Publ. RIMS, Kyoto Univ. Ser A
Vol. 3 (1967), pp. 243—270

Familles knesériennes et le problème aux limites pour l'équation différentielle ordinaire du second ordre

Par

Masuo HUKUHARA

Concernant le problème aux limites pour l'équation différentielle ordinaire du second ordre

(1) $$d^2x/dt^2 = f(t, x, dx/dt)$$

on sait de beaux résultats de M. Nagumo [4, 5, 7] et de H. Okamura [1]. J'ai traité le système de deux équations différentielles

(2) $$dx/dt = f(t, x, y), \quad dy/dt = g(t, x, y)$$

avec la condition aux limites

(3) $$x(\alpha) = \beta, \quad y(\alpha') = \beta',$$

où α, α', β, β' sont des valeurs données [6]. Comme nous avons remarqué plusieurs fois, l'équation différentielle (1) avec une condition aux limites peut se transformer au système différentiel (2) avec la condition (3).

Supposons que les fonctions f et g soient définies dans un compact $\mathfrak{D}$ limité par deux plans $t=\alpha$, $t=\alpha'$ et que les ensembles

(4) $$\mathfrak{E} = \{(\alpha, \beta, y) \in \mathfrak{D}\}, \quad \mathfrak{E}' = \{(\alpha', x, \beta') \in \mathfrak{D}\}$$

soient des segments de droites. Alors le problème s'énonce: *Trouver une courbe solution de* (2) *qui joint* $\mathfrak{E}$ *à* $\mathfrak{E}'$.

Donnons au lieu de (3) deux relations

(5) $$\varphi(x, y) = 0, \quad \psi(x, y) = 0$$

et proposons-nous de trouver des solutions satisfaisant à ces relations

Received August 21, 1967.

respectivement pour $t=\alpha$, $t=\alpha'$. On prend alors sur les plans $t=\alpha$, α' les deux courbes $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$ sur lesquelles les relations (5) sont satisfaites et le problème s'énonce comme tout à l'heure.

1. Familles de caractéristiques.

Soient f et g des fonctions définies respectivement dans $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}'$. Si $\mathfrak{C}$ est une partie de $\mathfrak{C}'$ et si f et g coïncident dans $\mathfrak{C}$, nous dirons que f est une *partie* de g et que g est une *extension* de f. Dans la suite nous supposerons toujours que le domaine de définition est un intervalle compact.

$\boldsymbol{F}$ étant un ensemble dont les éléments sont des fonctions, un élément f de $\boldsymbol{F}$ sera dit *maximal* s'il n'y a dans $\boldsymbol{F}$ aucune extension de f autre qu'elle même.

Définition 1.1. *Famille de caractéristiques* est l'ensemble de fonctions continues à valeurs dans R^n (ou courbes dans $R\times R^n$) satisfaisant aux conditions suivantes et ses éléments sont appelés *caractéristiques*:

1° Chaque caractéristique est une fonction continue à valeurs dans R^n définie dans un intervalle compact (qui peut se réduire à un point);

2° Une partie d'une caractéristique est aussi une caractéristique, c'est-à-dire si une fonction coïncide avec une des caractéristiques dans l'intervalle où elle est définie, elle est une caractéristique;

3° La famille est un ensemble compact dans l'espace distancié $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}(R^{n+1})$, où la distance $\mathrm{Dist}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ est définie par

$$\mathrm{Dist}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})=\inf\{\delta;\ O_\delta(\mathfrak{A})\supset\mathfrak{B},\ O_\delta(\mathfrak{B})\supset\mathfrak{A}),$$

$O_\delta(\mathfrak{C})$ désignant le δ-voisinage de $\mathfrak{C}$:

$$O_\delta(\mathfrak{C})=\{P;\ \mathrm{dist}(P, \mathfrak{C})<\delta\}.$$

4° Si deux caractéristiques coïncident en une valeur α de la variable indépendante t, la fonction qui coïncide avec l'une d'elles pour $t\leqq\alpha$ et avec l'autre pour $t\geqq\alpha$ est aussi une caractéristique;

5° Les extrémités des caractéristiques maximales se trouvent sur la frontière de l'ensemble engendré par les caractéristiques.

Définition 1.2. Si $\boldsymbol{F}$ est une famille de caractéristiques, l'ensemble (dans $R \times R^n$) rempli par les caractéristiques de $\boldsymbol{F}$ est appelé domaine fondamental de $\boldsymbol{F}$; il est désigné par $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(\boldsymbol{F})$.

On a immédiatement la

Proposition 1.1. *Le domaine fondamental d'une famille de caractéristiques est un ensemble compact dans $R \times R^n$.*

Définition 1.3. Soit $\mathfrak{D}'$ une partie fermée de $\mathfrak{D}(\boldsymbol{F})$. L'ensemble des caractéristiques de $\boldsymbol{F}$ contenues dans $\mathfrak{D}'$ est appelée *sous-famille de $\boldsymbol{F}$ restreinte* à $\mathfrak{D}'$. Nous la désignons par $\boldsymbol{F}(\mathfrak{D}')$.

On voit sans peine que l'on a les propositions suivantes.

Proposition 1.2. *Si $\mathfrak{D}'$ est une partie fermée de $\mathfrak{D}$, la sous-famille de $\boldsymbol{F}$ restreinte à $\mathfrak{D}'$ est aussi une famille de caractéristiques.*

Proposition 1.3. *Soient $\{\mathfrak{E}_\lambda\,;\ \lambda \in \Lambda\}$ un ensemble de parties compactes de $\mathfrak{D}$. Si leur intersection $\mathfrak{E} = \bigcap \mathfrak{E}_\lambda$ n'est pas vide, on a*

$$\boldsymbol{F}(\mathfrak{E}) = \bigcap \boldsymbol{F}(\mathfrak{E}_\lambda),$$

c'est-à-dire la sous-famille de $\boldsymbol{F}$ restreinte à $\mathfrak{E}$ est l'intersection des sous-familles de $\boldsymbol{F}$ restreintes aux $\mathfrak{E}_\lambda$.

Dèfinition 1.4. $\mathfrak{E}$ étant une partie quelconque de $R \times R^n$, l'ensemble des points de $\mathfrak{E}$ dont les abscisses sont au plus (moins) égales à τ est appelé *ensemble $\mathfrak{E}$ tronqué à droite* (*gauche*) par l'hyperplan $t = \tau$. Nous le désignons par $\mathfrak{E}^d_\tau$ ($\mathfrak{E}^g_\tau$).

Définition 1.5. $\boldsymbol{F}$ étant une famille de caractéristiques, $\boldsymbol{F}(\mathfrak{D}^d_\tau)$ est appelé *sous-famille de $\boldsymbol{F}$ tronquée à droite* par l'hyperplan $t = \tau$, et nous le désignons par $\boldsymbol{F}^d_\tau$. Nous définissons de même *sous-famille tronquée à gauche*; elle est désignée par $\boldsymbol{F}^g_\tau$.

2. Classification des points frontières.

Définition 2.1. Les extrémités gauches des caractéristiques maximales sont appelés *points extrêmes gauches* de $\mathfrak{D}$ et l'ensemble des points extrêmes gauches *frontière gauche* de $\mathfrak{D}$; la frontière gauche est désignée par $\mathfrak{B}^g = \mathfrak{B}^g(\boldsymbol{F})$. On définit de même *points extrêmes droits* et *frontière droite*; celle-ci est désignée par $\mathfrak{B}^d = \mathfrak{B}^d(\boldsymbol{F})$.

Définition 2.2. Une caractéristique x est applée *demi-caractéristique gauche maximale* si son extrémité gauche appartient à $\mathfrak{B}^g$. On définit de même *demi-caractéristique droite maximale.*

Nous désignons par $\boldsymbol{F}^+(\mathfrak{E})$ l'ensemble des parties des demi-caractéristiques droites maximales dont les extrémités gauches se trouvent dans $\mathfrak{E}$. La famille $\boldsymbol{F}^+(\mathfrak{E})$ tronquée à droite par l'hyperplan $t=\tau$ est désignée par $\boldsymbol{F}^+_\tau(\mathfrak{E})$. On définit de même l'ensemble des caractéristiques $\boldsymbol{F}^-(\mathfrak{E})$ et $\boldsymbol{F}^-_\tau(\mathfrak{E})$.

On a immédiatement la

Proposition 2.1. *Si* $\mathfrak{E}$ *est une partie compacte de* $\mathfrak{D}$, $\boldsymbol{F}^\pm(\mathfrak{E})$ *et* $\boldsymbol{F}^\pm_\tau(\mathfrak{E})$ *sont des familles de caractéristiques.*

Remarque. La réunion $\boldsymbol{F}^+(\mathfrak{E}) \cup \boldsymbol{F}^-(\mathfrak{E})$ n'est pas une famille de caractéristiques.

Définition 2.3. Considérons un point frontière A qui n'est pas un point extrême droit. Chaque caractéristique maximale de $\boldsymbol{F}^+(A)$ est définie dans un intervalle avec une longueur positive. On peut distinguer deux cas suivant que les points de $\mathfrak{Z}^+(A) = \mathfrak{D}(\boldsymbol{F}^+(\mathfrak{E}))$ assez voisins de A se trouvent à l'intérieur de $\mathfrak{D}$ sauf le point A ou non. Dans le premier cas A est un point isolé de $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{Z}^+(A)$ tandis que dans le second cas A en est un point d'accumulation. Désignons par $\mathfrak{B}^+$ l'ensemble des points frontières tels que l'on ait le premier cas, et par $\mathfrak{B}_+$ celui des points frontières tels que l'on ait le second cas. On définit de même les ensemble $\mathfrak{B}^-$, $\mathfrak{B}_-$.

3. Zone d'émission.

Définition 3.1. Le domaine fondamental $\mathfrak{D}(\boldsymbol{F}^+(\mathfrak{E}))$ de la famille $\boldsymbol{F}^+(\mathfrak{E})$ est applé *zone d'émission à droite* de $\mathfrak{E}$; il est désigné par $\mathfrak{Z}^+(\mathfrak{E}) = \mathfrak{Z}^+(\mathfrak{E}; \boldsymbol{F})$. L'ensemble $\mathfrak{Z}^+(\mathfrak{E}; \boldsymbol{F})$ tronqué à droite par l'hyperplan $t=\tau$ est désigné par $\mathfrak{Z}^+_\tau(\mathfrak{E}) = \mathfrak{Z}^+_\tau(\mathfrak{E}; \boldsymbol{F})$. On définit de même *zone d'émission à gauche* de $\mathfrak{E}$ et la zone d'émission à gauche de $\mathfrak{E}$ tronquée par l'hyperplan $t=\tau$ et on les désigne par $\mathfrak{Z}^-(\mathfrak{E})=\mathfrak{Z}^-(\mathfrak{E};\boldsymbol{F})$ et $\mathfrak{Z}_\tau^-(\mathfrak{E})=\mathfrak{Z}_\tau^-(\mathfrak{E};\boldsymbol{F})$. La réunion $\mathfrak{Z}(\mathfrak{E})=\mathfrak{Z}^+(\mathfrak{E})\cup\mathfrak{Z}^-(\mathfrak{E})$ est applée *zone d'émission* de $\mathfrak{E}$.

Il est clair que l'on a les propositions suivantes.

Proposition 3. 1. *La sous-famille de* $\boldsymbol{F}$ *restreinte à* $\mathfrak{Z}^+(\mathfrak{E})$ *coïncide avec* $\boldsymbol{F}^+(\mathfrak{E})$.

Remarque. Il est clair que si l'on a une proposition relative à la famille $\boldsymbol{F}^+(\mathfrak{E})$, on a une proposition analogue relative à la famille $\boldsymbol{F}^-(\mathfrak{E})$. Par exemple, l'analogue de la proposition 3. 1 s'énonce comme il suit:

La sous-famille de $\boldsymbol{F}$ *restreinte à* $\mathfrak{Z}^-(\mathfrak{E})$ *coïncide avec* $\boldsymbol{F}^-(\mathfrak{E})$.

Dorénavant, nous n'énoncerons pas, pour être court, l'analogue d'une proposition, si on l'obtient par simple intervertissement du sens.

Proposition 3. 2. *Si* $\mathfrak{E}_1$ *et* $\mathfrak{E}_2$ *sont deux parties compactes de* $\mathfrak{D}$, *on a*

$$\boldsymbol{F}^+(\mathfrak{E}_1\cup\mathfrak{E}_2)=\boldsymbol{F}^+(\mathfrak{E}_1)\cup\boldsymbol{F}^+(\mathfrak{E}_2).$$

Proposition 3. 3. *Si* $\mathfrak{E}'$ *est une partie compacte de* $Z^+(\mathfrak{E})$, *on a*

$$\boldsymbol{F}^+(\mathfrak{E}')=(\boldsymbol{F}^+(\mathfrak{E}))^+(\mathfrak{E}').$$

4. Familles knesériennes.

Définition 4. 1. Un point $A\in\mathfrak{D}$ d'abscisse α est appelé *point knesérien à droite* dans les cas suivants:

1° $A\in\mathfrak{B}^d$;

2° A appartient à $\mathfrak{B}^+$ ou à l'intérieur de $\mathfrak{D}$ et la section de $\mathfrak{Z}^+(A)$ par l'hyperplan $t=\tau$ est un continu pourvu que la différence $\tau-\alpha$ est positive et assez petite;

3° $A\in\mathfrak{B}_+$ et la réunion de $\mathfrak{Z}_\tau^+(A)\cap\mathfrak{B}$ et de la section de $\mathfrak{Z}^+(A)$ par l'hyperplan $t=\tau$ est un continu pourvu que la différence $\tau-\alpha$ soit positive et assez petite.

On définit de même *point knesérien à gauche*.

Définition 4.2. Si tout point de $\mathfrak{D}$ est knesérien à droite et si de plus $\mathfrak{B}^+$ est une partie ouverte de $\mathfrak{B}$ et est contenue dans $\mathfrak{B}^g$, $\boldsymbol{F}$ est appelée *famille knesérienne à droite*. On définit de même *famille knesérienne à gauche*. Une famille knesérienne à droite et à gauche est appelée *famille knesérienne*.

Proposition 4.1. *Si $\boldsymbol{F}$ est une famille knesérienne à droite, les familles $\boldsymbol{F}_\tau^d$, $\boldsymbol{F}_\tau^g$ le sont aussi.*

1° $\boldsymbol{F}_\tau^g$ est knesérienne à droite, car $(\boldsymbol{F}_\tau^g)^+(P)$ coïncide avec $\boldsymbol{F}^+(P)$ pour $P \in \mathfrak{D}_\tau^g$.

2° $\boldsymbol{F}_\tau^d$ est knesérienne à droite, car $(\boldsymbol{F}_\tau^d)_\tau^+(P)$ coïncide avec $\boldsymbol{F}_\tau^+(P)$ sauf pour les points qui se trouvent sur l'hyperplan $t=\tau$ et ceux-ci appartiennent à $\mathfrak{B}^d(\boldsymbol{F}_\tau^d)$.

Proposition 4.2. *Soit $\boldsymbol{F}$ une famille knesérienne à droite. Si $\mathfrak{E}$ est une partie continue de $\mathfrak{D}$, l'intersection*

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{Z}^+(\mathfrak{E}) \cap (\mathfrak{B}_+ \cup \mathfrak{B}^d)$$

est un continu.

En effet, $\mathfrak{C}$ est un compact. Supposons que $\mathfrak{C}$ soit une réunion de ses deux parties fermées $\mathfrak{C}_1$ et $\mathfrak{C}_2$. Les ensembles

$$\mathfrak{Z}_i = \{P \in \mathfrak{Z}^+(\mathfrak{E})\,;\ \mathfrak{Z}^+(P) \cap \mathfrak{C}_i \neq \phi\}, \quad i=1, 2,$$

sont des parties fermées de $\mathfrak{Z}^+(\mathfrak{E})$ et leur réunion coïncide avec $\mathfrak{Z}^+(\mathfrak{E})$. Celui-ci est un continu parce que tout son point est joint à $\mathfrak{E}$ par une caractéristique. Par suite l'intersection $\mathfrak{Z}_1 \cap \mathfrak{Z}_2$ n'est pas vide. Soit A un de ses points ayant la plus grande abscisse α.

Si A n'appartenait pas à $\mathfrak{B}^d \cup \mathfrak{B}_+$, la section $\mathfrak{S}$ de $\mathfrak{Z}^+(A)$ par l'hyperplan $t=\tau$ serait un continu non vide pourvu que la différence $\tau-\alpha$ soit positive et assez petite. $\mathfrak{S}$ serait alors la réunion de ses deux parties fermées

$$\mathfrak{S}_i = \{P \in \mathfrak{S};\ \mathfrak{Z}^+(P) \cap \mathfrak{C}_i \neq \phi\}, \quad i=1, 2.$$

L'intersection $\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_2$, qui est une partie de $\mathfrak{Z}_1 \cap \mathfrak{Z}_2$, contiendrait donc au moins un point ayant une abscisse plus grande que α contrairement à la définition de α.

A appartient donc à $\mathfrak{B}^d \cup \mathfrak{B}_+$. Si $A \in \mathfrak{B}^d$, A appartient évidemment à $\mathfrak{C}_1 \cap \mathfrak{C}_2$. Considérons donc le cas de $A \in \mathfrak{B}_+$.

$\mathfrak{S}$ ayant la même signification que plus haut, l'ensemble

$$\mathfrak{A} = (\mathfrak{Z}_\tau^+(A) \cap \mathfrak{B}) \cup \mathfrak{S}$$

est un continu pourvu que la différence $\tau - \alpha$ soit positive et assez petite.

$$\mathfrak{A}_i = \{P \in \mathfrak{A};\ \mathfrak{Z}^+(P) \cap \mathfrak{C}_i \neq \phi\}, \quad i = 1, 2,$$

sont des parties fermées de $\mathfrak{A}$ et leur réunion coïncide avec $\mathfrak{A}$. Donc l'intersection $\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2$ n'est pas vide. Mais elle ne peut contenir aucun point d'abscisse plus grande que α. Donc elle ne contient que le point A.

Si A n'appartenait pas à $\mathfrak{C}_1$, on pourrait supposer, en prenant $\tau - \alpha$ assez petite, que $\mathfrak{Z}_\tau^+(A)$ ne contienne aucun point de $\mathfrak{C}_1$. On a alors

$$\mathfrak{Z}_\tau^+(A) \cap \mathfrak{B} \subset \mathfrak{C}_2 .$$

A appartenant à $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{S}$ contiendrait des points de $\mathfrak{A}_1$. Alors $\mathfrak{A}_1' = \mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{S}$ et $\mathfrak{A}_2$ seraient des parties fermées non vides de $\mathfrak{A}$ et leur réunion coïnciderait avec $\mathfrak{A}$. Donc $\mathfrak{A}_1' \cap \mathfrak{A}_2$ ne serait pas vide et $\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2$ contiendrait des points autres que A. C'est absurde.

A appartient donc à l'intersection $\mathfrak{C}_1 \cap \mathfrak{C}_2$. On en conclut que $\mathfrak{C}$ est un continu.

5. Familles $\widehat{F}^+(\mathfrak{E})$.

Définition 5.1. Soit F une famille de caractéristiques. L'ensemble des caractéristiques de $F^-(\mathfrak{E})$ qui joignent $\mathfrak{E}$ à $\mathfrak{B}^d \cup \mathfrak{B}_+$ se désigne par $\widehat{F}^+(\mathfrak{E})$. La notation $\widehat{F}^-(\mathfrak{E})$ a la signification analogue.

Proposition 5.1. *$\widehat{F}^+(P)$ est un ensemble fermé qui dépend de P d'une manière semi-continue supérieurement.*

Considérons en effet une suite $\{P_k\}$ extraite de $\mathfrak{D}$ et convergeant vers P et supposons qu'une suite $\{\mathfrak{x}_k\}$ telle que $\mathfrak{x}_k \in \widehat{F}^+(P_k)$ converge vers $\mathfrak{x}$. Il suffit de montrer que $\mathfrak{x}$ appartient à $\widehat{F}^+(P)$.

L'extrémité droite Q_k de $\mathfrak{x}_k$ appartient à $\mathfrak{B}^d \cup \mathfrak{B}_+$ et la suite $\{Q_k\}$

converge vers un point Q qui appartient nécessairement à $\mathfrak{B}^d \cup \mathfrak{B}_+$. Les extrémités de $\mathfrak{x}$ sont évidemment P et Q. $\mathfrak{x}$ appartient donc à $\widehat{\boldsymbol{F}}^+(P)$. La demonstration montre aussitôt que $\widehat{\boldsymbol{F}}^+(P)$ est un ensemble fermé. Car si l'on prend $P_k = P$, $\{\mathfrak{x}_k\}$ est une suite extraite de $\widehat{\boldsymbol{F}}^+(P)$ et alors sa limite $\mathfrak{x}$ appartient aussi à $\widehat{\boldsymbol{F}}^+(P)$.

Proposition 5.2. *Si $\boldsymbol{F}$ est une famille knesérienne à droite, $\widehat{\boldsymbol{F}}^+(A)$ est un continu quel que soit $A \in \mathfrak{D}$.*

Il suffit de montrer que $\widehat{\boldsymbol{F}}^+(A)$ est bien enchaîné. Pour cela, nous prenons deux éléments quelconques $\mathfrak{x}$ et $\mathfrak{y}$ de $\widehat{\boldsymbol{F}}^+(A)$ et nous montrerons que l'on peut les joindre par une chaîne d'éléments de $\widehat{\boldsymbol{F}}^+(A)$ à chaînons inférieurs à un nombre positif arbitraire ε.

D'après la compacité de $\boldsymbol{F}$, on peut faire correspondre à $\rho > 0$ un nombre $f(\rho) > 0$ de manière que l'on ait

$$|\mathfrak{z}(t) - \mathfrak{z}(t')| < \rho$$

pour $\mathfrak{z} \in \boldsymbol{F}$, $|t - t'| < f(\rho)$. Soit α l'abscisse de A et β la plus grande des abscisses des points de $\mathfrak{Z}^+(A)$. Prenons une suite croissante $\alpha = \alpha_0$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_{N-1}$, $\alpha_N = \beta$ telle que

$$\alpha_k - \alpha_{k-1} < \min\{\varepsilon/2, f(\varepsilon/2)\}, \quad k = 1, 2, \cdots, N,$$

et désignons par $\mathfrak{C}_k$ la réunion de la section $\mathfrak{S}_k$ de $\mathfrak{Z}^+(A)$ par l'hyperplan $t = \alpha_k$ et de l'ensemble

$$\mathfrak{Z}^+_{\alpha_k}(A) \cap (\mathfrak{B}^d \cup \mathfrak{B}_+).$$

D'après les propositions 4.1 et 4.2, $\mathfrak{C}_k$ est un continu.

Désignons par $\mathcal{F}_k = \widehat{\boldsymbol{F}}^+_{\alpha_k}(A)$ l'ensemble des caractéristiques de $\boldsymbol{F}(A)$ limitées par A et $\mathfrak{C}_k$. Nous voulons montrer par récurrence que deux éléments quelconques de $\mathcal{F}_k$ peuvent se joindre par une chaîne d'éléments de $\mathcal{F}_k$ à chaînons inférieurs à ε telle que les extrémités droites forment une chaîne à chaînons inférieurs à ρ_k; les conditions auxquelles doit satisfaire la suite $\{\rho_k\}$ seront données dans les lignes suivantes.

Soient $\mathfrak{x}$ et $\mathfrak{y}$ deux éléments quelconques de $\mathfrak{C}_1$, et P et Q leurs extrémités droites. $\mathfrak{C}_1$ étant un continu, on peut les joindre par une chaîne d'éléments de $\mathfrak{C}_1$ à chaînons inférieurs à ρ_1: $P = P_1, P_2, \cdots, P_m = Q$.

Prenons un élément $\mathfrak{x}_i$ de $\mathcal{F}_1$ dont l'extrémité droite est P_i, $(i=1, 2, \cdots, m)$. Nous posons en particulier $\mathfrak{x}_1=\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}_m=\mathfrak{y}$.

Puisque l'on a $\mathfrak{x}_i(\alpha)=\mathfrak{x}(\alpha)$ et $\alpha_1-\alpha<f(\varepsilon/2)$, on a

$$|\mathfrak{x}_i(t)-\mathfrak{x}(\alpha)|<\varepsilon/2,$$

d'où

$$\mathrm{Dist}(\mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_j)<\varepsilon.$$

$\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \cdots, \mathfrak{x}_m$ forment donc une chaîne à chaînons inférieurs à ε.

Considérons maintenant le cas de k quelconque. Nous prenons deux éléments quelconques $\mathfrak{x}$ et $\mathfrak{y}$ de $\mathcal{F}_k$, et désignons par $\mathfrak{x}'$ et $\mathfrak{y}'$ les arcs partiels de $\mathfrak{x}$ et de $\mathfrak{y}$ limités par A et $\mathfrak{C}_{k-1}$. Par l'hypothèse de récurrence, on peut construire une chaîne d'éléments de $\mathcal{F}_{k-1}$ à chaînons inférieurs à $\varepsilon: \mathfrak{x}'=\mathfrak{x}'_1, \mathfrak{x}'_2, \cdots, \mathfrak{x}'_m=\mathfrak{y}'$ telle que leurs extrémités droites $P'_1, P'_2, \cdots, P'_m$ forment une chaîne à chaînons inférieurs à ρ_{k-1}.

D'après la proposition 5. 1, $\widehat{\boldsymbol{F}}^+_{\alpha_k}(P)$ dépend de P d'une manière semi-continue supérieurement lorsque P parcourt $\mathfrak{C}_{k-1}$. Si donc on prend ρ_{k-1} assez petit après avoir défini ρ_k, on aura

$$\mathrm{dist}(\widehat{\boldsymbol{F}}^+_{\alpha_k}(P'_i), \widehat{\boldsymbol{F}}^+_{\alpha_k}(P'_{i+1}))<\min\{\rho_k/3, f(\rho_k/3\}.$$

On peut donc choisir $\mathfrak{y}''_i\in\boldsymbol{F}^+_{\alpha_k}(P'_i)$ et $\mathfrak{x}''_{i+1}\in\boldsymbol{F}^+_{\alpha_k}(P'_{i+1})$ de manière que l'on ait

$$\mathrm{Dist}(\mathfrak{y}''_i, \mathfrak{x}''_{i+1})<\min\{\rho_k/3, f(\rho_k/3)\}.$$

Soient Q''_i, P''_{i+1} les extrémités droites de $\mathfrak{y}''_i$, $\mathfrak{x}''_{i+1}$. Nous prenons pour P''_1 et Q''_m les extrémités droites de $\mathfrak{x}$ et $\mathfrak{y}$ et pour $\mathfrak{x}''_1$ et $\mathfrak{y}''_m$ les arcs partiels respectifs de $\mathfrak{x}$ et $\mathfrak{y}$ dont les extrémités sont P'_1, P''_1 et Q'_m, Q''_m.

Si aucun des points P'_i et P'_{i+1} n'appartient à l'hyperplan $t=\alpha_{k-1}$, ils appartiennent à $\mathfrak{C}_i$. Alors on prend pour $\mathfrak{x}''_i$, $\mathfrak{y}''_i$ les points P'_i, P'_{i+1} eux-mêmes de sorte que $Q''_i=P'_i$, $P''_{i+1}=P'_{i+1}$.

Considérons le cas où un au moins des points Q'_i et P'_{i+1} appartient à l'hyperplan $t=\alpha_{k-1}$. Soient τ et τ' les abscisses des points P''_{i+1}, Q''_i et supposons par exemple que l'on ait $\tau'\leqq\tau$. Soit τ'' une valeur telle que

$$\mathrm{dist}(\tilde{Q}_i, P''_{i+1})=\mathrm{dist}(\mathfrak{y}''_i, P''_{i+1}),$$

où $\tilde{Q}_i=(\tau'', \mathfrak{y}''_i(\tau''))$. On a alors

$$\begin{aligned}0 &\leqq \tau' - \tau'' \leqq \tau - \tau'' \\ &\leqq \operatorname{dist}(\mathfrak{y}_i'', P_{i+1}'') \\ &\leqq \operatorname{Dist}(\mathfrak{y}_i'', \mathfrak{x}_{i+1}'') \\ &< \min\{\rho_k/3, f(\rho_k/3)\}.\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}&\operatorname{dist}(Q_i'', P_{i+1}'') \\ &\leqq \operatorname{dist}(Q_i'', \tilde{Q}_i) + \operatorname{dist}(\tilde{Q}_i, P_{i+1}'') < \rho_k.\end{aligned}$$

La réunion $\mathfrak{C}_{ik}$ de la section de $\mathfrak{Z}^+(P_i')$ par l'hyperplan $t=\alpha_k$ et de l'ensemble

$$\mathfrak{Z}_{\alpha_k}^+(P_i') \cap (\mathfrak{B}^d \cup \mathfrak{B}_+)$$

est un continu qui contient P_i'' et Q_i''. Si donc $P_i'' \neq Q_i''$, on peut les joindre par une chaîne de points de $\mathfrak{C}_{ik}$ à chaînons inférieurs à ρ_k: $\{P_{ij}''; j=1, 2, \cdots, m_i\}$. Soit $\mathfrak{x}_{ij}''$ une caractéristique de $\widehat{F}_{\alpha_k}^+(P_i')$ dont l'extrémité droite est P_{ij}''. Puisque l'un au moins de P_i'' et Q_i'' est différent de P_i', l'abscisse β_i de P_i' est au moins égale à $\alpha_{k-1} - \rho_{k-1}$. L'abscisse β_{ij}'' de P_{ij}'' est au plus égale à α_k. Si donc ρ_{k-1} est assez petit de sorte que

$$\alpha_k - \alpha_{k-1} + \rho_{k-1} < \min\{\varepsilon/2, f(\varepsilon/2)\},$$

on a

$$\operatorname{dist}(\mathfrak{x}_i'(\beta_i), \mathfrak{x}_{ij}''(t)) < \varepsilon/2$$

pour $\beta_i \leqq t \leqq \beta_{ij}''$. On en conclut que l'on a

$$\operatorname{Dist}(\mathfrak{x}_{ij}'', \mathfrak{x}_{i,j+1}'') < \varepsilon.$$

En joignant $\mathfrak{x}_i'$ à $\mathfrak{x}_{ij}''$ bout à bout, on obtient une caractéristique x_{ij} de $\widehat{F}_{\alpha_k}^+(A)$ et les caractéristiques $\{\mathfrak{x}_{ij}; j=1, \cdots, m_i; i=1, \cdots, m\}$ forment une chaîne à chaînons inférieurs à ε joignant $\mathfrak{x}$ et $\mathfrak{y}$ et les extrémités droites forment une chaîne à chaînons inférieurs à ρ_k joignant les extrémités droites de $\mathfrak{x}$ et $\mathfrak{y}$.

Nous voulons maintenant établir une proposition réciproque dont l'énoncé voici.

Proposition 5.3. *Soit F une famille de caractéristiques satisfaisant aux conditions suivantes*:

1) $\widehat{\boldsymbol{F}}^{+}(P)$ *est un continu pour tout* $P\in\mathfrak{D}$;

2) $\mathfrak{B}^{+}$ *est une partie ouverte de* $\mathfrak{B}$ *telle que* $\mathfrak{B}^{+}\subset\mathfrak{B}^{g}$;

Alors $\boldsymbol{F}$ *est une famille kneserienne à droite.*

Considérons le cas de $A\notin\mathfrak{B}^{d}\cup\mathfrak{B}_{+}$. Toute caractéristique de $\widehat{\boldsymbol{F}}^{+}(A)$ existe dans un intervalle assez petit $[\alpha, \tau]$, où α désigne l'abscisse du point A.

Si la section $\mathfrak{S}$ de $\mathfrak{Z}^{+}(A)$ par l'hyperplan $t=\tau$ est une réunion de ses deux parties fermées $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\widehat{\boldsymbol{F}}^{+}(A)$ est la réunion de ses deux parties fermées

$$\widehat{\boldsymbol{F}}^{+}(A)\cap\boldsymbol{F}(\mathfrak{S}_i),\quad i=1,2,$$

et, puisque $\widehat{\boldsymbol{F}}^{+}(A)$ est un continu par hypothèse,

$$\widehat{\boldsymbol{F}}^{+}(A)\cap\boldsymbol{F}(\mathfrak{S}_1)\cap\boldsymbol{F}(\mathfrak{S}_2)$$

n'est pas vide. On en conclut que $\mathfrak{S}_1\cap\mathfrak{S}_2$ n'est pas vide. Par suite $\mathfrak{S}$ est un continu.

On peut démontrer de même que si $A\in\mathfrak{B}_{+}$

$$\mathfrak{C}=\mathfrak{S}\cup(\mathfrak{Z}^{+}_{\tau}(A)\cap(\mathfrak{B}_{+}\cup\mathfrak{B}^{d}))$$

est un continu pourvu que $\tau-\alpha$ soit positive et assez petite, α désignant l'abscisse du point A. Si l'on fait correspondre à une caractéristique de $\widehat{\boldsymbol{F}}^{+}(A)$ son extrémité, on obtient une application continue. Par suite un point quelconque de $\mathfrak{B}_{+}$ est aussi knesérien à droite.

6. Familles proprement knesériennes.

Définition 6.1. Soit F une famille de caractéristiques. Nous désignons par $\widetilde{\boldsymbol{F}}$ l'ensemble des caractéristiques maximales de F. Si P appartient à $\mathfrak{D}$, $\widetilde{\boldsymbol{F}}^{+}(P)$ représente l'ensemble des caractéristiques maximales de $\boldsymbol{F}^{+}(P)$. $\mathfrak{E}$ étant une partie compacte de $\mathfrak{D}$, nous posons

$$\widetilde{\boldsymbol{F}}^{+}(\mathfrak{E})=\bigcup\{\widetilde{\boldsymbol{F}}^{+}(P)\,;\,P\in\mathfrak{E}\}.$$

Nous définissons de même $\widetilde{\boldsymbol{F}}^{-}(\mathfrak{E})$. Nous désignons en particuliers par $\widetilde{\boldsymbol{F}}^{\pm}$ les ensembles $\widetilde{\boldsymbol{F}}^{\pm}(\mathfrak{D})$.

Proposition 6.1. *Les trois conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) $\widetilde{F}^+$ *est un compact*;

(ii) $\widetilde{F}^+(P)$ *dépend de* P *d'une manière semi-continue supérieurement*;

(iii) $\mathfrak{B}^d$ *est un compact.*

(i)$\Rightarrow$(ii). Considérons une suite $\{P_k\}$ extraite de $\mathfrak{D}$ et convergeant vers P et une suite $\{\mathfrak{x}_k\}$ convergeant vers $\mathfrak{x}$ et telle que $\mathfrak{x}_k \in \widetilde{F}^+(P_k)$. Il suffit de montrer que $\mathfrak{x}$ appartient à $\widetilde{F}^+(P)$.

D'après la compacité de $\widetilde{F}^+$, l'extrémité droite de $\mathfrak{x}$ est un point extrême droit de $\mathfrak{D}$. L'extrémité gauche de $\mathfrak{x}$ est évidemment P. $\mathfrak{x}$ appartient donc à $\widetilde{F}^+(P)$.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Considérons une suite $\{B_k\}$ extraite de $\mathfrak{B}^d$ et convergeant vers B. Il suffit de montrer que B est un point extrême droit de $\mathfrak{D}$.

Il existe une caractéristique $\mathfrak{x}_k$ dont l'extrémité droite est B_k. Soit A_k l'extrémité gauche de $\mathfrak{x}_k$. $\mathfrak{x}_k$ appartient à $\widetilde{F}^+(A_k)$. En prenant, s'il est nécessaire, une suite partielle, nous pouvons supposer que la suite $\{\mathfrak{x}_k\}$ converge vers une caractéristique $\mathfrak{x}$. Alors les suites $\{A_k\}$, $\{B_k\}$ convergent respectivement vers l'extrémité gauche A et l'extrémité droite B de $\mathfrak{x}$ et la semi-continuité supérieure de $\widetilde{F}^+(P)$ implique que $\mathfrak{x}$ appartient à $\widetilde{F}^+(A)$. B est donc un point extrême droit.

(iii)$\Rightarrow$(i). $\widetilde{F}^+$ étant une partie d'un ensemble compact F, il suffit de montrer que $\widetilde{F}^+$ est fermée. Par suite il suffit de montrer que si une suite $\{\mathfrak{x}_k\}$ extraite de $\widetilde{F}^+$ converge vers $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}$ appartient à $\widetilde{F}^+$.

Si B_k est l'extrémité droite de $\mathfrak{x}_k$, $\{B_k\}$ converge vers l'extrémité droite B de $\mathfrak{x}$. $\mathfrak{x}_k$ appartenant à $\widetilde{F}^+$, B_k est un point extrême droit, et l'hypothèse (iii) implique que B est aussi un point extrême droit. $\mathfrak{x}$ appartient donc à $\widetilde{F}^+$.

Définition 6.2. Un point A de $\mathfrak{D}$ d'abscisse α est appelé *point proprement knesérien à droite* si l'une des conditions suivantes est remplie:

1° $A \in \mathfrak{B}^d$;

2° Chaque caractéristique $F^+(A)$ perce l'hyperplan $t=\tau$ et la section de $\mathfrak{Z}^+(A)$ par lui est un continu pour $\tau-\alpha>0$ assez petite.

On définit de même *point proprement knesérien à gauche.*

Remarque. Un point knesérien à droite est un point proprement knesérien à droite et réciproquement, si le point appartient à $\mathfrak{B}^d \cup \mathfrak{B}^+$ ou à l'intérieur de $\mathfrak{D}$. On n'a plus l'équivalence des deux conditions si le point appartient à $\mathfrak{B}_+$.

Définition 6.3. Une famille de caractéristiques est appelée *famille proprement knesérienne à droite* si tout point de $\mathfrak{D}$ est point proprement knesérien à droite. On définit de même *famille proprement knesérienne à gauche.* Si F est à la fois famille proprement knesérienne à droite et à gauche, elle est appelée *famille proprement knesérienne.*

Proposition 6.2. *Si F est une famille proprement knesérienne à droite $\mathfrak{Z}^+(A) \cap \mathfrak{B}^d$ est un continu pour chaque $A \in \mathfrak{D}$.*

Supposons le contraire. $\mathfrak{Z}^+(A) \cap \mathfrak{B}^d$ est alors une réunion de ses deux parties fermées disjointes $\mathfrak{C}_1$ et $\mathfrak{C}_2$. $\mathfrak{Z}^+(A)$ est la réunion de ses deux parties fermées

$$\mathfrak{Z}_i = \{P \in \mathfrak{Z}^+(A)\,;\ \mathfrak{Z}^+(P) \cap \mathfrak{C}_i \neq \phi\}, \quad i=1,2.$$

Soit A' un des points de $\mathfrak{Z}_1 \cap \mathfrak{Z}_2$ ayant la plus grande abscisse α'. $\mathfrak{Z}^+(A')$ est la réunion de ses deux parties fermées

$$\mathfrak{Z}'_i = \{P \in \mathfrak{Z}^+(A')\,;\ \mathfrak{Z}^+(P) \cap \mathfrak{C}_i \neq \phi\}, \quad i=1,2.$$

Puisqu'on a les inclusions $\mathfrak{Z}'_1 \subset \mathfrak{Z}_1$, $\mathfrak{Z}'_2 \subset \mathfrak{Z}_2$, l'intersection $\mathfrak{Z}'_1 \cap \mathfrak{Z}'_2$ ne contient que le point A'. Donc la section de $\mathfrak{Z}^+(A')$ par l'hyperplan $t=\tau$ ne peut être un continu quelque petite que soit la différence $\tau-\alpha>0$.

Proposition 6.3. *Soit F une famille de caractéristiques satisfaisant à l'une des trois conditions de la proposition 6.1. Si $\widetilde{F}^+(P)$ est un continu pour chaque $P \in \mathfrak{D}$, F est une famille proprement knesérienne à droite, et réciproquement.*

En effet, supposons la condition de la proposition remplie. Soit

$A \in \mathfrak{D}$ un point d'abscisse α qui n'appartient pas à $\mathfrak{B}^d$. $\mathfrak{B}^d$ étant fermé, la distance dist$(A, \mathfrak{B}^d)$ est positive. Si donc $\tau - \alpha$ est positive et assez petite, toute caractéristique de $\widetilde{\boldsymbol{F}}^+(A)$ perce l'hypeplan $t = \tau$. En faisant correspondre à $\mathfrak{x} \in \widetilde{\boldsymbol{F}}^+(A)$ le point de recontre de $\mathfrak{x}$ avec l'hyperplan $t = \tau$, on obtient une application continu de $\widetilde{\boldsymbol{F}}^+(A)$ sur la section $\mathfrak{S}$ de $\mathfrak{Z}^+(A)$ par l'hyperplan $t = \tau$, et puisque $\widetilde{\boldsymbol{F}}^+(A)$ est un continu, $\mathfrak{S}$ l'est aussi. A est donc un point proprement knesérien à droite.

La réciproque sera démontrée si l'on montre que $\widetilde{\boldsymbol{F}}^+(A)$ est bien enchaîné.

Soit β la plus grande des abscisses des points de $\mathfrak{Z}^+(A)$. Si l'abscisse de $B \in \mathfrak{Z}^+(A)$ est β, $\boldsymbol{F}^+(B)$ ne contient que B.

Supposons que si l'abscisse d'un point $P \in \mathfrak{Z}^+(A)$ est supérieure à γ, deux éléments quelconques de $\widetilde{\boldsymbol{F}}^+(P)$ peuvent se joindre par une chaîne d'éléments de $\widetilde{\boldsymbol{F}}^+(P)$ à chaînons inférieurs à ε et considérons un point $P \in \mathfrak{Z}^+(A)$ d'abscisse γ. Si P est un point extrême droit de $\mathfrak{D}$, $\widetilde{\boldsymbol{F}}^+(P)$ ne contient que P. Sinon toutes les caractéristiques de $\widetilde{\boldsymbol{F}}^+(P)$ existent dans un intervalle assez petit $[\gamma, \tau]$, et la section $\mathfrak{S}$ de $\mathfrak{Z}^+(P)$ par l'hyperplan $t = \tau$ est un continu.

Prenons deux éléments quelconques $\mathfrak{x}$ et $\mathfrak{y}$ de $\widetilde{\boldsymbol{F}}^+(P)$. Ils percent l'hyperplan $t = \tau$ en des points P' et Q'. Désignons par $\mathfrak{x}'$ l'arc de $\mathfrak{x}$ limité par P' et $\mathfrak{B}^d$ et par $\mathfrak{y}'$ celui de $\mathfrak{y}$ limité par Q' et $\mathfrak{B}^d$. On peut former, comme dans la démonstration de la proposition 5. 2, une chaîne d'éléments de $\widetilde{\boldsymbol{F}}^+(\mathfrak{S})$ à chaînons inférieurs à ε; $\mathfrak{x}' = \mathfrak{x}_1', \mathfrak{x}_2', \cdots, \mathfrak{x}_m' = \mathfrak{y}'$. En joignant les extrémités gauches de ces caractéristiques au point P par des arcs de caractéristiques, on obtient une chaîne d'éléments de $\widetilde{\boldsymbol{F}}^+(P)$ à chaînons inférieurs à ε.

Prenons une valeur γ' telle que $\gamma - \gamma'$ est positive et assez petite. Soit P un point de $\mathfrak{Z}^+(A)$ dont l'abscisse est égale à γ'. Si deux caractéristiques $\mathfrak{x}$ et $\mathfrak{y}$ de $\widetilde{\boldsymbol{F}}^+(P)$ percent l'hyperplan $t = \gamma$, on peut construire de la même manière une chaîne d'éléments de $\widetilde{\boldsymbol{F}}^+(P)$ à chaînons inférieurs à ε joignant $\mathfrak{x}$ et $\mathfrak{y}$. Si les extrémités droites de $\mathfrak{x}$ et $\mathfrak{y}$ ont des abscisses au plus égales à γ, la distance Dist$(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ est inférieure à ε.

Il nous reste à examiner le cas où une seule des extrémités a une abscisse plus grande que γ. Alors, puisque $\mathfrak{Z}^+(P)\cap\mathfrak{B}^d$ est un continu, il existe une caractéristique $\mathfrak{z}\in\widetilde{\boldsymbol{F}}^+(P)$ dont l'extrémité droite a une abscisse égale à γ. On peut joindre $\mathfrak{x}$ à $\mathfrak{z}$ et $\mathfrak{z}$ à $\mathfrak{y}$ respectivement par une chaîne d'éléments de $\widetilde{\boldsymbol{F}}^+(P)$ à chaînons inférieurs à ε.

D'après ce qui précède, nous pouvons conclure que pour tout $P\in\mathfrak{Z}^+(A)$ deux éléments quelconques de $\widetilde{\boldsymbol{F}}^+(P)$ peuvent être reliés par une chaîne d'éléments de $\widetilde{\boldsymbol{F}}^+(P)$ à chaînons inférieurs à ε. $\widetilde{\boldsymbol{F}}^+(A)$ est donc bien enchaîné.

Les propositions 6. 1 et 6.2 entraînent immédiatement la

Proposition 6. 4. *Soit $\boldsymbol{F}$ une famille proprement knesérienne à droite telle que $\mathfrak{B}^d$ est une partie fermée de $\mathfrak{B}$. $\mathfrak{Z}^+(\mathfrak{E})\cap\mathfrak{B}^d$ est alors un continu si $\mathfrak{E}$ est une partie continue de $\mathfrak{D}$.*

Soit $\mathfrak{E}$ une partie fermée de $\mathfrak{D}$. Si $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{F}^+(\mathfrak{E})$, on a évidemment

$$\widetilde{\boldsymbol{G}}^+(P)=\widetilde{\boldsymbol{F}}^+(P)$$

pour $P\in\mathfrak{Z}^+(\mathfrak{E})$. On a donc la

Proposition 6. 5. *Soit $\boldsymbol{F}$ une famille proprement knesérienne à droite et $\mathfrak{E}$ une partie fermée de $\mathfrak{D}$. Alors $\boldsymbol{F}^+(\mathfrak{E})$ est une famille proprement knesérienne à droite.*

7. Section transversale.

Définition 7. 1. Une partie compacte $\mathfrak{S}$ de $\mathfrak{D}$ est appelée *section transversale* de $\mathfrak{D}$ si chaque caractéristique maximale rencontre $\mathfrak{S}$ en un point et en un seul.

Il est clair que si $\mathfrak{B}^d$ est compacte, elle est une section transversale.

Proposition 7. 1. *Soit $\mathfrak{S}$ une section transversale de $\mathfrak{D}$ et $\mathcal{F}$ l'ensemble des caractéristiques qui contiennent des points de $\mathfrak{S}$. Alors l'application qui fait correspondre à une caractéristique de $\mathcal{F}$ son intersection avec $\mathfrak{S}$ est continue.*

Considérons en effet une suite de caractéristiques $\{\mathfrak{x}_k\}$ extraite de $\mathcal{F}$ et convergeant vers $\mathfrak{x}$. $\mathfrak{x}$ appartient évidemment à $\mathcal{F}$. On a d'autre part

$$\lim\sup(\mathfrak{r}_k \cap \mathfrak{S}) \subset \mathfrak{x} \cap \mathfrak{S},$$

d'où résulte la continuité de l'application.

Puisqu'une image continue d'un continu compact est aussi un continu compact, on a la

Proposition 7. 2. *Soit F une famille proprement knesérienne à droite. Si $\mathfrak{E}$ est une partie continue de $\mathfrak{D}$, une section transversale de $\mathfrak{Z}^+(\mathfrak{E})$ est un continu.*

Définition 7. 2. Soit $\mathfrak{S}$ une section transversale de $\mathfrak{D}$. Si un point A de $\mathfrak{D}$ n'est pas sur $\mathfrak{S}$, il existe au moins une caractéristique dont l'une des extrémités est A et l'autre A' se trouve dans $\mathfrak{S}$. Nous dirons que A est *à gauche* ou *à droite de* $\mathfrak{S}$ suivant que l'abscisse de A est plus petite ou plus grande que celle de A'.

Remarque. Considérons deux caractéristiques $\mathfrak{x}_1$ et $\mathfrak{x}_2$ dont A est une de leurs extrémités. Les autres extrémités P_1 et P_2 qui se trouvent sur $\mathfrak{S}$ sont situées d'un même côté de A. Car sinon, on obtiendrait, d'après la propriété 4°, une caracteristique dont les extrémités sont P_1 et P_2. C'est impossible puisque $\mathfrak{C}$ est une section transversale.

Définition 7. 3. Soit $\mathfrak{S}$ une section transversale de $\mathfrak{D}$. L'ensemble des points de $\mathfrak{D}$ situés à gauche de $\mathfrak{S}$ ou sur $\mathfrak{S}$ est appelé *ensemble* $\mathfrak{D}$ *tronqué à droite par* $\mathfrak{S}$ et nous le désignons par $\mathfrak{D}^d_{\mathfrak{S}}$. Nous définissons de même *ensemble* $\mathfrak{D}$ *tronqué à gauche par* S et nous le désignons par $\mathfrak{D}^g_{\mathfrak{S}}$.

La famille $F(\mathfrak{D}^d_{\mathfrak{S}})$ est appelée *famille* F *tronquée à droite par* $\mathfrak{S}$ et nous la désignons par $F^d_{\mathfrak{S}}$. Nous définissons de même *famille* F *tronquée à gauche par* $\mathfrak{S}$ et nous la désignonos par $F^g_{\mathfrak{S}}$.

Les domaines fondamentaux des familles $F^d_{\mathfrak{S}}$ et $F^g_{\mathfrak{S}}$ sont $\mathfrak{D}^d_{\mathfrak{S}}$ et $\mathfrak{D}^g_{\mathfrak{S}}$. Nous désignons les frontières de $\mathfrak{D}^d_{\mathfrak{S}}$ et $\mathfrak{D}^g_{\mathfrak{S}}$ par $\mathfrak{B}^d_{\mathfrak{S}}=\mathfrak{B}(F^d_{\mathfrak{S}})$ et $\mathfrak{B}^g_{\mathfrak{S}}=B(F^g_{\mathfrak{S}})$.

On obtient immédiatement la proposition suivante, qui est une généralisation de la proposition 4. 1.

Proposition 7. 3. *Soit F une famille knesérienne à droite. Si*

$\mathfrak{C}$ est une section transversale de $\mathfrak{D}$, les familles $F^d_{\mathfrak{C}}$ et $F^g_{\mathfrak{C}}$ sont aussi knesériennes à droite.

8. Un lemme.

Lemme. *Soit F' une famille de caractéristiques dont le domaine fondamental est $\mathfrak{D}'$ et $\mathfrak{D}$ une partie compacte de $\mathfrak{D}'$. Soit A un point de $\mathfrak{B}_+(F)$, où $F=F'(\mathfrak{D})$, et supposons que A soit un point intérieur de $\mathfrak{D}'$ ou un point de $\mathfrak{B}^+(F')$. Nous supposons de plus que les conditions suivantes soient remplies:*

1° *Toute caractéristique de $\widetilde{F}'^+(A)$ existe dans un intervalle assez petit $[\alpha, \alpha+\delta]$, α désignant l'abscisse de A;*

2° *$\mathcal{F}=F'^+_{\alpha+\delta}(A)$ est une famille proprement knesérienne à droite;*

3° *Une caractéristique de $F'^+_{\alpha+\delta}(A)$ issue d'un point extérieur de $\mathfrak{D}$ ne peut atteindre à la frontière $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{D}$.*

4° *$\mathfrak{Z}^+_{\alpha+\delta}(A; F)$ ne contient aucun point de $\mathfrak{B}^+(F)$.*

A est alors un point knesérien à droite de la famille F.

Supposons en effet que la réunion de $\mathfrak{Z}^+_{\alpha+\delta}(A; F)\cap\mathfrak{B}(F)$ et de la section de $\mathfrak{Z}^+(A; F)$ par l'hyperplan $t=\alpha+\delta$ fût une réunion de ses deux parties fermées disjointes $\mathfrak{C}_1$ et $\mathfrak{C}_2$.

Désignons par $\mathcal{F}$ l'ensemble des caractéristiques $\mathfrak{x}$ de $\widetilde{F}'^+_{\alpha+\delta}(A)$ telles que si l'on prend convenablement une valeur $\beta\in[\alpha, \alpha+\delta]$, on ait $(\beta, \mathfrak{x}(\beta))\in\mathfrak{C}_1$ et $(t, \mathfrak{x}(t))\notin\mathfrak{D}$ dans l'intervale $(\beta, \alpha+\delta]$. $\mathcal{F}$ est une partie fermée de $\mathcal{F}'=\widetilde{F}'^+_{\alpha+\delta}(A)$.

En effet, considérons une suite $\{\mathfrak{x}_k\}$ extraite de $\mathcal{F}$ convergeant vers $\mathfrak{x}$. Il existe une valeur $\beta_k\in[\alpha, \alpha+\delta]$ telle que l'on ait $(\beta_k, \mathfrak{x}(\beta_k))\in\mathfrak{S}_1$ et $(t, \mathfrak{x}(t)]\notin D$ pour $\beta_k<t\leqq\alpha+\delta$. En prenant une suite partielle, s'il est nécessaire, on peut supposer $\beta_k\to\beta'$. Le point $(\beta', \mathfrak{x}(\beta'))$ appartient à $\mathfrak{C}_1$. Soit β la valeur telle que l'on ait $(\beta, \mathfrak{x}(\beta))\in\mathfrak{B}(F)$ et $(t, \mathfrak{x}(t))\notin\mathfrak{D}$ pour $\beta<t\leqq\alpha+\delta$. On a alors $\beta'\leqq\beta$ et d'après l'hypothèse 3° l'arc de $\mathfrak{x}$ dont les extrémités sont $(\beta, \mathfrak{x}(\beta))$ et $(\beta', \mathfrak{x}(\beta'))$ est contenu dans $\mathfrak{B}(F)$, de sorte qu'il est contenu dans $\mathfrak{C}_1\cup\mathfrak{C}_2$. $\mathfrak{C}_1$ et $\mathfrak{C}_2$ étant des

ensembles fermés disjoints, il est contenu dans $\mathfrak{C}_1$ et la caractéristique $\mathfrak{k}$ appartient à $\mathcal{F}$.

La même considération nous montre que $\mathcal{F}'-\mathcal{F}$ est aussi une partie fermée de $\mathcal{F}'$. $\mathcal{F}'$ étant une famille proprement knesérienne à droite, $\mathcal{F}'$ est un continu dans Comp$(R\times R^n)$, car la frontière droite de $\mathfrak{Z}^+_{\alpha+\delta}(A)$ est la section de $\mathfrak{Z}^+(A)$ par l'hyperplan $t=\alpha+\delta$. Donc l'intersection $\mathcal{F}\cap(\mathcal{F}'-\mathcal{F})$ ne serait pas vide. C'est évidemment impossible.

Par suite l'un des ensembles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'-\mathcal{F}$ est vide. Supposons par exemple $\mathcal{F}=\phi$. Alors $\mathfrak{C}_1$ ne peut contenir de points d'abscisse $\alpha+\delta$ et la plus grande des abscisses de ses points a une valeur $\beta<\alpha+\delta$. Les points de $\mathfrak{C}_1$ ayant l'abscisse égale à β ne peuvent appartenir à $\mathfrak{B}_+(\boldsymbol{F})$. D'après l'hypothèse 4°, ils appartiennent à $\mathfrak{B}^d(\boldsymbol{F})$ et d'après l'hypothèse 3° les caractéristiques de $\boldsymbol{F}'^+(A)$ passant par eux appartiennent à $\mathcal{F}$.

Or, c'est impossible, parce que nous supposions $\mathcal{F}=\phi$. Le lemme est donc établi.

9. Problème aux limites.

Soit $\boldsymbol{F}$ une famille knesérienne à droite. Le problème aux limites s'énonce alors comme il suit:

Trouver une caractéristique dont les extrémités se trouvent dans des parties continues $\mathfrak{E}$ et $\mathfrak{E}'$ données respectivement dans $\mathfrak{B}^g\cup\mathfrak{B}_-$ et $\mathfrak{B}^d\cup\mathfrak{B}_+$.

D'après la proposition 4. 2, l'ensemble $\mathfrak{S}=\mathfrak{Z}^+(\mathfrak{E})\cap(\mathfrak{B}^d\cup\mathfrak{B}_+)$ est un continu. Si donc l'intersection $\mathfrak{S}=\mathfrak{E}\cap(\mathfrak{B}^d\cup\mathfrak{B}_+)$ se décompose en deux parties fermées $\mathfrak{E}_1$ et $\mathfrak{E}_2$ séparées par $\mathfrak{E}'$ dans $\mathfrak{B}^d\cup\mathfrak{B}_+$, $\mathfrak{S}$ contient des points de $\mathfrak{E}'$. Si Q est un point de l'intersection $\mathfrak{S}\cap\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{Z}^+(\mathfrak{E})$ contient une caractéristique dont Q est l'extrémité droite. Nous obtenons donc la

Proposition 9. 1. *Soit $\boldsymbol{F}$ une famille knesérienne à droite et soient $\mathfrak{E}$ et $\mathfrak{E}'$ des continus donnés respectivement dans $\mathfrak{B}^g\cup\mathfrak{B}_-$ et $\mathfrak{B}^d\cup\mathfrak{B}_+$. Si l'intersection $\mathfrak{E}\cap(\mathfrak{B}^d\cup\mathfrak{B}_+)$ se décompose en deux parties fermées séparées par $\mathfrak{E}'$ dans $\mathfrak{B}^d\cup\mathfrak{B}_+$, il existe au moins une caractéristique dont les extrémités se trouvent respectivement dans $\mathfrak{E}$ et $\mathfrak{E}'$.*

10. Théorème d'existence de M. Nagumo et celui de H. Okamura.

Considérons l'équation différentielle du second ordre

$$x''=f(t, x, x'). \tag{10.1}$$

La fonction f est supposée continue dans le domaine fermé $\mathfrak{D}$:

$$0\leqq t\leqq 1,\ \underline{\omega}(t)\leqq x\leqq\overline{\omega}(t),\ \underline{\Omega}(t, x)\leqq y\leqq\overline{\Omega}(t, x), \tag{10.2}$$

où $\underline{\omega}$ et $\overline{\omega}$ sont des fonctions deux fois continûment dérivables dans l'intervalle $[0, 1]$ et $\underline{\Omega}$ et $\overline{\Omega}$ sont des fonctions admettant des dérivées continues dans le domaine fermé

$$0\leqq t\leqq 1,\quad \underline{\omega}(t)\leqq x\leqq\overline{\omega}(t). \tag{10.3}$$

Supposons de plus que l'on ait les inégalités

$$\begin{aligned}&\underline{\Omega}(t, \underline{\omega}(t))\leqq\underline{\omega}'(t)\leqq\overline{\Omega}(t, \underline{\omega}(t)),\\ &\underline{\Omega}(t, \overline{\omega}(t))\leqq\overline{\omega}'(t)\leqq\overline{\Omega}(t, \overline{\omega}(t));\end{aligned} \tag{10.4}$$

$$\begin{aligned}&\underline{\omega}''(t)\geqq f(t, \underline{\omega}(t), \underline{\omega}'(t)),\\ &\overline{\omega}''(t)\geqq f(t, \overline{\omega}(t), \overline{\omega}'(t))\end{aligned} \tag{10.5}$$

dans l'intervalle $[0, 1]$ et les inégalités

$$\begin{aligned}&f(t, x, \underline{\Omega}(t, x))-\underline{\Omega}_t(t, x)-\underline{\Omega}_x(t, x)\underline{\Omega}(t, x)>0,\\ &f(t, x, \overline{\Omega}(t, x))-\overline{\Omega}_t(t, x)-\overline{\Omega}_x(t, x)\overline{\Omega}(t, x)<0\end{aligned} \tag{10.6}$$

dans le domaine (10.3).

Théorème d'existence de M. Nagumo s'énonce alors:

Sous ces hypothèses, si l'on a

$$\underline{\omega}(0)=b=\overline{\omega}(0),\quad \underline{\omega}(1)\leqq b'\leqq\overline{\omega}(1), \tag{10.7}$$

il existe au moins une solution telle que l'on ait

$$y(0)=b,\quad y(1)=b'. \tag{10.8}$$

H. Okamura suppose les mêmes hypothèses relatives à $\underline{\omega}$ et $\overline{\omega}$. La fonction $f(t, x, y)$ est supposée continue dans le domaine non borné

$$0\leqq t\leqq 1,\quad \underline{\omega}(t)\leqq x\leqq\overline{\omega}(t),\quad -\infty<y<+\infty. \tag{10.9}$$

Soit ψ une fonction lipschitzienne telle que $\underline{\omega}\leqq\psi\leqq\overline{\omega}$ dans l'intervalle $[0, 1]$. Il suppose l'existence des fonctions continues Φ_1, Φ_2, Ψ_1, Ψ_2, qui sont positives respectivement dans les domaines

$$
(10.10)\qquad \begin{aligned}
&0\leqq t\leqq 1, \quad \psi(t)\leqq x\leqq\overline{\omega}(t), \quad y\geqq K;\\
&0\leqq t\leqq 1, \quad \underline{\omega}(t)\leqq x\leqq\psi(t), \quad y\leqq -K;\\
&0\leqq t\leqq 1, \quad \underline{\omega}(t)\leqq x\leqq\psi(t), \quad y\geqq K;\\
&0\leqq t\leqq 1, \quad \psi(t)\leqq x\leqq\overline{\omega}(t), \quad y\leqq -K
\end{aligned}
$$

et admettent les dérivés continues dans leurs intéıieurs, où K est une certaine constante positive. Elles convergent uniformément vers 0 lorsque $|y|\to\infty$. Il suppose de plus les inégalités suivantes remplies:

$$
(10.11)\qquad \begin{aligned}
&\frac{\partial\Phi_i}{\partial t}+\frac{\partial\Phi_i}{\partial x}y+\frac{\partial\Phi_i}{\partial y}f(t, x, y)\geqq 0, \quad i=1, 2,\\
&\frac{\partial\Psi_i}{\partial t}+\frac{\partial\Psi_i}{\partial x}y+\frac{\partial\Psi_i}{\partial y}f(t, x, y)\leqq 0, \quad i=1, 2.
\end{aligned}
$$

Théorème d'existence de H. Okamura s'énonce alors:

Il existe au moins une solution telle que l'on ait

$$
(10.12)\qquad y(0)=\psi(0), \quad y(1)=\psi(1).
$$

11. Examen de la condition d'existence de M. Nagumo.

Désignons par F l'ensemble des solutions du système différentiel

$$
(11.1)\qquad x'=y, \quad y'=f(t, x, y),
$$

qui est équivalent à l'équation (10.1).

On sait que tout point intérieur du domaine $\mathfrak{D}$ est knesérien. On voit aussi sans peine que tout point de $\mathfrak{B}^g\cup\mathfrak{B}^-$ est knesérien à gauche.

Les points de $\mathfrak{B}$ qui se trouvent sur l'hyperplan $t=0$ appartiennent à $\mathfrak{B}^g$.

Le point (τ, ξ, η) tel que l'on ait

$$
(11.2)\qquad \tau=1, \quad \underline{\omega}(1)<\xi<\overline{\omega}(1), \quad \underline{\Omega}(1, \xi)<\eta<\overline{\Omega}(1, \xi),
$$

appartient à $\mathfrak{B}^-$.

Le point (τ, ξ, η) tel que l'on ait

(11. 3) $\qquad 0<\tau\leqq 1, \quad \underline{\omega}(\tau)\leqq\xi\leqq\overline{\omega}(\tau), \quad \eta=\overline{\Omega}(\tau, \xi)$

ou

(11. 4) $\qquad 0<\tau\leqq 1, \quad \underline{\omega}(\tau)\leqq\xi\leqq\overline{\omega}(\tau), \quad \eta=\underline{\Omega}(\tau, \xi)$

appartient à $\mathfrak{B}^g$. C'est ce que l'on voit sans peine à l'aide des inégalités (10. 6).

Le point (τ, ξ, η) tel que l'on ait

(11. 5) $\qquad 0<\tau\leqq 1, \quad \xi=\underline{\omega}(\tau), \quad \underline{\omega}'(\tau)<\eta<\overline{\Omega}(\tau, \xi)$

ou

(11. 6) $\qquad 0<\tau\leqq 1, \quad \xi=\overline{\omega}(\tau), \quad \underline{\Omega}(\tau, \xi)<\eta<\overline{\omega}'(\tau)$

appartient à $\mathfrak{B}^g$ et le point (τ, ξ, η) tel que l'on ait

(10. 7) $\qquad 0<\tau\leqq 1, \quad \xi=\underline{\omega}(\tau), \quad \underline{\Omega}(\tau, \xi)<\eta<\underline{\omega}'(\tau)$

ou

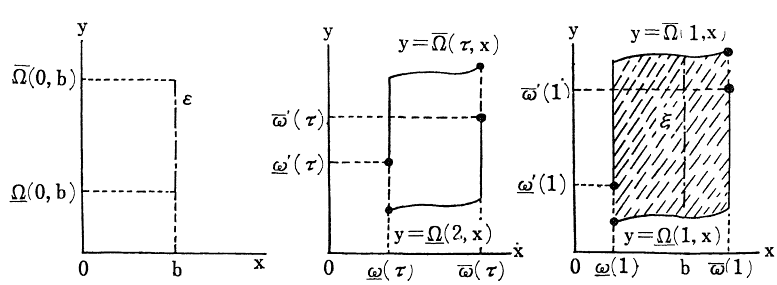
(10. 8) $\qquad 0<\tau\leqq 1, \quad \xi=\overline{\omega}(\tau), \quad \overline{\omega}'(\tau)<\eta<\overline{\Omega}(\tau, \xi)$

appartient à $\mathfrak{B}^-$. On obtient ces conclusions en comparant η avec $\underline{\omega}'(\tau)$, $\overline{\omega}'(\tau)$.

Nous allons montrer à l'aide du lemme que le point A (τ, ξ, η) tel que l'on ait

(11. 9) $\qquad 0<\tau\leqq 1, \quad \xi=\overline{\omega}(\tau), \quad \eta=\overline{\omega}'(\tau)$

est knesérien à gauche.



$\tau=0$ $\qquad$ $0<\tau<1$ $\qquad$ $\tau=1$

——— $B^g\cup B_-$ $\qquad$ - - - - B^-

Supposons l'existence d'une solution $x=\varphi(t)$, $y=\varphi'(t)$ prenant les valeurs ξ, η pour $t=\tau$. Si la solution existe dans un intervalle $[\tau', \tau]$, on a $\varphi(t)\leqq\overline{\omega}(t)$ dans l'intervalle et

$$\varphi(\tau)=\overline{\omega}(\tau), \quad \varphi'(\tau)=\overline{\omega}'(\tau),$$

ce qui implique l'existence d'une suite de valeurs $\{\tau_k\}$ telle que l'on ait

$$\tau_k \uparrow \tau, \quad \varphi'(\tau_k)\geqq\overline{\omega}'(\tau_k).$$

On en déduit

$$\varphi''(\tau)\leqq\overline{\omega}''(\tau)$$

ou

$$\overline{\omega}''(\tau)\geqq f(\tau, \varphi(\tau), \varphi'(\tau)).$$

Si donc on a l'inégalité stricte

$$\overline{\omega}''(\tau)<f(\tau, \overline{\omega}(\tau), \overline{\omega}'(\tau)),$$

le point (τ, ξ, η) appartient à $\mathfrak{B}^g$.

Il suffit donc de considérer le cas où l'on a l'égalité

$$\overline{\omega}''(\tau)=f(\tau, \overline{\omega}(\tau), \overline{\omega}'(\tau)).$$

Si l'on avait

$$\overline{\omega}'(\tau)=\overline{\Omega}(\tau, \overline{\omega}(\tau)),$$

la dérivée de $\overline{\omega}'(t)-\overline{\Omega}(t, \overline{\omega}(t))$ aurait la valeur négative

$$\begin{aligned}&\overline{\omega}''(\tau)-\overline{\Omega}_t(\tau, \overline{\omega}(\tau))-\overline{\Omega}_x(\tau, \overline{\omega}(\tau))\overline{\omega}'(\tau)\\ &=f(\tau, \overline{\omega}(\tau), \overline{\omega}'(\tau))-\overline{\Omega}_t(\tau, \overline{\omega}(\tau))-\overline{\Omega}_x(\tau, \overline{\omega}(\tau))\overline{\Omega}(\tau, \overline{\omega}(\tau))\end{aligned}$$

pour $t=\tau$, d'où résulterait l'inégalité

$$\overline{\omega}'(t)>\overline{\Omega}(t, \overline{\omega}(t))$$

dans un intervalle assez petit $[\tau', \tau]$ contrairement à notre hypothèse.

On a donc nécessairement

$$\overline{\omega}'(t)<\overline{\Omega}(t, \overline{\omega}(t))$$

pour $0<t\leqq1$. On a de même

$$\overline{\omega}'(t)>\underline{\Omega}(t, \overline{\omega}(t)).$$

Posons

$$\underline{\Omega}(t, x)=\underline{\Omega}(t, \overline{\omega}(t)), \quad \overline{\Omega}(t, x)=\overline{\Omega}(t, \overline{\omega}(t))$$

pour

$$0 \leqq t \leqq 1, \quad \overline{\omega}(t)<x<\infty$$

et

$$f(t, x, y)=f(t, \overline{\omega}(t), y)+\gamma[x-\overline{\omega}(t)]$$

pour

$$0 \leqq t \leqq 1, \quad \overline{\omega}(t)<x<\infty, \quad \underline{\Omega}(t, x) \leqq y \leqq \overline{\Omega}(t, x),$$

où γ est une constante positive.

Nous voulons appliquer le lemme, en intervertissant droite et gauche. Dans notre présent cas, la famille $\boldsymbol{F}'$ sera l'ensemble des solutions du système différentiel (11. 1) dont le domaine fondamental $\mathfrak{D}'$ est

$$(11.10) \qquad 0 \leqq t \leqq 1, \quad \underline{\omega}(t) \leqq x \leqq \overline{\omega}(t)+\lambda, \quad \underline{\Omega}(t, x) \leqq y \leqq \overline{\Omega}(t, x),$$

où λ est une constante positive quelconque.

Si δ est un nombre positif assez petit, $\mathfrak{Z}^{-}_{\alpha-\delta}(A; \boldsymbol{F}')$ se trouve à l'intérieur de $\mathfrak{D}'$ et les deux premières conditions 1° et 2° sont évidemment remplies.

Considérons le domaine

$$(11.11) \qquad 0 \leqq \tau-t \leqq \delta. \quad \varepsilon \leqq x-\overline{\omega}(t) \leqq \lambda, \quad \overline{\omega}'(t) \leqq y \leqq \overline{\Omega}(t, \overline{\omega}(t)),$$

où ε est un nombre positif. Si $y=\overline{\omega}'(t)$,

$$f(t, x, y) \geqq f(t, \overline{\omega}(t), \overline{\omega}'(t))+\gamma\varepsilon>\overline{\omega}''(t).$$

ε pouvant être supposer aussi petit que l'on veut, on peut en conclure que si l'on marche vers gauche le long d'une caractéristique, on ne peut pénétrer dans le domaine

$$(11.12) \qquad 0 \leqq \tau-t \leqq \delta, \quad 0 \leqq x-\overline{\omega}(t) \leqq \lambda, \quad \overline{\omega}'(t) \leqq y \leqq \overline{\Omega}(t, \overline{\omega}(t)),$$

en franchissant la frontière où l'on a $y=\overline{\omega}'(t)$.

Si $x=\overline{\omega}(t)+\varepsilon$, l'inégalité $y>\overline{\omega}'(t)$ montre que l'on ne peut pénétrer non plus dans le domaine (11. 11) en franchissant la frontière où l'on a $x=\overline{\omega}(t)+\varepsilon$.

Par conséquent, $\mathfrak{Z}^{+}_{\tau+\delta}(A, \boldsymbol{F}')$ ne contient aucun point du domaine

(11. 12) sauf les points (t, x, y) où l'on a $x=\overline{\omega}(t)$, $y=\overline{\omega}'(t)$.

Considérons maintenant le domaine

(11. 13) $\quad 0\leqq\tau-t\leqq\delta, \quad \varepsilon\leqq x-\overline{\omega}(t)\leqq\lambda, \quad \underline{\Omega}(t, \overline{\omega}(t))\leqq y\leqq\overline{\omega}'(t).$

Comme nous avons vu, on a l'inégalité

$$f(t, x, y)>\overline{\omega}''(t),$$

pour $y=\overline{\omega}'(t)$. Si $x=\overline{\omega}(t)+\varepsilon$, on a l'inégalité $y<\overline{\omega}'(t)$ sauf au point $(t, \overline{\omega}(t)+\varepsilon, \overline{\omega}'(t))$. Par suite si l'on marche vers gauche le long d'une caractéristique issue d'un point du domaine (11. 13), on ne peut en sortir, en franchissant la frontière où l'on a $y=\overline{\omega}'(t)$ ou $x=\overline{\omega}(t)+\varepsilon$.

D'après ces considérations nous pouvons conclure que la condition 3° du lemme est remplie.

$\mathfrak{Z}_{\alpha-\delta}^{-}(A; \boldsymbol{F})$ ne contient aucun des points frontières de $\mathfrak{D}$ tels que l'on ait

$$0<\tau-t\leqq\delta, \quad x=\overline{\omega}(t), \quad \overline{\omega}'(t)<y\leqq\overline{\Omega}(t, y),$$

car ils appartiennent à $\mathfrak{B}^{d}(\boldsymbol{F})$. D'après ce que nous avons déjà remarqué, si l'on a

$$0<\tau-t\leqq\delta, \quad x=\overline{\omega}(t), \quad \underline{\Omega}(t, y)<y<\overline{\omega}'(t),$$

le point (t, x, y) appartient à $\mathfrak{B}^{g}$.

La condition 4° du lemme sera donc vérifiée, si l'on montre que le point où l'on a $x=\overline{\omega}(t)$, $y=\overline{\omega}'(t)$ appartient à $\mathfrak{B}^{g}(\boldsymbol{F})\cup\mathfrak{B}_{-}(\boldsymbol{F})$. Il suffit pour cela de montrer que si $A\notin\mathfrak{B}^{g}(\boldsymbol{F})$, A appartient à $\mathfrak{B}_{-}(\boldsymbol{F})$.

L'hypothèse $A\notin\mathfrak{B}^{g}(\boldsymbol{F})$ implique que si δ est assez petit, $\boldsymbol{F}_{\tau-\delta}^{-}(A)$ contient au moins une caractéristique $\mathfrak{x}$ définie dans l'intervalle $[\tau-\delta, \tau]$.

Grâce aux inégalités qui sont vérifiées aux points frontières du domaine (11. 13) situés assez voisins de A, le domaine

$$0\leqq\tau-t\leqq\delta, \quad 0\leqq x-\overline{\omega}(t)\leqq\lambda, \quad \underline{\Omega}(t, \overline{\omega}(t))\leqq y\leqq\overline{\omega}'(t),$$

contient une caractéristique $\mathfrak{y}$ issue de A et définie dans l'intervalle $[\tau-\delta, \tau]$. La section de $\mathfrak{Z}^{+}(A; \boldsymbol{F}')$ par un hyperplan $t=\tau'$ est un continu si $\tau-\delta\leqq\tau'\leqq\tau$. Puisqu'elle contient les point $(\tau', \mathfrak{x}(\tau'))$ et $(\tau', \mathfrak{y}(\tau'))$, elle contient un point P de $\mathfrak{B}(\mathfrak{D})$. D'après la condition 3° que nous avons vérifiée ci-dessus, une caractéristique de $\boldsymbol{F}'^{-}(A)\cap\boldsymbol{F}'^{+}(P)$ appartient à $\boldsymbol{F}^{-}(A)$. On en conclut que A appartient à $\mathfrak{B}_{-}(A;\ \boldsymbol{F})$.

Appliquons maintenant la proposition 9.1, en intervertissant droite et gauche. On prend pour $\mathfrak{S}$ le segment

$$t=0,\quad x=b,\quad \underline{\Omega}(0, b)\leqq y\leqq\overline{\Omega}(0, b)$$

et pour $\mathfrak{S}'$ le segment

$$t=1,\quad x=b',\quad \underline{\Omega}(1, b')\leqq y\leqq\overline{\Omega}(1, b').$$

$\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$ sont contenus respectivement dans $\mathfrak{B}^{g}$ et $\mathfrak{B}^{d}$. Les extrémités $(1, b', \underline{\Omega}(1, b'))$ et $(0, b', \overline{\Omega}(1, b'))$ du segment $\mathfrak{S}'$ se trouvent dans $\mathfrak{B}^{g}$. Ils sont séparés par $\mathfrak{S}$ dans $\mathfrak{B}^{g}\cup\mathfrak{B}_{-}$.

La proposition 9.1 est donc applicable et l'existence de solutions satisfaisant à la condition aux limites (10.8) est établie.

12. Examen de la condition d'existence de H. Okamura.

On prend pour $\mathfrak{D}$ le domaine tel que la section de $\mathfrak{D}$ par un hyperplan $t=\tau$ soit limitée par les quatre courbes

$$\psi(\tau)\leqq x\leqq\overline{\omega}(\tau),\quad \Phi_1(\tau, x, y)=\varepsilon, \tag{12.1}$$

$$\underline{\omega}(\tau)\leqq x\leqq\psi(\tau),\quad \Psi_1(\tau, x, y)=\varepsilon', \tag{12.2}$$

$$\underline{\omega}(\tau)\leqq x\leqq\psi(\tau),\quad \Phi_2(\tau, x, y)=\varepsilon, \tag{12.3}$$

$$\psi(\tau)\leqq x\leqq\overline{\omega}(\tau),\quad \Psi_2(\tau, x, y)=\varepsilon', \tag{12.4}$$

et les segments qui les joignent bout à bout comme le montre la figure ci-dessous; ε et ε' sont des nombres assez petits ainsi que le rapport ε/ε'.

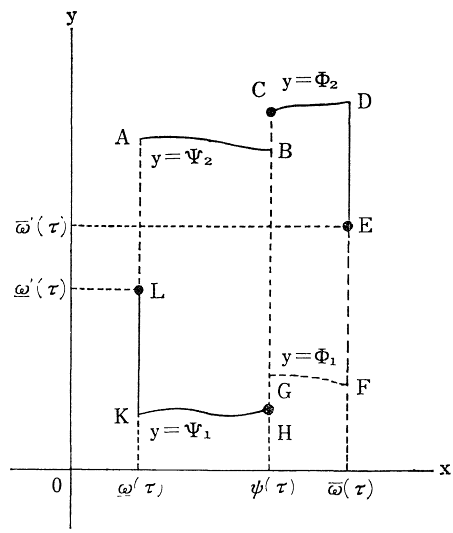
Il est clair que:

1° les points de $\mathfrak{D}$ sur l'hyperplan $t=0$ appartiennent à $\mathfrak{B}^{g}$;

2° les points de $\mathfrak{D}$ sur l'hyperplan $t=1$ appartiennent à $\mathfrak{B}^{d}$;

3° les points intérieurs de la section de $\mathfrak{D}$ par l'hyperplan $t=0$ appartiennent à $\mathfrak{B}^{+}$;

4° les points intérieurs de la section de $\mathfrak{D}$ par l'hyperplan $t=1$ appartiennent à $\mathfrak{B}^{-}$.



Considérons un point frontière (τ, ξ, η) de la section de $\mathfrak{D}$ par l'hyperplan $t=\tau$, τ désignant une valeur quelconque telle que $0 \leqq \tau < 1$. En raisonnant comme au n° précédent, on voit que:

5° les points de la ligne LABC et ceux de la ligne EFGH (les extrémités L, C, E, H exclues) appartiennent à $\mathfrak{B}^+$;

6° les points de la ligne CDE et ceux de la ligne HKL (les extrémités E, L exclues) appartiennent à $\mathfrak{B}^d$;

7° les points E et L appartiennent à $\mathfrak{B}^d \cup \mathfrak{B}_+$.

D'après ces considérations, on voit que la famille $\boldsymbol{F}$ des solutions est knesérienne.

Pour appliquer la proposition 9.1 nous prenons pour $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}'$ les segment HC située respectivement dans les hyperplans $t=0$ et $t=1$. Ils sont situés respectivement dans $\mathfrak{B}^g$ et $\mathfrak{B}^d$. Les extrémités H et C de $\mathfrak{C}$ appartiennent à $\mathfrak{B}^d$. Elles sont séparées par $\mathfrak{C}'$ dans $\mathfrak{B}^d \cup \mathfrak{B}_+$.

Donc la proposition 9.1 entraîne le théorème d'existence de H. Okamura.

BIBLIOGRAPHIE

M. Hukuhara,

[1] Sur les systèmes des équations différentielles ordinaires, Proc. Imp. Acad. **4** (1928), 448–449.

[2] Sur l'ensemble des courbes intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires, I, II, III, Ibid. **6** (1930), 360–362; 7 (1931), 37–39; 298–299.

[3] Zyôbibunhôteisiki-ron no Kihonteiri, II, III, Sûbutu Kwaisi, **6** (1932), 134–147; 285–295.

[4] Sur les familles de fonctions à une variable réelle, J. Fac. Sci. Hokkaido Imp. Univ. **1** (1932), 163–209.

[5] Sur les propriétés de la famille des courbes intégrales d'un système différentiel ordinaire. Proc. Japan Acad. **25** (1949), 151–153.

[6] Le problème aux limites pour un système de deux équations différentielles ordinaires, J. Math. Soc. Japan, **3** (1951), 99–103.

[7] Sur un théorème de Kneser, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **6** (1953), 329–344.

[8] Sur une généralisation d'un théorème de Kneser, Proc. Japan Acad. **29** (1953), 154–155.

[9] Sur l'application qui fait correspondre à un point un continu bicompact, Ibid. **31** (1955), 5–7.

[10] La propriété de Kneser globale et le problème aux limites, Publ. RIMS, Kyoto Univ. Ser. A, **1** (1966), 129–148.

[11] Zyôbibunhôteisikiron (Théorie des équations différentielles ordinaires), Iwanami, Tokyo, 1933.

M. Hukuhara et M. Nagumo,

[1] Un théorème relatif à l'ensemble des courbes intégrales d'un système d'équations différentielles, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, **12** (1930), 233–239.

A. Marchaud,

[1] Sur les champs de demi-cônes et équations différentielles du premier ordre, Bull. Soc. Math. France, **62** (1932), 1–38.

[2] Sur les champs continus de demi-cônes convexes et leurs intégrales, C. R. Acad. Sci. Paris, **199** (1934), 1278–1280.

[3] Sur les champs continus de demi-cônes convexes et leurs intégrales, Comp. Math. **3** (1936), 89–127.

M. Nagumo,

[1] Über das System der gewöhnlichen Differentialgleichungen, Japan. J. Math. **4** (1927), 215–230.

[2] Über die Differentialgleichung $y''=f(x, y, y')$, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, **19** (1937). 861–866.

[3] Kansû Kûkan ni okeru Syazô, Kansû Hôteisiki, No. 4 (1938), 10–22.

[4] Dai-2-kai Zyôbibunhôteisiki no Kyôkaiti Mondai, I, II, Ibid., No. 5 (1939), 27–34; No. 6 (1939), 37–44.

[5] $y''=f(x, y, y')$ no Kyôkaiti Mondai ni tuite, I, II, Ibid., No. 30 (1941), 36–46; No. 17 (1942), 50–52.

[6] Über die Lage der Integralkurven gewöhnlicher Differentialgleichungen, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, **24** (1942), 551–559.

[7] Über das Randwertproblem der nicht linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, Ibid. **24** (1942), 845–851.

[8] Eine Art der Randwertaufgabe von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen, I, II, Ibid. **25** (1943), 221–226, 384–390.
[9] Syazôdo to Sonzai Teiri (Degree of mapping and existence theorem), Kawade, Tokyo, 1948.

H. Okamura,

[1] $y''=f(x, y, y')$ ni tuite, I, II, III, Kansû Hôteisiki, No. 27 (1941), 27–35: No. 30 (1941), 14–19: No. 31 (1942), 32–40.

T. Ważewski,

[1] On an optimal control problem (in connection with the theory of orientor fields of A. Marchaud and S. C. Zaremba), Differential Equations and Their Applications: Proceedings of the Conference held in Prague in September 1962 (1963), 229–242.

S. C. Zaremba,

[1] Sur une extension de la notion d'équation différentielle, C. R. Acad. Sci. Paris, **199** (1934), 545–548.
[2] Sur les équations en paratingent, Bull. Sci. Math. **60** (1936), 139–160.

ERRATA

	Au lieu de		Lire
Figure à la page 263:	$y=\underline{\Omega}(2, x)$	$\rightarrow$	$y=\underline{\Omega}(\tau, x)$
Figure à la page 268:	$y=\Phi_1$	$\rightarrow$	$y=\Psi_2$
	$y=\Phi_2$	$\rightarrow$	$y=\Phi_1$
	$y=\Psi_1$	$\rightarrow$	$y=\Phi_2$
	$y=\Psi_2$	$\rightarrow$	$y=\Psi_1$