Publ. RIMS, Kyoto Univ. Ser. A
Vol. 3 (1967), pp. 129—137

Un théorème d'existence pour une équation aux dérivées partielles parabolique non linéaire, II

Par

Masuo HUKUHARA

1. Introduction.

Dans notre article précédent [5], nous avons traité l'équation parabolique non linéaire

$$\partial^2 y/\partial x^2 = g(t, x, y, \partial y/\partial t).$$

Nous voulons maintenant étendre notre résultat au cas de l'équation suivante

$$\partial^2 y/\partial x^2 = g(t, x, y, \partial y/\partial x, \partial y/\partial t), \tag{1.1}$$

dont le second membre dépend de $\partial y/\partial x$. La méthode s'appuie sur un théorème d'existence dû à M. Nagumo [4], dont l'énoncé voici.

Considérons l'équation différentielle ordinaire du second ordre

$$d^2 y/dx^2 = g(x, y, dy/dx), \tag{1.2}$$

dont le second membre est continu dans le domaine fermé

$$\alpha \leqq x \leqq \alpha', \quad \underline{\omega}(x) \leqq y \leqq \bar{\omega}(x), \quad \underline{\Omega}(x, y) \leqq y' \leqq \bar{\Omega}(x, y);$$

$\underline{\omega}(x)$ *et* $\bar{\omega}(x)$ *sont des fonctions* $\in C^2[\alpha, \alpha']$ *telles que l'on ait*

$$\underline{\omega}(\alpha') = \bar{\omega}(\alpha) = \beta, \quad \underline{\omega}(\alpha') \leqq \beta' \leqq \bar{\omega}(\alpha'), \tag{1.3}$$

$$\underline{\omega}''(x) \geqq g(x, \underline{\omega}(x), \underline{\omega}'(x)), \tag{$\underline{1.4}$}$$

$$\bar{\omega}''(x) \leqq g(x, \bar{\omega}(x), \bar{\omega}'(x)); \tag{$\overline{1.4}$}$$

$\underline{\Omega}(x, y)$ *et* $\bar{\Omega}(x, y)$ *sont des fonctions appartenant à*

$$C^1\{(x, y);\ \alpha \leqq x \leqq \alpha', \underline{\omega}(x) \leqq y \leqq \bar{\omega}(x)\}$$

Received May 8, 1967.

et satisfaisant aux inégalités

$$(1.5)\qquad \underline{\Omega}(\alpha,\beta)\leqq\underline{\omega}'(\alpha)\leqq\bar{\omega}'(\alpha)\leqq\bar{\Omega}(\alpha,\beta),\ \underline{\Omega}(x,y)\leqq\bar{\Omega}(x,y),$$

$$(\underline{1.6})\qquad g(x,y,\underline{\Omega}(x,y))-\underline{\Omega}_x(x,y)-\underline{\Omega}_y(x,y)\underline{\Omega}(x,y)>0,$$

$$(\overline{1.6})\qquad g(x,y,\bar{\Omega}(x,y))-\bar{\Omega}_x(x,y)-\bar{\Omega}_y(x,y)\bar{\Omega}(x,y)<0.$$

Sous ces hypothèses il existe au moins une solution de l'équation (1.2) *satisfaisant aux conditions suivantes*:

$$(1.7)\qquad y(\alpha)=\beta,\quad y(\alpha')=\beta',$$

$$(1.8)\qquad \underline{\omega}(x)\leqq y(x)\leqq\bar{\omega}(x),$$

$$(1.9)\qquad \underline{\Omega}(x,y(x))\leqq y'(x)\leqq\bar{\Omega}(x,y(x)).$$

Remarque. Comme nous avons remarqué dans l'article précédent, $\bar{\omega}'(x)$ peut admettre la discontinuité de première espèce. Si elle est discontinue en ξ, il suffit de supposer

$$\bar{\omega}'(\xi-0)>\bar{\omega}'(\xi+0).$$

$\bar{\omega}''(x)$ aussi peut admettre la discontinuité de première espèce. Si elle est discontinue en ξ, il suffit de supposer que $\bar{\omega}''(\xi\pm0)$ sont au plus égales au second membre de $(\overline{1.4})$, où x est remplacé par ξ.

Il en est de même de $\underline{\omega}(x)$.

2. Enonce du théorème d'existence.

Nous supposons que la fonction $g(t,x,y,y',z)$ *est continue et admet les dérivées partielles* g_t, g_y, $g_{y'}$, g_z *satisfaisant aux inégalités*

$$(2.1)_t\qquad |g_t(t,x,y,y',z)|\leqq A,$$

$$(2.1)_y\qquad |g_y(t,x,y,y',z)|\leqq B,$$

$$(2.1)_{y'}\qquad |g_{y'}(t,x,y,y',z)|\leqq B',$$

$$(2.1)_z\qquad 0<\lambda\leqq g_z(t,x,y,y',z)\leqq\mu,$$

$$(2.2)\qquad |g_w(t,x,y,y',z)-g_w(\bar{t},x,\bar{y},\bar{y}',\bar{z})|$$
$$\leqq H|t-\bar{t}|+K|y-\bar{y}|+K'|y'-\bar{y}'|+L|z-\bar{z}|$$

dans le domaine fermé

(2. 3) $\qquad 0 \leqq t \leqq T_0, \quad 0 \leqq x \leqq 1, \quad |y| \leqq \beta, \quad |y'| \leqq \beta', \quad |z| \leqq \gamma,$

où w *représente l'une quelconque des variables* t, y, y', z.

Sous ces hypothèses, si $T(\leqq T_0)$ *est un nombre positif assez petit, l'équation* (1. 1) *admet au moins une solution définie dans un domaine fermé*

(2. 4) $$0 \leqq t \leqq T, \quad 0 \leqq x \leqq 1$$

et telle que

(2. 5) $$y(0, x) = 0, \quad y(t, 0) = 0, \quad y(t, 1) = 0.$$

Si l'on considère (1. 1) comme équation qui définit $\partial y/\partial t$ en fonction de t, x, y, $\partial y/\partial x$, $\partial^2 y/\partial x^2$, on obtient une fonction uniforme à cause des inégalités $(2.1)_z$. Nous pouvons donc écrire l'équation donnée sous la forme

(2. 6) $$\partial y/\partial t = f(t, x, y, \partial y/\partial x, \partial^2 y/\partial x^2).$$

3. Définition des fonctions y_n, z_n, u_n.

Nous définissons successivement les fonctions y_n, z_n, u_n comme dans l'article précédent, c'est-à-dire par les formules suivantes

(3. 1) $$\begin{cases} t_n = nh, \quad T = Nh; \\ y_0 = o; \\ y_n(0) = y_n(1) = 0: \\ z_n = \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h} = f(t_n, x, y_n, y'_n, y''_n), \\ u_n = \dfrac{z_n - z_{n-1}}{h}. \end{cases}$$

La valeur de T sera déterminée au n° 6. Nous désignons par P_N la fonction polygonale dont les sommets sont (t_n, y_n), c'est-à-dire nous posons

$$P_N(t) = \frac{(t - t_{n-1}) y_n + (t_n - t) y_{n-1}}{h}$$

peur $t_{n-1} \leqq t \leqq t_n$. On a alors

$$(3.2) \qquad D^+P_N(t)=z_n$$

pour $t_{n-1}\leqq t<t_n$.

Nous appliquerons le théorème d'existence de M. Nagumo à l'équation en $z=z_n$ qui s'écrit

$$(3.3) \qquad hz''=g(t_n, x, y_{n-1}+hz, y'_{n-1}+hz', z) \\ -g(t_{n-1}, x, y_{n-1}, y'_{n-1}, z_{n-1}).$$

4. Limitation des z_n.

La condition à laquelle doit satisfaire la fonction

$$\bar{\omega}(x)=z_{n-1}+hu$$

pour qu'elle soit majorante pour l'équation (3. 3), s'écrit

$$h^2u''\leqq g(t_n, x, y_{n-1}+hz_{n-1}+h^2u, y'_{n-1}+hz'_{n-1}+h^2u', z_{n-1}+hu) \\ -2g(t_{n-1}, x, y_{n-1}, y'_{n-1}, z_{n-1})+g(t_{n-2}, x, y_{n-2}, y'_{n-2}, z_{n-2}).$$

Si $u>u_{n-1}$, le second membre est au moins égal à

$$-h^2(H+K\|z_{n-1}\|+K'\|z'_{n-1}\|+L\|u_{n-1}\|)(1+\|z_{n-1}\|+\|z'_{n-1}\|+\|u_{n-1}\|) \\ -Bh^2\cdot u-B'h^2|u'|+\lambda h(u-u_{n-1}).$$

Si nous supposons

$$(4.1) \qquad \|z_{n-1}\|\leqq c_{n-1}, \quad \|z'_{n-1}\|\leqq C', \quad \|u_{n-1}\|\leqq d_{n-1},$$

la condition en u est remplie lorsque

$$(4.2) \qquad hu''\leqq -h(1+C'+c_{n-1}+d_{n-1})(H+K'C'+Kc_{n-1}+Ld_{n-1}) \\ -Bh\cdot u-B'h|u'|+\lambda(u-u_{n-1}).$$

Cette condition est aussi suffisante pour que la fonction

$$\underline{\omega}(x)\equiv z_{n-1}-u$$

soit minorante pour l'équation (3. 3). On aura donc

$$(4.3) \qquad |z_n-z_{n-1}|\leqq u.$$

Posons

$$u=\begin{cases} a_n x - bx^2 & \text{pour} \quad 0 \leqq x \leqq \delta_n, \\ d_n & \text{pour} \quad \delta_n \leqq x \leqq 1, \end{cases}$$

ce qui exige que l'on ait

$$a_n\delta_n - b\delta_n^2 = d_n \quad \text{ou} \quad a_n = b\delta_n + d_n/\delta_n,$$

$$a_n - 2b\delta_n \geqq 0 \quad \text{ou} \quad a_n \geqq 2b\delta_n.$$

Ces deux conditions sont remplies si l'on prend

$$a_n = \sqrt{2bd_n}, \quad \delta_n = \sqrt{d_n/b}. \tag{4.4}$$

La condition (4. 2) devient pour $\delta_n \leqq x \leqq 1$

$$\begin{aligned} &\lambda(d_n - d_{n-1}) \\ &\geqq h(1+C'+c_{n-1}+d_{n-1})(H+K'C'+Kc_{n-1}+Ld_{n-1})+Bhd_n. \end{aligned}$$

Cette condition est remplie lorsque

$$\begin{aligned} d_n = d_{n-1} \\ + h\cdot \frac{(1+C'+c_{n-1}+d_{n-1})(H+K'C'+Kc_{n-1}+Ld_{n-1})+Bd_{n-1}}{\lambda - Bh}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Posons ensuite

$$c_n = c_{n-1} + hd_n. \tag{4.6}$$

La croissance de la suite $\{d_n\}$ implique celle des suites $\{a_n\}$, $\{c_n\}$ *et* $\{\delta_n\}$.

La condition (4. 2) est remplie pour $0 \leqq x \leqq \delta_n$ lorsque

$$2b \geqq (1+C'+c_{n-1}+d_{n-1})(H+K'C'+Kc_{n-1}+Ld_{n-1})+Bd_n+B'a_n.$$

Si nous supposons

$$c_{n-1} \leqq C, \quad d_{n-1} \leqq D, \tag{4.7}$$

il suffit que l'on ait

$$\begin{aligned} 2b \geqq (1+C+C'+D)(H+KC+K'C'+LD) \\ +BD+2B'\sqrt{bD}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

La fonction u est alors complètement déterminée et on a l'inégalité (4. 3), qui implique

$$\|z_n - z_{n-1}\| \leqq hd_n.$$

5. Limitation de z'_n.

Nous prenons pour $\overline{\Omega}=\varphi(x)$ une fonction ne dépendant que de x. La condition $(\overline{1.6})$ peut alors s'écrire

$$h\varphi'(x)>g(t_n, x, y_{n-1}+hz, y'_{n-1}+h\varphi(x), z) \\ -g(t_{n-1}, x, y_{n-1}, y'_{n-1}, z_{n-1}),$$

où z parcourt l'intervalle

$$|z-z_{n-1}|\leqq d_n.$$

On peut prendre pour φ la solution de l'équation différentielle

$$\varphi'(x)=B'\varphi(x)+A+BC+\mu D$$

avec la condition initiale

$$\varphi(0)=2\sqrt{bD}\ (>a_n).$$

On obtient ainsi pour $\overline{\Omega}$ l'expression

$$\varphi(x)=\frac{A+BC+\mu D}{B'}(e^{B'x}-1)+2\sqrt{bD}\cdot e^{B'x}. \tag{5.1}$$

On verra dans la suite que l'on peut supposer

$$\begin{aligned} C'&\geqq\varphi(1) \\ &=\frac{A+BC+\mu D}{B'}(e^{B'}-1)+2\sqrt{bD}\cdot e^{B'}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

On aura alors

$$|z'_n|\leqq C' \tag{5.3}$$

6. Légitimité des évaluations de z_n.

Prenons une valeur positive C' plus grande que A/B' et puis une valeur positive b telle que l'on ait

$$2b>(1+C')(H+K'C').$$

Si l'on prend ensuite les constantes assez petites C et D, on aura les inégalités (5.2) et (4.8).

Déterminons successivement les valeurs c_n et d_n par les formules (4.5) et (4.6) avec les valeurs initiales $c_0=d_0=0$ et puis les valeurs

b_n et b'_n par

$$b_n = b_{n-1} + hc_n, \quad b'_n = b'_{n-1} + hC'_n, \tag{6.1}$$

avec les valeurs initiales $b_0 = b'_0 = 0$. Désignons par $Y_N(t)$, $Z_N(t)$, $U_N(t)$ les fonctions polygonales dont les sommets sont (nh, b_n), (nh, c_n), (nh, d_n) respectivement. Les points (nh, b'_n) se trouvent sur la droite qui est le graphique de la fonction linéaire tC'. Si l'on fait $N \to \infty$, les fonctions $X_N(t)$, $Z_N(t)$, $U_N(t)$ convergent respectivement vers les fonctions $Y(t)$, $Z(t)$, $U(t)$ qui constituent la solution du système différentiel

$$\begin{cases} \dfrac{dY}{dt} = Z, \quad \dfrac{dZ}{dt} = U, \\ \dfrac{dU}{dt} = \dfrac{1}{\lambda}\{(1 + C' + Z + U)(H + K'C' + KZ + LU) + BU\}, \\ Y(0) = Z(0) = U(0) = 0. \end{cases} \tag{6.2}$$

La convergence est uniforme dans un intervalle compact où $Y(t)$, $Z(t)$, $U(t)$ sont définies.

Prenons une valeur positive $T (\leqq T_0)$ telle que

$$\begin{cases} Y(T) < \beta, \; TC' < \beta', \; U(T) < D, \\ Z(T) < \min\{C', \gamma\}. \end{cases} \tag{6.3}$$

Si alors N est assez grand, les fonctions $Y_N(t)$, $Z_N(t)$, $U_N(t)$ sont définies certainement dans l'intervalle $0 \leqq t \leqq T$ et on a

$$\begin{cases} 0 \leqq Y_N(t) \leqq \beta, \quad 0 \leqq U_N(t) \leqq D, \\ 0 \leqq Z_N(t) \leqq \min\{\gamma, C'\}, \end{cases} \tag{6.4}$$

pour $0 \leqq t \leqq T$.

Les inégalités

$$|y_k| \leqq b_k, \tag{6.5$_y$}$$

$$|y'_k| \leqq khC', \tag{6.5$_{y'}$}$$

$$|z_k| \leqq c_k, \tag{6.5$_z$}$$

$$|z'_k| \leqq C', \tag{6.5$_{z'}$}$$

$$|u_k| \leqq d_k \tag{6.5$_u$}$$

sont évidemment satisfaites pour $k=0$. Supposons donc qu'elles soient remplies pour $k=n-1<N$. Puisque u définie au n° 4 est non négative et ne surpasse pas d_n, l'inégalité $|z-z_{n-1}|\leqq u$ implique

$$\text{(6.6)}\qquad \begin{cases} |z|\leqq c_n=Z_N(nh)\leqq\gamma, \\ |y_{n-1}+hz|\leqq b_n=Y_N(nh)\leqq\beta, \end{cases}$$

et on voit que $z_{n-1}+u$ est une fonction majorante pour (3.3) tandis que $z_{n-1}-u$ est une fonction minorante pour (3.3).

Grâce à l'inégalité (5.2), la fonction $\varphi(x)$ définie par (5.1) ne surpasse pas C'. Puisque l'on a

$$d_n=U_N(nh)\leqq D$$

et

$$|y'_{n-1}+h\varphi(x)|\leqq b'_{n-1}+hC'=nhC'\leqq\beta',$$

les fonctions

$$\underline{\Omega}(x)=-\varphi(x),\quad \overline{\Omega}(x)=\varphi(x)$$

satisfait aux conditions de M. Nagumo relatives à $\underline{\Omega}$ et $\overline{\Omega}$. Le théorème d'existence cité au n° 2 est donc applicable et les inégalités (6.5) subsistent pour $k=n$.

Par conséquent les fonctions y_k, z_k, u_k sont certainement définies pour $k=0, 1, \cdots, N$ et on a les inégalités (6.5).

7. Parachèvement de la démonstration du théorème d'existence.

Comme nous avons expliqué dans notre article précédent, il suffit, pour comléter la démonstration du théorème d'existence, de montrer la compacité des suites $\{P_N\}$ et $\{D^+P_N\}$, et pour démontrer la compacité des suites, il suffit de montrer l'équicontinuité des suites et la compacité des suite en chaque valeur de la variable indépendante t.

Puisque l'on a (3.2), $(6.5)_z$ et $c_k\leqq C$, la suite $\{P_N\}$ est équicontinue. Puisque l'on a $(6.5)_y$, $(6.5)_{y'}$ et $b_k\leqq\beta$, $khC'\leqq TC'$, la suite $\{P_N(t)\}$ est compacte si l'on fixe la valeur de t. Il en résulte la compacité de la suite de fonctions $\{P_N\}$.

Puisque l'on a (3.2), $(6.5)_z$, $(6.5)_{z'}$ et $c_k\leqq\gamma$ la suite $\{D^+P_N(t)\}$

est comacte si l'on fixe la valeur de t. Puisque l'on a $(6.5)_u$ et $d_k \leqq D$, on a $|u_k| \leqq D$, et la dernière des relation (3.1) montre l'équi-continuité de la suite de fonctions $\{D^+P_N\}$.

La démonstration du théorème d'existence est donc complètement achevée.

BIBLIOGRAPHIE

M. Hukuhara,

[1] Cauchy no Oresen ni yoru Kai no Sonzai Syômei, Kansû Hôteisiki **14** (1961), 3–10.

[2] Le problème aux limites pour un système de deux équations différentiells ordinaires, J. Math. Soc. Japan. **3** (1951), 99–103.

[3] Une propriété de l'application $f(x, y, y', \cdots, y^{(n)})$, Funkcial. Ekvac. **5** (1963), 135–144.

[4] La propriété de Kneser globale et le problème aux limites, Publ. RIMS, Kyoto Univ. Ser. A **1** (1966), 129–148.

[5] Un théorème d'existence pour une équation aux dérivées partielles parabolique non linéaire, Japanese J. Math. **36** (1967), 57–66.

T. Kato,

[1] Integration of the equation of evolution in a Banach space, J. Math. Soc. Japan **5** (1953), 208–234.

M. Nagumo,

[1] Über die Differentialgleichung $y''=f(x, y, y')$, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan **19** (1937), 129–148.

[2] Über das Randwertproblem der nicht linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, Ibid. **24** (1942), 845–851.

[3] Eine Art der Randwertaufgabe von Systemen Gewöhnlicher Differentialgleichungen, I, II, Ibid. **25** (1943), 221–226, 384–390.

[4] Dai-2-kai Zyôbibunhôteisiki no Kyôkaiti Mondai, I, II, Kansû Hôteisiki, No. 5 (1939), 27–34; No. 6 (1939), 37–44.

[5] $y''=f(x, y, y')$ no Kyôkaiti Mondai ni tuite, I, II, Ibid., No. 30 (1941), 36–46; No. 31 (1942), 50–52.

H. Okamura,

[1] $y''=f(x, y, y')$ ni tuite, I, II, III, Kansû Hôteisiki, No. 27 (1941), 27–35; No. 30 (1941), 14–19; No. 31 (1942), 32–40.