# Sur une certaine condition sous laquelle une fonction de plusieurs variables complexes est holomorphe.

## Diminution de la condition dans le théorème de Hartogs.

Par

Toshiaki TERADA*

On savait qu'une fonction *continue* de plusieurs variables complexes est holomorphe, si elle est holomorphe par rapport à chaque variable. W. F. Osgood a presque réussi à éliminer l'hypothèse de continiuité. Il a démontré qu'une fonction *bornée*, holomorphe par rapport à chaque variable, est aussi holomorphe comme fonction de plusieurs variables [4] – [5].

Ensuite, F. Hartogs l'a complètement éliminée, en montrant que: Soient $D$ et $D'$ des domaines dans le plan des $x$ et dans le plan des $y$ respectivement, $f(x,y)$ une fonction définie dans le domaine cylindrique $(D,D')$, et $E$ un domaine quelconque contenu dans $D$. Alors, $f(x,y)$ est holomorphe dans $(D,D')$ par rapport à deux variables, si elle l'est dans $D'$ par rapport à $y$ pour tout $x$ fixé dans $E$ et dans $D$ par rapport à $x$ pour tout $y$ fixé dans $D'$ [2].

Lorsque l'ensemble $E$ ne possède pas de point intérieur, se pose le problème suivant: Quelle condition doit-on imposer à l'ensemble $E$ pour qu'une telle fonction soit holomorphe?[1]

Il est, pour cela, presque nécessaire et suffisant que la capacité de l'ensemble $E$ soit positive. Nous le montrerons, en traitant le cas de deux variables dans la première section et le cas de plusieurs variables dans la deuxième section.

---

* Department of Mathematics, Faculty of Science, Kyoto University. Received August 17, 1966. Communicated by M. Hukuhara.

1) Ce problème a été présenté par M. Hukuhara [3].

## §1. Cas de deux variables.

Dans cette section, traitons particulièrement le cas de deux variables quoique les résultats soient complètement généralisés dans la §2, car les conclusions deviennent claires et les démonstrations sont plus concrètes. Pour simplifier la description, définissons d'abord la famille de fonctions $F(x, y, D, D', E)$.

**Définition 1.** Soient $D$ et $D'$ des domaines univalents finis dans le plan des $x$ et dans le plan des $y$ respectivement, $E$ un ensemble de points de $D$, et $f(x, y)$ une fonction univalente définie dans $(D, D')$. Alors, nous disons que $f(x, y)$ appartient à la famille $F(x, y, D, D', E)$, si elle est holomorphe dans $D$ par rapport à $x$ pour toute valeur $y$ fixée dans $D'$ et dans $D'$ par rapport à $y$ pour toute valeur $x$ fixée dans $E$.

Nous donnerons une condition suffisante pour que la fonction appartenant à la famille $F(x, y, D, D', E)$ soit holomorphe, à l'aide du théorème et du lemme suivants. Enfin, nous en donnerons un contre-exemple dans le cas où la condition n'est pas remplie.

**Théorème 1.1.** (Isae Shimoda [6]) Soit $f(x, y)$ une fonction *bornée* appartenant à la famille $F(x, y, D, D', E)$. Supposons que $E$ soit un ensemble infini dénombrable de points ayant au moins un point d'accumulation dans $D$. Alors, il y a un domaine simplement connexe $D'_0$ dense dans $D'$ tel que $f(x, y)$ soit holomorphe dans $(D, D'_0)$ par rapport aux deux variables.

**Lemme 1.1.** Soit $f(x, y)$ une fonction définie dans $(D, D')$, où $D'$ est un cercle de centre à l'origine et de rayon $r$. Supposons que $f(x, y)$ soit holomorphe dans $D$ par rapport à $x$ pour toute valeur $y$ fixée dans $D'$, et qu'elle soit holomorphe en tout point de $(D, 0)$ comme fonction de deux variables. Alors, le rayon de Hartogs $R'(x)$ se réduit à une constante dans $D$ ou bien il est au moins égal à $r$ en tout point $x \in D$.

En effet, supposons qu'il existe un point $x_0$ tel que $R'(x_0) = r_0 < r$.

Alors $f(x,y)$ est holomorphe dans $(U(x_0),\ |y|<r_0')$, où $r_0'$ est un nombre positive quelconque plus petit que $r_0$ et $U(x_0)$ est un voisinage convenable de $x_0$. Donc, par le théorème de Hartogs, elle est holomorphe dans $(D,\ |y|<r_0')$, d'où $R'(x)\geqq r_0$ pour tout point $x\in D$. On peut en conclure immédiatement que $R'(x)=r_0$ pour tout point $x\in X$.

**Proposition 1.1.** Si la capacité de l'ensemble $E$ est positive, toute fonction appartenant à la famille $F(x,y,D,D',E)$ est holomorphe dans $(D,D')$.

Il suffit de le vérifier dans le cas où $D$ est un cercle unité et $E$ compact. D'après le théorème 1.1, il y a dans $D'$ un point $y_0$ tel que $f(x,y)$ soit holomorphe dans le produit direct de $D$ et d'un voisinage convenable de $y_0$. Nous pouvons supposer $y_0$ situé à l'origine sans perdre la généralité. Alors $f(x,y)$ est développable en série

(1) $$f(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x)y^n$$

convergeant uniformément dans $(D_0,\ |y|<\eta)$, où $D_0$ est un domaine quelconque entouré par un nombre fini de courbes de Jordan simples, fermés, rectifiables, contenues dans l'intérieur de $D$ et contenant $E$, les coefficients $a_n(x)$ sont holomorphes dans $D$, et $\eta$ est un nombre positif convenable. D'après l'unicité de la série de Taylor, (1) converge en tout point de $(E,D')$. Donc, pour un nombre positif quelconque $\eta_0$ plus petit que $\eta$, il existe un nombre entier positif $n_1$, tel qu'on ait

(2) $$(1/n)\log|a_n(x)|\leqq\log 1/\eta_0 \quad (\text{pour } n>n_1 \text{ et pour } x\in D_0).$$

D'ailleurs, pour un nombre positif quelconque $\sigma$ plus petit que 1, il existe un nombre entier $n(x)$, dépendant de $x$, tel que

(3) $$(1/n)\log|a_n(x)|\leqq\log 1/\sigma \quad (\text{pour } n>n(x) \text{ et pour } x\in E).$$

En posant $E_n=\{x;\ (1/m)\log|a_m(x)|\leqq\log 1/\sigma \text{ pour } m=n,\ n+1,\ n+2,\cdots\}$, on a $E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$. Par conséquent, il existe un nombre entier positif $N$ tel que Cap $(E_N)>0$, et que

(4) $$(1/n)\log|a_n(x)|\leqq\log 1/\sigma \quad (\text{pour } n>N \text{ et pour } x\in E_N).$$

Etant Cap $(E_N)>0$, il existe une fonction $u(x)$, harmonique dans $D_0-E_N$ et continue aussi sur $\partial D_0$, telle que

$$(5) \qquad u(x)=\log 1/\eta_0 \quad (\text{pour } x\in\partial D_0),$$

$$\inf_{x\in D_0-E_N} u(x)=\log 1/\sigma.$$

D'après (2), (4) et (5), $u(x)$ est une fonction majorante à $(1/n) \log|a_n(x)|$ pour $n>\max(n_1, N)$. La fonction $u(x)$ étant continue, pour un nombre quelconque $\sigma_0(0<\sigma_0<\sigma)$, il existe un point $x_0$ et son voisinage $U(x_0)$, tels que

$$u(x)<\log 1/\sigma_0 \quad (\text{pour } x\in U(x_0)).$$

Comme $(1/n)\log|a_n(x)|$ est plus petite que $u(x)$, on a

$$|a_n(x)|<1/\sigma_0^n \quad (\text{pour } x\in U(x_0) \text{ et pour } n>\max(n_1, N)).$$

Par conséquent, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)y^n$ convergeant uniformément dans $(U(x_0), |y|<\sigma_0)$, $f(x,y)$ est holomorphe dans $(U(x_0), |y|<\sigma_0)$. Donc, $R'(x_0)\geqq\sigma_0$. Or, comme on peut donner à $\sigma_0$ une valeur arbitrairement voisine de 1, on a $\sup_{x\in D} R'(x)\geqq 1$. D'après le lemme 1.1, on a $R'(x)\geqq 1$ pour tout $x\in D$. Par suite, $f(x,y)$ est holomorphe dans $(D, D')$. C.Q.F.D.

Si la capacité de $E$ est nulle, il y a un contre-exemple.

**Exemple 1.** Soit $E=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ une réunion dénombrable d'ensembles compacts $E_n$, de capacité nulle, contenus dans le cercle unité sur le plan des $x$. Alors, il existe une fonction appartenant à la famille $F(x,y,|x|<1,|y|<1,E)$, qui n'est pas holomorphe en $(0,0)$.[2)]

Nous supposons, par surcroît, que $E_n$ sont contenus dans $E_{n+1}$ et les distances à l'origine sont plus grandes que $1/2^n$.[3)]

Pour ceci, nous allons d'abord montrer qu'on peut trouver une

---

2) Dans ie cas où $E$ est un ensemble dénombrable de points. on peut donner l' exemple de la forme

$$f(x.y)=\sum_{n=1}^{\infty}(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)f_n(y)$$

3) Cette condition n'est pas nécessaire. Elle est nécessairement remplie par quelque modification de $E_n$.

série croissante $\{M_n\}\ n=1, 2, \cdots$ de nombres positifs tendant vers l'infini, une suite $\{f_n(y)\}\ n=1, 2, \cdots$ de fonctions holomorphes définies au voisinage du cercle unité dans le plan des $y$, et une suite $\{y_n\}\ n=1, 2, \cdots$ de points dans le plan des $y$ tendant vers l'origine, de manière que (1) $\lim_{n\to\infty} f_n(y)=0$ $(|y|<1)$, (2) $|f_m(y_n)|<M_n/3^n$ $(m=1, 2, \cdots n-1)$, (3) $|f_n(y_n)|=M_n$, (4) $|f_m(y_n)|<1/2$ $(m=n+1, \cdots)$, (5) $M_n>3^n$. Et posons $\max_{|y|\leq 1}|f_n(y)|=1/\delta_n$. En effet, on sait bien qu'on peut trouver une suite $\{g_\nu(y)\}$ de fonctions holomorphes définies au voisinage du cercle unité, tel que la suite tende vers zéro en tout point du cercle mais que la convergence ne soit uniforme dans aucun voisinage de l'origine. Supposons que $f_r(y)$, $M_r$ et $y_r$ soient déjà définis pour tout nombre entier positif $r$ plus petit que $n$. En vertu de la propriété de la série $\{g_\nu(y)\}$, on a, d'une part, $\{g_\nu(y_r)\}<1/2$ $(r=1, 2, \cdots, n-1)$ pour tout $\nu$ plus grand qu'un nombre $\nu_0$ suffisamment grand, d'autre part, il existe un point $y_n$ et un nombre $\nu_n$ plus grand que $\nu_0$, tels que la distance de $y_n$ à l'origine soit plus petite que $1/n$ et qu'on ait $|g_{\nu_n}(y_n)|>\max(3^n, 3^n/\delta_1, \cdots, 3^n/\delta_{n-1})$. Posons $f_n(y)=g_{\nu_n}(y)$ et $M_n=|f_n(y_n)|$. Nous obtenons ainsi les trois séries satisfaisant aux quatre conditions.

Puisque Cap $(E_n)=0$, il existe, pour chaque $n$, des polynomes de Tschebyschev

$$T_{ns_n}(x)=(x-a_{ns_n}^{(1)})(x-a_{ns_n}^{(2)})\cdots(x-a_{ns_n}^{(s_n)}) \tag{6}$$

tels que

$$\max_{x\in E_n} \sqrt[s_n]{|T_{ns_n}(x)|}<\delta_n^2, \tag{7}$$

où $\{s_n\}$ est une certaine suite croissante d'entiers positifs, et

$$a_{ns_n}^{(i)}\in E_n (i=1, 2, \cdots, s_n).$$

De l'hypothèse, on voit

$$\sqrt[s_n]{|T_{ns_n}(x)|}<2 \quad (\text{pour } |x|<1) \tag{8}$$

$$1/2^n<\sqrt[s_n]{|T_{ns_n}(0)|}<1 \tag{9}$$

Considérons une série

$$f(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}T_{ns_n}(x)\,[f_n(y)]^{s_n}$$

Alors, on a

1. pour toute valeur $y$ fixée dans $D'$, par (1) et (8),

$$\sum_{n=1}^{\infty}|T_{ns_n}(x)|\,|f_n(y)|^{s_n}<\sum_{n=1}^{\infty}|2f_n(y)|^{s_n}<\infty$$

uniformément par rapport à $x$,

2. pour toute valeur $x$ fixée dans $E_n$, par (5), et (7),

$$\sum_{r=n}^{\infty}|T_{rs_r}(x)|\,|f_r(y)|^{s_r}<\sum_{r=n}^{\infty}\delta_r^{s_r}<\infty$$

uniformément par rapport à $y$

$$\begin{aligned}|f(0,y_m)|&\geqq|T_{ms_m}(0)|\,|f_m(y_m)|^{s_m}-\sum_{n=1}^{m-1}|T_{ns_n}(0)|\,|f_n(y_m)|^{s_n}\\&-\sum_{n=m+1}^{\infty}|T_{ns_n}(0)|\,|f_n(y_m)|^{s_n}\geqq(M_m/2^m)^{s_m}-\sum_{n=1}^{m-1}(M_m/3^m)^{s_n}\\&-\sum_{n=m+1}^{\infty}(1/2)^{s_n}\to\infty\quad(m\to\infty)\end{aligned}$$

Donc, $f(x,y)$ satisfait aux conditions demandées. C.Q.F.D.

De la proposition 1 et de l'exemple 1, nous obtenons ainsi le

**Théorème 1.2.** Pour que toute fonction $f(x,y)$ appartenant à la famille $F(x,y,D,D',E)$ soit holomorphe, il suffit que la capacité de l'ensemble $E$ soit positive. Au contraire, si $E$ est une réunion dénombrable d'ensembles compacts de capacité nulle, nous pouvons toujours construire, par quelque légère modification de l'exemple 1, une fonction, qui appartient à la famille $F(x,y,D,D',E)$ mais qui n'est pas holomorphe dans le domaine $(D,D')$.

## §2. Cas de $\mu+\nu$ variables.

Considérons le cas de l'espace produit de l'espace de $\mu$ variables complexes $X=(x_1,x_2,\cdots x_\mu)$ et de l'espace de $\nu$ variables complexes $Y=(y_1,y_2,\cdots y_\nu)$. Maintenant, il s'agit d'étendre la notion de "*capacité*" et celle d' "*ensemble de points ayant au moins un point d'accumulation*". Leurs généralisations seront données dans le théorème 2.1 et dans la définition 2. Tout d'abord, définissons la famille de fonctions

$F(X, Y, D, D', E)$, comme dans le cas de deux variables.

**Théorème 2. 1.** Soit $f(X, Y)$ une fonction *bornée* appartenant à la famille $F(X, Y, D, D', E)$. Supposons que $E$ soit un ensemble tel que toute fonction holomorphe, définie dans le domaine $D$ et s'annulant en tout point de $E$, s'annule identiqument dans $D$, et que $E$ ne soit contenu dans aucune surface caractéristique définie par une fonction holomorphe dans $D$. Alors, $f(X, Y)$ est holomorphe dans le domaine $(D, D')$.

Il suffit de le démontrer dans le cas où $D'$ est le produit de $\nu$ cercles unités. $f(X, Y)$ étant continue par rapport à $Y$, elle est sommable par rapport à $Y$. Car, pour une suite quelconque $\{Y_n\}\, n=1, 2, \cdots$ de points tendant vers $Y_0 \in D'$, la suite de fonctions $\{f(X, Y_n)\}\, n=1, 2, \cdots$ forme une famille normale. Et pour tout $X \in E$, la suite $\{f(X, Y_n)\}$ converge vers $f(X, Y_0)$ quand $n$ tend vers l'infini. Donc $f(X, Y_n) \to f(X, Y_0)$ $(n \to \infty)$ pour tout $X \in D$, en vertu de la propriété de l'ensemble $E$.

Les fonctions définies par l'intégrale de Cauchy

$$a^{(\rho)}_{n_1, 2n, \cdots, n_\nu}(x) = \frac{1}{(2\pi i)^\nu} \int_{|y_1| = \rho < 1} \cdots \int_{|y_\nu| = \rho < 1} \frac{f(X, y_1, \dots, y_\nu)}{y_1^{n_1+1} \cdots y^{n_\nu+1}} dy_1 \cdots dy_\nu$$

sont holomorphes. Car, $f(X, Y)$ étant différentiable par rapport à $X$ et ses dérivées étant bornées dans l'intérieur de $D$, elles sont dérivables sous le signe de l'intégrale. Puisqu'on a, de l'intégrale précédente, l'inégalité

$$a^{(\rho)}_{n_1 \cdots n_\nu}(x) \leqq \frac{M}{\rho^{n_1 + \cdots + n_\nu}} \quad (\text{avec } M = \sup_{(X, Y) \in (D, D')} |f(X, Y)|)$$

pour un certain nombre positif $\rho$ plus petit que 1, la fonction

$$g^{(\rho)}(X, Y) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_\nu=0}^{\infty} a^{(\rho)}_{n_1 \cdots n_\nu}(X) y_1^{n_1} y_2^{n_2} \cdots y_\nu^{n_\nu}$$

est holomorphe dans $(D, |y_1| < \rho, \cdots, |y_\nu| < \rho)$. $f(X, Y)$ étant holomorphe dans $D'$ par rapport à $Y$ pour toute valeur $X$ fixée dans $E$, on a, par l'unicité de la série de Taylor,

$$g^{(\rho)}(X, Y) = f(X, Y) \quad (\text{pour } X \in E \text{ et pour } Y \in D').$$

Donc, par la propriété de $E$, on a

$$g^{(\rho)}(X, Y) = f(X, Y) \quad (\text{pour} \quad (X, Y) \in (D, \quad |y_1| < \rho, \cdots, |y_\nu| < \rho))$$

C.Q.F.D.

**Corollaire.** Soit $f(X, Y)$ une fonction appartenant à la famille $F(X, Y, D, D', E)$. Si l'ensemble $E$ satisfait à la condition ci-dessus, il existe alors un domaine $D'_0$, dense dans $D'$, tel que $f(X, Y)$ soit holomorphe dans $(D, D'_0)$.

La démonstration peut se réaliser de la même façon que celle du théorème 1.1 (dû à I. Shimoda).

**Définition 2.** Soient $D$ un domaine sur l' espace des $X$ et soit $E$ un ensemble de points contenus dans $D$. Nous disons que l'ensemble $E$ jouit de la *propriété* $(P)$ *par rapport à* $D$, s'il n'existe pas de fonction plurisousharmonique définie dans $D$, qui prend la valeur $-\infty$ en tout point de $E$ mais qui ne se réduit pas à la constante $-\infty$ dans $D$.

Nous montrerons une condition suffisante d'après le corollaire précédent et les lemmes suivants.

**Lemme 2. 1.** Si une suite $\{u_n(X)\}\ n=1, 2, \cdots$ de fonctions plurisousharmoniques, définies et uniformément bornées dans un domaine $D$ sur l'espace des $X$, satisfait à

$$\overline{\lim_{X'\to X}}\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\ u_n(X') = 0,$$

on a presque partout $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, u_n(X) = 0$.

En effet, notons

$$P(X, r) = \{X';\ |x'_i - x_i| < r, i = 1, 2, \cdots \mu\}$$

et
$$D^{(r)} = \{X;\ P(X, r) \subset D\}$$

Les $u_n(X)$ étant plurisousharmoniques, on a

$$u_n(X) \leqq \frac{1}{V}\int_{P(X,r)} u_n(X')\,dv \quad (\text{pour } X \in D^{(r)}),$$

où $V$ est le volume de $P(X, r)$ et $dv$ est l'élément de volume de Lebesgue. Puisque $u_n(X)$ sont plurisousharmoniques, on voit, du lemme de Fatou,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, u_n(X) \leqq \frac{1}{V}\int_{P(X,r)} \overline{\lim_{n\to\infty}}\, u_n(X')\,dv \leqq 0^{4)}$$

les $u_n(X)$ étant uniformément bornées, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, u_n(X)$ l'est aussi; donc, le deuxième membre est continu. Désignons-le par $v(X)$. Alors $v(X)=0$. Car, s'il existait un point $X_0 \in D^{(r)}$ où $v(X)$ est négative, on aurait $\overline{\lim\limits_{X\to X_0}}\,\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, u_n(X) < 0$. Etant $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, u_n(X) \leqq 0$ et $r$ étant une valeur positive arbitrairement petite, on a presque partout

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, u_n(X) = 0$$

**Lemme 2.2.** Si $E$ est un ensemble ayant la propriété $(P)$ par rapport à $D$, il n'existe pas de suite de fonctions plurisousharmoniques définies dans $D$ qui possèdent les propriétés suivantes

1. $\overline{\lim\limits_{X'\to X}}\,\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, u_n(X') = 0$ (pour $X \in D$)
2. $u_n(X) \leqq -1$ (pour $X \in E$ et pour $n \geqq n(X)$)
3. $u_n(X) \leqq 0$ (pour $n > n(D_0)$, où $D_0$ est un domaine quelconque contenu dans l'intérieur de $D$.)

En effet, supposons qu'il y ait une suite $\{u_n(X)\}\ n=1,2,\cdots$ satisfaisant aux conditions. D'après le lemme précédent, en considérant max $(u_n(X), -1)$ au lieu de $u_n(X)$ et en faisant attention à la troisième condition, on a, pour un point convenable $X_0 \in D$,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, u_n(X_0) = 0.$$

Donc, il existe une suite partielle $u_{n_1}, u_{n_2}, \cdots$ telle que

$$-1/2^i \leqq u_{n_i}(X_0) \leqq 0$$

Alors, la fonction

$$u(X) = \sum_{i=1}^{\infty} u_{n_i}(X)$$

est plurisousharmonique, car elle est la limite de la série décroissante dans le domaine quelconque contenu dans l'intérieur de $D$, et elle prend la valeur $-\infty$ en tout point de $E$: mais elle ne la prend pas

4) S'il existe un point tel que $v(x) > 0$, le mesure de l'ensemble $\{X; \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, u_n(X) > 0,\}$ soit positif.

en $X_0$. Ceci contredit l'hypothèse.

**Proposition 2.** Si une fonction $f(X, Y)$ appartient à la famille $F(X, Y, D, D', E)$ et l'ensemble $E$ a la propriété $(P)$ par rapport au domaine $D$, alors $f(X, Y)$ est holomorphe dans $(D, D')$.

Il suffit de le vérifier dans le cas où $Y$ est une variable $y$ et $D'$ est le cercle unité, car, si la proposition est démontrée au cas d'une variable, $f(X, y_2, y_3, \cdots y_\nu)$ est holomorphe par rapport à $(X, y_1)$ pour toutes valeurs $(y_2, y_3, \cdots, y_\nu)$ fixées, donc, elle l'est par rapport à $(X, y_1, y_2)$ pour toutes valeurs $(y_3, \cdots, y_\nu)$ fixées, et ainsi de suite.

Par la même méthode de la démonstration du théorème 1.2, il existe un nombre positif $\eta$, tel que $f(X, y)$ puisse se développer en série

$$f(X, y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(X) y^n$$

qui converge uniformément dans l'intérieur de $(D, |y| < \eta)$. D'après le théorème de Hartogs et d'après le lemme 1 étendu au cas de plusieurs variables, on a

$$(1) \qquad \overline{\lim_{X' \to X}}\ \overline{\lim_{n \to \infty}} (1/n) \log |a_n(X)| = -\log R'(X) \begin{cases} = -\log R = \text{const.} \geqq 0 \\ \text{ou} < 0 \end{cases}$$

Pour notre but, aboutissons à une contradiction, en supposant que $-\log R'(X) = -\log R > 0$. Soit $\{D_p\}\ p = 1, 2, \cdots$ une suite croissante de domaines, contenus dans l'intérieur de $D$ et tendant vers $D$, et soit $\{\varepsilon_p\}\ p = 1, 2, \cdots$ une suite décroissante de nombres positifs tendant vers zéro. Par la définition de rayon de Hartogs $R'(X)$ et d'après le théorème de Borel-Lebesgue, on voit que, pour tout nombre $p$, il existe un nombre naturel $m(p)$ $(>p)$ tel gu'on ait

$$(2) \qquad (1/n) |\log a_n(X)| \leqq -\log R + \varepsilon_p \qquad (\text{pour } X \in D_p \text{ et pour } n \geqq m(p)).$$

Alors, les fonctions plurisousharmoniques

$$u_n(X) = (-2/\log R) [(1/n) \log |a_n(X)| + \log R - \varepsilon_{p_n}],$$

où $p_n$ est un nombre entier quelconque tel que $m(p_n + 1) \geqq n \geqq m(p_n)$, satisfont aux conditions suivantes:

1. $\overline{\lim_{X'\to X}}\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\ u_n(X')=(-2/\log R)\overline{\lim_{X'\to X}}\ \overline{\lim_{n\to\infty}}[(1/n)\log|a_n(X)|$

$$+\log R-\varepsilon_{p_n}]=0,$$

2. $f(X,y)$ étant holomorphe dans $\{|y|<1\}$ par rapport à $y$, pour toutes valeurs $X$ fixées dans $E$,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ u_n(X)\leqq -2<-1,$$

3. $u_n(X)\leqq 0$ pour $X\in D_0$ et pour $n\geqq m(p)$, où $D_0$ est un domaine quelconque contenu dans l'intérieur de $D$ et $p$ est un nombre tel que $D_p\supset D_0$.

Ceci contredit le lemme 2.2. C.Q.F.D.

Pour donner le contre-exemple, nous aurons besoin du lemme suivant.

**Lemme 2.3.** Soit $V(X)$ une fonction plurisousharmonique qui est définie dans un domaine $D$ sur l'espace des $X$ et prend la valeur $-\infty$ en tout point de l'ensemble compact $E$, et soit $\{u_n(X)\}\ n=1,2,\cdots$ une suite de fonctions plurisousharmoniques définies dans $D$ et supérieurement bornées uniformément dans l'intérieur de $D$. Alors, si

$$V(X)\geqq\overline{\lim_{n\to\infty}}\ u_n(X),$$

$u_n(X)$ convergent vers $-\infty$ uniformément pour tout point $X\in E$.

En effet, soit $X_0$ un point quelconque contenu dans $E$. Pour tout nombre négatif $m$, il y a, en vertu de la semi-continuité inférieure, un voisinage $U(X_0)$ de $X$ contenu dans l'intérieur de $D$, tel qu'on ait

$$V(X)<2m \quad (\text{pour } X\in U(X_0))$$

En posant $u'_n(X)=\max(2m, u_n(X))$ et

$$v_n(X)=\frac{1}{V}\int_{p(X,r)}u'_n(X')dv \quad (X\in U(X_0)^{(r)}),^{5)}$$

on a

$$u_n(X)\leqq u'_n(X)\leqq v_n(X) \quad (X\in U(X_0)^{(r)}).$$

Car, $u'_n(X)$ sont aussi plurisousharmoniques. Les $u'_n(X)$ étant uniformément bornées, $v_n(X)$ le sont aussi et elles sont, de plus, également

5) Quant aux notations, voir le lemme 2.1.

continues dans $U(X_0)^{(r)}$. Donc, elles forment une famille normale, quand on suppose que $U(X_0)^{(r)}$ est compact, sans perdre la géréralité.

D'après le lemme de Fatou et d'après les inégalités suivantes:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, v_n(X)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{1}{V}\int u_n'(X')dv\leqq\frac{1}{V}\int\overline{\lim_{n\to\infty}}\, u_n'(X')dv$$

$$\leqq\frac{1}{V}\int\max(V(X),2m)dv\leqq 2m,$$

on voit que la limite de toute suite partielle quelconque de $\{v_n(X)\}$, qui converge uniformément, est plus petite que $2m$. Donc, il existe un nombre $n_0$ tel qu'on ait

$$u_n(X)\leqq v_n(X)<m \quad (\text{pour } n>n_0 \text{ et pour } X\in U(X_0)^{(r)}).$$

L'ensemble $E$ étant compact, il existe, d'après le lemme de Borel-Lebesgue, un nombre entier positif $N$ tel qu'on ait

$$u_n(X)<m \quad (\text{pour } X\in E \text{ et pour } n>N). \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

**Exemple 2.** Soient $D$ un domaine d'holomorphie univalent fini, $\{E_n\}\, n=1,2,\cdots$ une suite d'ensembles compacts contenus dans $D$, et $V(X)$ une fonction plurisousharmonique définie dans $D$ qui prend la valeur $-\infty$ en tout point de $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ mais qui ne se réduit pas à la constante $-\infty$ dans $D$. Alors, il existe une fonction $f(X,y)$ définie dans $(D,D')$, et telle que

1. $f(X,y)\in F(X,y,D,D',E)$

et que

2. $f(X,y)$ ne soit pas holomorphe en tout point de $(D,D')$, où $D'$ est un domaine univalent fini sur le plan des $y$.

Comme le domaine sur l'espace des $(X,w)$

$$D_1=\{(X,w)\,;\, X\in D\,|w|<e^{-V(X)}\}$$

est, d'après M. Bremerman, aussi un domaine d'holomorphie, [1] il existe une fonction

$$F(X,w)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(X)w^n$$

telle que son domaine d'holomorphe soit $D_1$. Quant au rayon de

Hartogs, on a

$$-\log R'(X) = V(X) = \overline{\lim_{X'\to X}}\ \overline{\lim_{n\to\infty}}(1/n)\log|a_n(X)| \quad (X\in D).$$

Par la même méthode qui a été utilisée dans la démonstration de la proposition 2, on peut démontrer que $(1/n)\log|a_n(X)|$ est supérieurement borné uniformément dans l'intérieur de $D$. On a ensuite

$$(1/n)\,|\log a_n(X)| \to -\infty \quad \text{(uniformént)} \quad (X\in E_n)$$

d'aprés le lemme 2. 3. D'ailleurs, on peut prendre un point $X_0$, un nombre $k$, et une suite partielle $\{a_{n_i}(X)\}\, i=1, 2, \cdots$, de façon qu'on ait

$$\lim_{n\to\infty}(1/n)\log|a_{n_i}(X_0)| = k \neq \infty.$$

Nous construisons une fonction par la série

$$f(X, y) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{n_i}(X) f_{n_i}(y)^{s_i},$$

suivant la même méthode qui a été utilisée dans l'exemple 1. Alors, elle satisfait aux conditions demandées. C.Q.F.D.

Nous sommes ainsi arrivés au

**Théorème 2. 2.** (Conclusion). Pour que toute fonction $f(X, Y)$ appartenant à la famille $F(X, Y, D, D', E)$ soit holomorphe, il suffit que l'ensemble $E$ jouisse de la propriété $(P)$ par rapport au domaine $D$. Au contraire, si l'ensemble $E$ ne jouit pas de la propriété $(P)$ par rapport à $D$, qu'il est une réunion dénombrable d'ensembles compacts et que $D$ est un domaine d'holomorphie, la famille $F(X, Y, D, D', E)$ contient des fonctions qui ne sont pas holomorphes dans $(D, D')$.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] H. J. Bremermann, On the Conjecture of the Equivalence of the Plurisubharmonic Functions and the Hartogs Functions. Math. Ann., **131** (1956), 76–86.

[2] F. Hartogs, Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhangiger Veränderlichen, insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenzen einer Veränderlichen fortschreiten. Math. Ann., **62** (1906), 1–88.

[3] M. Hukuhara, L'extension du théorème d'Osgood et de Hartogs. (en Japonais) Kansû-hôteisiki oyobi Ôyô-kaiseki (1930), 48–49.

[4] W. F. Osgood, Note über analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen. Math. Ann., **52** (1899), 462–464.

[5] W. F. Osgood, Zweite Note über analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen. Math. Ann., **53** (1900), 461–464.
[6] I. Shimoda, Notes on the functions of two complex variables. J. Gakugei Tokushima Univ., **8** (1957), 1–3.