(\Omega_i) \setminus \widetilde{N}_i], \widetilde{q}_i, \widehat{z}_*^{(i)})$, $i = 0, 1$, donc que $(\mathcal{R}(\Omega_*), q, \widetilde{z}_*) < \bigcup_{i=0}^{1} (\mathcal{R}[\mathcal{R}(\Omega_i) \setminus \widetilde{N}_i], \widetilde{q}_i, \widehat{z}_*^{(i)})$.

Ceci démontre la Proposition 2.4.

Dans un cas particulier, nous avons :

Proposition 2.5. *Considérons le problème de Goursat*

$$\mathcal{G}u(x) = 0 \tag{2.1}$$

avec les données

$$u(0,x') = w_{0,0}(x_1,x_2), \qquad D_0u(x_0,0,x'') = w_{1,0}(x_0,x_2), \tag{2.19}$$

où $w_{0,0}(x_1,x_2), w_{1,0}(x_0,x_2)$ *sont des fonctions entières sur* $\mathbb{C}^4$ *indépendant de* x_3. *Par quadrature, on a une représentation de la solution*

$$u(x) = \int_0^{x_0} \frac{e^{x_1}}{e^{x_1}(1-\sigma)+\sigma} w_{1,0}\left(\frac{\sigma}{e^{x_1}(1-\sigma)+\sigma}, x_2+x_1-\log[e^{x_1}(1-\sigma)+\sigma]\right) d\sigma \\ + w_{0,0}(x_1,x_2). \tag{2.20}$$

Nous obtenons des diverses solutions de l'équation (2.1).

L'hyperplan $\{x_0 = 0\}$ est caractéristique pour (2.1). D'abord, il existe une solution telle que le domaine d'existence contient tout l'hyperplan $\{x_0 = 0\}$ et son extérieur est non vide dans $\mathbb{C}^4$.

Proposition 2.6. *Considérons le problème de Goursat de* (2.1) *avec les données* $u(0,x') = 0$, $D_0u(x_0,0,x') = w_{1,0}(x_0)$, *où* $w_{1,0}(x_0)$ *est indépendant de* x' *et son domaine d'existence est* $\{x_0;\, |x_0| < 1\}$ *et sa frontière naturelle est* $\{x_0;\, |x_0| = 1\}$. *Le problème de Goursat possède une unique solution*

$$u(x) = \int_0^{x_0} \frac{e^{x_1}}{e^{x_1}(1-\sigma)+\sigma} w_{1,0}\left(\frac{\sigma}{e^{x_1}(1-\sigma)+\sigma}, x_2+x_1-\log[e^{x_1}(1-\sigma)+\sigma]\right) d\sigma.$$

Son domaine d'existence est

$$\left\{x;\, \left|\frac{x_0}{e^{x_1}(1-x_0)+x_0}\right| < 1\right\}$$

contenant $\{x_0 = 0\}$ *et sa frontière naturelle est* $\{x;\, |\frac{x_0}{e^{x_1}(1-x_0)+x_0}| = 1\}$.

Remarque 2.1. Bien entendu, on voit un exemple plus simple dans [L1]. En effet, on considère l'équation

$$(x_0D_0 + x_1D_1)u(x) = 0, \qquad x = (x_0,x_1).$$

L'hyperplan $x_0 = 0$ est caractéristique. Cette équation a la solution $u(x) = w(x_0x_1)$, où le domaine d'existence de $w(t)$ est $\{t \in \mathbb{C};\, |t| < 1\}$ et $w(0) = 1$. Le domaine d'existence de $u(x)$ est alors $\{x;\, |x_0x_1| < 1\}$ et $u(0,x_1) = 1$.

Proposition 2.7. *Considérons le problème de Cauchy* (2.1) *avec les données de Cauchy* (2.2), *où* $u(1/2,x') = w_0(x_1)$, $D_0u(1/2,x') = w_1(x_1)$ *sont des fonctions entières dans* $\mathbb{C}^3$ *indépendant de* x_2, x_3. *La solution* $u(x)$ *vérifie l'équation*

$$\{x_0(1-x_0)D_0+D_1-x_0\}D_0u(x) = 0, \quad u(1/2,x') = w_0(x_1), D_0u(1/2,x') = w_1(x_1).$$

La solution est alors

$$u(x) = \int_{1/2}^{x_0} \frac{1}{2(1-\sigma)} w_1\left(x_1 - \log\frac{\sigma}{1-\sigma}\right) d\sigma + w_0(x_1).$$

En particulier, pour

$$w_0(x_1) = \frac{1}{2}\left\{\log\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right\}e^{-x_1}, \qquad w_1(x_1) = e^{-x_1},$$

on a

$$u(x) = \frac{1}{2}\left\{\log(1-x_0) + \frac{1}{1-x_0} - 1\right\}e^{-x_1}.$$

La fonction $u(x)$ *vérifie* $u(0,x') = D_0 u(0,x') = 0$ *et elle a donc un zéro d'ordre* 2 *sur la surface caractéristique* $\{x_0 = 0\}$.

Nous appliquons des raisonnements qui démontrent des formules d'intégrale de la solution de l'équation de Gauss à l'équation (2.1).

Soient a, a_1, a_2 des points différents de $\mathbb{C}$ et $C_a(a_i), i = 1, 2$, un chemin fermé partant de a et y revenant, après avoir contourné a_i, parcouru dans le sens positif. Nous écrivons $\ell_a(a_1, a_2) = C_a(a_1) \circ C_a(a_2) \circ C_a(a_1)^{-1} \circ C_a(a_2)^{-1}$, un chemin fermé dans le plan de $z \in \mathbb{C}$. La notation $\circ$ signifie la composition des chemins.

Nous démontrerons

Proposition 2.8. *L'équation* (2.1), $\mathcal{G}u(x) = 0$, *a des solutions* $u_i(x)$, $i = 1, 2, 3$, *holomorphes sur* $\mathcal{R}[\mathbb{C}^4 \setminus \{x_0 = 0, 1\}]$ *données par des formules suivantes :*

$$(2.21) \qquad u_1(x) = \int_{\ell_a(0,x_0)} \frac{1}{z-1} w\big(x_1 - \log z + \log(z-1), x_2 + \log z - \log(z-x_0), x_3 - \log(z-1)\big)\, dz,$$

où $w(x_1, x_2, x_3)$ *est une fonction entière sur* $\mathbb{C}^3$, a $(\neq 0, 1, x_0)$ *est un point de* $\mathbb{C}$ *et* $\ell_a(0, x_0)$ *ne passe pas par* $z = 1$ *;*

$$(2.22) \qquad u_2(x) = \int_{\ell_a(1,x_0)} \frac{1}{z-1} w\big(x_1 - \log z + \log(z-1), x_2 + \log z - \log(z-x_0), x_3 - \log(z-1)\big)\, dz,$$

où $\ell_a(1, x_0)$ *ne passe pas par* $z = 0$ *;*

$$(2.23) \qquad u_3(x) = \int_{\ell_a(0,1)} \frac{1}{z-1} w\big(x_1 - \log z + \log(z-1), x_2 + \log z - \log(z-x_0), x_3 - \log(z-1)\big)\, dz,$$

où $\ell_a(0, 1)$ *ne passe pas par* $z = x_0$.

Remarque 2.2. Nous utilisons un calcul symbolique. Soient $a \in \mathbb{C}$ une constante, $D_x = \partial/\partial x$ et $F(x)$ une fonction holomorphe de x. On a

$$\begin{aligned}
e^{aD_x}F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n D_x^n F(x)/n! = F(x+a),\\
z^{D_x}F(x) &= e^{\log z D_x}F(x) = F(x+\log z),\\
D_z\{z^{D_x}F(x)\} &= \frac{1}{z}(D_xF)(x+\log z) = D_x z^{D_x-1}F(x).
\end{aligned}$$

Par ce calcul symbolique, nous pouvons écrire (2.21) sous la forme

$$u_1(x) = \int_{\ell_a(0,x_0)} z^{D_2-D_1}(z-1)^{D_1-D_3-1}(z-x_0)^{-D_2}w(x_1,x_2,x_3)\,dz. \tag{2.24}$$

Preuve de la Proposition 2.8. Nous suivons un raisonnement de la démonstration des formules d'intégrale de la solution de l'équation de Gauss, en utilisant un calcul symbolique comme dans la Remarque 2.2.

En utilisant une transformation d'Euler [Fu], nous posons

$$u_1(x) = \int_{\ell_a(0,x_0)} v(z)(z-x_0)^{-D_2}w(x')\,dz.$$

On a

$$\begin{aligned}
D_0u_1(x) &= \int_{\ell_a(0,x_0)} v(z)D_2(z-x_0)^{-D_2-1}w(x')\,dz,\\
D_0^2u_1(x) &= \int_{\ell_a(0,x_0)} v(z)D_2(D_2+1)(z-x_0)^{-D_2-2}w(x')\,dz.
\end{aligned}$$

On a $D_1-(D_2+D_3+1)x_0 = D_1-(D_2+D_3+1)z+(D_2+D_3+1)(z-x_0)$, et $x_0(1-x_0) = z(1-z)+(2z-1)(z-x_0)-(z-x_0)^2$. Par suite,

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}u_1(x) &= \int_{\ell_a(0,x_0)} v(z)\{(D_2(D_2+1)(2z-1)+[D_1-(D_2+D_3+1)z]D_2)(z-x_0)^{-1}\\
&\quad + D_2(D_2+1)z(1-z)(z-x_0)^{-2}\}(z-x_0)^{-D_2}w(x')\,dz\\
&= \int_{\ell_a(0,x_0)} v(z)\Big\{(D_2(D_2+1)z+D_2(D_1-D_2-1)-D_2D_3z)(z-x_0)^{-1}\\
&\quad - D_2z(1-z)\frac{d}{dz}\Big[\frac{1}{(z-x_0)}(z-x_0)^{-D_2}\Big]\Big\}w(x')\,dz\\
&= \int_{\ell_a(0,x_0)} (z-x_0)^{-D_2-1}\Big\{D_2\frac{d}{dz}(z(1-z)v(z))+v(z)D_2[(D_2-D_3+1)z\\
&\quad +(D_1-D_2-1)]\Big\}w(x')\,dz\\
&\quad - \int_{\ell_a(0,x_0)} d_z\{D_2z(1-z)v(z)(z-x_0)^{-D_2-1}w(x')\}.
\end{aligned}$$

En prenant $v(z) = z^{D_2 - D_1}(z-1)^{D_1 - D_3 - 1}$, on a

$$z(1-z)\frac{dv}{dz} + (D_1 - D_2 + (D_2 - D_3 - 1)z)v = 0.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\mathcal{G}u_1(x) &= -\int_{\ell_a(0,x_0)} d_z\{D_2 z^{D_2 - D_1 + 1}(z-1)^{D_1 - D_3}(z - x_0)^{-D_2 - 1} w(x')\} \\ &= -\int_{\ell_a(0,x_0)} d_z\bigg\{\frac{z}{z - x_0} w(x_1 - \log z + \log(z-1), x_2 + \log z \\ &\qquad - \log(z - x_0), x_3 - \log(z-1))\bigg\}.\end{aligned}$$

Par la définition de $\ell_a(0, x_0)$, le second membre devient zéro, c'est-à-dire, $\mathcal{G}u_1(x) = 0$. Ceci démontre que (2.21) est une solution de (2.1). De même, on obtient (2.22) et (2.23).

§3. Quelques exemples qui se rattachent aux équations de Bessel et de Kummer

Nous étudions l'équation

$$\mathcal{B}u(x) = \{x_0^2 D_0^2 + x_0 D_0 + x_0^2 - D_1^2\}u(x) = 0, \qquad x = (x_0, x_1) \in \mathbb{C}^2. \tag{3.1}$$

Cette équation se rattache à l'équation de Bessel. En fait, l'équation (3.1) possède une solution $u(x) = e^{\nu x_1} J_\nu(x_0)$, où $\nu \in \mathbb{C}$, et $J_\nu(x_0)$ est la fonction de Bessel d'ordre ν. D'après le Corollaire 1.1, nous avons :

Proposition 3.1. *Le problème de Cauchy* (3.1) *avec les données*

$$u(1, x_1), D_0 u(1, x_1) \text{ holomorphes sur } \mathbb{C} \tag{3.2}$$

possède une unique solution holomorphe sur $\mathcal{R}[\mathbb{C}^2 \setminus \{x_0 = 0\}]$.

L'équation fondamentale déterminante relative au point $x_0 = 0$ est symboliquement $\lambda^2 - D_1^2 = 0$. Les racines sont $\lambda = \pm D_1$.

Prenons $\lambda = D_1$ et posons

$$\begin{aligned}u_+(x) = x_0^{D_1} U_+(x) = e^{\log x_0 D_1} U_+(x_0, x_1) = U_+(x_0, x_1 + \log x_0) \\ = U_+(x_0, z)|_{z = x_1 + \log x_0}.\end{aligned} \tag{3.3}$$

L'équation $\mathcal{B}u_+(x) = 0$ devient alors

$$2D_0 D_z U_+(x_0, z) + x_0 D_0^2 U_+(x_0, z) + D_0 U_+(x_0, z) + x_0 U_+(x_0, z) = 0. \tag{3.4}$$

D'après le Théorème 1.1, où x_0, x_1 sont remplacés par z, x_0 respectivement, nous avons alors :

Proposition 3.2. *Le problème de Goursat* (3.4) *avec les données*

$$U_+(x_0, 0), D_z U_+(0, z) \text{ holomorphes sur } \mathbb{C}^2 \tag{3.5}$$

possède une unique solution holomorphe sur $\mathbb{C}^2$. *L'équation* (3.1) *possède alors la solution* $u_+(x) = U_+(x_0, x_1 + \log x_0)$, *où* $U_+(x_0, z)$ *est holomorphe sur* $\mathbb{C}^2$. *La solution* $u_+(x)$ *est donc holomorphe sur* $\mathcal{R}[\mathbb{C}^2 \setminus \{x_0 = 0\}]$.

De même, on obtient une solution de (3.1) *de la forme* $u_-(x) = x_0^{-D_1} U_-(x) = U_-(x_0, x_1 - \log x_0)$, *où* $U_-(x_0, z)$ *est holomorphe sur* $\mathbb{C}^2$.

Ensuite nous étudions l'équation

$$\mathcal{K}u(x) = x_0 D_0^2 u(x) + (D_1 - x_0) D_0 u(x) - D_2 u(x) = 0,\ x = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{C}^3. \tag{3.6}$$

L'équation (3.6) se rattache à l'équation hypergéométrique de Kummer. En fait, (3.6) possède une solution $u(x) = e^{\gamma x_1 + \alpha x_0} F(\alpha, \gamma, x_0)$, où $F(\alpha, \gamma, x_0)$ est une fonction hypergéométrique de Kummer.

D'après le Corollaire 1.1 avec $p = 0$, nous avons

Proposition 3.3. *Le problème de Cauchy* (3.6) *avec les données*

$$u(1, x'), D_0 u(1, x') \text{ holomorphes sur } \mathbb{C}^2 \tag{3.7}$$

possède une unique solution holomorphe sur $\mathcal{R}[\mathbb{C}^3 \setminus \{x_0 = 0\})]$.

L'équation fondamentale déterminante relative au point $x_0 = 0$ est symboliquement $\lambda^2 + (D_1 - 1)\lambda = 0$. Ses racines sont symboliquement $\lambda = 0, 1 - D_1$.

D'après le Théorème 1.1, où x_0, x_1 sont remplacés par x_1, x_0 respectivement, nous avons alors :

Proposition 3.4. *Le problème de Goursat* $\mathcal{K}u(x) = 0$ *avec les données*

$$u(x_0, 0, x_2), D_1 u(0, x') \text{ holomorphes sur } \mathbb{C}^3 \tag{3.8}$$

possède une unique solution holomorphe sur $\mathbb{C}^3$.

Proposition 3.5. *L'équation* $\mathcal{K}u(x) = 0$ *a une solution de la forme*

$$u(x) = x_0^{1-D_1} U(x) = x_0 U(x_0, z, x_2)|_{z = x_1 - \log x_0}, \tag{3.9}$$

où, d'après le Théorème 1.1, $U(x_0, z, x_2)$ *est la solution holomorphe sur* $\mathbb{C}^3$ *du problème de Goursat*

$$\{x_0 D_0^2 + (2 - D_z - x_0) D_0 - (D_2 + 1 - D_z)\} U(x_0, z, x_2) = 0 \tag{3.10}$$

avec les données

$$U(x_0, 0, x_2), D_z U(0, z, x_2) \text{ holomorphes sur } \mathbb{C}^3. \tag{3.11}$$

La fonction $u(x)$ est donc holomorphe sur $\mathcal{R}[\mathbb{C}^3 \setminus \{x_0 = 0\}]$.

Remerciements

T. Ōkaji and Y. Takei ont été partiellement supportés par JSPS Grants-in-Aid No. 22540185 et No. 21340029 respectivement.

Références

[F] R. Forsyth, *Theory of differential equations*, Dover, 1958.

[Fu] M. Fujiwara, *Theory of ordinary differential equations*, Iwanami Shoten, 1941 (en japonais).

[GKL] L. Gårding, T. Kotake et J. Leray, Uniformisation et développement asymptotique de la solution du problème de Cauchy linéaire à données holomorphes ; analogue avec la théorie des ondes asymptotiques et approchées, Bull. Soc. Math. France **92** (1964), 263–361. Zbl 0147.08101 MR 0196280

[G] E. Goursat, *Cours d'analyse mathématique*, t. 2, 7e éd., Gauthier-Villars, Paris, 1949.

[GF] H. Grauert and K. Fritzsche, *Several complex variables*, Grad. Texts in Math. 38, Springer, New York, 1976.

[H1] Y. Hamada, Sur le prolongement analytique de la solution du problème de Cauchy pour certains opérateurs différentiels de partie principale à coefficients polynomiaux, Tohoku Math. J. **55** (2003), 477–485. Zbl 1055.35008 MR 2017220

[H2] ———, Problème de Cauchy analytique I, Publ. RIMS Kyoto Univ. **39** (2003), 601–624. Zbl 1061.35006 MR 2001188

[HLT] Y. Hamada, J. Leray et A. Takeuchi, Prolongements analytiques de la solution du problème de Cauchy linéaire, J. Math. Pures Appl. **64** (1985), 257–319. Zbl 0581.32017 MR 0823406

[HLW] Y. Hamada, J. Leray et C. Wagschal, Systèmes d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples : problème de Cauchy ramifié ; hyperbolicité partielle, J. Math. Pures Appl. **55** (1976), 297–352. Zbl 0307.35056 MR 0435614

[HT] Y. Hamada et A. Takeuchi, Sur un domaine d'existence et un prolongement analytique des solutions de problèmes de Goursat, J. Math. Pures Appl. **75** (1996), 469–483. Zbl 0863.35018 MR 1411160

[Hi] E. Hille, *Ordinary differential equations in the complex domain*, Wiley, 1976. Zbl 0343.34007 MR 0499382

[L1] J. Leray, Uniformisation de la solution du problème linéaire analytique de Cauchy près de la variété qui porte les données de Cauchy (Problème de Cauchy I), Bull. Soc. Math. France **85** (1957), 389–429. Zbl 0108.09501 MR 0103328

[L2] ———, Un complément au théorème de N. Nilsson sur les intégrales de formes différentielles à support singulier algébrique, Bull. Soc. Math. France **95** (1967), 313–374. Zbl 0164.21102 MR 0499294

[L3] ———, Caractère non Fredholmien du problème de Goursat, J. Math. Pures Appl. **53** (1974), 133–136. Zbl 0287.35064 MR 0367411

[M] W. S. Massey, *Algebraic topology: An introduction*, Springer, 1977.

[N] T. Nishino, *Function theory in several complex variables*, Transl. Math. Monogr. 193, Amer. Math. Soc., 2001. Zbl 0972.32001 MR 1818167

[P] J. Persson, On the local and global non-characteristic Cauchy problem when the solutions are holomorphic functions or analytic functionals in the space variables, Ark. Mat. **9** (1971), 171–180. Zbl 0222.35001 MR 0318702

[Pi] E. Picard, *Traité d'analyse*, t. 3, 3e éd., Gauthier-Villars, Paris, 1928. Zbl 54.0450.09

[PW] P. Pongérard et C. Wagschal, Problème de Cauchy dans des espaces de fonctions entières, J. Math. Pures Appl. **75** (1996), 409–418. Zbl 0858.35001 MR 1411158

[W] C. Wagschal, Une généralisation du problème de Goursat pour des systèmes d'équations intégro-différentielles holomorphes ou partiellement holomorphes, J. Math. Pures Appl. **53** (1974), 99–132. Zbl 0265.35018 MR 0367432